

УДК 533

## **Характеристическая консервативная форма законов сохранения и устойчивые, монотонные вычислительные схемы для исследования разрывных течений**

**Грудницкий В. Г.\*, Мендель М. А.**

*Московский физико-технический институт (государственный университет) МФТИ,  
Институтский, 9, Долгопрудный, Московская область, 141700, Россия*

*\*e-mail: vgrudnitsky@gmail.com*

### **Аннотация**

Излагается процедура тождественного преобразования законов сохранения к консервативному характеристическому виду и принципы построения консервативных характеристических схем сквозного счета высокой точности на её основе. Приводятся результаты расчетов одномерных нестационарных и струйных стационарных течений.

**Ключевые слова:** консервативные характеристические схемы, выделение разрывов, стационарные сверхзвуковые течения, необходимое и достаточное условие устойчивости и монотонности

### **Введение**

Большинство попыток улучшить качество расчётов разрывных течений в течение многих лет сводится к приёмам, не имеющим строгих обоснований со стороны механики и математики. Как правило, производится перебор более или менее удачных аппроксимаций дифференциальных уравнений, (притом, что эти уравнения в принципе непригодны для задач с решениями разрывного типа). Получаемые «улучшения» имеют спорный характер. Стоит заметить, что дифференциальные уравнения в принципе непригодны для задач с решениями разрывного типа.

Ведётся многолетняя борьба с осцилляциями численных решений вблизи фронтов разрывов методами «сглаживания». Она (по результатам исследований ряда авторов) приводит к «успеху», только в случае, если от заявленной точности, особенно вблизи разрывов, не остаётся практически ничего.

Длительный период времени отрицалась возможность существования необходимых и достаточных условий устойчивости и монотонности решения в расчётах разрывных течений. Считались несовместимыми такие качества исходных уравнений и вычислительных схем как характеристический тип и консервативность и т.д. Предпринимаемые меры улучшения качества решений касались, по нашему мнению, следствий, а не причин.

Реальные причины «живучести» перечисленных проблем заключаются в принципиальных недостатках исходных систем дифференциальных уравнений и приёмах их преобразования в характеристическую форму, несовместимых с особенностями разрывных решений.

К причинам возникновения этих проблем следует отнести: использование в дивергентных законах сохранения (ДЗС), также как и в уравнениях Эйлера, отношений приращений разрывных функций и их потоков к непрерывным приращениям независимых координат. Такие отношения не существуют в предельной форме (для разностных схем - при размельчении сетки) на фронтах разрывов. Их использование обуславливает бесперспективный характер борьбы за качество расчётов вблизи фронтов разрывов. Конкретно между собой связаны функции и их потоки. Независимые координаты - всего лишь метки, к которым приписывается решение (во всяком случае, в декартовых координатах).

В ДЗС система характеристических скоростей (направлений, для стационарных течений) выводится путём локальной линеаризации ДЗС. Другим словами, возвратом к уравнениям Эйлера. По этой причине консервативность расчётов (качество необходимое в таких расчётах) и характеристический тип схемы находятся в непреодолимом противоречии, а такие важнейшие части решения, как ударные волны и контактные разрывы, объявляются особыми линиями. Поэтому характеристические методы, известные высоким качеством результатов, были, практически, неприменимы к течениям со сложной конфигурацией, взаимодействием разрывов.

Несколько лет назад нами тождественными преобразованиями ДЗС была получена и строго обоснована квазилинейная характеристическая консервативная (Ха.Ко.) форма законов сохранения. Она свободна от основной части проблем традиционной системы ДЗС [2-18].

В процессе её вывода, кроме принципов сохранения, использовались законы механики, в частности принцип относительности Галилея. Вместо стандартных, неприменимых к разрывным решениям, приёмов локальной линеаризации, при выводе квазилинейной Ха.Ко. формы уравнений были использованы тождественные преобразования.

В полученных уравнениях приращения потоков отнесены к приращениям функций (приращения разрывных функций отнесены к таким же разрывным приращениям). Такие отношения имеют очевидный механический смысл - это скорости передачи возмущений различной амплитуды в решении. Непрерывные приращения независимых координат, характеризующие скорость передачи возмущений по сетке, отнесены друг к другу. Соотношение величин указанных скоростей определяет устойчивость, монотонность и точность решения.

Полученная форма законов сохранения, является интегральной, в отличие от принятой сегодня дифференциальной формы. Она качественно более информативна, нежели дифференциальная и свободна от основных её недостатков.

В ней возможен корректный (устойчивый) предельный переход к бесконечно малому объёму («точке») всюду, в том числе на фронтах устойчивых разрывов. Она включает в число своих характеристик устойчивые разрывы: ударные волны и контактные разрывы.

Для вычислительных схем, полученных на её основе, установление необходимых и достаточных условий устойчивости и монотонности стало рутинной операцией.

Эта форма изначально имеет вид квазилинейных характеристических соотношений. Разрабатываемые на её основе, схемы сочетают в себе такие свойства как характеристический тип и консервативность, наличие необходимых и достаточных условий устойчивости и монотонности.

Целью настоящих исследований является разработка на основе Ха.Ко. формы законов сохранения эффективных вычислительных схем. Наличие таких схем обеспечит устойчивый, монотонный расчёт разрывных течений с качественно более высокой точностью, особенно вблизи разрывов, нежели это имеет место сегодня.

Эта цель достигнута в приводимых далее результатах расчётов одномерных нестационарных течений со сложным многократным взаимодействием разрывов. Проблема,

на сегодня, заключается в максимально возможном сохранении полученного качества результатов при переходе к многомерным случаям.

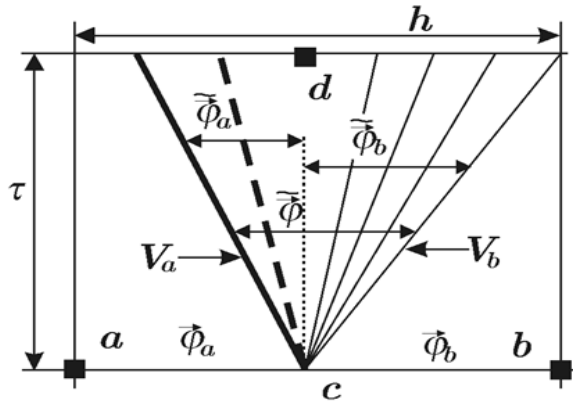
Первым расширением области применения метода является его использование для расчёта двумерных стационарных, сверхзвуковых в некотором направлении (струйных) течений. Их результаты приводятся ниже.

## **1. Характеристическая консервативная форма законов сохранения**

Линейная (квазилинейная) форма уравнений характерна для описания большинства физических процессов на определённых этапах их развития. Необъяснимым исключением до сих пор являлась дивергентная форма законов сохранения сплошной среды, имеющая сугубо нелинейную форму. Как сказано выше, это привело к длительному существованию ряда неразрешимых (в рамках этой модели) проблем.

Ниже описаны тождественные преобразования, с помощью которых ЗС сплошной среды приводятся к квазилинейной, характеристической, консервативной форме (Ха.Ко.) форме. В отличие от уравнений Эйлера локальная линеаризация решения при этом не производится.

В рассматриваемых вопросах большое значение имеет способ представления вычисляемых функций. Мы достаточно давно отказались от представления течения сплошной среды с помощью точек, из-за очевидной нелепости этого шага, приводящего к практически непреодолимым осложнениям. Здесь все функции, как и моделируемые ими течения, имеют сплошное представление, во всей расчётной области с разрывами на границах ячеек. В каждой ячейке функции задаются постоянными значениями. При этом на линиях  $t_n = \sum_{i=1}^n \tau_i = const$  производится консервативное усреднение решения, а на «вертикальных» границах производится распад произвольного разрыва. При развитии течения во времени эти постоянные значения замещаются (частично или полностью) параметрами течений распада произвольного разрыва, которые развивается в точках разрыва (рис.1). Ниже будет обоснован корректный (устойчивый) предельный переход к пределу при  $h, t \rightarrow 0$  в Ха.Ко. форме законов сохранения во всём поле течения, включая фронты устойчивых разрывов. Желание учесть движения газа в ячейке (сжатия, растяжения и сдвиги) натолкнулось на значительные сложности и несовместимости.



**Рис.1.**

Запишем законы сохранения в компактной форме

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \quad (1.1), \text{ где } \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}$$

Здесь  $\rho$  - плотность,  $u$  - скорость,  $p$  - давление,  $E = e + \frac{u^2}{2}$  - энергия единицы массы,  $e$  - внутренняя энергия. Здесь и далее стрелка сверху связана с номерами уравнений в системе (1.1). Заменим систему (1.1) уравнениями в конечных разностях, не задаваясь конкретной схемой

$$\Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\tau}{h} \Delta_x \vec{F} = 0 \quad (1.2)$$

В (1.2) и в дальнейшем знаками  $\Delta_x, \Delta_t$  обозначены разности функций и их потоков по пространству и времени, вычисляемые в соответствии с выбранной системой координат. Для того чтобы привести (1.2) к Ха.Ко. форме нужно тождественным образом преобразовать второе слагаемое к квазилинейному виду. Для этого разделим и умножим приращения потоков по координате  $x$  на такие же приращения соответствующих им функций по этой координате. Получаемые при этом коэффициенты при разностях функций имеют размерность скорости. Эти отношения по размерности и смыслу отвечают содержанию процессов, описываемых законами сохранения (ЗС). Они соответствуют скоростям, с которыми переносятся в поле течения возмущения (разности) функций.

Поведение решения (функций  $\vec{\varphi}$ ) напрямую связано с изменением потоков. Независимые непрерывные координаты, к приращениям которых обычно относят изменения функций и потоков, не более чем метки, к которым привязывается решение (во всяком случае, в декартовых координатах).

$$\Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\tau}{h} \overrightarrow{\Delta_x F} \Delta_x \varphi = 0, \quad \overrightarrow{\Delta_x F} = \vec{V}, \quad \text{следовательно, } \Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\tau}{h} \vec{V} \overrightarrow{\Delta_x \varphi} = 0 \quad (1.3)$$

Если скорости  $\vec{V}$ , соответствуют реально существующим (устойчиво распространяющимся) возмущениям, для них должен выполняться принцип относительности Галилея. Он заключается в выполнении равенства

$$\vec{V}(u + v) = \vec{V}(u) + v, \quad (1.4)$$

Здесь  $v$  имеет произвольное значение. С точки зрения механики соотношение (1.4) очевидно. Оно означает, что при изменении скорости системы координат (наблюдателя) относительно течения на произвольную величину, скорости всех устойчивых, наблюдаемых возмущений изменяются на такую же величину. Другими словами, (1.4) означает линейную зависимость скоростей устойчивых возмущений от скорости течения. (В то время как формально эта зависимость имеет нелинейный характер). Заметим, что все остальные функции входят в ЗС линейным образом.

Преобразование (1.4) уравнения энергии (третье уравнение в (1.1, 1.2)), имеет вид  $V_3(u + v) = V_3(u) + v$ . Следовательно

$$\left[ \left( \rho e + p + \frac{\rho(u+v)^2}{2} \right) (u + v) \right] = (V_3 + v) \left[ \rho e + \frac{\rho(u+v)^2}{2} \right] \quad (1.5)$$

В (1.5) большие квадратные скобки [...] означают скачок параметров на разрыве. Раскрыв скобки в выражении (1.5) получим многочлен третьей степени от  $v$ , коэффициенты при  $v$  в котором зависят от скачка параметров  $e, p, \rho$ , на разрыве. Но, поскольку величина  $v$  произвольная, то равенство типа  $a * v^3 + b * v^2 + c * v + d = 0$  может быть справедливо при любом  $v$ , только если  $a = 0, \dots, (a, b, c, d \text{ — функции от } e, p, \rho, u)$

Проделав арифметические преобразования, легко показать, что

$$V_3 = \frac{[u(\rho E + p)]}{[\rho E]} = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} \quad (1.6)$$

Для уравнения импульса аналогичное требование даёт следующий результат

$$V_2(u + v) = \frac{[\rho(u+v)^2 + p]}{[\rho(u+v)]} = V_2 + v, \quad \text{следовательно, } V_2 = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} \quad (1.7)$$

Для уравнения неразрывности принцип Галилея выполняется тождественно.

$$\text{Действительно, } V_1(u + v) = \frac{[\rho(u+v)]}{[\rho]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} + \frac{[\rho]}{[\rho]} v = V(u) + v$$

Равенства (1.6),(1.7) (условия Гюгонио) как известно, выполняются для скоростей устойчивых возмущений любой амплитуды. Таким образом, возмущения устойчивы, если скорости их распространения совпадают для всех уравнений ЗС, то есть  $V_1 = V_2 = V_3 = V_3 = \frac{[u(\rho E + p)]}{[\rho E]} = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} \frac{[u(\rho E + p)]}{[\rho E]} = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]}$  (это есть соотношения Ренкина-Гюгонио на разрывах)

Если преобразовать (1.2) буквально так, как это показано выше, значения полученных отношений (скоростей) в различных уравнениях системы будут различными. Это эквивалентно неустойчивости (невозможности существования) такого решения, а, следовательно, его распаду.

Чтобы добиться совпадения скоростей возмущений для всех уравнений системы, достаточно тождественным образом представить их в форме суммы (интеграла) множества устойчивых возмущений.

Тождественное характеристическое преобразование сводится к замене в (1.2) разности потоков суммой (вообще говоря, бесконечной) (рис.1). В формулах (1.8) нижний индекс  $i$  задаёт номера скоростей переноса возмущений функций во множестве их значений, возникающих при следующей тождественной замене

$$\Delta_x \vec{F} = (\vec{F}_N - \vec{F}_{N-1}) + (\vec{F}_{N-1} - \vec{F}_{N-2}) + \dots + (\vec{F}_1 - \vec{F}_0)$$

$$\Delta_x \vec{F} = \overrightarrow{\left[ \frac{F_N - F_{N-1}}{\varphi_N - \varphi_{N-1}} \right]} (\varphi_N - \varphi_{N-1}) + \dots + \overrightarrow{\left[ \frac{F_1 - F_0}{\varphi_1 - \varphi_0} \right]} (\varphi_1 - \varphi_0), \vec{V}_i = \overrightarrow{\left[ \frac{F_i - F_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \right]}$$

$$\Delta_x \vec{F} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{(\varphi_i - \varphi_{i-1})} \vec{V}_i = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \Delta \vec{\varphi}_i \quad (1.8)$$

Величины в квадратных скобках, как уже было отмечено, имеют размерность скорости. В (1.8), с учётом независимости скоростей устойчивых возмущений от номера уравнения (на основании (1.5)-(1.7)), знак вектора над скоростями  $V_i$  опущен. Как известно, множество скоростей возмущений, удовлетворяющих поставленным выше условиям, существует. Оно является единственным решением процедуры распада произвольного разрыва. Таким образом, эта процедура выполняет для ДЗС роль характеристического преобразования. Это тождественное преобразование разности потоков является ключевым для всех получаемых результатов. Распад разрыва впервые использовал в расчётах разрывных течений С.К.Годунов [1].

Итак, Ха.Ко. форма ЗС, полученная тождественным образом из их дивергентной формы (1.1) имеет вид

$$\Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\tau}{h} \sum_{i=1}^N V_i \Delta(\vec{\varphi})_i = 0 \quad (1.9)$$

Здесь скорости  $V_i$  находятся из решения задач о распаде произвольного разрыва и определяют все волны, находящиеся в объеме для которого записано уравнение (1.9).

Например, если использовать формулу (1.9) для ячейки схемы Годунова, то  $V_i$  – это скорости волн входящих в ячейку через левую и правую границы.

Из вида уравнений (1.9), тождественно вытекающих из дивергентной формы (1.1), можно сделать некоторые заключения. Все слагаемые, стоящие под знаком суммы в (1.9) получаются в результате процедуры распада произвольного разрыва между значениями функций в соседних ячейках предшествующего слоя. Эта процедура, как известно устойчива и даёт единственное решение. Оно может быть получено с большой точностью, качественно превосходящей общую точность расчёта. После перемножения  $\tau/h$  на все значения  $V_i$  коэффициенты при величинах  $\Delta(\vec{\varphi})_i$  становятся безразмерными. Можно считать их практически «точным» следствием параметров предыдущего слоя. Таким образом, нелинейная форма ЗС локально преобразуется в систему разрешённых линейных алгебраических соотношений. После раскрытия скобок всех разностей  $\Delta_t \vec{\varphi}, \Delta(\vec{\varphi})_i$  и приведения подобных величин (1.9) приобретает форму

$$\vec{\varphi}^{n+1} = \sum_{l=1}^L k_l \vec{\varphi}_l^n \quad (1.10)$$

Устойчивость и монотонность решения (1.10) устанавливается анализом величин безразмерных коэффициентов  $k_l$ . Сумма всех коэффициентов равна единице, что следует из дивергентной формы исходной системы ЗС и видно в (1.9-1.10). Необходимое (и достаточное) для устойчивости и монотонности условие неотрицательности всех коэффициентов  $k_l$  обуславливается ограничениями на величины  $k_l = \frac{\tau}{h} \max_i (|V_i|) \leq 1$  и видом конкретной схемы.

Равенства (1.8), (1.9) задают в достаточно общем, не связанном с какой-либо разностной схемой, виде интегральную характеристическую консервативную (Ха.Ко.) форму законов сохранения сплошной среды.

В (1.9), в отличие от (1.1), возможен устойчивый предельный переход к бесконечно малым значениям  $\tau, h \rightarrow 0$  во всём поле течения (включая фронты разрывов) при соблюдении



ограничений на величины  $k_l$ . При этом переходе в области непрерывного решения разности  $\Delta_t \vec{\varphi}, \Delta(\vec{\varphi})_i$  из (1.9) становятся бесконечно малыми и могут быть линеаризованы. На разрывах они остаются конечными для как угодно малых значений  $(\tau, h) \equiv (\partial t, \partial x)$ .

Форма законов сохранения (1.9, 1.10) требует для своей записи больше предварительной информации, нежели общепринятая, однако она предоставляет и принципиально большие возможности. В частности, с её использованием несложно конструировать устойчивые схемы, записывать характеристическую форму различных разностных схем использующих дивергентный вид уравнений, получать для них достаточные условия устойчивости, монотонности.

Традиционная дифференциальная форма записи законов сохранения (1.1) по сравнению с (1.9) не обладает рядом важных качеств. Она не имеет смысла на фронтах разрывов, в ней не содержится обязательная информации об ограничениях на отношения величин  $\partial t, \partial x$  при их стремлении к нулю.

Такие качества дифференциальных уравнений характерны для математики, которую принято называть классической. Как правило, запись уравнений в ней имеет компактный, но малоинформативный для построения решения вид. Это вполне естественно, с учётом времени, в которое эти уравнения были написаны.

Равенства (1.9) являются характеристической формой ЗС. В каждое уравнение явно и квазилинейно входят значения одной неизвестной функции и набор скоростей  $V_i$ , (безразмерных коэффициентов  $k_l$ ) общий для всей системы.

Скорости  $V_i$ , как будет показано ниже, ограничивают область, в которой можно устойчиво проводить решение задачи Коши. Из (1.9) следует, что для устойчивого перехода  $\tau, h \rightarrow 0$  максимальная скорость передачи возмущений по сетке  $Z = h/\tau$  должна быть всюду, по крайней мере, не меньше чем максимальное по модулю значение характеристических скоростей. Достаточные условия устойчивости зависят от вида конкретных разностных схем. В качестве примера применения Ха.Ко. преобразования и анализа разностной схемы на устойчивость и монотонность, рассмотрим одностороннюю схему для нелинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0; \Rightarrow \frac{u_4 - u_2}{\tau} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2h} = 0; \Rightarrow \frac{u_4 - u_2}{\tau} + \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{u_2 - u_1}{h} = 0 \quad (1.11)$$

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2} > 0; k = \frac{\tau}{h} U;$$

$$u_4 = u_2 - k(u_2 - u_1) = u_2(1 - k) + u_1 k; 0 \leq k \leq 1 \quad (1.12)$$

Характеристика  $U = \frac{u_1 + u_2}{2} > 0$  здесь определяется однозначно, тождественным способом и по устойчивой формуле (знак  $U$  выбран для определённости). Выполнение последнего неравенства в (1.12) означает устойчивость и монотонность решения. В этом примере нелинейные операции, которые есть в дивергентной форме исходного уравнения, тождественно заменяются последовательностью устойчивых линейных операций. В результате получается устойчивая консервативная характеристическая схема, с однозначно определяемой характеристикой.

Сумма безразмерных коэффициентов при значениях функций в (1.12) равна единице. Это свойство дивергентной формы исходного уравнения. В приложении к уравнениям механики, это следствие поверхностного характера взаимодействия невязкого газа (в декартовых координатах, без учёта диссипативных процессов).

Ниже приводятся результаты некоторых расчётов и описание конкретных вариантов характеристических консервативных (Ха.Ко.) схем, с помощью которых они получены.

## **2. Расчет нестационарных одномерных течений**

### **2.1 Прохождение ударной волны через локальную зону уплотнения**

В расчете сравниваются результаты, полученные двумя Ха.Ко. схемами. Схема “а” – с послойной по времени организацией сетки, схема “б” – с полностью характеристической сеткой [18].

Опишем идею построения схемы “а”. По аналогии со схемой Годунова, расчетная область разбивается на ячейки и в каждой из которых задано постоянное значение функции. На границах ячеек производится распад разрыва, и сетка на следующем временном слое строится с учетом структуры волн распада. Временной шаг задается условием не пересечения волн распада. Границы ячеек на новом слое определяются положением границ волн распада в новый момент времени. Для ограничения роста числа ячеек те из них, скачок параметров, на границах которых мал, объединяются и параметры в ячейках консервативно усредняются по формуле (1.9). Далее вновь производится распад, построение сетки на новом слое и консервативное усреднение. Схема “б” аналогична схеме “а” с той разницей, что в ней

удалось отказаться от послойной по времени организации сетки и распад разрыва производится между параметрами, усредненными на крайних волнах этого же распада.

Далее представлен расчет со следующими параметрами газа: число Маха набегающей ударной волны (УВ)  $M_0=2$ , плотность газа перед фронтом УВ равна 8, давление 1, скорость 0. Параметры газа в зоне уплотнения  $x \in [25,30]$ : плотность 16, давление 1, скорость 0. Показатель адиабаты газа равен 1,4. Ниже приводятся результаты расчетов, где оси абсцисс соответствует пространственная координата, а на оси ординат отложены плотность и давление газа в безразмерных величинах.

На рис.2 (а) - (е) значения плотности и давления, рассчитанные по схеме "а", обозначены, соответственно, точками и квадратами, соединенными непрерывными линиями; плотность и давление, рассчитанные по схеме "b" - знаками "+" и "x", соединенными штриховыми линиями.

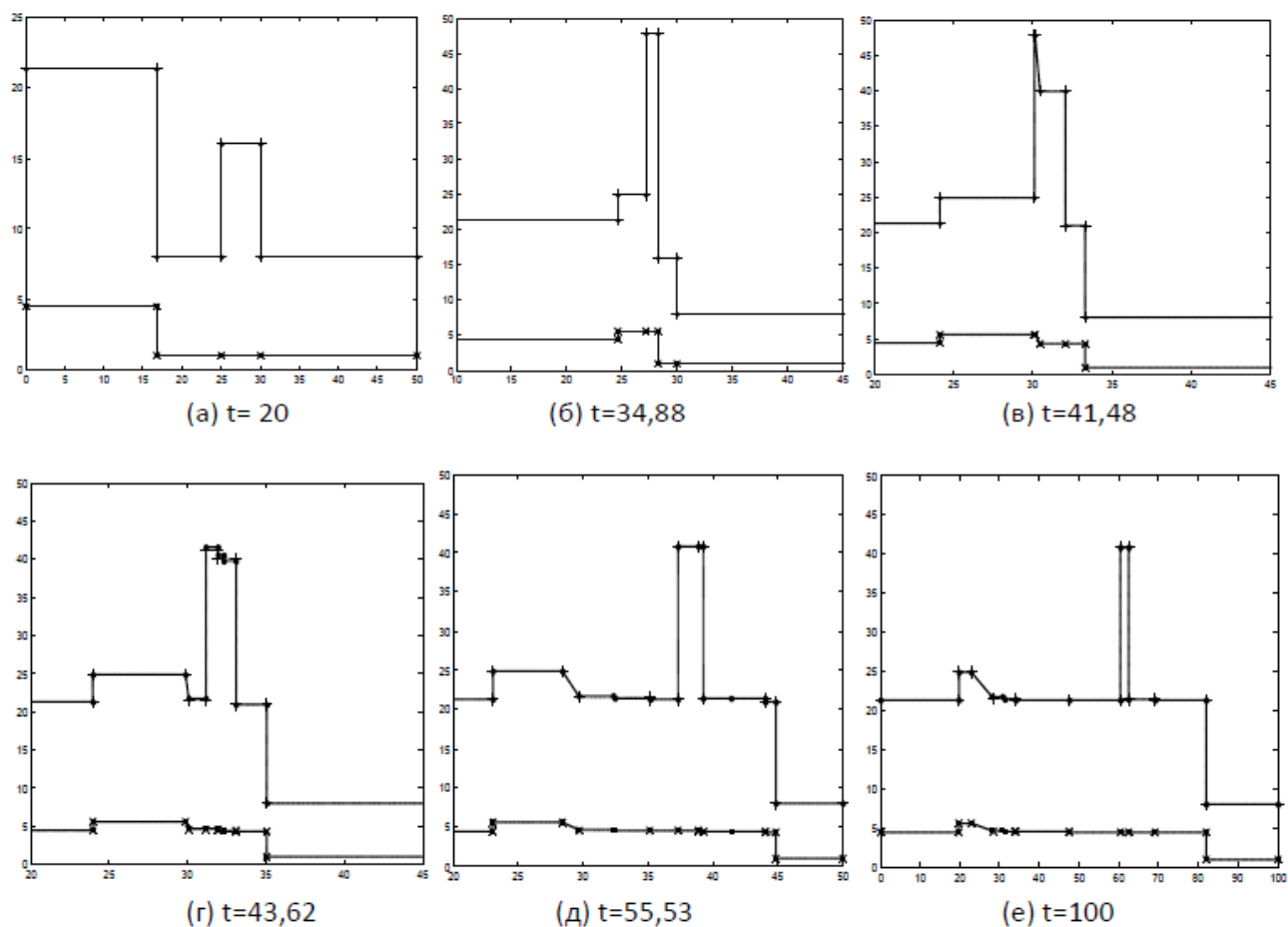
На рис.2 (а) УВ набегаёт слева на зону уплотнения, образованную двумя контактными разрывами. На рис.2(б) она вошла в область уплотнения и частично отразилась от ее левой границы. На рис.2 (в) к левому контактному разрыву идет волна разрежения (ВР), образовавшаяся после выхода УВ из зоны уплотнения. На рис.2 (г) ВР прошла через левую границу области.

На рис.2(д),(е) показано установление течения. ВР догоняет УВ, идущую влево. Волны с малыми амплитудами, взаимодействуя с контактными разрывами, распространяются внутри зоны уплотнения. Сильная УВ идет к правой границе расчетной области.

В целом область уплотнения сжалась по оси  $x$  и сносится с постоянной скоростью вслед за фронтом УВ.

В расчете количество ячеек сетки не превышало пятнадцати, что позволило использовать большой временной шаг. Границы ячеек соответствуют сильным разрывам со скачком амплитуды более одного процента, остальные скачки консервативно усреднялись. Как видно из расчета, использование консервативных характеристических схем позволило добиться точного выделения всех сильных разрывов, в том числе и контактных.

Сравнение величин интегралов от плотности газа в области уплотнения в начальный момент времени  $t=0$  и при  $t=100$ , показало совпадение результатов с точностью  $\sim 5\%$  по схемам "а" и "b". Это не противоречит условиям консервативности, поскольку недостающий газ был перераспределен внутри всей расчетной области.



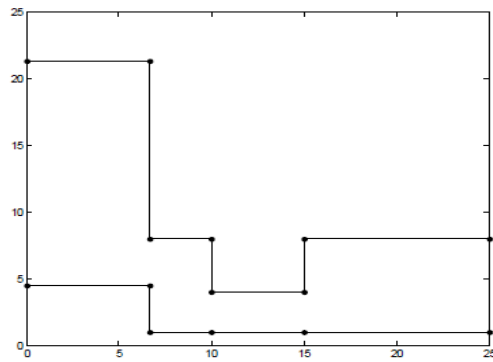
**Рис.2. Прохождение ударной волны через локальную зону уплотнения**

## 2.2 Прохождение ударной волны через локализованный термик

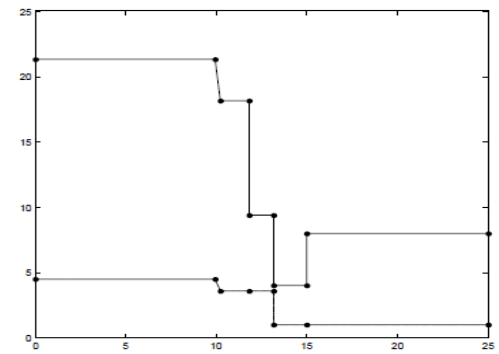
Расчет проведен схемой “а” с послойной по времени организацией сетки. Параметры расчета: число Маха ударной волны (УВ) равно 2, параметры газа перед УВ: плотность 8, давление 1, скорость 0. Параметры газа в термике  $x \in [10,15]$ : плотность 4, давление 1, скорость 0. На рис.3(а)-(г) плотность и давление газа обозначены точками соединенными непрерывной и штриховой линиями (плотность “-”, давление “--”).

На рис.3(а) УВ подходит справа к термику. На рис.3(б) УВ взаимодействует с правым контактным разрывом, в результате чего образуется ВР, идущая к левой границе расчетной области, новый контактный разрыв и УВ. На рис.3(в) УВ выходит через правую границу термика, частично отразившись внутрь области. На рис.3(г) показано устанавливающееся течение, здесь ВР распространяется к левой границе расчетной области, за ней идет отраженная УВ. УВ, прошедшая через термик деформировала его и находится у правой границы расчетной области.

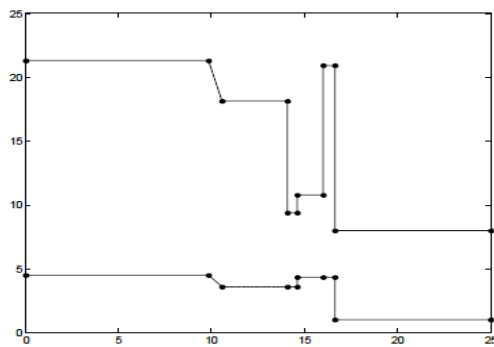
Как и в предыдущем расчете, интеграл от плотности газа в термике в начальный момент  $t=0$  и при  $t=58.87$ , совпадают с точностью  $\sim 5\%$ .



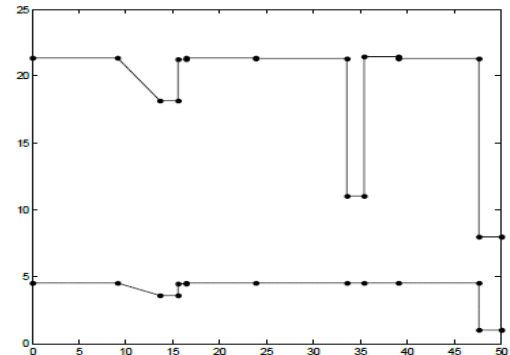
(a)  $t=8$



(б)  $t=15.95$



(в)  $t=19.34$



(г)  $t=54.87$

**Рис.3. Прохождение ударной волны через локализованный термик**

### 3. Стационарное течение в плоском канале с клиновидным выступом.

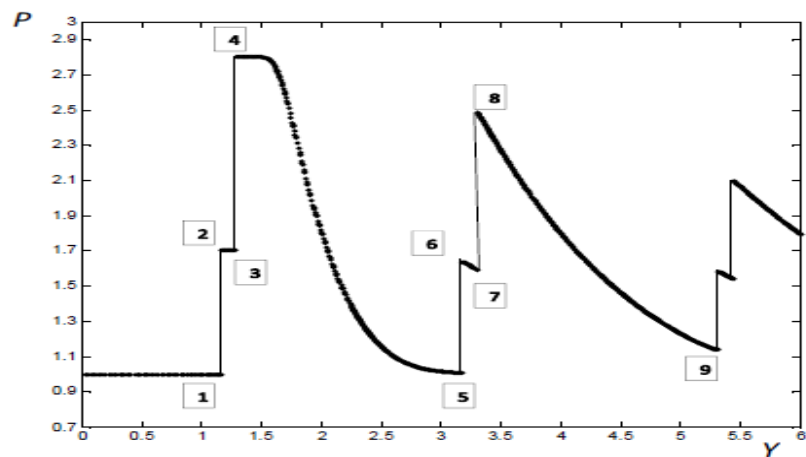
#### 3.1 Расчет сверхзвукового течения в плоском канале с числом Маха потока $M_0=2$



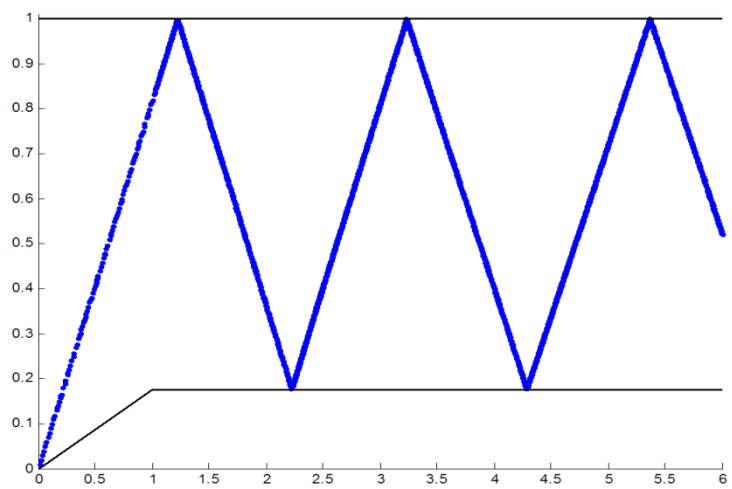
**Рис.4. Геометрия расчетной области (плоский канал с клином)**

На рис.4 дана геометрия расчетной области, представляющей собой плоский канал с клином. Размеры канала:  $X_1=1$ ,  $X_2= 0.8237$ ,  $Y_1 = 1$ ,  $Y_2=1$ ,  $Y_3=6$ , угол наклона клина  $\theta=10^0$ . Параметры набегающего потока: число Маха  $M = 2$ , давление  $P = 1$ , плотность:  $\rho = 1.4$ . Сетка: количество ячеек по оси  $Ox$  (среднее):  $N=100$ , шагов по оси  $Oy$ : 4000.

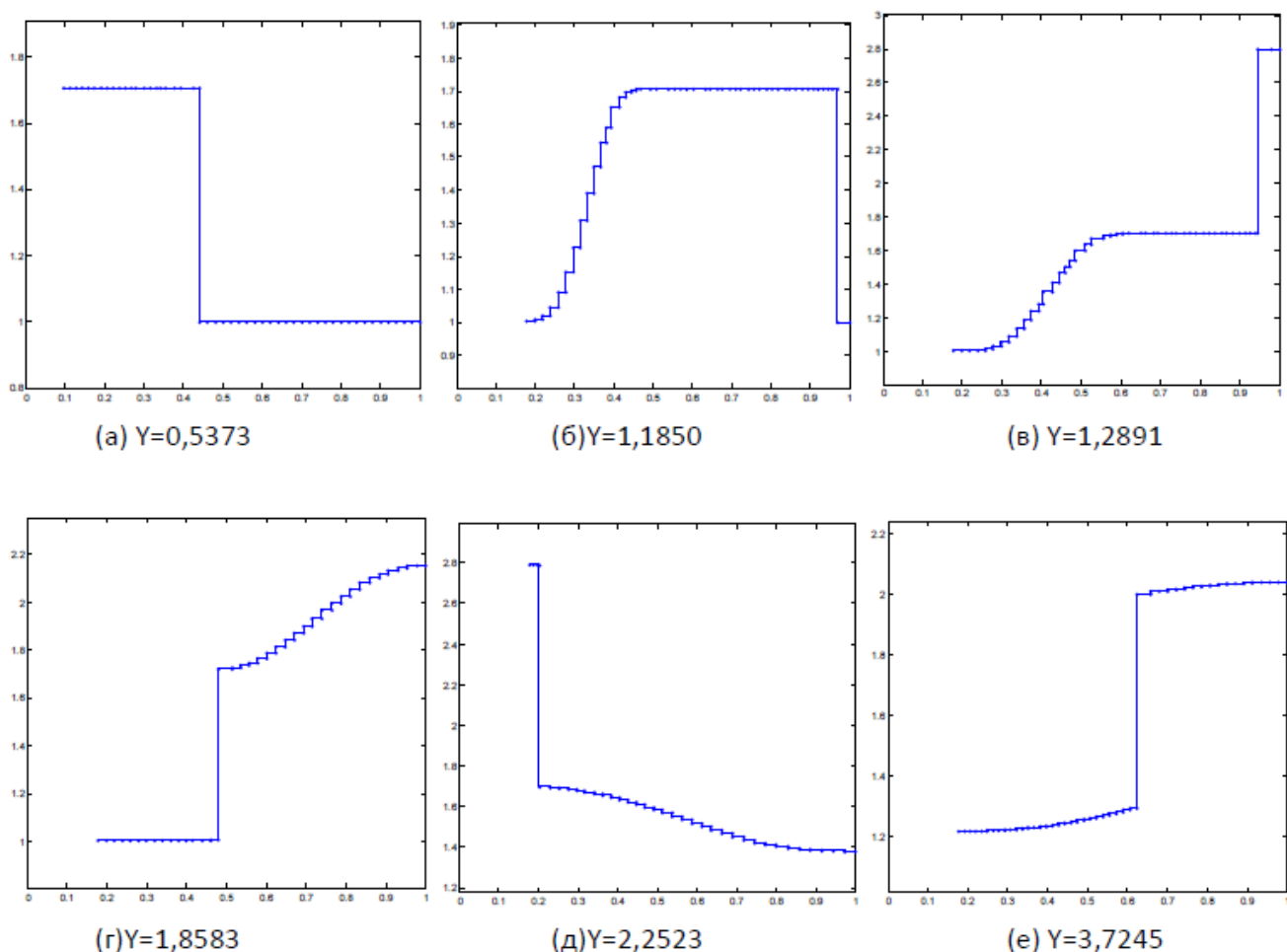
Ниже дан график распределения давления по координате  $Y$  (рис.5) вблизи верхней стенки канала. На графике изображена картина, которая образовалась при обтекании клина сверхзвуковым потоком газа, в результате многократного отражения УВ от стенок канала. Здесь 1-2 – это присоединенная к клину УВ, 3-4 – УВ отраженная от стенки канал, 5-6 – УВ, прошедшая через область, занимаемую волной разрежения, 7-8 – УВ после отражения от верхней границы канала.



**Рис.5. Распределение давления по координате  $Y$  (0–начало клина) на расстоянии  $X = 0.95$  от нижней границы канала**



**Рис.6. Траектория фронта головной ударной волны в канале**



**Рис.7. Профиль давления вдоль оси  $Ox$  на фиксированном расстоянии  $Y$  от начала клина**

На рис.6 изображена траектория фронта УВ в канале. При заданном начальном значении числа Маха УВ отражения фронтов от верхней стенки происходит практически по акустическому закону.

На рис.7 (а) - (е) дан профиль давления на фиксированных расстояниях от начала клина на прямых, параллельных оси  $Ox$ . Скачок давления на рис.7 (а) соответствует УВ, присоединенной клину. На рис.7 (б) УВ прошла через ВР, образовавшуюся в области перед клином; рис.7 (в) - (е) изображают соответственно УВ после отражения от верхней стенки, прохождения отраженной УВ через ВР, отраженную от нижней стенки УВ, и вновь отраженную от верхней стенки УВ, взаимодействующую с ВР. Фронт УВ не подвергается “размазке”, что способствует высокой точности решения.

### 3.2 Расчет гиперзвукового течения в плоском канале с числом Маха потока $M_0 = 9$

Расчет проводился в той же геометрии. Параметры набегающего потока: число Маха  $M_0 = 9$ , давление  $P = 1$ , плотность:  $\rho = 1.4$ . Количество ячеек по координате X:  $N_x = (100-200)$ . Количество слоёв по Y (сверхзвуковой координате)  $N_y = 2405$ .

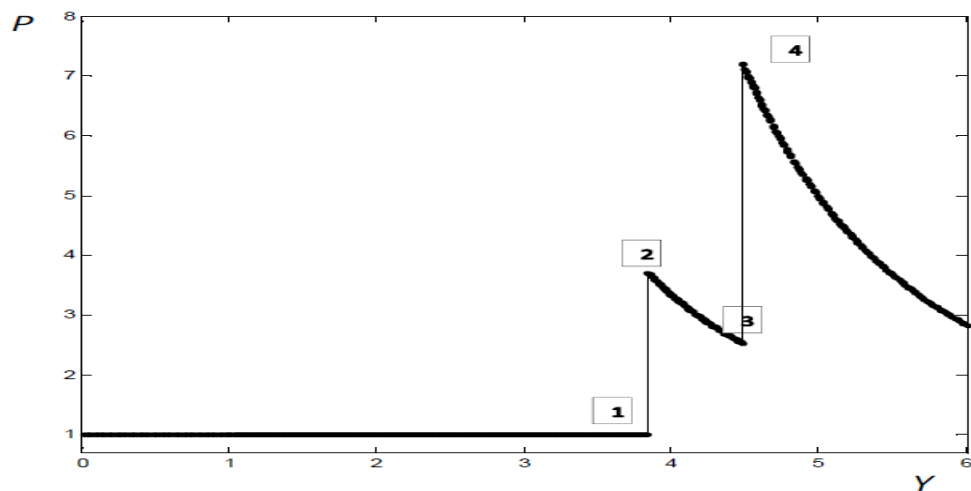
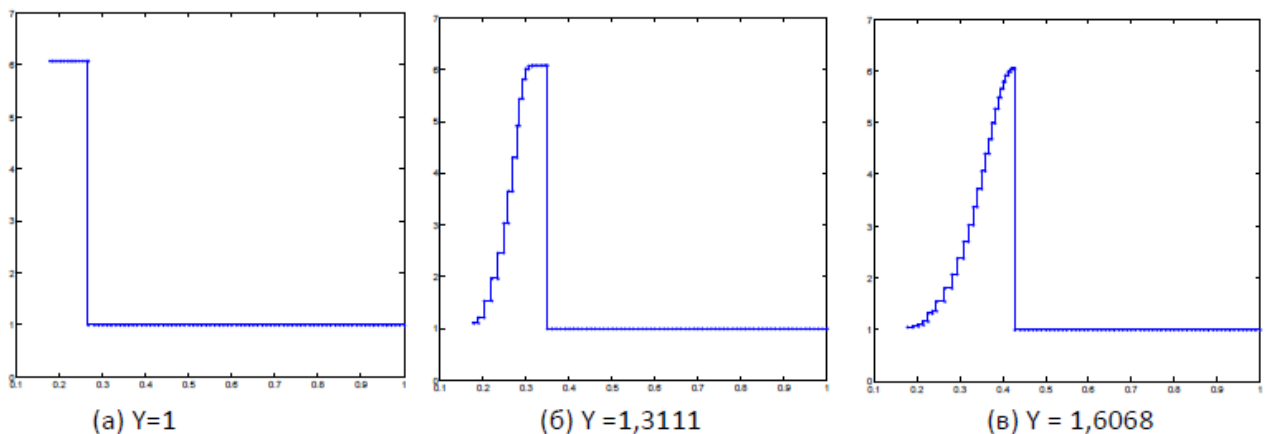


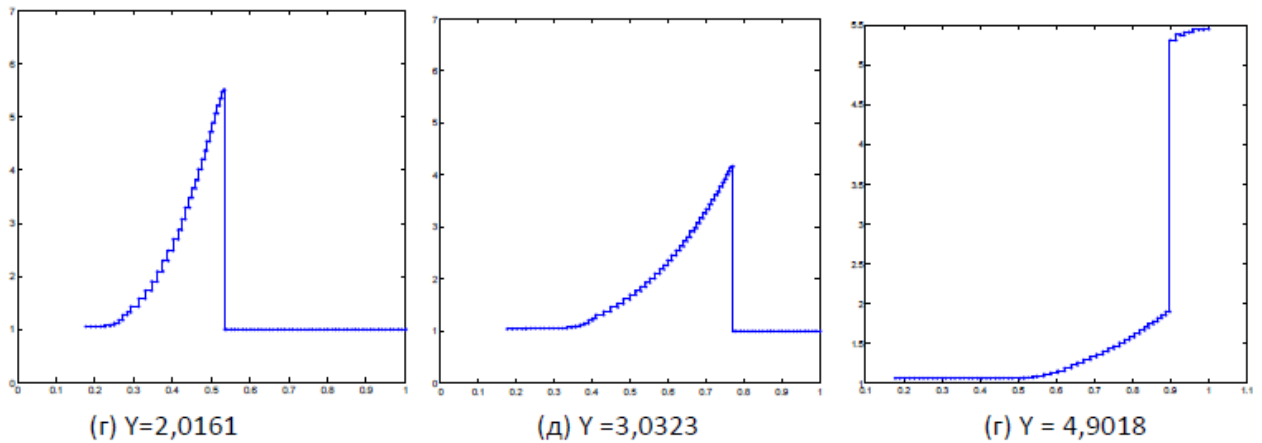
Рис.8.

На рис.8 дан график распределения давления вдоль оси Y (0-начало клина) на расстоянии  $X = 0.95$  от нижней границы расчётной области

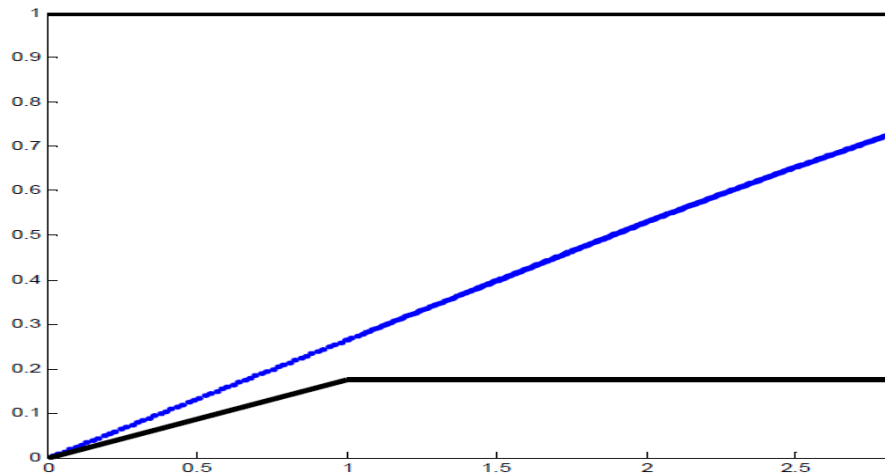
Область до точки 1 занята невозмущенным газом. Отрезок между точками 1 и 2 занимает ударная волна, присоединяющая к клину, которую догнала волна разрежения, образовавшаяся в точке излома профиля. На отрезке 2-3 расположена волна разрежения. Ударная волна, отразившаяся от стенки обозначена точками 3,4.







**Рис.9. Профиль давления вдоль оси  $Ox$  на фиксированном расстоянии  $Y$  от начала клина**



**Рис.10. Установившийся фронт ударной волны, присоединённой к клину ( $M_0=9$  число Маха набегающего потока)**

На рис.9(а) изображена УВ присоединенная к клину, на рис.9(б) - (д) ее нагоняет ВР. На рис. 9 (в) амплитуда УВ  $\sim 6$ , и на следующих слоях по координате “у”, она уменьшается. Соответственно на рис.9 (г) давление на УВ уменьшается до величины  $\sim 5,5$  и  $\sim 4,3$  на рис.9 (д). При этом, как видно из расчетов, фронт УВ не “размазывается”. В том числе и после ее отражения от правой стенки рис.9(е)

Изгиб фронта присоединенной к клину ударной волны под влиянием волны разрежения, идущей от точки излома обтекаемого профиля, едва заметен (рис.10). Нижняя ломаная линия - контур профиля.

## Библиографический список

1. С.К.Годунов. Разностный метод расчёта ударной волны. *УМН*, 1957г, т.12, вып.1.
2. В.Г. Грудницкий. Обобщённые характеристики для системы уравнений Эйлера - Сб. «Алгоритмы для численного исследования разрывных течений», *Тр. ВЦ РАН*, 1993.
3. В.Г.Грудницкий. Обобщённые характеристики и достаточное условие устойчивости для уравнений Эйлера с разрывными решениями - *Мат. моделирование*, 1997, т. 9, №12, с. 121-125.
4. В.Г.Грудницкий. Достаточное условие устойчивости при явном построении разрывных решений системы уравнений Эйлера.*Док. Академии наук*, 1998, т. 362, №3, с. 298-299.
5. В.Г.Грудницкий, П.В.Плотников. Обобщённые характеристики и достаточное условие устойчивости при построении разрывных решений системы уравнений Эйлера - Сб. *Новое в численном моделировании*, 2000, с.148-164.
6. V.G. Grudnitsky. Sufficient conditions of stability for discontinuous solutions of the Euler equations - *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2001, vol.10, no.2, pp.334-337.
7. В.Г.Грудницкий. Прямой обобщённо-характеристический метод для расчёта разрывных решений законов сохранения газовой динамики - *Мат. моделирование*, 2004, vol. 16, no.1, pp. 90-96.
8. В.Г.Грудницкий. О достаточных условиях устойчивости для схемы С.К. Годунова - *Мат. моделирование*, 2005, т. 17, № 12, с. 119-128.
9. В.Г.Грудницкий. Достаточные условия устойчивости при расчёте разрывных решений нестационарных законов сохранения в криволинейных координатах и при наличии правых частей. - *Мат. моделирование*, 2006 г., т. 18, №10, стр. 76-80.
10. В.Г.Грудницкий. Достаточные условия устойчивости в расчётах стационарных сверхзвуковых течений маршевым способом и нестационарных течений с учётом вязкости.- *Мат. моделирование*, 2008 г., т. 20, № 2, с. 93-104.
11. V.G.Grudnitsky. Non-linear theory of conservation laws of solid medium. *27-th international symposium on SHOCK WAVES. Book of proceedings* (19-24 juni 2009).
12. В.Г.Грудницкий. Нелинейная теория законов сохранения сплошной среды. *Материалы Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (К 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко)*, 2009г
13. В.Г.Грудницкий. Нелинейные проблемы законов сохранения сплошной среды. *Материалы 16<sup>ой</sup> международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППСЭ 2009)*.

14. В.Г.Грудницкий Нелинейные проблемы законов сохранения сплошной среды. *Изд-во «Спутник+»*, Москва, 2009г.
15. В.Г.Грудницкий, Консервативная характеристическая форма законов сохранения сплошной среды. *Материалы 8<sup>ой</sup> международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2010)*.
16. В.Г.Грудницкий. Консервативная характеристическая форма законов сохранения сплошной среды и её приложения. *Журнал «Обзор прикладной и промышленной математики»*, 2011г, т.18, вып.1.
17. В.Г.Грудницкий. Консервативная характеристическая схема высокой точности для расчёта разрывных течений газа. *Материалы 9-ой международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях*. 2012г.
18. М.А.Мендель. Консервативная характеристическая схема. Результаты тестовых расчётов. *Материалы 9-ой международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях*. 2012г.