

## Аэродинамическое проектирование вертолетных профилей методом решения обобщенной обратной задачи

**Никольский А.А.**

*Центральный аэрогидродинамический институт, ЦАГИ,  
ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская область, 140180, Россия  
e-mail: anikolskii@mail.ru*

### **Аннотация**

На основе решения сформулированной ранее обобщенной обратной задачи, разработан новый метод аэродинамического проектирования профилей.. Метод позволяет управлять величиной продольного момента профиля при корректировании исходного распределения давления, что особенно важно для вертолетных профилей. Рассмотрены примеры последовательных улучшающих вариаций распределений давления по контуру профиля НАСА-23012 и верификация результатов расчетами методом CFD.

**Ключевые слова:** аэродинамическое проектирование, вертолетные профили, обратная задача

Среди работ посвященных решению обратной задачи (ОЗ) определения формы аэродинамического профиля по заданному по длине дуги его контура  $s$  распределению давления  $c_p(s)$ . для нелинейных потенциальных течений можно

отметить работу [1], основанную на прямом методе и работу [2] где краевая задача формулируется как задача Дирихле. Однако, в методе первой работы в ходе решения ОЗ точные условия ее разрешимости не используются, а во второй работе корректирующие функции подбираются таким образом, что итоговое распределения давления и целевое могут значительно отличаться. В работе [3] развит оригинальный метод решения обратной задачи для трансзвуковых потенциальных течений в классической постановке Лайтхилла [4]. Такая задача представлялась более актуальной для аэродинамического проектирования самолетных профилей, например, для аэродинамического проектирования профилей с низким волновым сопротивлением на трансзвуковых режимах или большой подъемной силой при малых числах Маха. Однако, для вертолетных профилей ОЗ не нашла широкого применения из-за того, что при их аэродинамическом проектировании необходим мониторинг сразу нескольких режимов обтекания. В работе [5] приведена постановка и метод решения обобщенной обратной задачи (ООЗ), классической обратной задачи с дополнительным ограничением на величину коэффициента продольного момента  $c_{m0}$  при нулевой подъемной силе. Такая задача находит свое приложение и для аэродинамического проектирования вертолетных профилей и цель ее постановки заключалась именно в этом.

### **Постановка и метод решения обобщенной обратной задачи**

Как известно, обратная задача для произвольно заданного распределения давления по контуру профиля, вообще говоря, некорректна. В процессе решения для разрешимости ОЗ необходимо тем или иным образом корректировать исходное распределение давления. Поэтому далее под решением ОЗ понимается нахождение

такого контура профиля, распределение давления по длине дуги которого несколько отличается от исходного, но наиболее близко к нему в смысле метода наименьших квадратов. Как и в работе Лайтхилла, для формулировки обратной задачи используем аппарат теории функций комплексного переменного (ТФКП). Выполним конформное отображение внешности профиля в физической плоскости  $z$  на внешность единичного круга в расчетной плоскости  $\zeta$ , следуя работе [6].

Известно, что для потенциальных течений модуль отображающей функции  $H = \frac{ds}{d\theta}$ , модуль скорости  $u(s)$  в плоскости  $z$  и модуль скорости  $u(\theta)$  в плоскости  $\zeta$  связаны следующим определяющим для постановки обратной задачи соотношением:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{u(\theta)}{u(s)}, \quad 1)$$

где  $\theta$  - полярный угол в плоскости  $\zeta$ . Методы ТФКП позволяют определить интегральные условия разрешимости обратной задачи, которые для случая линейных потенциальных течений традиционно записывают для скорости  $u(s)$ . В работе [3] предложена альтернативная форма их записи, справедливая для общего случая нелинейных потенциальных течений:

$$\int_0^{2\pi} \ln H d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \ln H \sin(\theta) d\theta = 0. \quad 2)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln H \cos(\theta) d\theta = c_{11}.$$

Здесь  $c_{11} = (1 - \varepsilon) - \frac{\Delta y_{te}}{2\pi}$ ,  $\Delta y_{te}$  - толщина задней кромки, отнесенная к хорде профиля.

Методы ТФКП позволяют сформулировать обобщенную обратную задачу (ООЗ) следующим образом: найти контур профиля, распределение давления по которому близко к заданному, при заданной величине коэффициента момента профиля при нулевой подъемной силе и  $M_\infty = 0$ . Для этого используем дополнительное интегральное соотношение для величины продольного момента  $c_{m0}$  при нулевой подъемной силе:

$$\int_0^{2\pi} \ln H \sin(2\theta) d\theta = -\frac{c_{m0}}{4}. \quad 3)$$

В отличие от формы записи Лайтхилла, условия (2), (3) имеют то преимущество, что в них входит не скорость, а функция  $H$ , имеющая только геометрический смысл. Это позволяет применить их и к нелинейному случаю, когда скорость  $u(\theta)$  заранее неизвестна. Переход от неразрешимой функции  $H_0$  к разрешимой функции  $H$  выполним по формуле

$$H = H_0 \exp g.$$

Подставляя (4) в (2), (3) получим:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g d\theta = - \int_0^{2\pi} \ln H_0 d\theta = -a_0 2\pi$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g \cos \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \ln H_0 \cos \theta d\theta = -(a_1 - c_{11})\pi$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g \sin \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \ln H_0 \sin \theta d\theta = -b_1\pi$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g \sin 2\theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \ln H_0 \sin 2\theta d\theta = -(b_2 + \frac{c_{m0}}{4})\pi.$$

5)

Здесь  $a_0, a_1, b_1, b_2$  - коэффициенты в разложении в ряд Фурье для функции  $H_0$ . Система уравнений (5) имеет следующее точное решение:

$$g = -a_0 - (a_1 - c_{11}) \cos \theta - b_1 \sin \theta - (b_2 + \frac{c_{m0}}{4}) \sin 2\theta. \quad (6)$$

Для линейных потенциальных течений соотношение (6) позволяет свести решение обобщенной обратной задачи к квадратурам, а координаты профиля найти в параметрическом виде  $x(\theta), y(\theta)$ .

Для трансзвуковых потенциальных нелинейных течений решение ООЗ строим методом последовательных приближений на основе метода решения прямой задачи [1], начиная с некоторого начального контура профиля.

После определенного цикла итераций прямого метода из уравнения (1) определяем функцию  $H_0$ , по соотношениям (4), (5) определяем  $H$  и переходим к

следующему циклу итераций. Существенен тот факт, что величина угла атаки в прямом расчете заранее неизвестна и определяется в процессе решения из условия Жуковского по заданной величине параметра  $\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\min}}$  - отношения полной циркуляции по контуру профиля к циркуляции по нижнему контуру до точки торможения.

Важным классом решений ООЗ являются такие решения, когда распределение давления по верхнему контуру остается неизменным, а диапазон модификации соответствует нижнему контуру,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ . В этом случае функцию  $g$  представим в виде конечного ряда Фурье, а решение системы уравнений (5) ищем методом наименьших квадратов:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g^2 d\theta + \lambda_1 g(0) + \lambda_2 g'(0) + \lambda_3 \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} g \sin \theta d\theta + b_1 \pi \right) +$$

$$+ \lambda_4 \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} g \cos \theta d\theta + (a_1 - c_{11}) / \pi \right] + \lambda_5 \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} g \sin 2\theta d\theta + \left( b_2 + \frac{c_{m0}}{4} \right) \right] = \min .$$

Задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно множителей Лагранжа  $\lambda_{1,\dots,5}$ . Коэффициенты Фурье в разложении функции  $g$  выражаются через множители Лагранжа.

В том случае, когда коэффициент давления задан не по длине дуги профиля  $C_p(s)$ , а по его хорде  $C_p(x)$  говорят о решении задачи с заданной хордовой диаграммой. Решение такой задачи легко сводится к решению задачи ООЗ. По

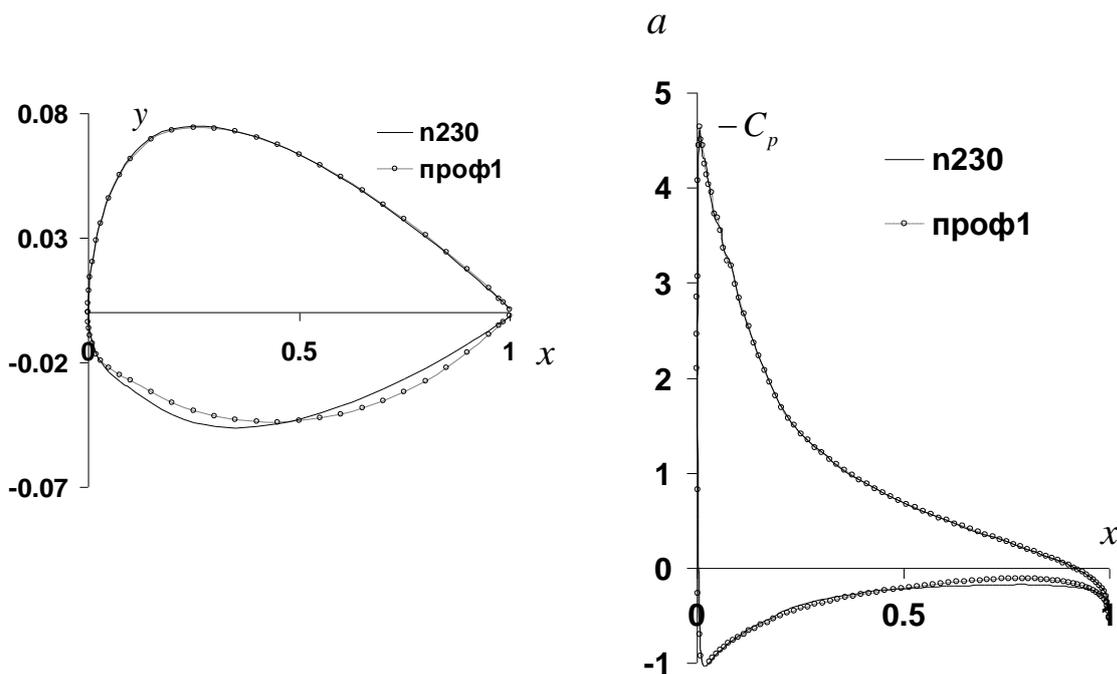
целевому  $C_p(x)$  и известной на каждой итерации зависимости  $s(x)$  определяем  $C_p(s)$  и сводим задачу к решению задачи ООЗ.

### **Аэродинамическое проектирование с использованием ООЗ**

На основе метода решения ООЗ разработана оригинальная процедура аэродинамического проектирования вертолетных профилей. Обычно при аэродинамическом проектировании используют методы оптимизации, основанные на решении прямой задачи обтекания с поиском наилучшего локального минимума целевой функции, при этом приходится рассчитывать значительное множество вариантов, а результат во многом определяется выбором способа параметризации формы контура профиля [7]. Развиваемый метод позволяет произвести улучшающую вариацию контура профиля используя простые шаги, в ходе которых исходные распределения давления на основных режимах обтекания профиля модифицируются исходя из физических соображений с помощью последовательного решения задач ООЗ. Такая процедура стала возможной только после постановки и разработки метода решения именно задачи ООЗ, поскольку для вертолетных профилей имеет смысл сравнивать, а также говорить об их улучшении, аэродинамические характеристики только при равных моментных характеристиках. В качестве примера рассмотрена улучшающая вариация АДХ известного вертолетного профиля НАСА-23012.

При оценке аэродинамического совершенства вертолетных профилей используются следующие основные интегральные аэродинамические

характеристики:  $c_{y_{max}}(M)$ ,  $K_{max}(M)$ ,  $c_x(M)$  при  $c_y = const$ . Наибольшую важность представляют три характерных режима обтекания вертолетных профилей:  $M_\infty=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим в окрестности  $c_{y_{max}}$ );  $M_\infty=0.6$ ,  $c_y=0.65$  (режим в окрестности  $K_{max}$ );  $M_\infty=0.8$ ,  $c_y=0$  (режим в окрестности  $M_{кр}$ ). Далее под интегральными критериями понимаются  $c_{y_{max}}$ ,  $K_{max}$ , и  $M_{кр}$ . Исходный профиль имеет  $c_{m0} \sim -0.01$ , для итогового профиля выбрано  $c_{m0} \sim 0.0$ . На первом шаге на режиме  $K_{max}$  решаем задачу ООЗ, сохраняя распределение давления по верхнему контуру. Исходные (N23012) и полученные (проф1) контура профилей и распределения давления показаны на рис.1.



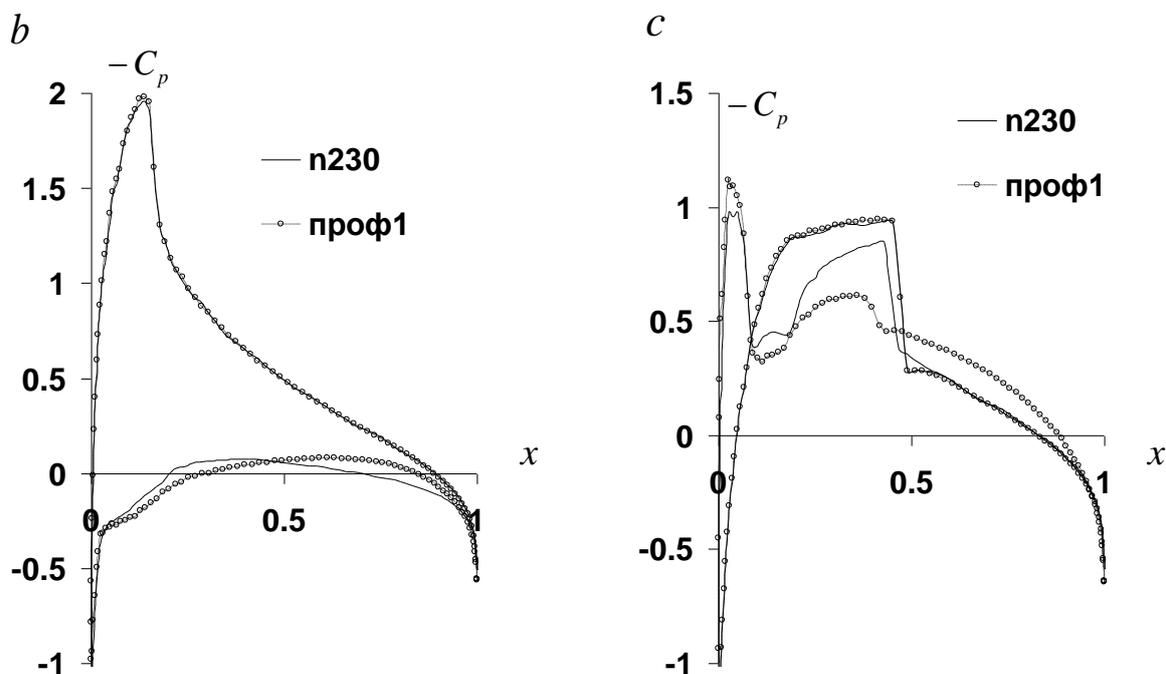


Рис. 1 Контуры профилей и коэффициенты распределений давления :

а-  $M_\infty=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим  $c_{y_{max}}$ ); б-  $M_\infty=0.6$ ,  $c_y=0.65$  (режим  $K_{max}$ );

с-  $M_\infty=0.8$ ,  $c_y=0$  (режим  $M_{кр}$ ). Шаг 1.

Существенное преимущество решения задачи ООЗ по сравнению с традиционной обратной задачей заключается в том, что ее решение с модификацией распределения давления только по нижнему контуру позволяет на всех режимах сохранить распределение давления по верхнему контуру близкие к исходным при фиксированных значениях  $c_y$ , как это видно на рис.1. Поэтому следует ожидать, что  $c_{y_{max}}$  и  $K_{max}$  профиля практически не изменились. Так как при решении ООЗ распределение давления максимально близко к исходному, небольшие изменения возможны только на режиме  $M_{кр}$ , где волновое сопротивление может измениться. В данном случае волновое сопротивление снизилось. Решенной на первом шаге задаче можно предложить следующее практическое применение. При создании или

модернизации лопасти винта используют наборы профилей с АДХ, подтвержденными испытаниями в АДТ. В ряде случаев моментные характеристики профилей требуется изменить, обычно в сторону кабрирования. Для этого используют хвостовую пластину-триммер, которую отклоняют вверх, что отрицательно сказывается на максимальной несущей способности профиля. В ходе решения задачи ООЗ, изменяется только распределение давления по нижнему контуру профиля, что позволяет избежать этих потерь. При этом представляется, что характеристики модифицированного профиля достаточно подтвердить расчетами методом CFD без дополнительных испытаний в АДТ. Дальнейшие шаги проведены уже для улучшения АДХ профиля 1 за счет последовательных локальных изменений распределений давлений, сохраняя его значение  $c_{m0}$ . Поэтому сравнение проводится уже с профилем 1, а не с исходным профилем.

На втором шаге модифицируем распределение давления профиля 1 на режиме  $c_{y_{max}}$  в окрестности носового пика с целью увеличения его максимальной подъемной силы и вновь решаем задачу ООЗ, находим контур профиля 2. Результаты показаны на рис.2.

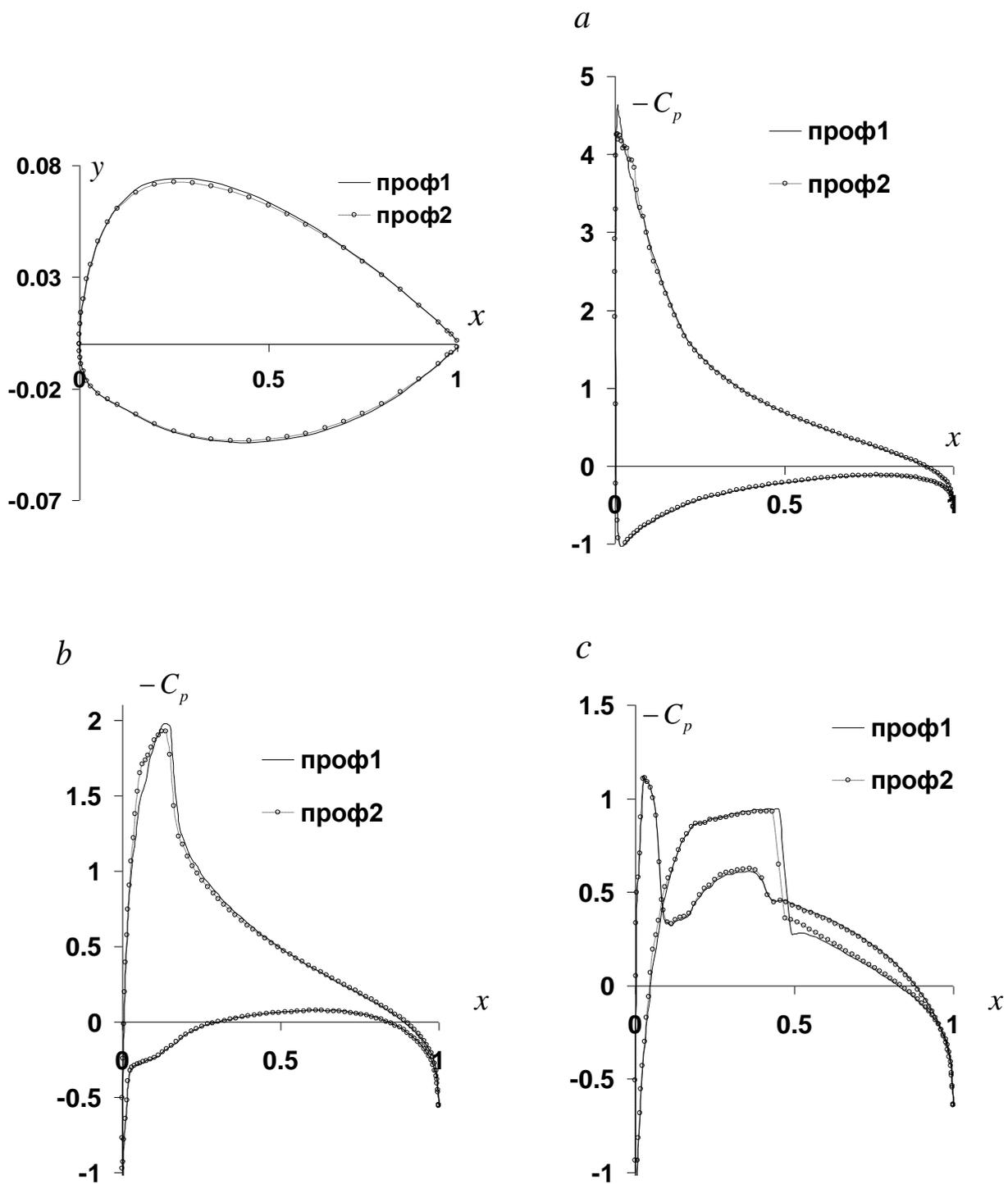


Рис. 2 Контурсы профилей и коэффициенты распределений давления :  
 а-  $M_\infty=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим  $c_{y_{max}}$ ); б-  $M_\infty=0.6$ ,  $c_y=0.65$  (режим  $K_{max}$  );  
 с-  $M_\infty=0.8$ ,  $c_y=0$  (режим  $M_{кр}$ ). Шаг 2.

Как следует из сравнения распределений давления, полученных на втором шаге, профиль 2 имеет меньший пик разрежения на режиме  $c_{y_{max}}$  при практически неизменных эпюрах на других режимах. Это означает, что на втором шаге решена отдельная задача улучшения  $c_{y_{max}}$  профиля при практической неизменности остальных интегральных критериев.

На третьем шаге модифицируем распределение давления профиля 2 на режиме  $K_{max}$  в окрестности пика разрежения с целью снижения его волнового сопротивления (увеличения его максимального аэродинамического качества) и вновь решаем задачу ООЗ, находим контур профиля 3. Результаты показаны на рис.3.

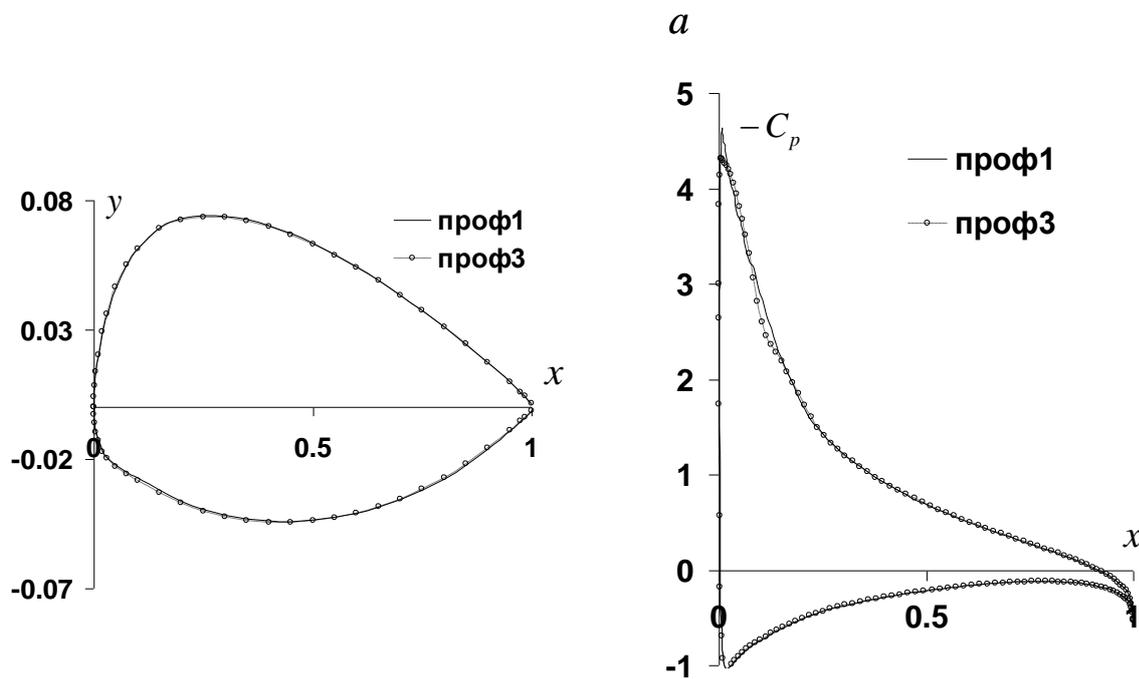


Рис. 3 Контурсы профилей и коэффициенты распределений давления :

а-  $M_{\infty}=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим  $c_{y_{max}}$ );

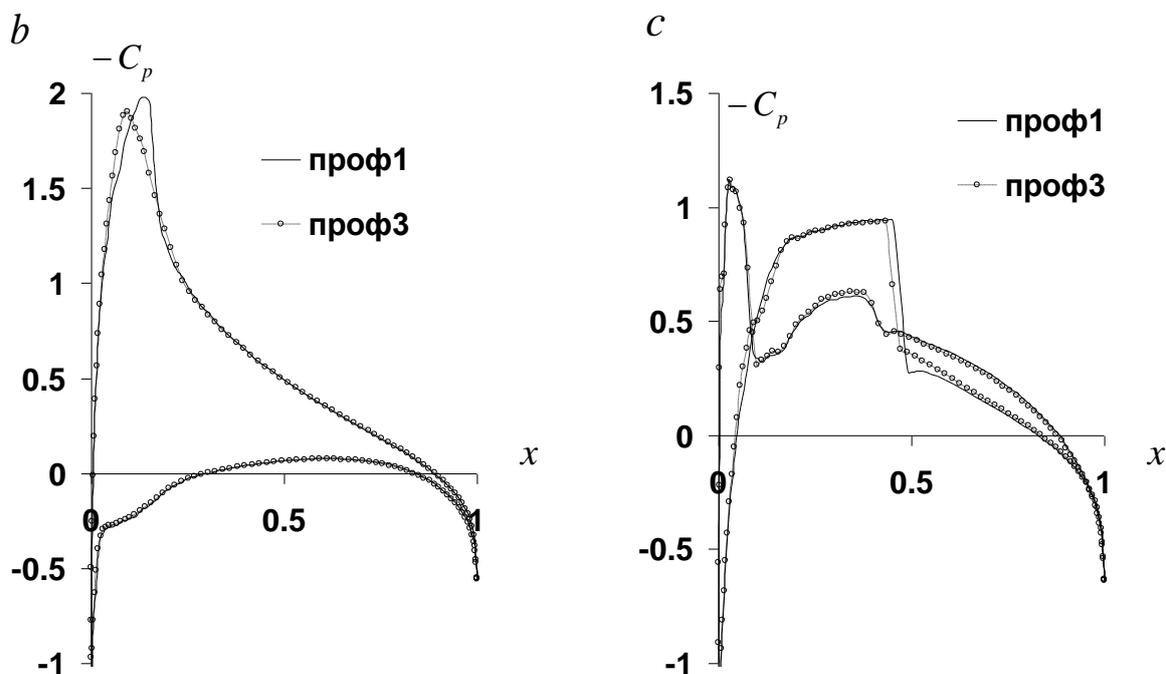


Рис. 3 Продолжение. Контурь профилей и коэффициенты распределений давления:

- а-  $M_\infty=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим  $c_{y_{max}}$ ); б-  $M_\infty=0.6$ ,  $c_y=0.65$  (режим  $K_{max}$ );  
 в-  $M_\infty=0.8$ ,  $c_y=0$  (режим  $M_{кр}$ ). Шаг3.

Профиль 3 имеет меньшее волновое сопротивление на режиме  $K_{max}$  и, как следует из сравнения распределений давления, полученных на третьем шаге, сохраняет выигрыш в  $c_{y_{max}}$  при практически неизменной эпюре на режиме  $M_{кр}$ . Это означает, что на третьем шаге решена отдельная задача улучшения  $K_{max}$  профиля при  $M=0.6$  при сохранении остальных интегральных критериев.

На четвертом шаге модифицируем распределение давления профиля 3 на режиме  $M_{кр}$  в сверхзвуковой зоне и ее окрестности как верхнего так и нижнего контура с целью снижения его волнового сопротивления и вновь решаем задачу ООЗ, находим контур профиля 4. Результаты показаны на рис .4.

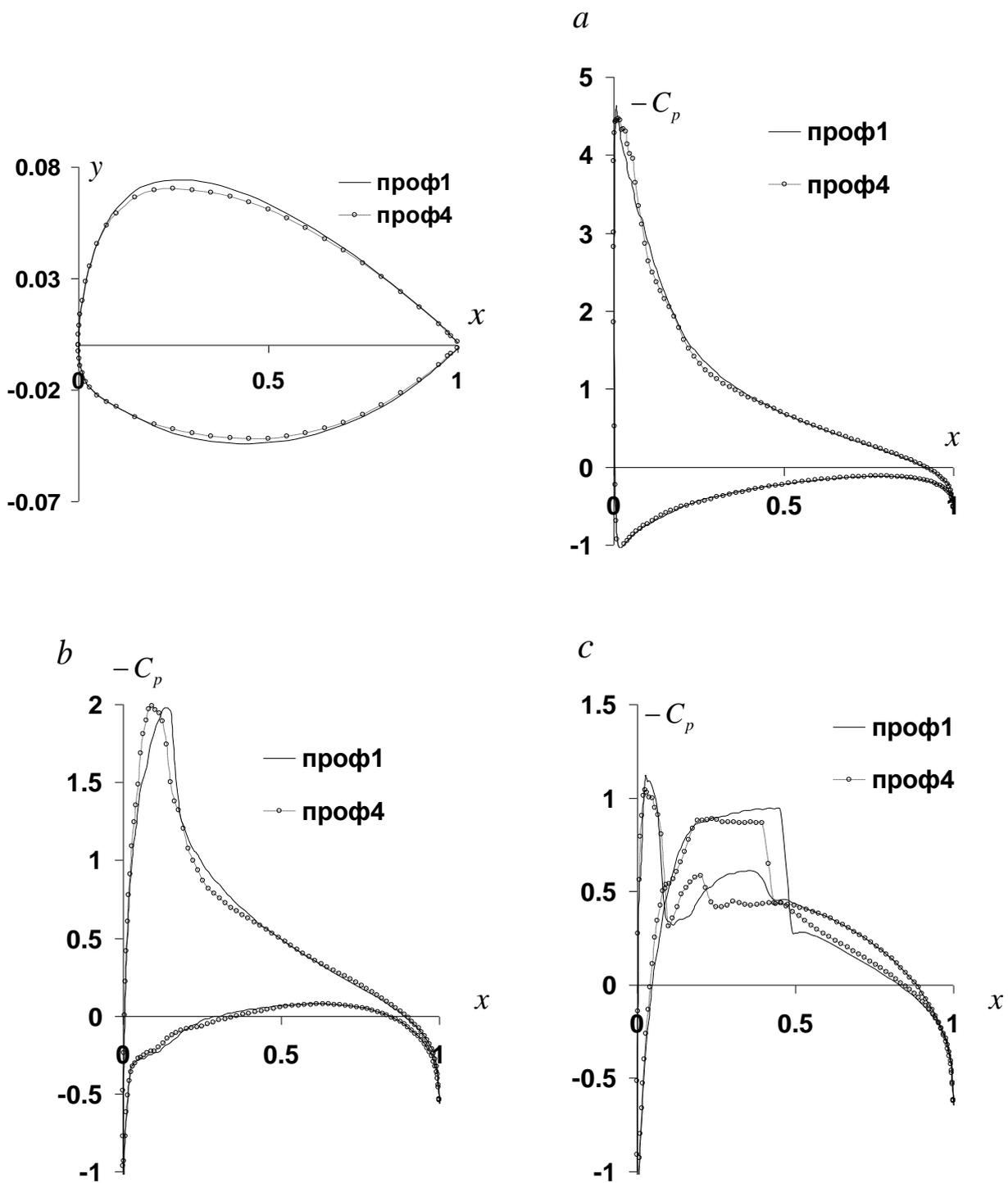


Рис. 4 Контурь профилей и коэффициенты распределений давления :

a-  $M_\infty=0.4$ ,  $c_y=1.4$  (режим  $c_{y_{max}}$ ); b-  $M_\infty=0.6$ ,  $c_y=0.65$  (режим  $K_{max}$ );  
 c-  $M_\infty=0.8$ ,  $c_y=0$  (режим  $M_{кр}$ ). Шаг 4.

Как видно из сравнения распределений давления, полученных на четвертом шаге, профиль 4 имеет меньшее волновое сопротивление на режиме  $M_{кр}$ . Необходимо отметить, что в этом случае подходящее распределение давления устанавливалось в интерактивном режиме из-за неочевидности “правильного” его задания. Например, в ходе решения задач ООЗ сходимость не получалась из-за недостижимых “бесскачковых” целевых распределений давления, приводящих к образованию двухскачковых структур, обусловленных разрывами кривизны контура профиля.

Поэтому, для того чтобы автоматизировать задачу на заключительном шаге необходимо создать некую схему предиктор-корректор для нахождения допустимого целевого распределений давления на трансзвуковом режиме обтекания. В то же время процедура решения задач ООЗ на предыдущих шагах полностью автоматизирована путем аппроксимации распределений давления сплайнами по характерным точкам в зоне модификации.

Для оценки полученных выигрышей в величине  $c_{y_{max}}$  при  $M=0.4$ ,  $K_{max}$  при  $M=0.6$  и величине  $c_x$  при  $M \sim M_{кр}$  выполнены расчеты методом CFD. На рис.5 приведены зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки  $c_y(\alpha)$ , аэродинамического качества от коэффициента подъемной силы  $K(c_y)$ , и коэффициента подъемной силы в зависимости от коэффициента сопротивления  $c_y(c_x)$ , подтверждающие итоговые улучшения АДХ профиля 1, полученные с помощью трех простых итераций. Таким образом показана принципиальная возможность использования математической модели, основанной на концепции

обобщенной обратной задачи и простых физических соображениях для улучшения основных интегральных критериев вертолетных профилей последовательным решением задач ООЗ.

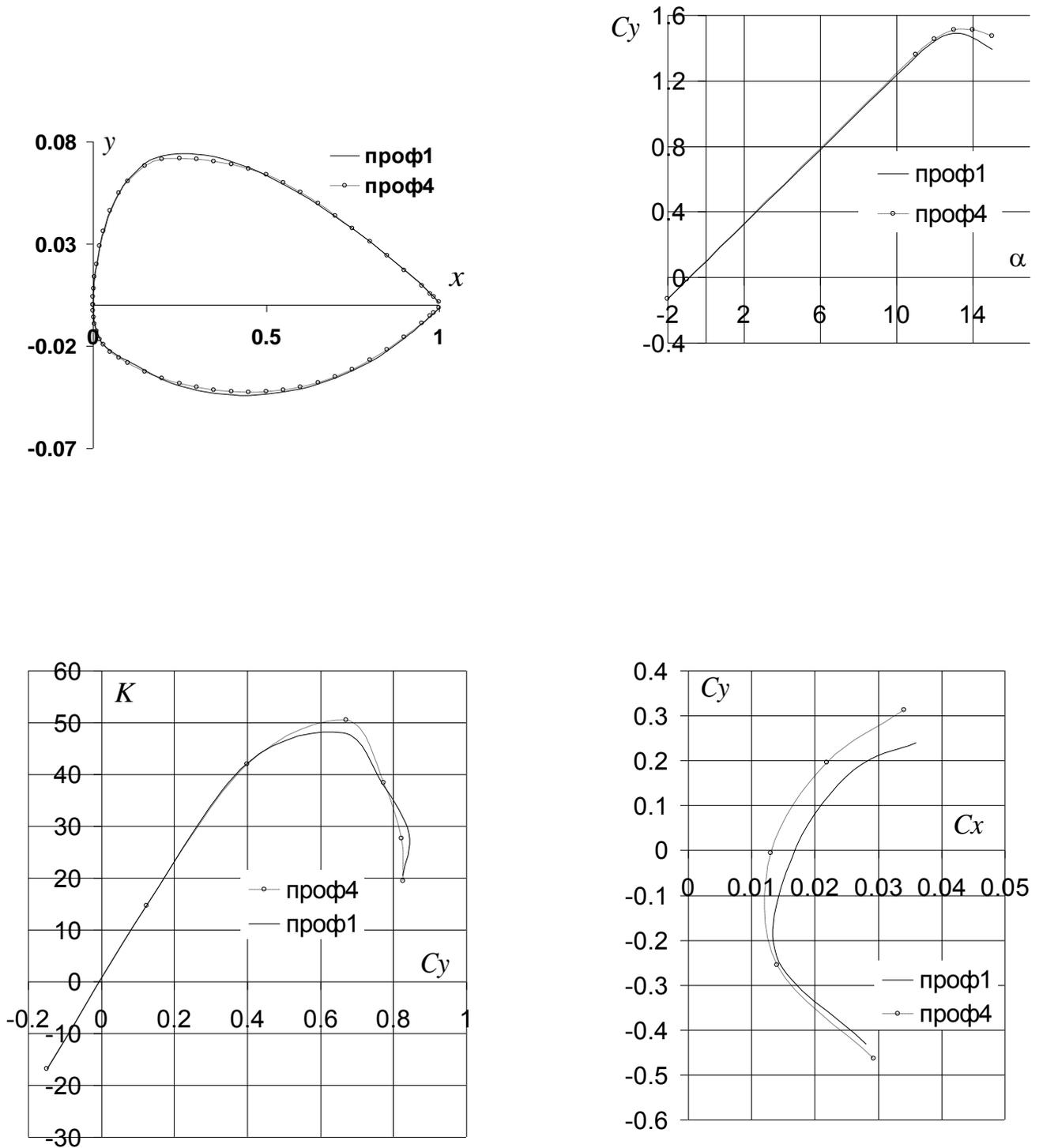


Рис. 5 АДХ исходного и итогового профилей, расчет CFD: а-  $c_y(\alpha)$ ,  $M=0.4$ ,

$$C_y=1.4; b- K(c_y), M_\infty=0.6, c_y=0.65; c- c_y(c_x), M_\infty=0.8, c_y=0$$

### Выводы

1. Дано применение метода решения обобщенной обратной задачи для проектирования вертолетных профилей.

2. На примере профиля НАСА-23012 продемонстрированы решения следующих задач.

- Увеличение продольного момента профиля при нулевой подъемной силе в сторону кабрирования без заметных потерь в величинах  $c_{y_{max}}$  и  $K_{max}$ .
- Увеличение  $c_{y_{max}}$  профиля при практической неизменности остальных интегральных критериев.
- Увеличение  $K_{max}$  профиля при практической неизменности остальных интегральных критериев.
- Интерактивное уменьшение волнового сопротивления профиля при больших числах Маха при практической неизменности величин  $c_{y_{max}}$  и  $K_{max}$ .

3. На следующем этапе работы планируется усовершенствовать процедуру уменьшения волнового сопротивления.

### Библиографический список

1. McFadden G.B. An Artificial Viscosity Method for the Design of Supercritical Airfoils. New York University Report COO-3077-158, 1979.
2. Volpe G. and Melnik, R.E. The Design of Transonic Aerofoils by a Well Posed Inverse

Method. Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, 1986, pp. 341-361.

3. Nikolsky A.A. Some aspects of helicopter airfoil design, *Proceedings of the Twenty first European Rotorcraft Forum*, Saint- Peterburg, 1995, Paper, no.17,(II), pp. 1-8.

4. Lighthill, M.J. A New Method of Two Dimensional Aerodynamic Design, ARC, Rand M 2112, 1945.

5. Nikolsky A.A. Generalized inverse airfoil problem. *Tsagi Science Journal*, vol. 43, № 6, 2012, pp.775-786.

6. Bauer F.,Garabedian P.,Korn D. Supercritical wing sections III. Lecture Notes in Economics and Math. Syst., 1977, N 150.

7. Никольский А.А. О параметризации контура аэродинамического профиля сплайном // Труды МАИ, 2013, выпуск № 66, URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=40253>