

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА  
Механико–математический факультет

*На правах рукописи*



**Романов Александр Вячеславович**

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ  
МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД В ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ**

Специальность 1.1.8. – механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., доцент

Никабадзе Михаил Ушангиевич

Москва–2024

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Основные положения микрополярной теории упругости</b> . . . . .	22
1.1. Кинематика макро- и микрообласти . . . . .	22
1.2. Тензоры напряжений и моментных напряжений . . . . .	25
1.3. Уравнения движения . . . . .	26
1.4. Закон сохранения энергии и баланс энтропии . . . . .	29
1.5. Свободная энергия и определяющие соотношения . . . . .	32
1.6. О трансверсально-изотропных, ортотропных и изотропных тензорах микрополярной среды . . . . .	36
1.7. Дифференциальная постановка краевой задачи . . . . .	39
1.8. Вариационная постановка. Принцип Лагранжа . . . . .	41
1.9. Функционал Лагранжа при неизотермических процессах . . . . .	46
1.10. Вариационная формулировка модели натянутой нити . . . . .	47
<b>Глава 2. Построение численного решения краевой задачи методом Ритца</b> 54	54
2.1. Дискретизация области и подпространство базисных функций . . . . .	54
2.2. О полиномах лагранжева и серендипова семейства . . . . .	55
2.3. Дискретизация функционала Лагранжа по пространственным координатам. Численное интегрирование Гаусса . . . . .	58
2.4. Дискретизация функционала Лагранжа по пространственным координатам при неизотермических процессах (обобщенный принцип Дюамеля-Неймана) 63	63
2.5. Система линейных алгебраических уравнений для среды произвольной анизотропии при изотермических и неизотермических процессах. Ассемблирование . . . . .	67
2.6. Система линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропной среды . . . . .	69
2.7. Система линейных алгебраических уравнений для ортотропной среды . . . . .	73
2.8. Система линейных алгебраических уравнений для изотропной среды при неизотермических процессах. Расщеплённые уравнения . . . . .	78
2.9. Система линейных алгебраических уравнений для модели натянутой нити в среде произвольной анизотропии . . . . .	81
2.10. Обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования на микрополярную среду ("reduced and selective integration") . . . . .	87
2.11. Аппроксимация поля перемещений и микровращений полиномами смешанной степени . . . . .	90

<b>Глава 3. Анализ численного решения некоторых трёхмерных задач . . . . .</b>	<b>96</b>
3.1. Задача о кручении цилиндрического тела . . . . .	96
3.2. Задача о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины. Задача о чистом изгибе цилиндрического тела . . . . .	103
3.3. Задача о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия призматического тела . . . . .	110
3.4. Задача о кубе . . . . .	113
3.5. Задача о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитьями . . . . .	114
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>Список использованных источников . . . . .</b>	<b>120</b>

## Введение

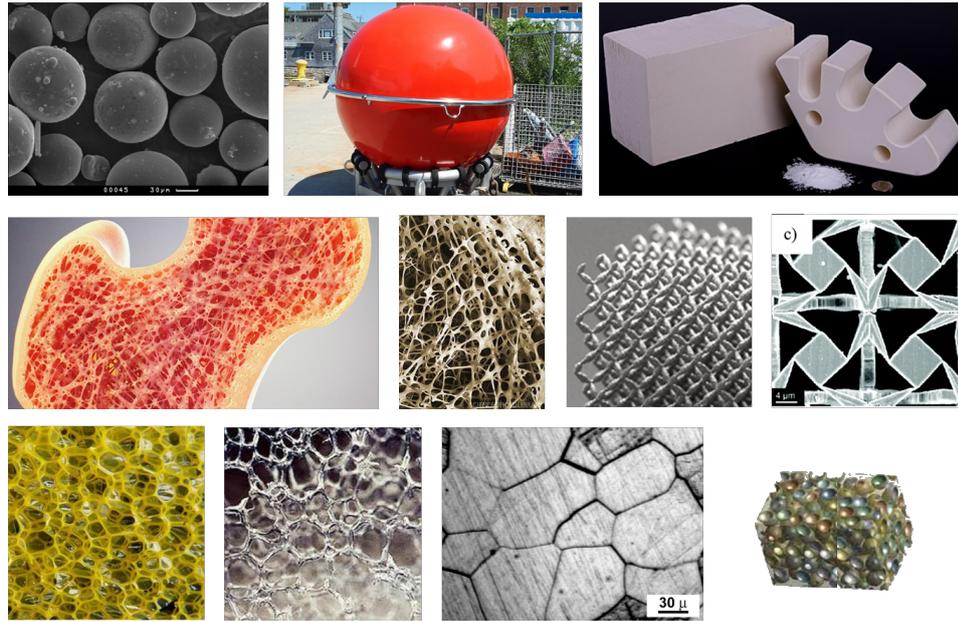


Рисунок 1. Материалы с микроструктурой: стеклопластики, костная ткань, метаматериалы, пенополиуретаны (закрытый и ретикулированный), поликристаллический материал, призма из стеклопластика.

Использование современных материалов в наукоемких и высокотехнологичных отраслях индустрии, а также стремление получить уточненные математические модели физико-механических явлений порождает особый запрос на применение и развитие теорий, способных моделировать среду с учетом ее микроструктуры (см. рисунок 1).

Диссертационная работа посвящена построению и уточнению механической модели в рамках трехмерных задач микрополярной теории упругости. Данная теория с континуальным подходом, способна учитывать масштабные эффекты материалов с микроструктурой, подтверждаемые экспериментами, в том числе для задач с высокой концентрацией напряжений вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов.

В настоящее время достаточно четко сформировались три различных подхода к построению математических моделей сред, отражающих внутреннее взаимодействие элементов структуры:

1. континуальный подход базируется на обобщении континуальной модели среды за счет расширения понятия представительного объема среды, учета ротационных степеней свободы микрочастиц и аффинных деформаций мезообъема (континуум Коссера, микроморфная среда Эрингена-Миндлина). Основные трудности этого подхода заключаются в выявлении физического смысла моментных напряжений высших порядков;

2. структурно-феноменологический подход связан с теорией кристаллической решетки и физикой твердого тела;
3. статистический подход основан на пространственном усреднении свойств микронеоднородных сред и переходе от уравнений движения микроэлементов к рассмотрению уравнений макродвижений, отражающих взаимодействие элементов микроструктуры.

В данной диссертационной работе используется теория с континуальным подходом к построению математических моделей сред со структурой. Континуальный подход, базируется на понятиях полярности и нелокальности материала, имеющего микроструктуру. Полярность указывает на то, что, помимо деформации окрестности частицы структуры, допускается ее жесткое вращение или микроповорот, в общем случае не связанный с полем перемещений, а нелокальность указывает на зависимость физических свойств материала от влияния частиц окружения.

Согласно классификации А. Эрингена (Eringen A. C.) [157] для микроконтинуальной среды или среды с микроструктурой вводится микроконтинуум уровня  $\mathbb{N}$ . В этом случае внутренняя структура среды описывается с помощью  $\mathbb{N}$  дополнительных кинематических векторов (относительно кинематического вектора макродвижений классической теории упругости), называемых векторами структуры. В случае микроконтинуума уровня  $\mathbb{N} = 1$  рассматривают следующие среды:

1. Микроморфный континуум (микроморфная среда) (micromorphic continua): полимеры с гибкими молекулами, жидкие кристаллы с боковыми цепями, кровь животных с деформируемыми клетками (ячейками), суспензии с деформируемыми элементами, турбулентные жидкости с гибкими вихрями (воронками) и др.
2. Микроконтинуальная среда с растяжением-сжатием (microstretch continua): легкие животных, шипучие жидкости, гидросмесь, жидкий цементный раствор, глинистая суспензия, жидкая глина, загрязненные атмосфера и жидкости, упругая суспензия, смеси с дыхательными элементами, пористая среда, биологические жидкости: колонии насекомых, вирусов, маленьких животных, рыб, которые живут в земле, воздухе и морях и др.
3. Микрополярная среда (micropolar continua): жидкие кристаллы с твердыми молекулами, твердые суспензии, кровь животных с твердыми клетками, композиты с рубленными волокнами (chopped fiber composite), кости, магнитные поля, облака с пылью, бетон с гравием, мутная жидкость и др. Общие теории перечисленных выше сред довольно подробно излагаются в монографии Эрингена А.

Одна из причин выбора именно микрополярной теории упругости для научных изысканий — математическая элегантность построения уравнений равновесия, в том числе

DES  
**CORPS DÉFORMABLES**

PAR

**E. COSSERAT**  
 Professeur à la Faculté des Sciences,  
 Directeur  
 de l'Observatoire de Toulouse

**F. COSSERAT**  
 Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,  
 Ingénieur en Chef  
 à la C<sup>e</sup> des Chemins de fer de l'Est

---

 PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1909

Рисунок 2. Первая книга моментной теории Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» 1909г.

с применением вариационных принципов, позволяющая в механическом поведении естественным образом учесть и чувствительность к масштабному параметру модели, и характер микроструктуры материала, чего не разрешает классическая модель [1, 80–83, 87, 142, 151, 152, 157, 161, 162, 179, 180, 182, 183, 189–191, 195, 196, 211]. Более того, специальным случаем микрополярной среды является классическая или симметричная теория упругости, в которой связь нагрузок между обеими сторонами поверхностного элемента описывается только лишь поверхностными силами. Данное условие порождает в элементе объёма симметричные тензорные поля напряжений и деформаций. Микрополярная среда это также модель упругого континуума, но с описанием движения твёрдых недеформируемых частиц, где связь нагрузок между обеими сторонами поверхностного элемента описывается не только главными вектором поверхностных сил но и главным вектором поверхностных пар, которые приводят к несимметричным тензорным полям напряжений и моментных напряжений [87, 188].

Известно, что многие авторы в своих ранних работах так или иначе указывают на необходимость дополнительного учёта поверхностных пар или вращательной степени свободы для уточнения модели. Так, еще в 1839 г. была опубликована работа Дж. Мак-Куллага [186], посвященная оптическому исследованию и построению модели упругой среды, способной одновременно описывать наблюдаемые эффекты отражения и преломления. Энергия деформации в континууме Мак-Куллага зависит от вращательных компонентов. В книгах Е. Моссотти (1851 г.), А. Клебша (1862 г.), Г. Кирхгофа (1874 г.) и П. Дюгема (1891 г.) также имеются отступления от законов классического континуума. В 1862 году А. Клебш ввел энергетически сопряженную пару для «вращательной энергии». О важности учета моментных напряжений говорилось и в работе В. Фойхта, (1887г.) [229],

где он рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием ее частиц при изучении упругих свойств кристаллов. Далее, братья Франсуа и Эжен Коссера обобщили и развили более ранние работы Г. Кирхгофа, А. Клебша, П. Дюгема и В. Фойхта, опубликовав одну из первых фундаментальных работ по несимметричной теории упругости, общую теорию Коссера [1, 152]. В своей работе братья Коссера развили теорию упругости, с помощью вариационного принципа, который они назвали «Евклидовым действием» («L'Action Euclidienne»). В классической теории упругости любой сколь угодно малый объём стягивается в точку и совпадает с материальной частицей, перемещение которой позволяет описать деформированное состояние. В своей модели братья Коссера для каждой частицы деформированной среды дополнительно ставят в соответствие ортогональный трёхгранник, полагая частицу жёсткой, не деформируемой. В этом случае тензорное поле деформаций среды описывается независимыми векторами перемещения и микроповорота, являющимися функциями пространственных координат и времени. Это приводит, в общем случае, к несимметричным тензорным полям напряжений и моментных напряжений [1, 83, 87, 142, 152, 157, 188, 190]. Примечательно, что Эринген один из первых ввёл закон сохранения микроинерции для среды Коссера, назвав теорию микрополярной. Ведь без закона сохранения микроинерции основные уравнения движения тензорных полей являются неполными и изменение положения тела при движении не может быть корректно определено [156].

Любопытно, что физически природу происхождения напряжений микрополярной среды наглядно можно показать на примере одновременного действия изгибающего и крутящего момента, передаваемого рёбрами микроструктуры пенополиуретана (поролон) или другого микрополярного материала (см. рисунок 3). В этом случае микровращение среды в локальной области соответствует повороту ребра микроструктуры. Так например для модели пены в рамках классической теории упругости Гибсон и Эшби учитывают одновременное действие силы и момента для определения упругих материальных параметров, однако не учитывают градиент микроповорота [163].

Положим, что в микрополярной среде возникает несимметричное тензорное поле напряжений с компонентами  $p_{ij}$ . В таком случае оно будет уравниваться моментным напряжением с компонентами  $\mu_{ij}$ . При этом кососимметричная часть тензора напряжений связана с аксиальными векторами макро- и микро-поворотов и может быть определена для изотропного материала с центром симметрии из выражения

$$p_{ij} = 2\alpha\epsilon_{ijk}(\vartheta_k - \varphi_k),$$

где  $\epsilon_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты;  $\alpha$  — материальный параметр микроструктуры, характеризующий моментные свойства материала;  $\varphi_k$  — микроповорот;  $\vartheta_k$  — макроповорот, определяемый из выражения

$$\boldsymbol{\vartheta} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u},$$

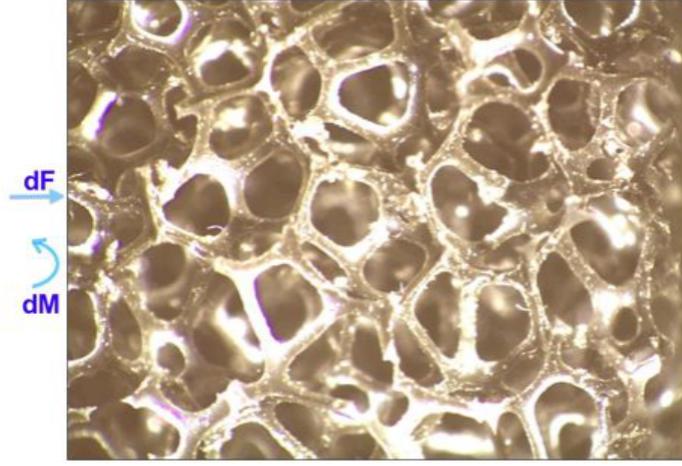


Рисунок 3. Ребро пенополиуретана по действию приращения силы  $dF$  и момента  $dM$

где  $\mathbf{u}$  — вектор макроперемещений. В таком случае определяющие соотношения примут вид

$$p_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\alpha \varepsilon_{ijk} (\vartheta_k - \varphi_k),$$

$$\mu_{ij} = \gamma \varphi_{k,k} \delta_{ij} + (\delta + \beta) \varphi_{j,i} + (\delta - \beta) \varphi_{i,j},$$

где  $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$  — материальные параметры микрополярной изотропной среды, они определяются из выражений

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}, \quad \mu = G, \quad \alpha = \frac{GN^2}{1 - N^2},$$

$$\gamma = 2G l_t^2 \frac{1 - \Psi}{\Psi}, \quad \delta = G l_t^2, \quad \beta = G(4l_b^2 - l_t^2),$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $N$  — число несимметричности «coupling number»;  $\Psi$  — полярный коэффициент «polar ratio»;  $l_t$  — масштабный параметр длины при кручении;  $l_b$  — масштабный параметр длины при изгибе [1, 87, 217].

Перечислим важные особенности микрополярной среды, которые были подтверждены теорией и экспериментами. Микрополярная теория достаточно точно предсказывает поведение среды при кручении [161] и изгибе [175] кругового цилиндра, прямоугольного сечения [205]. При этом жёсткость цилиндра больше с меньшим характерным размером сечения, чего не может предсказать классическая теория упругости. Подобные масштабные эффекты предсказываются и при изгибе пластин. Однако для растяжения или сжатия этот эффект отсутствует. Коэффициент концентрации напряжений для круглого отверстия меньше той величины, которую прогнозирует симметричная теория, при этом малый радиус отверстия имеет меньшую величину концентрации напряжений чем отверстие большего радиуса [190]. Для сравнения, классическая теория упругости не содержит математический аппарат способный связать кручение или изгиб с масштабным параметром

модели, например жёсткость круглого стержня или цилиндра зависит только лишь от его радиуса в четвёртой степени.

Стоит отметить ещё ряд работ в которых были выявлены экспериментальные эффекты, объясняемые микрополярной теорией упругости и противоречащие классической. Проявление микрополярных свойств материала было выявлено на образце костной ткани [206]. Примечательна работа [185], где с использованием метода голографического скрининга в исследуемом образце, в угловой его области, обнаружены деформации, противоречащие классической теории, но объясняемые микрополярной, которая учитывает несимметричные тензорные поля. Уменьшение деформаций наблюдалось с помощью голографии в работе [146]. Известны работы, в которых механизмы ротационной пластической деформации интерпретировались через градиенты теории микрополярного континуума [204].

Что касается материальных параметров, то ранняя теория упругости Навье [222] обладала лишь одной упругой характеристикой, в отличие от классической, при этом коэффициент Пуассона должен быть равен  $1/4$  для всех материалов. Эта теория основана на предположении, что силы действуют вдоль линий, соединяющих пары атомов, и пропорциональны изменениям расстояний между ними. От этой теории отказались на основании экспериментов, которые выявили диапазон изменения коэффициента Пуассона для различных изотропных материалов от  $-1$  до  $0.5$ .

Микрополярная среда имеет 6 степеней свободы, а именно 3 трансляционные и 3 ротационные, характерные для поворота микрочастицы. В результате чего данная модель чувствительна к масштабным параметрам и к характеру микроструктуры среды (см. рисунок 4), которая имеет 6 независимых материальных параметра для изотропного материала. В тоже время, классическая теория упругости обладает лишь тремя трансляционными степенями свободы и двумя материальными параметрами Ламе с симметричным тензором напряжений. Упрощённый вариант микрополярной теории, предложенный разными авторами ещё в 1960-х [5, 172, 191, 226], предполагает, что векторы макровращения и микровращения равны, а вклад в энергию деформаций оказывает градиент и ротор макроремещений. Это соответствует параметру  $N = 1$  или,  $\alpha = \infty$  для микрополярной теории упругости. Данную модель обычно называют в зарубежной литературе моментной теорией Койтера «couple stress elasticity» или стеснённой теорией Коссера (псевдоконтинуум Коссера, Модель Аэро-Кувшинского), в которой, помимо двух материальных параметров Ламе, существуют две дополнительные, связанные с характеристикой длины микроструктуры, что соответствует 4 изотропным упругим константам.

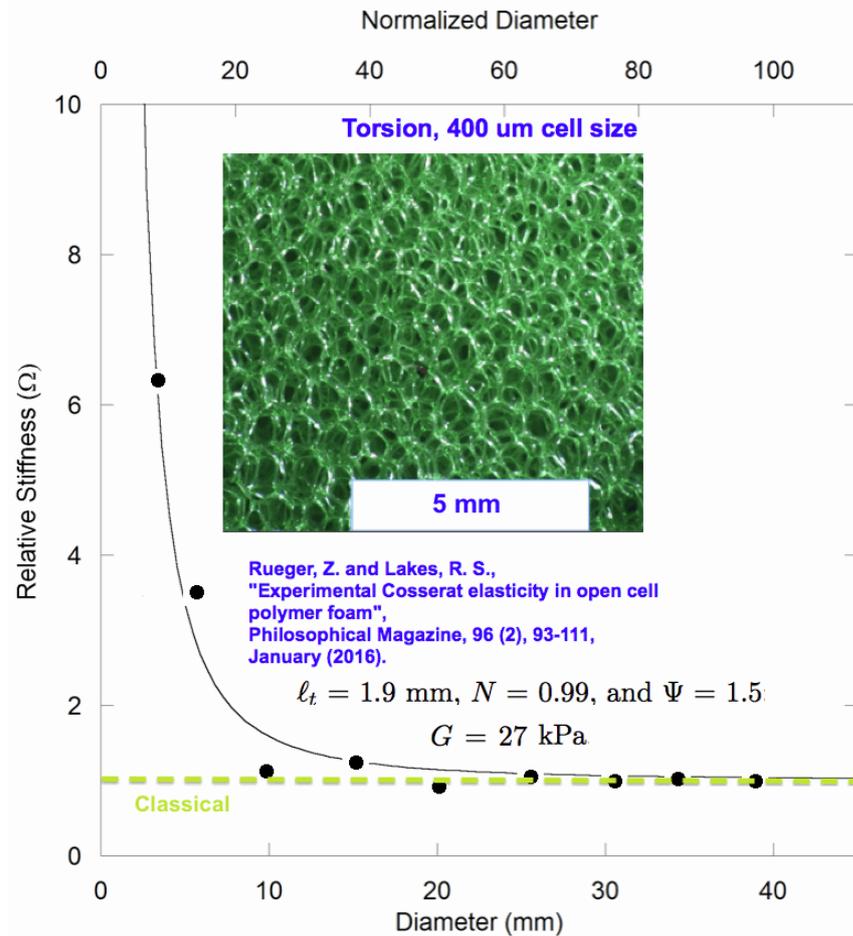


Рисунок 4. Влияние масштабного параметра на относительную жёсткость образца из пенополиуретана

Теория микроструктурной упругости [189], также называемая микроморфной упругостью имеет вектор микроперемещений. Это позволяет точкам континуума перемещаться, вращаться и деформироваться. Безусловно это усложняет модель, но в тоже время позволяет учесть деформации микроструктуры. Например, для изотропного твёрдого тела существует 18 микроморфных упругих констант по сравнению с 6-ю материальными параметрами упругой микрополярной среды (или среды Коссера).

Следует отметить, что в многочисленных работах Лейкса, совместно с другими авторами, по эксперименту пенополиуретанов различной плотности и структуры [145, 184, 211] или костной ткани [181] на изгиб и кручение, было установлено хорошее соответствие поведения образцов с микрополярной теорией (средой Коссера). Очевидно, что в этом случае упругие характеристики среды возрастают с уменьшением образца материала, что противоречит классической теории упругости (см. рисунок 4) [211]. Так например, для плотного (изотропного) пенополиуретана с плотностью  $340 \text{ кг/м}^3$  в рамках микрополярной теории упругости установлены следующие упругие материальные параметры [184]:  $E = 300 \text{ МПа}$ ,  $G = 104 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $\ell_t = 0.62 \text{ мм}$ ,  $\ell_b = 0.33 \text{ мм}$ ,  $N^2 = 0.04$ ,  $\Psi = 1.5$ . При этом размер ячейки варьируется от  $0.05 \text{ мм}$  до  $0.15 \text{ мм}$ . Для плотного не ретикулированного полимета-

криламида с плотностью  $380 \text{ кг/м}^3$  характеристики среды следующие [145]:  $E = 637 \text{ МПа}$ ,  $G = 285 \text{ МПа}$ ,  $l_t = 0.80 \text{ мм}$ ,  $l_b = 0.77 \text{ мм}$ ,  $N^2 = 0.04$ ,  $\Psi = 1.5$ . Размер ячейки около  $0.65 \text{ мм}$ .

За последнее время в России большое количество исследований было посвящено именно развитию микрополярной теории. Здесь стоит отметить работы таких авторов как Э.Л. Аэро [5], Г.Л. Бровко [7], В.И. Горбачев [18], В.И. Ерофеев [158], В.А. Еремеев [27], П.А. Жилин [31], Е.В. Кувшинский [5], М.А. Кулеш, В.А. Ломакин [36], В.П. Матвеев, М.У. Никабадзе [83], В.М. Садовский [218], С.О. Саркисян [119, 120], И.Н. Шардаков [42, 50, 52, 56], В.С. Шоркин [135–139, 220]. К моделям обобщенных континуумов, учитывающих размерные эффекты, относятся и модели с поверхностными эффектами, которые рассматривались в работах П.А. Белова и С.А. Лурье [70], В.А. Еремеева и Н.Ф. Морозова [?]. Хотелось бы отметить диссертационную работу Ю.О. Соляева [127], в которой представлены формулировки и развитие градиентной теории упругости изотропных сред в форме Миндлина-Тупина и градиентной теории электроупругости. В этом случае удельная энергия упругих деформаций и определяющие соотношения градиентной теории упругости имеют вид

$$W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \underline{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mathbb{A}}} \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\eta}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mathbb{A}}} \otimes \underline{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\boldsymbol{\eta}}},$$

где  $\otimes^k$  —  $k$ -е внутреннее произведение;  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — классический тензор деформаций второго ранга;  $\underline{\boldsymbol{\eta}} = \nabla \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — градиент тензора деформаций;  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  — тензор напряжений Коши второго ранга классической теории упругости;  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$  — тензор напряжений третьего ранга (double stress);  $\underline{\boldsymbol{\mathbb{A}}}$  — материальный тензор четвёртого ранга;  $\underline{\boldsymbol{\mathbb{A}}}$  — материальный тензор шестого ранга. Градиентные теории можно рассматривать как частный случай моделей сред с микроструктурой (среды Коссера, микрополярной или микроморфной среды) путем введения гипотез о пропорциональности вектора микро- и макроповоротов [189].

Микрополярная модель оказалась полезной для построения неклассических сред для тонкостенных конструкций — тонких тел, стержней, пластин и оболочек, представленных в работах авторов М.У. Никабадзе [83], С.О. Саркисяна [119, 120], С.А. Амбарцумяна [4], В.А. Дудникова, С.А. Назарова [26], В.А. Еремеева, Л. М. Зубова [28] и других авторов. Различные аспекты моделей несимметричной среды можно найти также в работах А.А. Ильюшина, В.А. Ломакина [36], И.А. Кунина [57], Л.И. Седова [121], В.С. Шоркина [137–139]. Однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной работы, которая ограничивается областью трёхмерных задач микрополярной среды.

В данной работе для учета масштабных эффектов при решении некоторых краевых задач микрополярной теории упругости, а также для возможности определения материальных параметров формулируется вариационный принцип Лагранжа в обобщённых кинематических полях применительно к материалам с центром симметрии произвольной ани-

зотропии при изотермических и неизотермических процессах (обобщённый принцип Дюамеля–Неймана). Доказывается эквивалентность формулировок краевой и вариационной постановок задачи. Используя метод Ритца краевая задача приводится к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений. Для чего искомые кинематические векторные поля перемещений и микровращений раскладываются в ряд по базисным кусочно-полиномиальным функциям лагранжева (8-узловой КЭ) и серендипова (20-узловой КЭ) семейства. Для улучшения аппроксимации лагранжевыми многочленами (8-узловой КЭ), в том числе для почти несжимаемой среды, выполнено обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования на микрополярную среду. Рассматривается подход, в котором для аппроксимации искомых векторных полей перемещений и микровращений используются полиномы смешанной степени. Апробация построенной механической модели выполняется на элементарных трёхмерных задачах микрополярной теории упругости и сравниваются с результатами экспериментальных данных.

Кроме того, в работе выполняется построение вариационной формулировки модели натянутой нити или системы нитей включая обобщение на микрополярную среду. Безусловно, механика абсолютно гибких растяжимых (нерастяжимых) нитей или упругих стержней имеет свою историю, которая начинается с конца XVII века [140]. Первые исследования по упругим на изгиб линиям принадлежат Я. Бернулли и Л. Эйлеру. Ж. Лагранж в трактате по аналитической механике отдельную главу посвятил статике гибкой и упругой при изгибе нити. Проблема упругого равновесия тонкого стержня двойкой кривизны была поставлена Г. Кирхгоффом в 1859 г. Дальнейшее развитие теория гибких упругих стержней получила в работах А. Клебша, А. Лява. Современная теория абсолютно гибкой нити наиболее полно представлена в монографии Ю.В. Якубовского, В.С. Живова, Я.И. Коритыцкого, И.И. Мигушова [143], в учебнике Д.Р. Меркина [72] и других выдающихся учёных [73, 86, 104, 123]. А создателем самостоятельного раздела классической механики нити несомненно является А. П. Минаков. В своей фундаментальной работе “Основы механики нити” [74] А. П. Минаков изложил основные положения механики идеально гибкой нити для статических и динамических задач, объединив и существенно дополнив труды своих предшественников. Однако данная работа ограничена механической формулировкой модели идеально гибкой нити в рамках задачи Л. Эйлера о нахождении величины уменьшения растягивающего усилия из-за силы трения по длине нити изогнутой по дуге и попыткой обобщения данной задачи на микрополярную среду. Подход основан в том числе на параметризации кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , что позволяет учесть сложную геометрию, выписав уравнения равновесия для произвольной точки нити. Главное преимущество данного подхода – интуитивно понятная и простая модель, обладающая достаточной точностью, чтобы позволить исследователям и инженерам оценить особенности преднапряженной классической и микрополярной среды.

## Актуальность темы

Микрополярная теория обеспечивает получение уточненных решений, зависящих от масштабных параметров и микроструктуры материала, для задач с высокой концентрацией напряжений, которая может реализовываться вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах (микрочастицах, пленках, наночастицах), в наноструктурированных средах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов. Соответственно построение таких уточненных решений может быть полезным при разработке новых микро- нано- механических устройств, при моделировании и прогнозе свойств перспективных наноструктурированных сплавов и композиционных материалов, при описании свойств механических метаматериалов с нелокальным характером внутренних взаимодействий.

Важнейшим вопросом является разработка численных методов в рамках градиентных теорий для создания конечно-элементных решателей, обеспечивающих достаточную скорость сходимости при повышенном числе степени свободы кусочно-полиномиальных функций не прибегая к существенным вычислительным затратам.

Что касается моделирования преднапряжённого состояния, то стоит отметить, что данная задача имеет большое практическое значение при проектировании уникальных сооружений атомных электростанций, поскольку позволяет оценить эксплуатационную пригодность преднапряженного контейнента или защитной оболочки энергоблока атомной электростанции. Именно преднапряжение контейнента формируется посредством стальных армоканатов, расположенных в теле защитной оболочки контейнента. С другой стороны, есть интерес в использовании модели натянутых нитей, например в мостостроении или при создании композиционных материалов летательных аппаратов, в которых также важно учитывать преднапряжение или перераспределение усилий в краевых элементах, чтобы в естественном состоянии (при эксплуатации) разгрузить зоны концентрации напряжений.

## Цели и задачи работы

Целью диссертации является развитие вариационной модели и построение численного решения микрополярной теории упругости, включая неизотермические процессы и начальные тензорные поля, для достоверного и корректного описания масштабных эффектов, возникающих в упругих материалах с микроструктурой, возможности определения материальных параметров наряду с аппроксимацией решения, обладающей достаточной точностью и небольшой ресурсоемкостью.

Целью также является развитие модели натянутой нити с обобщением её на микрополярную среду, в основе которой лежит вариационный принцип Лагранжа и работа

нити на поле перемещений и микровращений. Данная механическая модель имеет важное практическое значение в вопросах проектирования уникальных сооружений АЭС.

Создание собственной программы с использованием методов параллельных вычислений, реализуемых на видеокарте с технологией GPGPU также является целью данной работы.

## Научная новизна

Все включенные в диссертацию результаты являются новыми.

1. Для оценки масштабных эффектов и возможности определения материальных параметров в рамках трехмерной постановки предложен подход в котором, в отличие от существующего [165, 192, 230–232], краевая задача микрополярной теории упругости приводится к системе линейных алгебраических уравнений в сокращенной тензорно-блочной форме. Подход основан на методе Ритца и вариационном принципе Лагранжа. Для материалов с центром симметрии изотропной, ортотропной и трансверсально-изотропной среды выписаны по компонентам выражения тензорно-блочных матриц жесткости, в том числе при неизотермических процессах [107–111, 114, 212–216].
2. На примере задачи о кубе для изотропного микрополярного материала показано, что если положим материальный параметр  $\alpha = 0$ , то получим расщепленную систему уравнений относительно независимых переменных макродеремещений  $\hat{w}$  и микроповоротов  $\hat{\psi}$ . Если  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  то получим однородные уравнения для аппроксимации поля перемещений и микровращений. Учитывая свойство расщепления можно получить поле микроповоротов эквивалентное макродеремещениям и оценить корректность реализованной модели [110, 215].
3. Так, из законов (постулатов) механики и термодинамики для функции свободной энергии при неизотермических процессах, выполняется построение упругого потенциала и вводится энергетически сопряжённая пара, которая учитывает тепловые изгибы-кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями (деформаций, изгибов-кручений, напряжений, моментных напряжений), образованные либо источниками немеханической природы, либо являющиеся результатом решения несвязанной задачи [109, 214]. При этом тепловая структура может отличаться от механической, что означает различие материальных тензоров тепловой и механической структуры. Это является актуальным для проектирования современных метаматериалов, испытывающих тепловые расширения и изгибы-кручения [37].
4. Стоит отметить, что аппроксимация искомым векторным полям перемещений и микровращений в рамках трёхмерной микрополярной теории упругости была выполнена

с помощью полиномов смешанной степени. Это позволило увеличить скорость сходимости итерационного процесса при решении системы линейных алгебраических уравнений методом сопряжённых градиентов, получаемой из условия стационарности дискретного лагранжиана [111, 216]. Однако в работе [41–43] упоминается аппроксимация полиномами смешанной степени для двумерной задачи микрополярной теории.

5. А для улучшения аппроксимации кинематических полей перемещений и микровращений полиномами лагранжева типа применяется обобщение на микрополярную теорию метода редуцированного и селективного интегрирования в тензорном виде, в том числе для почти несжимаемого материала [110, 215]. На практике это позволяет на порядок повысить точность аппроксимации полиномами лагранжевого типа. В рамках симметричной теории упругости этот метод хорошо известен для построения трехмерных моделей, пластин и оболочек [167, 231].
6. Новым также является реализация модели натянутой нити с обобщением на микрополярный континуум, в основе которой была использована параметризация кривой с введением евклидовой метрики. Аналогичный подход был предложен ранее в рамках классической теории упругости [107, 108].
7. В трёхмерной постановке выполнены задачи о кручении цилиндрического тела, о цилиндрическом изгибе пластинки, о чистом изгибе цилиндрического тела, о призме с отверстием, задача о кубе и о толстостенном цилиндре конечных размеров с натянутыми нитями.

Приведение краевой задачи к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и её вычисление выполняется в собственной программе, выполненной на основе стека CUDA C для многопоточных параллельных вычислений на графических видеокартах GPGPU. Это позволило на порядок повысить скорость вычислений для механических моделей микрополярной среды.

## Теоретическая и практическая значимость

Представленные результаты диссертационной работы определяют её теоретическую значимость. Для учета масштабных эффектов и возможности определения материальных параметров предложен подход по линеаризации упругого потенциала свободной энергии для материалов произвольной анизотропии, при котором краевая задача приводится к системе линейных алгебраических уравнений в сокращенной тензорно-блочной форме. Это позволяет отказаться от записи большеразмерных матричных операторов градиентов и использовать более компактную запись уравнений равновесия, основанную на использовании сокращенной тензорной формы. Особое значение имеет точность аппроксимации

кинематических величин при экономии вычислительных ресурсов. Обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования позволяет существенно повысить точность для лагранжевых полиномов не усложняя механическую модель и избегая более детальную аппроксимацию упругой среды или использование полиномов высшего порядка.

Практическая значимость в научно-технических областях продиктована особым интересом или запросом на использование градиентных моделей в рамках обоснований (экономической целесообразности или оптимального использования материалов) или исследования феномена масштабных эффектов в научно-экспериментальной и исследовательской области, включая моделирование в областях био- нано- или микромеханики.

В частности, предложенный подход построения численного решения позволяет исследовать микрополярные модели (с микро- или наноструктурой), их механические (термомеханические) эффекты, масштабные эффекты с целью определения материальных параметров или создания новых свойств композиционных материалов.

Важную практическую роль имеет модель натянутых нитей для проектирования уникальных сооружений отечественных и зарубежных АЭС. Потому как оценка эксплуатационной пригодности энергоблоков зависит от минимального уровня обжатия системы преднапрягаемых арматурных канатов, расположенных в теле железобетонного контейнента [105,106,129]. Более того, на период написания данной диссертационной работы, как в России, так и за рубежом, не было представлено механической модели преднапряжённых канатов, которая могла бы учесть произвольную топологию (или кривизну) канатов в классической и микрополярной теории упругости с учётом масштабных эффектов и микроструктуры материала.

## Методология и методы исследования

Формулировка рассматриваемой микрополярной теории основана на использовании вариационного подхода, в частности, привлекаются постулаты механики (для вывода дифференциальных уравнений равновесия и доказательство их эквивалентности вариационной формулировке задачи) и законы термодинамики для построения функционала свободной энергии при неизотермических процессах (обобщённый принцип Дюамеля-Неймана), а также принцип минимума полной потенциальной энергии и принцип наименьшего действия с учётом тепловых изгибов-кручений с начальными тензорными полями (деформаций, изгибов-кручений, напряжений, моментных напряжений) [4, 5, 11, 31, 35, 36, 69, 70, 75–77, 87, 96, 97, 99, 121, 130, 141, 142, 152, 156, 157, 189–191, 198, 200, 203, 208, 223]. Все решения построены в предположении линейных физических соотношений и малых деформаций с использованием теории тензорного исчисления [14, 23, 24, 40, 66, 94, 200, 228]. Для построения численного решения уравнений в частных производных использована теория метода конечных элементов [128, 230–232].

При дискретизации вариационных уравнений равновесия по пространственным координатам и доказательства эквивалентности формулировок дифференциальных и вариационных уравнений (условие существования стационарности и минимума потенциальной энергии) использовалась техника дифференцирования по Гато [32, 133].

Для построения изотропных, ортотропных и трансверсально – изотропных тензоров применялись правила ортогональных преобразований и построения систем линейно независимых изотропных тензоров чётного ранга путём попарного перебора всевозможных комбинаций мультипликативных базисов [24, 60, 63, 65, 66, 70, 94, 198].

Для создания собственного решателя на основе построенного численного решения использовался язык программирования C++, CUDA C, благодаря чему удалось применить технологию многопоточных параллельных вычислений для разреженных матриц большой размерности.

## Положения, выносимые на защиту

1. Для оценки масштабных эффектов и возможности определения материальных параметров в рамках вариационной постановки был предложен подход, согласно которому условие стационарности упругого потенциала (интегральное тождество) для микрополярного материала с центром симметрии произвольной анизотропии позволяет прийти к системе линейных алгебраических уравнений в тензорно-блочном виде без использования матричных операторов градиентов. Это позволило выписать систему линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропного, ортотропного и изотропного материалов при неизотермических процессах с использованием тензорного аппарата механики, заменив матричные представления сокращённой тензорной формой.
2. На примере задачи о кубе для изотропного микрополярного материала показано, что если принять материальный параметр  $\alpha = 0$ , то получим расщепленную систему уравнений относительно независимых переменных макроперемещений  $\hat{w}$  и микроповоротов  $\hat{\psi}$ . Данное свойство приводит не только к системе линейных алгебраических уравнений симметричной теории упругости относительно первого блока, но и к однородным уравнениям для аппроксимации поля перемещений и микровращений, что отражает одинаковую сущность математического аппарата, схожего с классической теорией упругости. Это нетрудно заметить, если в уравнениях равновесия принять материальные параметры  $\alpha = 0, \beta = 0$ .
3. Из задачи о чистом и цилиндрическом изгибе микрополярного материала установлено, что наряду с классическими напряжениями (в общем случае изменяющиеся по сечению) возникают постоянные по сечению моментные напряжения. Аналогичный эффект наблюдается и для задачи о кручении изотропного микрополярного материала.

ла, когда наряду с касательным напряжением в сечении возникают соответствующие моментные напряжения.

4. Решения микрополярной теории упругости, в силу материальных параметров разной размерности в определяющих соотношениях, способны моделировать масштабные эффекты, подтверждаемые экспериментом. Жёсткость при кручении (изгибе) или концентрация напряжений вблизи круглого отверстия зависят от масштабных параметров образца, характера микроструктуры (радиуса, толщины, размера пор или включений). Это позволяет предсказать масштабные эффекты и определить материальные параметры модели из численного эксперимента.
5. Из законов термодинамики для функции свободной энергии при неизотермических процессах (обобщённый принцип Дюамеля–Неймана) построен упругий потенциал и введена энергетически сопряжённая пара, которая учитывает тепловые изгибы-кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями (деформаций, изгибов-кручений, напряжений, моментных напряжений), образованные либо источниками немеханической природы, либо являющиеся результатом решения несвязанной задачи. При этом тепловая структура может отличаться от механической, что означает различие материальных тензоров тепловой и механической структуры.
6. На основе метода Рунге для аппроксимации искомого векторного поля перемещений и микровращений был сформулирован обобщенный метод редуцированного и селективного интегрирования в тензорном виде и использованы полиномы смешанной степени, что на практике привело к повышению точности аппроксимации на порядок (наряду с уменьшением количества итераций при решении СЛАУ) для рассмотренных задач.
7. На основе вариационной постановки (1.10.1) и параметризации кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$  через работу сил и моментов нити на соответствующих макроперемещениях и микровращениях была сформулирована модель натянутой нити с обобщением решения Эйлера на микрополярную среду.
8. Выполнено сравнение численного решения механических моделей с аналитическими решениями и результатами эксперимента элементарных трёхмерных задач микрополярной теории упругости. Представлено решение задачи о призматическом теле, ослабленном круговым отверстием при одноосном растяжении; о кубе при различных вариациях масштабного параметра и моментного числа; решение задачи о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями.

## Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов определяется применяемыми строгими методами механики деформируемого твердого тела, привлечением вариационных принципов для формулировки моделей, использованием апробированных подходов микромеханики композиционных материалов, методов теории дифференциальных уравнений и тензорного анализа. Проводится сопоставление аналитических и построенных численных решений, для оценки корректности последних. Проводится сопоставление результатов моделирования с известными экспериментальными данными, для подтверждения результатов расчетов и идентификации дополнительных параметров моделей.

Результаты диссертационной работы докладывались на российских и международных конференциях, семинарах и симпозиумах:

- 51 школа-конференция «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ», Великий Новгород, 19–21 июня 2024 г.;
- XXX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова., г. Кременки, Калужская область, Russia, 20–24 мая 2024 г.;
- Международная научная конференция «МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК», посвященная 85-летию академика В.А. Садовниченко, Москва, 1–2 апреля 2024 г.;
- XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 19–23 июня 2023 г.;
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019 г.;
- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева; д.ф.-м.н., проф. М.У. Никабадзе; д.т.н., проф. С.А. Лурье 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019 г.;
- International Conference on Nonlinear Solid Mechanics (ICoNSoM) Рим, Италия, 16-19 июня 2019;
- Доклад на международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В.А. Садовниченко, 2019 г.;
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2016 г.;
- Инженерные системы. Международный информационно-выставочный центр «Инфо-Пространство», Москва, 2016 г.

## Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 11 печатных работах [84, 105–114, 212–216], 5 из них [212–216] в индексируемых базах данных Scopus, RSCI Web Of Science.

За время изысканий и написания диссертационной работы автором был оформлен патент №2375528 «Анкер для закрепления пучка преднапрягаемых канатов», 2009 г. и более двадцати авторских свидетельств наиболее значимые из которых:

- №2010613486 «Модуль матричного счисления интерполяционных функций форм гексаэдров КЭ модели», 2010 г.;
- №2010613485 «Модуль задания усилий преднапряжения армоканатов», 2010 г.;
- №2010613484 «Модуль записи-чтения матриц КЭ модели оболочки, КЭ модели армоканатов», 2010 г.;
- №2010613483 «Модуль задания сил преднапряжения в узлах КЭ модели оболочки», 2010 г.;
- №2010613364 «Модуль математического анализа численных параметров КЭ модели оболочки и КЭ модели армоканатов СПЗО», 2010 г.

## Личный вклад автора

Представленные в диссертации результаты получены автором лично. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, построении вариационных уравнений и их численного решения, в проведении численных экспериментов, в анализе полученных результатов, в составлении публикаций с последующим предоставлением их для печати в рецензируемых журналах, в подготовке презентаций для выступлений на симпозиумах и международных конференциях.

## Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Текст диссертации составляет 133 страниц, включая 32 рисунка и 8 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 233 наименования.

**В первой главе** представлены общие положения микрополярной теории с описанием кинематических соотношений, условий совместности деформаций. На основе постулатов механики (закона сохранения массы и микроинерции, закона сохранения количества движения и момента количества движения) выписываются уравнения движения и формулируется дифференциальная постановка краевой задачи смешанного типа. Далее, используя законы термодинамики вводятся параметры и соотношения для замкнутой термоди-

намической системы (обратимого/необратимого процесса) и строится упругий потенциал свободной энергии для неизотермических процессов (обобщённый принцип Дюамеля-Неймана) с учётом начальных тензорных полей деформаций и напряжений. Формулируется вариационная постановка задачи и доказывается её эквивалентность дифференциальной постановке, условия существования стационарности и (теорема) принцип минимума потенциальной энергии с использованием техники дифференцирования по Гато. Выполняется построение вариационной модели натянутой нити основанной на обобщении решения Эйлера о потере усилий преднапряжённой нити и на параметризации кривой с введением евклидовой метрики. **Во второй главе** на основе метода Ритца выполняется дискретизация вариационных постановок по пространственным координатам. Используя кусочно-полиномиальные функции смешанной степени, вариационные уравнения неизотермических процессов приводятся к компактной тензорно-блочной форме записи системы линейных алгебраических уравнений для микрополярных материалов с центром симметрии произвольной анизотропии, включая модель натянутой нити. Выполняется построение и обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования для полиномов трилинейного типа на микрополярную среду. Описывается дискретная модель натянутой нити. **Третья глава** посвящена анализу численного решения некоторых трёхмерных задач классической и микрополярной теории упругости. Здесь для верификации и иллюстрации построения численного решения задач в вариационной постановке для классической и микрополярной теории упругости, описанной в предыдущих главах, рассмотрены некоторые трёхмерные задачи: задача о кручении цилиндрического тела, задача о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины, задача о чистом изгибе цилиндрического тела, задача о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия призматического тела, задача о кубе, задача о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряжёнными нитями. Кроме того, результаты решения элементарных трёхмерных задач микрополярной теории упругости, таких как задача о кручении цилиндрического тела и задача о чистом изгибе цилиндрического тела, имеют сравнение с результатами эксперимента.

# Основные положения микрополярной теории упругости

## 1.1. Кинематика макро- и микрообласти

Рассмотрим материальный объем макрообласти  $V_0$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma_0$  и его материальный вектор  $\mathbf{r}_0$  в момент времени  $t_0$ . За  $\mathbf{r}$  обозначим материальный вектор в момент времени  $t$ . Тогда, вектор перемещения точек макрообласти можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad u^j = u^j(x^i, t), \quad x^i|_{t_0} = X^i = \xi^i, \quad \mathbf{r}_0 = X^i \mathbf{K}_i = \xi^j \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{r} = x^i \mathbf{K}_i = \xi^j \mathbf{e}_j, \quad (1.1.1)$$

где  $\mathbf{E}_i, \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$  – материальный базис начальной (в момент времени  $t_0$ ) и актуальной конфигурации, соответственно;  $X^i, x^i$  – пространственные координаты начальной и актуальной конфигурации, соответственно;  $\xi^i, \mathbf{K}_i$  – материальные координаты и декартов базис соответственно. Теперь рассмотрим индивидуальную частицу макрообласти, выбранную координатами  $X^\alpha = \xi^\alpha$ . Частица содержит начало координат, от которого в момент времени  $t_0$  материальный радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  выделяет индивидуальную частицу микрообласти с координатами  $\dot{X}^\alpha = \dot{\xi}^\alpha$ , и в любой последующий момент времени её положение определено вектором  $\mathbf{r}$ , а его начало координат меняется вместе с вектором перемещения макрообласти  $\mathbf{u}$ . Запишем вектор перемещения точек континуума микрообласти:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad u^j = u^j(x^i, \dot{x}^i, t), \quad \dot{x}^i|_{t_0} = \dot{X}^i = \dot{\xi}^i, \quad \mathbf{r}_0 = \dot{X}^i \mathbf{K}_i = \dot{\xi}^j \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{r} = \dot{x}^i \mathbf{K}_i = \dot{\xi}^j \mathbf{e}_j, \quad (1.1.2)$$

где  $\mathbf{E}_i, \mathbf{e}_i, \dot{X}^i, \dot{x}^i, \dot{\xi}^i$  – аналогичные (1.1.1) параметры для микрообласти.

Введём набла операторы для макро- и макрообласти:

$$\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{E}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \mathbf{K}_i \frac{\partial}{\partial X^i}, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{E}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \mathbf{K}_i \frac{\partial}{\partial X^i}, \quad \nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \mathbf{K}_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \mathbf{K}_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.1.3)$$

где  $\overset{\circ}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$  – набла операторы начальной конфигурации для макро- и микрообласти, соответственно;  $\nabla, \nabla$  – аналогичные набла операторы актуальной конфигурации. Абсолютная величина компонент тензоров дисторсии как и самих тензоров дисторсии для начальной и актуальной конфигурации предполагается много меньше единицы, и, следовательно, между набла операторами разных конфигураций нет существенного различия. Перечисленные особенности и сосавляют основное допущение о линейности и малости тензоров

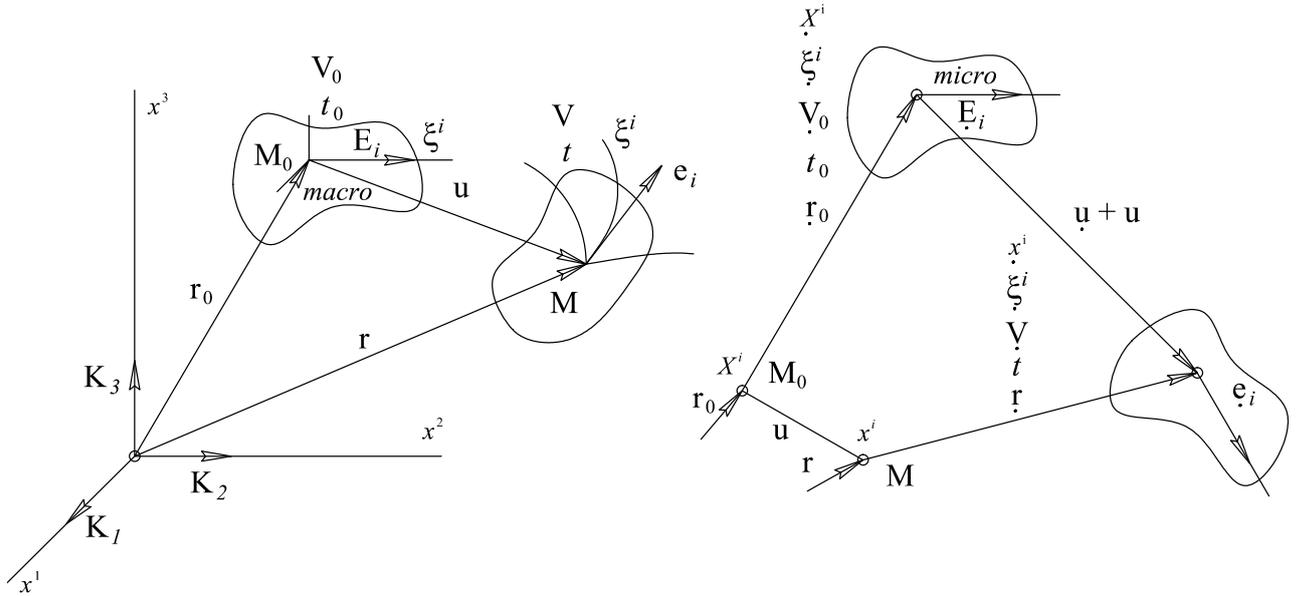


Рисунок 1.1. Кинематика малой области представительного объема микрополярной теории

деформаций микрополярной теории

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} \right| \ll 1. \quad (1.1.4)$$

Ввиду принятого допущения о линейности и малости тензоров деформаций, далее набла операторы будем обозначать без кружочка.

Предположим, что микроперемещения могут быть аппроксимированы в виде суммы ряда произведений функции координат микрообласти  $x_i$  и функции  $\psi_{ij}$ , зависящей от координат макрообласти  $x_i$  и времени  $t$ . Сохраняя только линейные члены ряда запишем следующее выражение [142, 189]

$$\dot{u}_j = x_k \psi_{kj}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{x} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}, \quad (1.1.5)$$

где  $\cdot$  — однократное умножение (свертка);  $\psi_{kj}$  — функция координат макрообласти  $x_i$  и времени  $t$ , в работе [142], с точностью до обозначения, именуется также компонентами тензора микросмещения в составе материального базиса, введенного на основании аксиомы аффинного движения. Тогда градиент перемещений микросреды имеет вид:

$$\nabla_i \dot{u}_j = \psi_{ij}, \quad \nabla \dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\psi}}, \quad (1.1.6)$$

откуда видно, что микродеформации  $\psi_{ij}$  приняты однородными в микрообласти и неоднородными в макрообласти. Кроме того, учитывая (1.1.4), имеем  $|\psi_{ij}| \ll 1$ . Представим компоненты тензора микродеформаций  $\psi_{ij}$  в виде суммы симметричной и кососимметрич-

ной части, последнюю из которых выразим через аксиальный вектор [83, 189]

$$\underline{\psi} = \frac{1}{2} (\underline{\psi} + \underline{\psi}^{\mathbf{T}}) + \frac{1}{2} (\underline{\psi} - \underline{\psi}^{\mathbf{T}}), \quad \frac{1}{2} (\underline{\psi} + \underline{\psi}^{\mathbf{T}}) = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{2} (\underline{\psi} - \underline{\psi}^{\mathbf{T}}) = \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1.7)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}$  — аксиальный вектор поворота микрочастицы,  $\underline{\mathbf{C}}$  — тензор Леви-Чивиты или дискриминантный тензор третьего ранга [83]. Важно отметить, что в выражении (1.1.7) симметричная часть тензора микродеформаций отлична от нуля, если микрочастицы деформируемы [155], однако в рамках микрополярной теории упругости рассматривается движение твёрдых частиц, т. е. без микродеформаций. При этом кососимметричная часть выражается через аксиальный вектор микроповорота твёрдой микрочастицы или жёсткого триэдра Коссера [152].

Введём тензор относительных деформаций микрополярной теории упругости, который является разностью градиента перемещений макрообласти и микроповоротов, (см. рисунок 1.2)

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \gamma_{ij} = \partial_i u_j - \epsilon_{ijk} \varphi_k, \quad (1.1.8)$$

где градиент макроперемещений  $\nabla \mathbf{u}$  можно выразить через симметричный тензор микродеформаций и кососимметричный вектор микроповорота

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}}), \quad \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}}), \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i u_j C^{ijk} \mathbf{r}_k, \quad \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\theta} = C_{ijk} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k \cdot \frac{1}{2} \nabla_m u_n C^{mnp} \mathbf{r}_p = C_{ijk} C^{mnk} \frac{1}{2} \nabla_m u_n \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \\ &= (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_j^m \delta_i^n) \frac{1}{2} \nabla_m u_n \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i) \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}}), \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где  $\boldsymbol{\theta} = 1/2 \mathbf{rot} \mathbf{u}$  — вектор макровращений. Следовательно, относительный тензор деформаций микрополярной теории упругости можно представить через вектор микроповорота

$$\boldsymbol{\gamma} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\mathbf{C}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\theta}). \quad (1.1.10)$$

Учитывая выражение кососимметричной части микродеформаций через аксиальный вектор микроповорота, получим градиент микроповорота или тензор изгибов–кручений [83, 87, 189]

$$\underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}. \quad (1.1.11)$$

Не трудно заметить, что в микрополярной среде, учитывая (1.1.7), компоненты градиента тензора микродеформаций  $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}$  [189] связаны с компонентами тензора изгибов–кручений  $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}$  следующими соотношениями

$$\underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}} = \nabla (\underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}), \quad \varkappa_{ijk} = \partial_i \psi_{jk} = \partial_i \epsilon_{jkm} \varphi_m, \quad \frac{1}{2} (\varkappa_{ijk} - \varkappa_{ikj}) = \partial_i \epsilon_{jkm} \varphi_m, \quad (1.1.12)$$

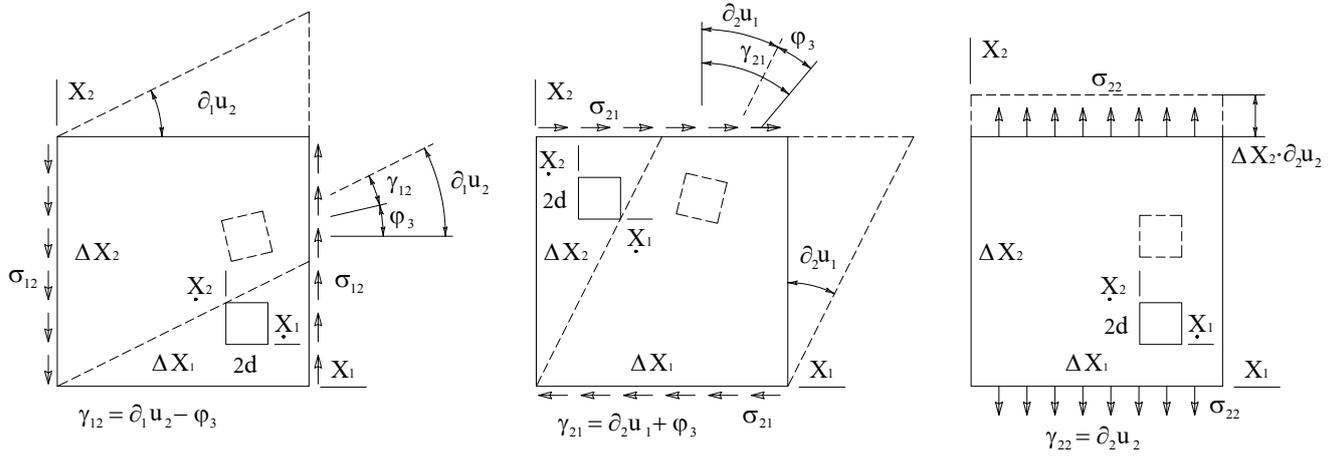


Рисунок 1.2. Компоненты относительных деформаций и напряжений.

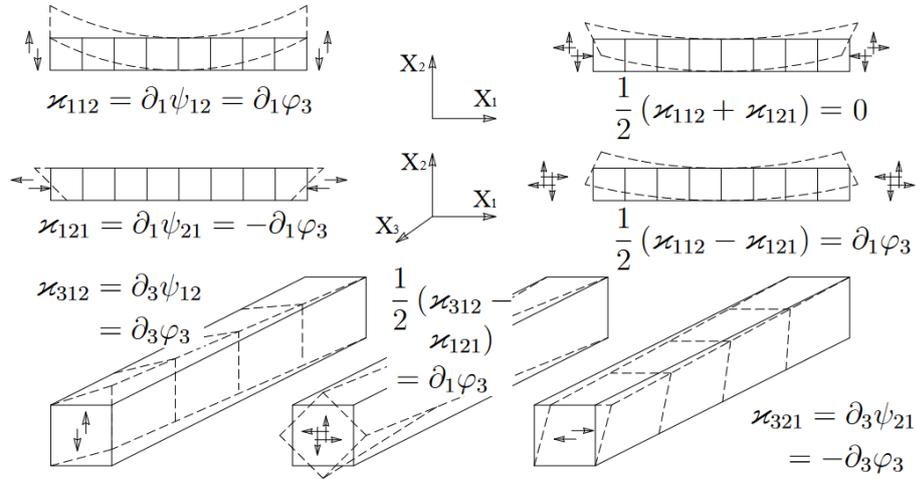


Рисунок 1.3. Компоненты градиента микродеформаций и изгиба-кручения.

физический смысл которых проиллюстрирован на рисунок (1.3).

Запишем условия совместности деформаций в линейной микрополярной теории, которые состоят из 18 уравнений [83]

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = 0, \quad \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + I_1(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) \underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^T = 0, \quad (1.1.13)$$

где  $\otimes$  — знак внутреннего 2-произведения (двойное скалярное произведение). В общем случае для микрополярной среды данные тензоры несимметричны, также как и тензоры деформаций, изгибов-кручений.

## 1.2. Тензоры напряжений и моментных напряжений

Рассмотрим материальный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma$ , на элемент которой действует вектор напряжений  $\mathbf{P}$  и вектор моментных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$ , формирующие поверхностные силы  $\mathbf{P} d\Sigma$  и моменты  $\boldsymbol{\mu} d\Sigma$ .

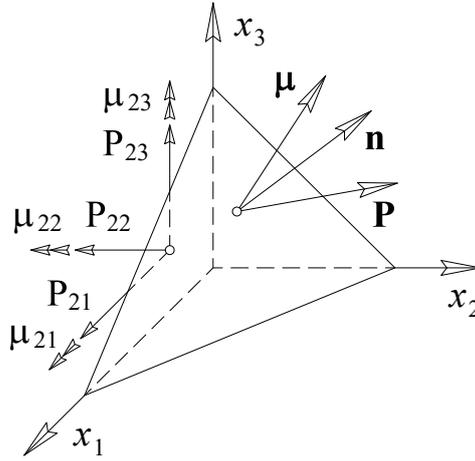


Рисунок 1.4. Связь поверхностных сил и моментов с тензором напряжений и моментных напряжений.

Следуя Коши, построим материальный четырёхгранник, три грани которого ортогональны декартовому базису, на четвёртую грань с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  действует вектор напряжений  $\mathbf{P}$  и вектор моментных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$ . Далее, используя теорему о среднем и записав закон сохранения количества движения и момента количества движения (вывод уравнений представлен ниже) относительно построенного четырёхгранника можно установить, что вектор напряжения и моментного напряжения однозначно связан линейной комбинацией с их проекциями на ортогональных гранях, формирующих тензор (рисунок 1.4) в общем случае не симметричный

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}, \quad n_j P_{ji} = P_i, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}, \quad n_j \mu_{ji} = \mu_i. \quad (1.2.1)$$

Так как данный закон справедлив в декартовом базисе, он одинаково справедлив и в произвольной системе координат.

### 1.3. Уравнения движения

Из закона сохранения массы и уравнения неразрывности

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.3.1)$$

можно вывести формулу дифференцирования по времени интеграла по индивидуальному или подвижному объёму от некоторой функции времени и пространственных координат

$$A(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \rho dV = \int_V \rho \frac{df}{dt} dV, \quad (1.3.2)$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  — функция плотности среды от времени и пространственного радиус-вектора;  $f = f(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция, также зависящая от времени и пространственного радиус-вектора.

Запишем математическую формулировку фундаментального постулата механики — закона сохранения количества движения для непрерывного движения сплошной среды с учётом (1.3.2)

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{F} \rho dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P} d\Sigma, \quad (1.3.3)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость изменения индивидуального объема сплошной среды;  $\rho$  — плотность среды;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  — плотности внешних массовых и поверхностных сил. Данный закон утверждает, что скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, где интеграл левой части содержит объём по области, уже не зависящий от времени.

Пользуясь соотношением Коши для плотности поверхностной силы (1.2.1) и формулой Гаусса-Остроградского, преобразуем интеграл по поверхности правой части (1.3.3) в интеграл по области и получим уравнение движения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} d\Sigma &= \int_V \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} dV, & \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV &= \int_V \mathbf{F} \rho dV + \int_V \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} dV, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где  $\underline{\mathbf{P}} = P_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$  — тензор напряжений второго ранга Коши-Грина, в дальнейшем будет упоминаться как тензор напряжений, что уместно в рамках линейной теории упругости, подразумевая выполнение условий (1.1.4). Далее, аналогичная формулировка будет принята и для тензора моментных напряжений, в рамках микрополярной линейной теории упругости.

В силу закона сохранения микроинерции

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{\mathbf{J}} dV = 0, \quad \underline{\mathbf{J}} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \underline{\mathbf{G}} - \mathbf{r} \mathbf{r}) \rho, \quad \mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} \mathbf{r} = r^i r^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (1.3.5)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор микрочастицы относительно макрочастицы [94, 95], запишем математическую формулировку второго фундаментального постулата механики — закона сохранения момента количества движения для непрерывного движения сплошной среды с

учётом (1.3.1), (1.3.2), (1.3.5)

$$\int_V \left( \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) dV = \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] \rho dV + \int_{\Sigma} [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] d\Sigma + \int_V \mathbf{m} \rho dV + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\mu} d\Sigma, \quad (1.3.6)$$

где  $\underline{\mathbf{J}}$  — кинематический тензор микроинерции второго ранга;  $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$  — вектор угловой скорости;  $\boldsymbol{\varphi}$  — вектор микроповорота;  $\underline{\mathbf{G}}$  — единичный тензор второго ранга;  $\mathbf{m}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  — плотности внешних массовых и поверхностных пар. Данный закон утверждает, что скорость изменения момента количества движения индивидуального объёма сплошной среды равна сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, а также сумме массовых и поверхностных пар, действующих на этот объем. В данном случае интеграл левой части содержит объём по области, уже не зависящий от времени.

Пользуясь соотношением Коши для плотности поверхностной пары (1.2.1) и формулой Гаусса-Остроградского [141], преобразуем интегралы по поверхности правой части (1.3.6) в интегралы по области и получим уравнение закона сохранения момента количества движения в дифференциальной форме, также как для (1.3.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} d\Sigma &= \int_V \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} dV, \\ \int_{\Sigma} [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] d\Sigma &= - \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot [\underline{\mathbf{P}} \times \mathbf{r}] d\Sigma = - \int_V (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} \times \mathbf{r} + \underline{\mathbf{P}} \cdot \times \nabla \mathbf{r}) dV = \\ &= \int_V (\mathbf{r} \times \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \nabla \mathbf{r} \cdot \times \underline{\mathbf{P}}) dV = \int_V \left( \mathbf{r} \times \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} \right) dV, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

где  $\underline{\mathbf{C}}$  — дискриминантный тензор третьего ранга. Заметим что, выражения  $[\nabla \mathbf{r} \cdot \times \underline{\mathbf{P}}]$  и  $\underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}$  являются тождественными и обладают свойством симметрии [83]:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r} \cdot \times \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{e}^i \nabla_i \mathbf{r} \cdot \times P^{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \nabla_i \mathbf{r} \times P^{jk} g^i_j \mathbf{e}_k = P^{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = P^{ij} C_{ijk} \mathbf{e}^k, \\ \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} &= C_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k \otimes P^{lm} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m = P^{ij} C_{ijk} \mathbf{e}^k = C_{ijk} P^{ij} \mathbf{e}^k, \quad \nabla \mathbf{r} \cdot \times \underline{\mathbf{P}} \equiv \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Рассмотрим выражение  $\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$  из левой части дифференциального уравнения (1.3.6)

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.3.9)$$

Таким образом, приводя подобные при векторном произведении и учитывая равенство (1.3.4), получим собственный момент количества движения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}] + [\mathbf{r} \times \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}] + \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}, \\ \mathbf{r} \times \left[ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} \right] + \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}, \\ \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Запишем итоговую систему дифференциальных уравнений движения микрополярной среды в тензорной форме

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}. \quad (1.3.11)$$

#### 1.4. Закон сохранения энергии и баланс энтропии

Необходимость изложения основных положений термодинамики продиктована целью установить связь между напряжённым и деформированным состоянием механической модели, соорудить упругий потенциал для формулировки вариационного принципа Лагранжа и обозначить параметры среды с центром симметрии для обратимых процессов замкнутой системы (без обмена массы с окружающей средой) в состоянии термодинамического равновесия. Как известно в основу уравнений термодинамики положены два фундаментальных закона: сохранение энергии деформированного тела и баланс энтропии. По этому данную часть начнём с вывода уравнений закона сохранения механической энергии и обобщим его на произвольный термодинамический процесс, в котором учитывается тепло, отбираемое из окружающей среды.

Уравнения (1.3.11) умножим на вектор скорости  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$  микрочастицы соответственно и проинтегрируем по области  $V$  микрополярной среды

$$\int_V \left[ (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}}) \cdot \boldsymbol{\omega} \right] dV = 0. \quad (1.4.1)$$

Применяя формулу

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{a}) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{a} + \underline{\mathbf{Q}} \otimes \nabla \mathbf{a}, \quad \forall \underline{\mathbf{Q}}, \mathbf{a}, \quad (1.4.2)$$

а также теорему Гаусса–Остроградского с учётом соотношений (1.2.1), получим выражение баланса механической энергии

$$\begin{aligned} & \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma = \\ & = \int_V \left( \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \underline{\mathbf{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \underline{\mathbf{P}} \otimes (\nabla \dot{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right) dV, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где для левой части введём обозначение механической мощности

$$\mathbb{L} = \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma, \quad (1.4.4)$$

которая состоит из суммы мощности массовых сил и пар, действующих внутри области  $V$  и мощности поверхностных сил и пар на поверхности  $\Sigma$ . Правая же часть уравнения — изменение кинетической и внутренней энергии микрополярной среды

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{E}} &= \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV, & \dot{\mathbb{E}} &= \int_V \dot{E} dV, \\ \dot{\mathbb{U}} &= \int_V \left( \underline{\mathbf{P}} \otimes (\nabla \dot{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right) dV, & \dot{\mathbb{U}} &= \int_V \dot{U} dV, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

где  $\dot{\mathbb{E}}$  — изменение кинетической энергии движения и микроповорота частицы;  $\dot{\mathbb{U}}$  — изменение внутренней энергии на соответствующей скорости изменения тензора относительных деформаций  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  и изгибов–кручений  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$  микрополярной среды аналогичны выражениям (1.1.8), (1.1.11)

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \dot{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (1.4.6)$$

Итоговое уравнение закона сохранения механической энергии для адиабатического процесса имеет вид:

$$\mathbb{L} = \frac{d}{dt}(\mathbb{E} + \mathbb{U}), \quad (1.4.7)$$

где правая часть уравнения есть изменение полной энергии механической системы. Если добавить к уравнению первого закона (1.4.7) немеханическую мощность тепла, отбираемого из окружающей среды  $\dot{\mathbb{Q}}$

$$\dot{\mathbb{Q}} + \mathbb{L} = \frac{d}{dt}(\mathbb{E} + \mathbb{U}), \quad (1.4.8)$$

получим уравнение баланса энергии для произвольного термодинамического процесса или первый закон термодинамики с учётом приращения количества тепла во времени, вызванного тепловым потоком  $\mathbf{q}$ , проходящим через единицу поверхности  $\Sigma$  с единичной норма-

лью  $\mathbf{n}$ . Первое слагаемое левой части уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{Q} = - \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} d\Sigma = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV, \quad (1.4.9)$$

тогда закон сохранения энергии (1.4.8), учитывая формулу Гаусса–Остроградского и (1.4.2), (1.4.3), (1.4.9) будет иметь вид

$$\int_V \dot{U} dV = \int_V (\rho [\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{v} + [\rho \mathbf{m} - \underline{\mathbf{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}] \cdot \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV, \quad (1.4.10)$$

из которого, учитывая выражения (1.3.11), (1.4.6), а также

$$\rho [\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{P}} \otimes^2 \nabla \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad (1.4.11)$$

$$[\rho \mathbf{m} - \underline{\mathbf{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}] \cdot \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes^2 \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}},$$

получим итоговое выражение первого закона термодинамики для произвольной области

$$\int_V \left( \dot{U} - \underline{\mathbf{P}} \otimes^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes^2 \dot{\boldsymbol{\varkappa}} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right) dV = 0, \quad (1.4.12)$$

а значит справедливо локальное соотношение

$$\dot{U} = \underline{\mathbf{P}} \otimes^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes^2 \dot{\boldsymbol{\varkappa}} - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (1.4.13)$$

Для произвольного термодинамического процесса второй закон термодинамики вводит функцию состояния энтропии  $S$  и температуры  $T$ , тогда приращение количества тепла с учётом (1.4.9) связано с энтропией следующим выражением

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T}, \quad \dot{S} = \int_V \dot{S} dV = - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} dV, \quad \dot{S} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T}, \quad (1.4.14)$$

где  $S$  — энтропия приведённая к единице объёма. Учитывая правило тензорного дифференцирования, аналогичное (1.4.2), для функции теплового потока и температуры

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}, \quad (1.4.15)$$

а также теорему Гаусса–Остроградского, выделим объемный и поверхностный интеграл (1.4.14)

$$\int_V \dot{S} dV = - \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{T} d\Sigma - \int_V \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV. \quad (1.4.16)$$

Введём обозначения для скорости обмена энтропией с окружающей средой  $\dot{S}_e$  и скорости производства энтропии замкнутой системы  $\dot{S}_i$ , подобно источнику

$$\dot{S}_e = \frac{dS_e}{dt} = - \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{T} d\Sigma, \quad \dot{S}_i = \frac{dS_i}{dt} = - \int_V \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV. \quad (1.4.17)$$

В этом случае скорость изменения энтропии произвольного термодинамического процесса можно привести к выражению

$$\dot{S} = \dot{S}_e + \dot{S}_i, \quad \dot{S}_e \leq 0, \quad \dot{S}_i \geq 0, \quad (1.4.18)$$

где учитывая закон термодинамики о необратимости процессов для  $\dot{S}_i$  имеем строгое неравенство, т.к. скорость обмена энтропией с окружающей средой  $\dot{S}_e$  не является критерием необратимости.

Если исключить из выражения изменения внутренней энергии (1.4.13) и баланса энтропии (1.4.14) дивергенцию теплового потока  $\nabla \cdot \mathbf{q}$ , то получим баланс внутренней энергии

$$\dot{U} = \underline{\mathbf{P}} \otimes \dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \dot{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + T \dot{S}. \quad (1.4.19)$$

Пусть функция внутренней энергии  $U \equiv U(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, S)$ , зависит от относительного тензора деформаций, тензора изгибов–кручений и энтропии. Также, скорость изменения внутренней энергии можно представить следующим выражением

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes \dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \frac{\partial U}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}} \otimes \dot{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \frac{\partial U}{\partial S} \dot{S}. \quad (1.4.20)$$

Замечая, что  $\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, T$  явно не зависят от  $\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \dot{S}$  в выражениях (1.4.19) и (1.4.20), запишем зависимости

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad (1.4.21)$$

которые позволяют установить определяющие соотношения между тензором напряжений, моментных напряжений, относительным тензором деформаций, изгибов–кручений, температурой и энтропией.

## 1.5. Свободная энергия и определяющие соотношения

Введём функцию состояния замкнутой системы обратимого термодинамического процесса – свободную энергию Гельмгольца

$$F = U - ST. \quad (1.5.1)$$

Если рассматривать бесконечно малое изменение состояния для упругого тела, то  $dF$  является полным дифференциалом. В качестве независимых параметров состояния выберем  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\varkappa}$ ,  $S$ , т. е. положим  $U \equiv U(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}, S)$ . Тогда из

$$dU = \underline{\mathbb{P}} \otimes^2 d\underline{\gamma} + \underline{\mu} \otimes^2 d\underline{\varkappa} + T dS, \quad (1.5.2)$$

получим

$$dF = \underline{\mathbb{P}} \otimes^2 d\underline{\gamma} + \underline{\mu} \otimes^2 d\underline{\varkappa} - S dT. \quad (1.5.3)$$

Откуда видно, что функция  $F \equiv F(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}, T)$  уже не зависит от энтропии и для полного дифференциала  $dF$  справедливы соотношения

$$\underline{\mathbb{P}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\gamma}}, \quad \underline{\mu} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\varkappa}}, \quad -S = \frac{\partial F}{\partial T}, \quad (1.5.4)$$

позволяющие выписать определяющие соотношения микрополярной теории упругости при неизотермическом процессе.

Рассмотрим в начальный момент времени  $t = 0$  тело, которое находится в состоянии, определяемое некоторым начальным значением тензоров деформаций  $\underline{\gamma}_0$ , изгибов–кручений  $\underline{\varkappa}_0$ , напряжений  $\underline{\mathbb{P}}_0$  и моментных напряжений  $\underline{\mu}_0$ , соответственно, а температура равна некоторому постоянному значению  $T_0$ . Нагружая тело внешним воздействием в виде массовых или поверхностных сил и пар, наряду с температурным полем, отличным от  $T_0$ , в нём будут возникать поля перемещений  $\mathbf{u}$  и микровращений  $\boldsymbol{\varphi}$ , которые в общем случае являются функциями пространственных координат и времени. Изменение внутреннего тепла или температурного поля тела будет связано с его напряжённо–деформированным состоянием. В этом состоянии разложим в ряд Тейлора свободную энергию

$$\begin{aligned} F(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}, T) &= \sum_{k=0}^n \left[ (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0) \otimes^2 \frac{\partial}{\partial \underline{\gamma}} + (\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0) \otimes^2 \frac{\partial}{\partial \underline{\varkappa}} + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial T} \right]^k \frac{F(\underline{\gamma}_0, \underline{\varkappa}_0, T_0)}{k!} = \\ &= F(\underline{\gamma}_0, \underline{\varkappa}_0, T_0) + (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0) \otimes^2 \frac{\partial F}{\partial \underline{\gamma}} + (\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0) \otimes^2 \frac{\partial F}{\partial \underline{\varkappa}} + (T - T_0) \frac{\partial F}{\partial T} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0)(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0) \otimes^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\gamma}^2} + (\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0)(\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0) \otimes^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\varkappa}^2} + (T - T_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} + \right. \\ &(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0)(\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0) \otimes^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\gamma} \partial \underline{\varkappa}} + (\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0)(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0) \otimes^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\varkappa} \partial \underline{\gamma}} + (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0)(T - T_0) \otimes^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\gamma} \partial T} + \\ &+ (T - T_0)(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_0) \otimes^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \underline{\gamma}} + (\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0)(T - T_0) \otimes^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\varkappa} \partial T} + \\ &\left. + (T - T_0)(\underline{\varkappa} - \underline{\varkappa}_0) \otimes^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \underline{\varkappa}} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Полагая, по теореме Шварца, равенство смешанных производных введем обозначения

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, T_0) = F_0, \quad \frac{\partial F(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, T_0)}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{P}_0, \quad \frac{\partial F(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, T_0)}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} = \boldsymbol{\mu}_0, \quad \frac{\partial F(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, T_0)}{\partial T} = -S_0, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\varkappa}^2} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\varkappa} \partial \boldsymbol{\gamma}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\varkappa}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial T} = -\underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\varkappa} \partial T} = -\underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = F_0(\vartheta).
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

При этом полагая нулевыми  $\boldsymbol{\gamma}_0$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$  в естественном состоянии и учитывая (1.5.4) для материала с центром симметрии  $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ , имеем

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta), \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta), \quad -S = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \boldsymbol{\varkappa} - \frac{\partial F_0(\vartheta)}{\partial T}, \tag{1.5.7}$$

где первые два соотношения являются искомыми (соотношения Дюамеля-Неймана);  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  — материальные тензоры четвёртого ранга;  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$  — тензоры теплового расширения;  $\vartheta$  — приращение температуры по отношению к температуре естественного состояния  $T_0$ . Далее, так как принято допущение о малости деформаций, величина  $|\vartheta/T| \ll 1$ .

Перепишем функцию свободной энергии из выражения (1.5.5) для материалов с центром симметрии полагая нулевыми  $\boldsymbol{\gamma}_0$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$  в естественном состоянии и пренебрегая производными выше второго порядка с учетом (1.5.6)

$$F(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T) = -\underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \boldsymbol{\gamma} - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \boldsymbol{\varkappa} + \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \boldsymbol{\varkappa} \boldsymbol{\varkappa} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} + F_0(\vartheta) \right]. \tag{1.5.8}$$

Чтобы определить выражение  $F_0(\vartheta)$  запишем для энтропии полный дифференциал, полагая  $S \equiv S(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes d\boldsymbol{\gamma} + \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} \otimes d\boldsymbol{\varkappa} + \frac{\partial S}{\partial T} dT, \quad T \frac{\partial S}{\partial T} = c_\gamma + c_\varkappa, \tag{1.5.9}$$

где  $c_\gamma + c_\varkappa$  — количество тепла, образованного в единице объёма, при изменении температуры с постоянным полем деформаций и изгибов–кручений. С другой стороны, принимая во внимание (1.5.7) можно записать

$$dS = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes d\boldsymbol{\gamma} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes d\boldsymbol{\varkappa} - \frac{\partial^2 F_0(\vartheta)}{\partial T^2} dT. \tag{1.5.10}$$

Здесь обобщение принципа Дюамеля–Неймана позволяет выразить слагаемое при квадрате температуры и ввести следующие обозначения

$$-\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial^2 F_0(\vartheta)}{\partial T^2} = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} = -\frac{c_\gamma + c_\varkappa}{T}. \tag{1.5.11}$$

Далее, выполним интегрирование последнего выражения, принимая во внимание постоянные интегрирования  $S_0 = 0$  естественного состояния

$$\frac{\partial F_0(\vartheta)}{\partial T} = - \int_{T_0}^T (c_\gamma + c_\varkappa) \frac{dT}{T} = -(c_\gamma + c_\varkappa) \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) = -(c_\gamma + c_\varkappa) \ln \left( 1 + \frac{\vartheta}{T_0} \right). \quad (1.5.12)$$

Учитывая малую величину изменения температуры, в соответствии с ранее принятым условием  $|\vartheta/T_0| \ll 1$ , нетрудно преобразовать логарифм к функции линейного типа, разложив в ряд Тейлора (1.5.12) и сохранив только первое слагаемое. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{\partial F_0(\vartheta)}{\partial T} = \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta \approx -(c_\gamma + c_\varkappa) \left( \frac{\vartheta}{T_0} \right). \quad (1.5.13)$$

Итоговые формулы для функции свободной энергии и энтропии примут вид [109, 214]

$$\begin{aligned} F(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}, T) &= (\underline{\mathbf{P}}_0 - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \otimes (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0) + (\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underline{\mathbf{b}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \otimes (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0)(\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0)(\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta^2 \right], \quad (1.5.14) \\ S &= \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0) + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0) - \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай свободной энергии (1.5.14), когда в естественном состоянии  $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$ ,  $\underline{\mathbf{P}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$  задана изотропная микрополярная среда, компоненты материальных тензоров которой определяются выражениями

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \alpha (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}), \\ D^{ijkl} &= \delta g^{ij} g^{kl} + \gamma (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \beta (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}), \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

где  $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$  — материальные параметры среды;  $g^{ij}$  — компоненты обратного метрического тензора или единичного тензора второго ранга [83]. В этом случае функция свободной энергии и энтропии в декартовой области примет вид:

$$\begin{aligned} F(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}, T) &= \frac{\lambda}{2} \gamma_{mm} \gamma_{nn} + \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{ij} \gamma_{ji} + \frac{\gamma}{2} \varkappa_{mm} \varkappa_{nn} + \\ &+ \frac{\delta + \beta}{2} \varkappa_{ij} \varkappa_{ij} + \frac{\delta - \beta}{2} \varkappa_{ij} \varkappa_{ji} - \nu \vartheta \gamma_{kk} - \chi \vartheta \varkappa_{kk} - \frac{m \vartheta^2}{2}, \quad (1.5.16) \\ S &= \nu \gamma_{kk} + \chi \vartheta \varkappa_{kk} + m \vartheta, \end{aligned}$$

откуда можно получить определяющие соотношения для связи напряжений, моментных напряжений с деформациями и изгибами-кручениями для материала с центром симметрии

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} &= p_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji} + (\lambda \gamma_{nn} - \nu \vartheta)\delta_{ij}, \\ \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ij}} &= \mu_{ij} = (\delta + \beta)\varkappa_{ij} + (\delta - \beta)\varkappa_{ji} + (\gamma \varkappa_{nn} - \chi \vartheta)\delta_{ij},\end{aligned}\tag{1.5.17}$$

что идентично функции свободной энергии, энтропии и определяющим соотношениям полученным по В.Новацкому [87]. Здесь были приняты следующие обозначения

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \nu \delta_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \chi \delta_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \quad m = - \left( \underline{\underline{\mathbf{a}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{b}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \right),\tag{1.5.18}$$

где  $\nu, \chi$  — коэффициенты зависят от механических и температурных свойств;  $m T_0$  — удельная теплоёмкость при постоянном поле деформаций и изгибов-кручений [87].

## 1.6. О трансверсально-изотропных, ортотропных и изотропных тензорах микрополярной среды

Существуют разные методы построения изотропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров в основе которых правила ортогональных преобразований и построения систем линейно независимых изотропных тензоров чётного ранга путём попарного перебора всевозможных комбинаций мультипликативных базисов [24, 60, 63, 65, 66, 70, 94, 198]. Ввиду того что данная тема широко представлена и подробно изучена вышеприведёнными и другими авторами, в данной работе ограничимся лишь некоторыми правилами и результирующими выражениями компонент трансверсально-изотропных, ортотропных и изотропных материальных тензоров четвёртого ранга, которые необходимы для построения вариационного и численного решения трёхмерного класса задач микрополярной теории упругости.

Для построения трансверсально-изотропных тензоров четного (нечетного) ранга достаточно из соответствующего мультибазиса с помощью четных (нечетных) порядков сужения необходимо составить всевозможные мультибазисы и индексы полученных путем операции сужения мультибазисов свернуть с индексами двумерных символов Кронекера и Леви-Чивиты, перебирая всевозможные случаи. При этом в множестве тензоров заданного ранга, построенном указанным выше методом, содержатся все линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры [198]. Так, следуя данному правилу, построим трансверсально-изотропный тензор четвёртого ранга для материала с центром симметрии микрополярной среды. В этом случае, полагая существование упругого потенциала свободной энергии обратимого процесса, с учётом определяющих соотношений (1.5.7) тензор  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ ,  $A^{ijkl} = A^{klij}$  не обладает симметрией по первой и по второй паре индексов

$A^{ijkl} \neq A^{jikl}$  и содержит 29 отличных от нуля компонент, из них 10 независимых, и его компоненты можно записать в виде [107, 198, 212]

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} = & a_1 \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{NN}^{kl} + a_2 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{NN}^{jl} + a_3 \gamma_{MM}^{il} \gamma_{NN}^{jk} + a_4 \left( \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{MM}^{kl} \right) + \\
& + a_5 \left( \epsilon^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \epsilon^{kl} \right) + a_6 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + a_7 \left( \gamma_{MM}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{MM}^{jk} \right) + \\
& + a_8 \left( \epsilon^{il} \gamma_{33}^{jk} - \gamma_{33}^{il} \epsilon^{jk} \right) + a_9 \gamma_{33}^{ik} \gamma_{MM}^{jl} + a_{10} \gamma_{33}^{ij} \gamma_{33}^{kl},
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

где  $\gamma_{MM}^{ij} = g_M^i g_M^j$  — сумма произведений смешанных компонент единичного тензора второго ранга [83, 99, 198],  $\epsilon^{ij} = \epsilon^{MN} g_M^i g_N^j$  — символы Леви-Чивиты. Здесь использовано правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам ( $M, N = 1, 2$ ), кроме явно указанных  $\gamma_{\alpha\alpha}^{ij} = g_\alpha^i g_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) (по  $\alpha$  суммирования нет) — произведения смешанных компонент единичного тензора второго ранга. Аналогично представляются компоненты тензора  $\underline{\underline{D}}$  с той лишь разницей, что в выражение (1.6.1) вместо  $a$  и  $A$  подставляются  $d$  и  $D$  соответственно

$$\begin{aligned}
D^{ijkl} = & d_1 \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{NN}^{kl} + d_2 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{NN}^{jl} + d_3 \gamma_{MM}^{il} \gamma_{NN}^{jk} + d_4 \left( \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{MM}^{kl} \right) + \\
& + d_5 \left( \epsilon^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \epsilon^{kl} \right) + d_6 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + d_7 \left( \gamma_{MM}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{MM}^{jk} \right) + \\
& + d_8 \left( \epsilon^{il} \gamma_{33}^{jk} - \gamma_{33}^{il} \epsilon^{jk} \right) + d_9 \gamma_{33}^{ik} \gamma_{MM}^{jl} + d_{10} \gamma_{33}^{ij} \gamma_{33}^{kl}.
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

А если учесть симметрию  $A^{ijkl} = A^{ijlk}$ , откуда  $a_2 = a_3$ ,  $a_5 = 0$ ,  $a_6 = a_7 = a_9$ ,  $a_8 = 0$ , то получим частный случай выражения (1.6.1)

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} = & a_1 \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{NN}^{kl} + a_2 \left( \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{NN}^{jl} + \gamma_{MM}^{il} \gamma_{NN}^{jk} \right) + a_4 \left( \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{MM}^{kl} \right) + \\
& + a_6 \left( \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + \gamma_{MM}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{MM}^{jk} + \gamma_{33}^{ik} \gamma_{MM}^{jl} \right) + a_{10} \gamma_{33}^{ij} \gamma_{33}^{kl},
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

где тензор  $\underline{\underline{A}}$  содержит уже 5 независимых компонент, что с точностью до обозначения коэффициентов соответствует трансверсально-изотропному материалу классической теории упругости [60, 63, 83, 94, 96, 198].

Рассмотрим теперь ортотропные тензоры четвёртого ранга. Согласно правилу построения, представленному в работе [198], из всех линейно независимых изотропных тензоров заданного четного ранга, составленных с помощью базисных векторов ортонормированного базиса, путем запрета суммирования по повторяющимся индексам получается множество ортотропных тензоров, среди которых имеются все линейно независимые ортотропные тензоры. Полагая существование упругого потенциала свободной энергии для обратимого процесса, с учётом определяющих соотношений (1.5.7) тензор  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ ,  $A^{ijkl} =$

$A^{klij}$ ,  $A^{ijkl} \neq A^{jikl}$  имеет 15 независимых компонент

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} = & A^{1111}\gamma_{11}^{ij}\gamma_{11}^{kl} + A^{2222}\gamma_{22}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + A^{3333}\gamma_{33}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + A^{1122}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + \gamma_{22}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + \\
& + A^{1133}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + A^{2233}(\gamma_{22}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{22}^{kl}) + A^{1212}\gamma_{11}^{ik}\gamma_{22}^{jl} + \\
& + A^{1221}(\gamma_{11}^{il}\gamma_{22}^{jk} + \gamma_{22}^{il}\gamma_{11}^{jk}) + A^{2121}\gamma_{22}^{ik}\gamma_{11}^{jl} + A^{1313}\gamma_{11}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + A^{1331}(\gamma_{11}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{11}^{jk}) + \\
& + A^{3131}\gamma_{33}^{ik}\gamma_{11}^{jl} + A^{2323}\gamma_{22}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + A^{2332}(\gamma_{22}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{22}^{jk}) + A^{3232}\gamma_{33}^{ik}\gamma_{22}^{jl}.
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Аналогично представляются компоненты тензора  $\underline{\mathbf{D}}$

$$\begin{aligned}
D^{ijkl} = & D^{1111}\gamma_{11}^{ij}\gamma_{11}^{kl} + D^{2222}\gamma_{22}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + D^{3333}\gamma_{33}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + D^{1122}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + \gamma_{22}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + \\
& + D^{1133}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + D^{2233}(\gamma_{22}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{22}^{kl}) + D^{1212}\gamma_{11}^{ik}\gamma_{22}^{jl} + \\
& + D^{1221}(\gamma_{11}^{il}\gamma_{22}^{jk} + \gamma_{22}^{il}\gamma_{11}^{jk}) + D^{2121}\gamma_{22}^{ik}\gamma_{11}^{jl} + D^{1313}\gamma_{11}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + D^{1331}(\gamma_{11}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{11}^{jk}) + \\
& + D^{3131}\gamma_{33}^{ik}\gamma_{11}^{jl} + D^{2323}\gamma_{22}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + D^{2332}(\gamma_{22}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{22}^{jk}) + D^{3232}\gamma_{33}^{ik}\gamma_{22}^{jl}.
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Учтём симметрию относительно первых двух индексов  $A^{ijkl} = A^{jikl}$ , тогда из выражения (1.6.4) получим

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} = & A^{1111}\gamma_{11}^{ij}\gamma_{11}^{kl} + A^{2222}\gamma_{22}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + A^{3333}\gamma_{33}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + A^{1122}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{22}^{kl} + \gamma_{22}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + \\
& + A^{1133}(\gamma_{11}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{11}^{kl}) + A^{2233}(\gamma_{22}^{ij}\gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij}\gamma_{22}^{kl}) + \\
& + A^{1212}(\gamma_{11}^{ik}\gamma_{22}^{jl} + \gamma_{11}^{il}\gamma_{22}^{jk} + \gamma_{22}^{il}\gamma_{11}^{jk} + \gamma_{22}^{ik}\gamma_{11}^{jl}) + \\
& + A^{1313}(\gamma_{11}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + \gamma_{11}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{11}^{jk} + \gamma_{33}^{ik}\gamma_{11}^{jl}) + \\
& + A^{2323}(\gamma_{22}^{ik}\gamma_{33}^{jl} + \gamma_{22}^{il}\gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il}\gamma_{22}^{jk} + \gamma_{33}^{ik}\gamma_{22}^{jl}),
\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

где  $\underline{\mathbf{A}}$  содержит уже 9 независимых компонент, что соответствует ортотропному материалу классической теории упругости [60, 63, 83, 94, 96, 198].

Компоненты изотропных тензоров четвёртого ранга для микрополярной среды с центром симметрии могут быть определены из выражения

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} = & \lambda g^{ij}g^{kl} + \mu (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \alpha (g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}), \\
D^{ijkl} = & \delta g^{ij}g^{kl} + \gamma (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \beta (g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}),
\end{aligned} \tag{1.6.7}$$

где  $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$  — материальные параметры среды;  $g^{ij}$  — компоненты единичного тензора. Как видно, каждый тензор  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  содержит по 3 независимых компонента. Полагая  $\alpha = 0$  из (1.6.7) получим выражение для компонент тензора четвёртого ранга классической теории упругости с двумя независимыми параметрами Ламе

$$A^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \quad (1.6.8)$$

## 1.7. Дифференциальная постановка краевой задачи

Учитывая ранее выписанные выражения для кинематических соотношений (1.1.8), (1.1.11), уравнения совместности деформаций (изгибов–кручений) и напряжений (моментных напряжений) (1.1.13), выведенные из закона сохранения массы и микроинерции дифференциальные уравнения (1.3.11), а также определяющие соотношения (1.5.7), полученные из законов термодинамики, представим замкнутую систему дифференциальных уравнений начально–краевой задачи смешанного типа при неизотермических процессах микрополярной теории упругости [1, 5, 49, 57, 75, 76, 80–83, 87, 91, 99, 115, 117, 119, 120, 131, 132, 141, 142, 151, 152, 154, 155, 157, 161, 162, 179, 180, 182, 183, 189–196, 210, 218, 219, 226, 227]

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}, \\ \mathbf{u}|_{t_0} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{t_0} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t_0} = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{t_0} = \boldsymbol{\omega}_0, \\ \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}|_{\Sigma_2} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}|_{\Sigma_2} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0 - \underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta), \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0 - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta), \\ S = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) - \left( \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \right) \vartheta, \\ \boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varkappa} = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\gamma} + I_1(\boldsymbol{\varkappa}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \boldsymbol{\varkappa}^T = 0, \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \underline{\underline{\mathbf{P}}} + I_1(\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^T = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.1)$$

где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  — вектор линейной скорости макродислокаций;  $\mathbf{u}$  — вектор макродислокаций;  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$  — вектор угловой скорости микроповорота;  $\boldsymbol{\varphi}$  — вектор микроповорота;  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$  — тензор микроинерции второго ранга (1.3.5);  $\rho$  — плотность среды;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{m}$  — плотность массовых сил и пар, соответственно;  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ ,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$  — плотность поверхностных сил и пар, соответственно;  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ ,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$  — тензор напряжений и моментных напряжений, соответственно (в общем случае несимметричные);  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}$  — относительный тензор деформаций и изгибов–кручений, соответственно (в общем случае несимметричные);  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  — дискриминантный тензор третьего ранга или тен-

зор Леви-Чивиты [70, 83, 198];  $\overset{2}{\otimes}$  — знак внутреннего 2-произведения [9, 10, 83, 198];  $\Sigma$  — поверхность тела элементарного объёма ( $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ ,  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ );  $\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}_0$  — начальные условия для динамической задачи;  $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0$ ,  $\boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\mu}$  — краевые условия третьего рода (смешанного типа);  $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_0, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0, \underline{\mathbf{P}}_0, \underline{\boldsymbol{\mu}}_0$  — тензоры начального состояния при малых деформациях;  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$  — тензоры теплового расширения;  $\vartheta$  — перепад температуры;  $\underline{\mathbf{E}}$  — единичный тензор второго ранга;  $I_1(\cdot)$  — первый инвариант от тензора второго ранга.

Для формулировки третьей краевой задачи статики (смешанная краевая задача состоящая из системы дифференциальных уравнений равновесия) перепишем систему (1.7.1) приравняв к нулю инерционные члены и исключив начальные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = 0, \quad \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\mu}, \\ \underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_0 + \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0 - \underline{\mathbf{a}} \vartheta), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\boldsymbol{\mu}}_0 + \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0 - \underline{\mathbf{b}} \vartheta), \\ S = \underline{\mathbf{a}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0) + \underline{\mathbf{b}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0) - \left( \underline{\mathbf{a}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}. \end{array} \right. \quad (1.7.2)$$

Стоит упомянуть о системе (1.7.1) в контексте формулировки постановки задачи согласно имеющейся классификации [83, 87, 99]. Для возможности формулировки второй начально-краевой задачи в напряжениях здесь наряду с кинематическими соотношениями также представлены условия совместности деформаций и изгибов-кручений. Данная постановка уместна, если на границе заданы только усилия (статические граничные условия). В этом случае имеем замкнутую систему из 18 уравнений совместности деформаций и изгибов-кручений, в которые подставляем определяющие соотношения, удовлетворяющие уравнениям движения.

Нужно обратить внимание, что в системах (1.7.1), (1.7.2) дифференциальные уравнения содержат тензоры напряжений и моментных напряжений, которые выражаются через векторы макроперемещений и микровращений, используя кинематические и определяющие соотношения. Т. е. получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений (1.7.2) в дополнение к краевым условиям и уравнению связи энтропии с температурой.

Далее покажем что используя вариационный принцип Лагранжа (теорему Лагранжа) можно доказать эквивалентность краевой и вариационной формулировок задачи в перемещениях и микровращениях аналогично классической теории упругости [96]. В таком случае краевую задачу (1.7.2) можно привести к системе линейных алгебраических уравнений, получаемую из условия стационарности дискретного лагранжиана методом

Ритца (т. е. искомое решение раскладывается в ряд по базисным кусочно-полиномиальным функциям). Об этом и будет изложено в последующей главе.

## 1.8. Вариационная постановка. Принцип Лагранжа

Прежде чем построить на основе системы (1.7.2) интегральные тождества и сформулировать вариационный принцип Лагранжа аналогично классической теории введем определения [83, 96, 99].

**Определение 1.8.1.** Кинематической системой обозначим произвольные непрерывно дифференцируемые векторные поля перемещений  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  и микровращений  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ , а статической системой — произвольные тензорные поля напряжений  $\mathbf{P}$  и моментных напряжений  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ , необязательно удовлетворяющие условиям совместности (1.1.13).

**Определение 1.8.2.** Кинематически допустимой обозначим кинематическую систему  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ , удовлетворяющую кинематическим граничным условиям на  $\Sigma_1$  для задачи (1.7.2) и начальным условиям для задачи (1.7.1).

**Определение 1.8.3.** Статически допустимой системой обозначим статическую систему, удовлетворяющую уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на  $\Sigma_2$  задачи (1.7.2).

**Определение 1.8.4.** Действительной кинематической системой  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  и действительной статической системой  $\mathbf{P}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$  называются соответственно векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  и тензоры  $\mathbf{P}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ , удовлетворяющие кинематическим соотношениям (1.1.8), (1.1.11), уравнениям равновесия (1.7.2), определяющим соотношениям

$$\mathbf{P} = \check{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \check{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) \quad (1.8.1)$$

или в случае потенциальности операторов  $\check{\mathbf{F}}$  и  $\check{\mathbf{G}}$  определяющим соотношениям следующего вида

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}}, \quad \check{W} = \boldsymbol{\gamma} \otimes \underline{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varkappa} \otimes \underline{\mathbf{D}} \otimes \boldsymbol{\varkappa} \implies \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T, \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}^T, \quad (1.8.2)$$

а также кинематическим и статическим граничным условиям задачи (1.7.2), где  $\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa})$  — оператор (потенциал) деформаций и изгибов–кручений и если он существует, то определяющие соотношения задаются с помощью формул (1.8.2).

Заметим, что при неизотермических процессах вместо  $\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa})$  рассматривается свободная энергия  $F \equiv F(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T)$  (1.5.1), (1.5.14) и определяющие соотношения (1.5.7) устанавливающие взаимосвязь между тензорами напряжений, моментных напряжений, деформаций, изгибов–кручений и температурой для материалов с центром симметрии микрополярной теории упругости.

Выведем интегральные тождества в общем виде. Для этого уравнения движения (1.3.11) умножим на произвольную кинематически допустимую систему векторов  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  из того же пространства что  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  и выполним интегрирование по области  $V$ , применяя при этом формулу (1.4.2) и теорему Остроградского–Гаусса

$$\begin{aligned} \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} dV &= \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{w} dV - \int_V \underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \nabla \mathbf{w} dV, \\ \int_V \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\psi} dV &= \int_V \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\psi} dV - \int_V (\underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \nabla \boldsymbol{\psi} - \underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Складывая почленно соотношения (1.8.3), получим

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV &= \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma - \\ &- \int_V (\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \nabla \boldsymbol{\psi}) dV, \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

При написании поверхностного интеграла в правой части (1.8.3), (1.8.4) были учтены обобщённые формулы Коши (1.2.1) и для (1.8.4) определение кинематически допустимой системы  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ . Окончательное выражение интегральных тождеств учитывая кинематические соотношения (1.1.8), (1.1.11) для задачи (1.7.2) примут вид

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\ a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V (\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\psi})) dV, \\ l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

где, принимая во внимание тождество  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}$ , функционал  $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  — есть энергия упругих деформаций и изгибов–кручений или работа внутренних сил и моментов на соответствующих деформациях и изгибах–кручениях; полагая массовые и поверхностные силы и пары потенциальными, т. е. не зависящими от пространственных координат  $l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  — есть работа внешних сил и моментов на соответствующих макроперемещениях и микроповоротах, который является линейным относительно  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ . Стоит отметить, что  $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  является билинейным функционалом. Это следует из существования упругого потенциала деформаций и изгибов–кручений для определяющих соотношений (1.8.2) в виде внутренней или свободной энергии для обратимых термодинамических процессов, в этом случае материальные тензоры обладают симметрией  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$ .

Следовательно можно ввести эквивалентную интегральным тождествам (1.8.5) формулировку — задачу минимизации функционала Лагранжа

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}: L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi} |_{\Sigma_1} = 0, \quad L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad (1.8.6)$$

решение которой основано на принципе Лагранжа.

**Теорема 1.8.1.** *Из всех кинематически допустимых систем  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  действительная  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$  (точное решение краевой задачи) отличается тем, что для неё и только лагранжиан принимает стационарное значение*

$$DL(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0, \quad a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad (1.8.7)$$

где использовано определение дифференциала оператора по Гато  $D$ , определяющие соотношения  $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})$ ,  $\underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi})$ , (1.8.2) и кинематические соотношения

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\psi}) = \nabla \boldsymbol{\psi}. \quad (1.8.8)$$

Тогда используя формулу (1.4.2) и теорему Остроградского–Гаусса преобразуем функционал  $a$  вариационного уравнения (1.8.5)

$$\begin{aligned} \int_V \left( \underline{\mathbf{P}} \otimes (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \nabla \boldsymbol{\psi} \right) dV = \int_{\Sigma_2} (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma + \\ - \int_V \left( \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{w} + \underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

В данном выражении были также учтены граничные условия на границе  $\Sigma_1$  для кинематически допустимой системы  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  по определению. Далее, подставляя выражение функционала  $a$  (1.8.9) в уравнение (1.8.5) и группируя относительно  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  получим

$$\begin{aligned} \int_V \left( (\rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{w} + (\rho \mathbf{m} + \underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\mathbf{C}} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \boldsymbol{\psi} \right) dV = \\ = \int_{\Sigma_2} ((\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (1.8.10)$$

откуда в силу произвольности кинематически допустимой системы  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  следуют уравнения равновесия и условия на части границы  $\Sigma_2$  задачи (1.7.2). Следовательно, при формулировке вариационного принципа Лагранжа (теоремы 1.8.1) потребуем выполнения кинематических соотношений (1.1.8), (1.1.11) и кинематических граничных условий  $\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0$ ,  $\boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0$  (из определения 1.8.2), а из условий стационарности (1.8.7) следуют

уравнения равновесия

$$\rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = 0, \quad \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = 0, \quad (1.8.11)$$

и статические граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\mu}. \quad (1.8.12)$$

Таким образом, достаточность утверждения теоремы Лагранжа и эквивалентность краевой (1.7.2) и вариационной формулировок (1.8.5) задачи теории микрополярной упругости в перемещениях и микровращениях установлены.

Вернёмся к доказательству (1.8.7) и докажем существование экстремума функционала Лагранжа, приняв во внимание выражения (1.1.8), (1.1.11), (1.8.5)–(1.8.7). Для чего вычислим производную по Гато для функционала  $L$  и приравняем её к нулю

$$DL(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{d}{d\xi} L(\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi})|_{\xi=0}, \quad (1.8.13)$$

что идентично вариации функционала. Это необходимое и достаточное условие для квадратичного (симметричного) функционала

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \quad (\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T, \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}^T). \quad (1.8.14)$$

Любой вектор допустимой кинематической системы мы можем представить как сумму вектора действительной и допустимой кинематической системы с параметром  $\xi$

$$\begin{aligned}
& L(\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi}) = \\
& = \frac{1}{2} \int_V \left( (\nabla(\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}) - \underline{\mathbf{C}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi})) \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\nabla(\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}) - \underline{\mathbf{C}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi})) + \right. \\
& \left. + \nabla(\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi}) \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla(\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi}) \right) dV - \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}) + \rho \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi})) dV - \\
& - \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot (\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \xi \boldsymbol{\psi})) d\Sigma = \frac{1}{2} \int_V \left( \nabla \mathbf{u} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{u} + \xi \nabla \mathbf{u} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{w} + \right. \\
& \quad - \nabla \mathbf{u} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \xi \nabla \mathbf{u} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} + \xi \nabla \mathbf{w} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{u} + \xi^2 \nabla \mathbf{w} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{w} - \\
& \quad - \xi \nabla \mathbf{w} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \xi^2 \nabla \mathbf{w} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{u} - \xi \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{w} + \\
& \quad + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \xi \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} - \xi \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{u} - \xi^2 \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \mathbf{w} + \\
& \quad + \xi \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \xi^2 \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi} + \nabla \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} + \xi \nabla \boldsymbol{\varphi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\psi} + \\
& \quad \left. + \xi \nabla \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} + \xi^2 \nabla \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\psi} \right) dV - \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV - \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \\
& \quad + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV - \xi \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV - \xi \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma.
\end{aligned} \tag{1.8.15}$$

Учитывая ранее введённые обозначения (1.8.5) для функционалов  $a$ ,  $l$  и выполнив группировку относительно допустимой и действительной кинематических систем  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  перепишем дифференциал Гато (1.8.13) или вариацию для выражения (1.8.15)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + \xi \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \xi \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + \xi^2 \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - \right. \\
& \quad \left. - l(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - \xi l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \right]_{\xi=0} = \frac{1}{2} (a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\
& \quad a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0 \quad \square,
\end{aligned} \tag{1.8.16}$$

где симметричность функционала  $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})$  заданная условием (1.8.14) следует из потенциальности напряжений и моментных напряжений (1.8.2) или (1.5.7), определяющих симметрию материальных тензоров  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$ . Таким образом эквивалентность вариационной формулировки (1.8.5) и задачи минимизации функционала Лагранжа (1.8.6) доказана.

Докажем, что экстремум функционала Лагранжа (1.8.7) является минимумом (1.8.6) для действительной кинематической системы  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$ . Потребуем от функционала  $a$  помимо условия симметричности (1.8.14) дополнительно условие положительной определённости для произвольной кинематически допустимой системы векторов  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$

$$a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \geq 0, \quad a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w} = 0, \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (1.8.17)$$

В таком случае представим произвольную кинематически допустимую систему векторов перемещений и микровращений  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  как сумму действительной  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$  и кинематически допустимой  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}$  системы векторов. Выполним данное переобозначение

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\phi}, \quad (1.8.18)$$

подставим его в лагранжиан (1.8.6), учитывая условия существования экстремума (1.8.7) и обозначения, введённые по аналогии с (1.8.15), (1.8.16)

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\phi}) &= \frac{1}{2} [a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) + a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi})] - \\ &- l(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - l(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) = L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.8.19)$$

Т. к. задано требование положительной определённости (1.8.17) для функционала  $a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) \geq 0$ , где  $a$  — есть энергия упругих деформаций и изгибов–кручений (1.8.5) для действительной кинематической системы, то

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}: \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0 \quad \square. \quad (1.8.20)$$

Значит точка экстремума есть минимум и существование решения (1.8.6) единственно.

## 1.9. Функционал Лагранжа при неизотермических процессах

При неизотермических процессах в силу обобщенного принципа Дюамеля–Неймана и итоговых формул свободной энергии и энтропии (1.5.14) оператор (потенциал) деформаций и изгибов–кручений

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T) &= (\mathbf{P}_0 - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + (\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underline{\mathbf{b}} \vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0)(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0)(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta^2 \right], \quad (1.9.1) \\ S &= \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) - \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta, \end{aligned}$$

позволяет записать задачу минимизации функционала (1.8.6), в которой лагранжиан уже зависит от температуры(перепада температур)

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2} a(\vartheta; \vartheta) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta), \\
a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V \left[ (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \right] dV, \\
a(\vartheta; \vartheta) &= \int_V \left( \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \right) \vartheta^2 dV, \\
l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta) &= \int_V \left[ \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi} + \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_0 \right) \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta - \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0 \right) \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \right] dV + \int_{\Sigma_2} [\mathbf{P} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}] d\Sigma, \\
\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}: \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}|_{\Sigma_2} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}|_{\Sigma_2} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}},
\end{aligned} \tag{1.9.2}$$

где  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}, \underline{\underline{\mathbf{b}}}$  — тензоры теплового расширения;  $\vartheta$  — перепад температуры;  $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, \underline{\underline{\mathbf{P}}}_0, \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0$  — тензоры, либо образованные источниками немеханической природы, либо являющиеся результатом решения несвязанных задач [83, 87, 109, 231, 232].

При решении термомеханических задач бывает так, что механическая структура микрополярного материала отличается от тепловой. В таком случае материальные тензоры при множителе перепада температур, составляющие функционалы  $a(\vartheta; \vartheta), l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta)$  вообще говоря отличны от материальных тензоров функционала  $a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ . Следовательно функционалы  $a(\vartheta; \vartheta), l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta)$  будут иметь вид

$$\begin{aligned}
a(\vartheta; \vartheta) &= \int_V \left( \underline{\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}_\vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \right) \vartheta^2 dV, \\
l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta) &= \int_V \left[ \left( \underline{\underline{\mathbf{P}}}_0 - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta \right) \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0 - \underline{\underline{\mathbf{D}}}_\vartheta \otimes \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta \right) \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \right] dV,
\end{aligned} \tag{1.9.3}$$

где материальные тензоры  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\vartheta, \underline{\underline{\mathbf{D}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{D}}}_\vartheta$  различны и могут быть определены исходя из механической и тепловой структуры материала.

## 1.10. Вариационная формулировка модели натянутой нити

Формулировка модели основана на определении абсолютно гибкой растяжимой нити [72], не оказывающей сопротивление упругой среде, кроме усилия натяжения.

Главной целью вариационной формулировки модели натянутой нити или системы нитей является реализация модели преднапряжения для классической и микрополярной среды. Как было упомянуто ранее, данная работа ограничена механической формулиров-

кой модели идеально гибкой натянутой нити [72] в рамках задачи Л. Эйлера [61, 62] о нахождении величины уменьшения растягивающего усилия из-за силы трения по длине нити изогнутой в форме дуги и попыткой обобщения данной задачи на микрополярную среду. Для обобщения задачи на микрополярную среду предлагается действие нити (результатирующий вектор сил и пар в каждой ее точке) заменить работой сил и пар на соответствующих кинематических полях. Для нахождения результирующего вектора силы и пары используется подход, который основан на параметризации кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Это позволяет учесть сложную геометрию и выписать уравнения равновесия произвольной точки нити.

Чтобы сформулировать вариационную постановку для модели натянутой нити вспомним, что условие стационарности лагранжиана (1.8.6) позволяет прийти к интегральным тождествам (1.8.5), которые в свою очередь эквивалентны краевой задаче (1.7.2), что и было доказано ранее. Иными словами, задача минимизации функционала Лагранжа для модели натянутой нити в микрополярной упругой среде также связана с постановкой (1.7.2) и может быть сформулирована через работу сил и моментов нити на соответствующих макроперемещениях и микровращениях, полагая наличие контакта без отслоения. Таким образом действие натянутой нити заменяется эквивалентным внешним воздействием, что позволяет сформулировать аналогичную (1.8.6) задачу

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}: L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}: \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0$$

$$L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}),$$

$$a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int_V \left[ (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \nabla \boldsymbol{\psi} \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\psi} \right] dV, \quad (1.10.1)$$

$$s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) dS \approx \sum_{i=0}^n (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{w} + \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\psi}), \quad S \subset V,$$

где  $s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  — работа натянутой нити на соответствующем поле перемещений и микровращений, если заданы тождества  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\varphi}$ ;  $S$  — длина нити в упругом пространстве или области  $V$  микрополярной среды;  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  — сила и момент, соответственно, возникающие по длине натянутой нити, действующие на тело как внешнее воздействие и в общем случае зависят от усилия, силы трения и кривизны нити в данной её точке. Для функционала  $s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  аппроксимация соответствующих полей перемещений  $\mathbf{w}$  и микровращений  $\boldsymbol{\psi}$  будет подробно изложена в последующей главе, посвящённой построению численного решения вариационной постановки задачи (1.10.1).

Прежде чем перейти к замене действия натянутой нити внешними силами и парами, определим сначала закон распределения усилия по длине [61, 62]. После чего, введём определение метрического пространства  $\mathbb{R}^3$  и внутренней метрики для задания парамет-

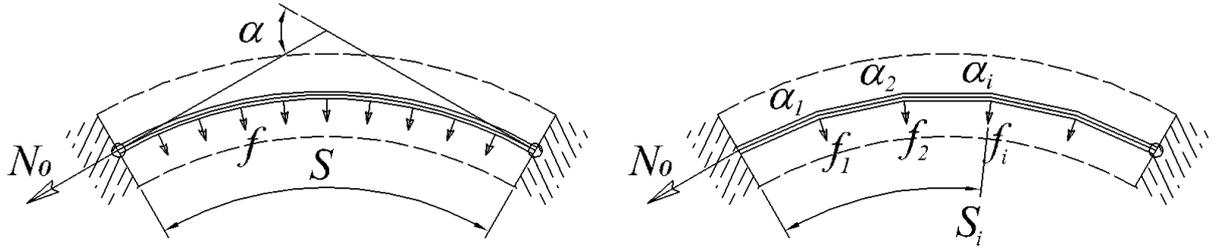


Рисунок 1.5. К определению внешних сил от действия натянутой нити а) кривой и б) спрямлённой кривой при конечном числе разбиений.

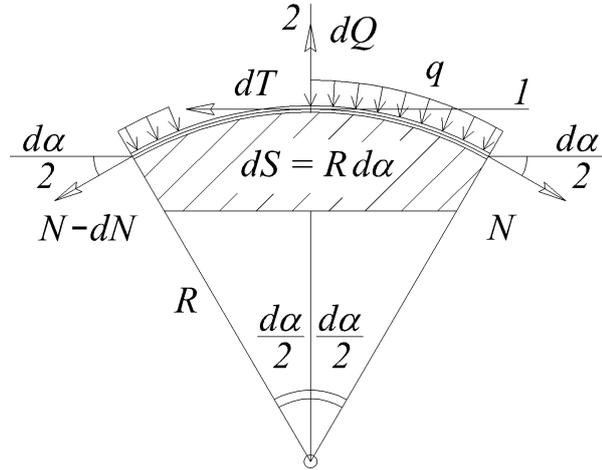


Рисунок 1.6. Равновесие в окрестности малой дуги натянутой нити.

ризации кривой [8, 33, 34], на основе которой выпишем уравнения статического равновесия произвольной точки нити.

Известно, что в 1762 году Л. Эйлер предложил решение дифференциального уравнения для определения величины уменьшения растягивающего усилия натянутой абсолютно гибкой нити (каната) в форме дуги окружности, которое можно определить из уравнений статического равновесия. Рассмотрим нить, огибающую область, ограниченную углом поворота  $d\alpha$  радиуса  $R$  и малой дугой  $dS$  окружности. Сечение нити слева находится со стороны анкера, а сечение нити справа расположено ближе к тяжному концу. В этом случае можно выписать сумму проекций всех сил на ось 1 и 2

$$\begin{cases} \sum F_1 = 0, & -dT - (N - dN - N) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0, & \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \\ \sum F_2 = 0, & dQ - (N - dN + N) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0, & \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}, \end{cases} \quad (1.10.2)$$

где  $\sum F_1$ ,  $\sum F_2$  — сумма проекций всех сил на ось 1 и 2, соответственно;  $N$  — величина усилия со стороны тяжного конца;  $N - dN$  — величина усилия со стороны анкера за вычетом малой величины  $dN$ , соответствующей величине потери на трении  $dT$ ;  $dQ$  — результирующая вертикальная реакция соответствующая нормальному давлению обжатия  $q$  на единицу длины дуги  $dS$  вследствие натяжения нити. Из уравнений равновесия легко

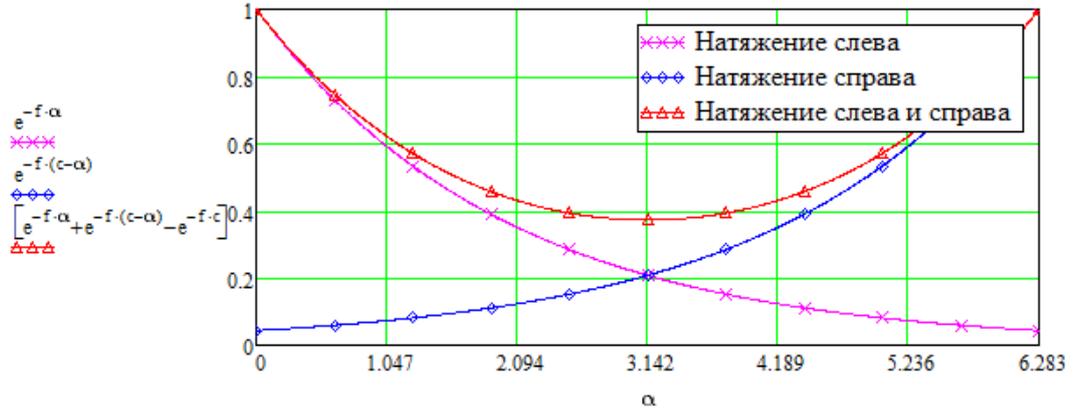


Рисунок 1.7. Графики функций распределения усилий по длине натянутой нити с учётом силы трения при разных вариантах натяжения.

получить следующие дифференциальные зависимости и соотношения, идентичные модели мембранной теории

$$dQ = R d\alpha q, \quad q = \frac{N}{R}, \quad dT = -f dQ, \quad (1.10.3)$$

$$dQ = N d\alpha, \quad dT = dN, \quad \frac{dN}{N} = -f d\alpha,$$

где  $\tau = f q$  — соотношение Амонтона–Кулона, касательное давление на единицу длины (именно данная величина определяет величину момента или поверхностные пары, действующие вдоль длины нити от силы трения);  $f$  — коэффициент трения. Запишем интегральное уравнение устанавливающее зависимость усилия от угла поворота  $\alpha$  сечения и найдём закон Эйлера о распределении усилия по длине нити с учётом силы трения

$$\int_{N_i}^{N_{i+1}} \frac{dN}{N} = -f \int_0^\alpha d\alpha, \quad \ln N \Big|_{N_i}^{N_{i+1}} = -f \alpha \Big|_0^\alpha, \quad N_{i+1} = N_i e^{-f\alpha}, \quad \delta N = N_i - N_{i+1}, \quad (1.10.4)$$

$$\delta N = (1 - e^{-f\alpha}) N_i,$$

где  $\alpha$  — интегральный угол между начальным  $i$  и текущим  $i + 1$  сечением нити;  $N_i$  — усилие в  $i$  сечении;  $N_{i+1}$  — усилие в  $i + 1$  сечении. Если за  $N_0$  обозначить начальное усилие натяжения нити, то можно записать функции распределения усилий для одно и двухстороннего натяжения, соответственно

$$N(\alpha) = N_0 e^{-f\alpha}, \quad N(\alpha) = N_0 (e^{-f\alpha} + e^{-f(c-\alpha)} - e^{-fc}), \quad (1.10.5)$$

где  $c$  — интегральный угол по длине между сечениями противоположных концов нити. Так, для параметров  $c = 2\pi$ ,  $f = 0.5$  графики функций (1.10.5) примут вид см. (рисунок 1.7).

Рассмотрим другой подход, который также позволяет определить уменьшение усилий по длине нити из-за трения и основан на введении евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$  для задания параметризации кривых [8, 33, 34] и записи векторных уравнений равновесия произвольной точки нити. Сравнение данного подхода с решением Эйлера будет дано ниже. Абсолютно гибкую нить будем считать одномерным евклидовым всюду плотным точечным множеством или линией, находящейся в трехмерном евклидовом пространстве. Введем следующие определения.

**Определение 1.10.1.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Функцией расстояния  $d$  на множестве  $X$  будем называть каждое симметричное отображение, равное нулю на парах одинаковых элементов

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, x) = 0 \quad \forall x, y \in X. \quad (1.10.6)$$

**Определение 1.10.2.** Если  $d$  есть функция расстояния на множестве  $X$ , которая удовлетворяет неравенству треугольника

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X, \quad (1.10.7)$$

то такая функция  $d$  называется полуметрикой, а множество  $X$ , на котором задана полуметрика, называется полуметрическим.

**Определение 1.10.3.** Если функция расстояния  $d$  является полуметрикой и строго положительна  $d(x, y) > 0$ , для всех  $x \neq y$ , то такая функция  $d$  называется метрикой, а множество  $X$ , на котором задана метрика, называется метрическим.

Будем добавлять слово «обобщённый», если разрешены бесконечные значения, иногда слово «конечный», чтобы подчеркнуть, что бесконечных значений нет. Также, в дальнейшем расстояние  $d$  между точками  $x$  и  $y$  метрического пространства  $X$  будем обозначать  $|xy|$ , иногда — через  $|xy|_X$ . Например,  $\mathbb{R}^3$  с евклидовым расстоянием — (конечное) метрическое пространство; пространство  $C(\mathbb{R})$  непрерывных функций на прямой с расстоянием  $|fg| = \sup |f(x) - g(x)|$  — обобщённое метрическое пространство; пространство  $L_1(\mathbb{R})$  интегрируемых функций с расстоянием  $|fg| = \int |f(x) - g(x)| dx$  — псевдометрическое пространство.

**Определение 1.10.4.** Кривой в метрическом пространстве  $X$  называется отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ . Каждому разбиению  $\xi$  отрезка вида  $a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots < t_n = b$  сопоставим число

$$L_\xi = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|, \quad |\gamma| = \sup L_\xi, \quad (1.10.8)$$

и назовём длиной кривой  $|\gamma|$  точную верхнюю грань величин  $L_\xi$  по всем разбиениям. Тогда кривая  $\gamma$  называется спрямляемой, если её длина конечна.

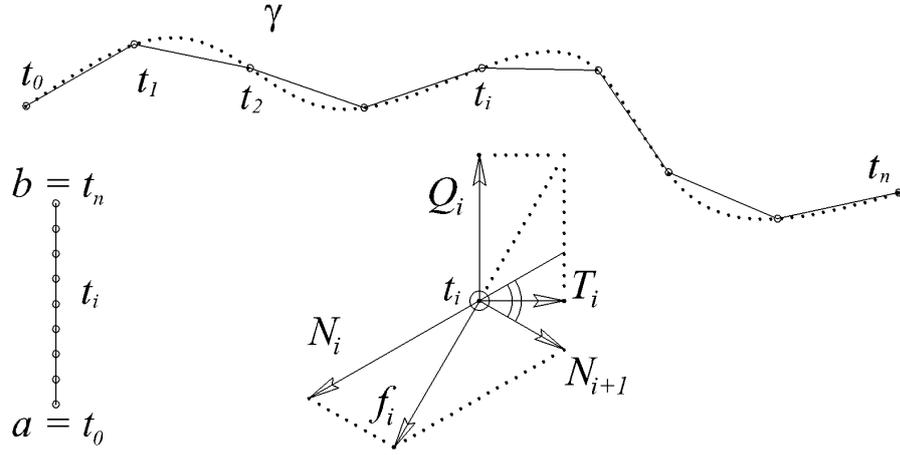


Рисунок 1.8. Параметризация спрямляемой нити и её равновесие для произвольной точки  $t_i$ .

**Определение 1.10.5.** Для каждой пары точек  $x, y$  метрического пространства рассмотрим множество всех спрямляемых кривых  $C_{x,y}$ , их соединяющих, и положим

$$d_{in}(x, y) = \inf \{ |\gamma| : \gamma \in C_{x,y} \}. \quad (1.10.9)$$

Тогда, метрика пространства  $X$  называется внутренней, если  $|xy| = d_{in}(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ ; и строго внутренней или геодезической, если для любых  $x, y \in X$  этот инфимум достигается на некоторой кривой  $\gamma$  и  $|\gamma| = |xy| = d_{in}(x, y)$ . Кривая  $\gamma$  в этом случае называется кратчайшей.

Таким образом, пространство  $\mathbb{R}^n$  с евклидовой метрикой — геодезическое. Если выбросить из него точку, то метрика остаётся внутренней, но перестаёт быть строго внутренней. Например, обозначим через  $S^1$  окружность на евклидовой плоскости. Определим на ней метрику, индуцированную из плоскости (т. е. расстояние между точками равно длине соединяющей их хорды). Тогда внутренняя метрика — это угловое расстояние или длина меньшей из двух дуг, ограниченной точками.

Пользуясь приведёнными выше определениями и примерами, введём параметризацию нити согласно (1.10.8) в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой и запишем уравнения статического равновесия произвольно выбранной точки  $t_i$  в векторной форме (рисунок 1.8)

$$\mathbf{Q}_i + \mathbf{T}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1} = 0, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1}, \quad (1.10.10)$$

где  $\mathbf{f}_i$  — результирующий вектор усилий  $\mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1}$  в точке  $i$  составляющий работу нити  $s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  на соответствующем поле перемещений (1.10.1);  $\mathbf{Q}_i, \mathbf{T}_i$  — нормальная реакция и реакция силы трения в точке  $i$ , соответственно. Если учесть граничные условия на концах нити в точках  $a, b$ , то уравнения равновесия примут вид

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_0 = 0, \quad \mathbf{f}_n + \mathbf{R}_n = 0, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{N}_n. \quad (1.10.11)$$

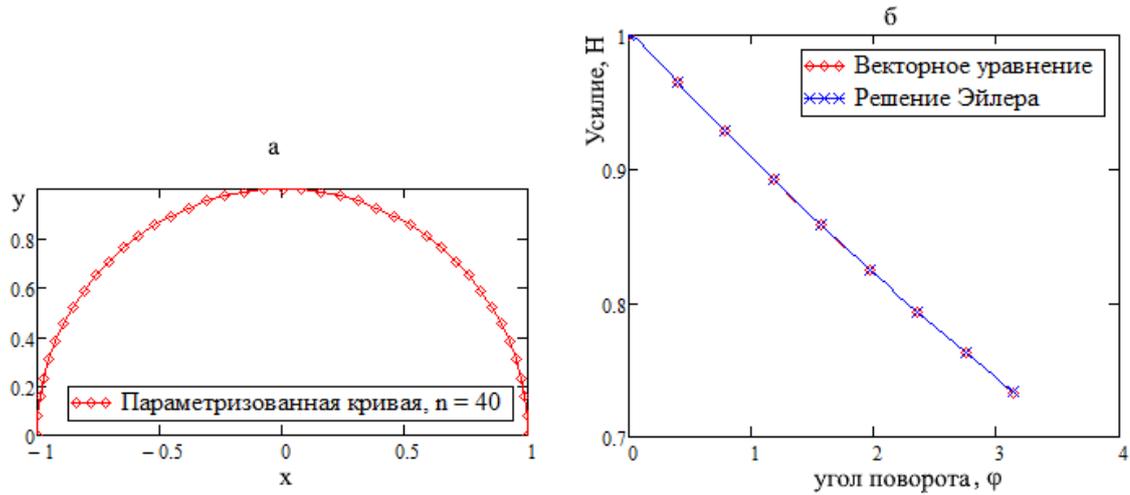


Рисунок 1.9. Параметризация спрямляемой нити для числа разбиений  $n = 40$  (а); зависимость усилия от угла поворота кривой (б): сравнение решения Эйлера с решением на основе векторного уравнения (1.10.10), (1.10.11) параметризованной кривой

Следует отметить, что при замене действия натянутой нити работой внешних сил реакции  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{T}$  должны быть отброшены потому как их работа заменяется эквивалентной внутренней работой поля напряжений и моментных напряжений на соответствующих деформациях и изгибах–кручениях функционала  $a$  задачи (1.10.1).

Для иллюстрации изложенного подхода определим потерю усилий от трения используя выражения (1.10.10), (1.10.11) и сравним с решением Эйлера (1.10.5). Для этого рассмотрим нить, огибающую окружность радиусом 1 (радиус может быть произвольным), левый конец нити зафиксирован, а правый конец имеет начальное усилие равно 1. Нить ограничена углом  $\alpha = \pi$  (см. рисунок 1.9, а). Величина трения между нитью и окружностью  $f = 0.1$ . На рисунке 1.9, б, даны графики уменьшения усилия по длине нити в зависимости от угла поворота сечения. Относительная погрешность между решением Эйлера и решением на основе параметризации кривой для числа разбиений  $n = 40$  составила  $\delta = 0.016\%$ . Для числа разбиений  $n = 400$  относительная погрешность составила  $\delta = 0.0016\%$ .

Что касается способа аппроксимации работы внешних сил и моментов моделируемой нити, то более подробно эта часть будет изложена в следующей главе при построении численного решения, основанного на применении метода Рунге для задачи (1.10.1) микрополярного упругого континуума.

## Построение численного решения краевой задачи методом Ритца

### 2.1. Дискретизация области и подпространство базисных функций

Как известно, задача минимизации функционала приводит к системе уравнений в частных производных, для решения которой в настоящей работе использован метод Ритца. Суть этого метода состоит в таком выборе конечного числа пробных функций, чтобы их линейная комбинация доставляла стационарный минимум функционалу. Рассмотрим метод Ритца в рамках микрополярной теории по аналогии с классической теорией упругости [96, 99, 230–232]. Выберем некоторую полную систему координатных вектор–функций  $\{\mathbf{w}^{(n)}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\psi}^{(n)}(\mathbf{r}), n = 0, 1, 2, \dots\}$ , удовлетворяющих следующим кинематическим условиям

$$\mathbf{r} \in \Sigma_1 : \quad \mathbf{w}^{(n)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \boldsymbol{\psi}^{(n)}(\mathbf{r}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.1)$$

Перемещения  $\mathbf{w}$  и микровращения  $\boldsymbol{\psi}$  ищутся в виде ряда по координатным или кусочно–полиномиальным базисным функциям  $N_n(\mathbf{r})$

$$\mathbf{w}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\mathbf{r}) \widehat{\mathbf{w}}^n, \quad \boldsymbol{\psi}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\mathbf{r}) \widehat{\boldsymbol{\psi}}^n \quad (2.1.2)$$

с неизвестными узловыми перемещениями  $\widehat{\mathbf{w}}^n$  и микровращениями  $\widehat{\boldsymbol{\psi}}^n$ , не зависящими от радиус–вектора  $\mathbf{r}$ .

Выражения (2.1.2) можно подставить в определяющие соотношения (1.1.8), (1.1.11) и найти тензор деформаций и изгибов–кручений, по которым, в свою очередь, из определяющих соотношений (1.8.1), (1.8.2) задачи (1.7.2) находятся тензоры напряжений и моментных напряжений. Если в бесконечном ряду (2.1.2) оставить только первые  $N$  членов (тем самым вместо точного решения  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$  разыскивается приближённое  $\mathbf{w}^N, \boldsymbol{\psi}^N$ ), то лагранжианы (1.8.6), (1.9.2), (1.10.1) превращаются в функцию  $6N$  переменных из которых  $3N$  макроперемещений  $\widehat{\mathbf{w}}^n$  и  $3N$  микровращений  $\widehat{\boldsymbol{\psi}}^n$ , где  $n = 1, \dots, N$ . Для отыскания минимума нужно приравнять нулю все производные от  $L$  по  $\widehat{\mathbf{w}}$  и  $\widehat{\boldsymbol{\psi}}$

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \widehat{\boldsymbol{\psi}}} = 0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Из системы (2.1.3)  $6N$  алгебраических уравнений каким-либо образом определяются  $6N$  неизвестных узловых макроперемещений  $\widehat{\mathbf{w}}^n$  и микровращений  $\widehat{\boldsymbol{\psi}}^n$ , после чего приближённое решение находится с помощью рядов (2.1.2), где суммирование надо проводить от 1 до  $N$  для каждого поля соответственно. Учитывая, что в данной работе рассматривается линейная упругая микрополярная среда, то система (2.1.3) является линейной, и для её решения можно использовать широко апробированные численные методы. Например, метод сопряжённых градиентов был использован при написании собственного решателя на основе технологии GPGPU, реализующего параллельные вычисления на видеокартах.

Представим независимые векторы в базисе кусочно-полиномиальных функций, воспользовавшись выше изложенной идеей метода Ритца [96, 99, 107, 108, 212–214, 230–232]

$$G \supset G^N, \quad \mathbf{u}^N, \boldsymbol{\varphi}^N \in G^N, \quad \mathbf{w}^N, \boldsymbol{\psi}^N \in G^N, \quad \{\cdot\}^N = \sum_{p=1}^N N_p \widehat{\{\cdot\}}^p \equiv N_p \widehat{\{\cdot\}}^p, \quad (2.1.4)$$

где  $G^N$  — конечномерное подпространство базисных функций размерности  $N$ ;  $p = \overline{1, N}$  — узлы конечных элементов — подчиняются правилу суммирования Эйнштейна (далее знак суммы опущен);  $\{\cdot\}^N$  — аппроксимированная векторная функция;  $\widehat{\{\cdot\}}^p$  — значение векторной функции в  $p$ -м узле;  $N_p$  — базисные функции, или функции формы, — приняты в области натуральных координат конечного элемента из условий:  $\xi^i \in [-1, +1]$ ,  $N_p(\xi^i) \in [0, 1]$ ,  $N_p(\boldsymbol{\xi}^q) = \delta_p^q$ , т.е.  $p$ -я функция формы от компонент радиуса-вектора  $\boldsymbol{\xi}^q$  в  $q$ -м узле определяется дельтой Кронекера  $\delta_p^q$ , а значит, на границе конечного элемента функции  $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q)$  тождественны узловым значениям:  $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\mathbf{w}}^q$ ,  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\boldsymbol{\psi}}^q$  (здесь и далее знак дискретизации векторов опущен). Таким образом, функция  $N_p$  в области конечного элемента аппроксимирует искомое векторное поле и удовлетворяет граничным условиям, а вне области конечного элемента базисная функция равна нулю.

## 2.2. О полиномах лагранжева и серендипова семейства

Как было указано ранее, для построения численного решения задачи (1.8.6) используется метод Ритца суть которого состоит в разложении (2.1.2) по базису кусочно-полиномиальных функций макроперемещения и микровращения применительно к лагранжианам (1.8.6), (1.9.2), (1.10.1).

В качестве кусочно-полиномиальных функций использованы полиномы трилинейного типа и серендиповы (serendipity — «интуитивная прозорливость») полиномы, формирующие 8-узловые и 20-узловые конечные элементы, соответственно (см. рисунок 2.1). Для 8-узлового конечного элемента полиномы трилинейного типа имеют вид [230–232]

$$\xi_p^1 = \pm 1, \quad \xi_p^2 = \pm 1, \quad \xi_p^3 = \pm 1, \quad N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad (2.2.1)$$

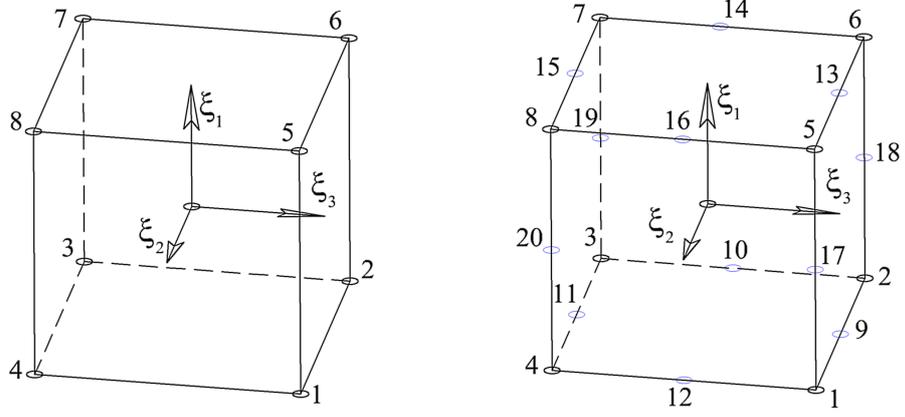


Рисунок 2.1. Нумерация узлов и ориентация локальных осей области натуральных координат для 8-ми и 20-ти узлового конечного элемента.

где  $p = \{1, 2, \dots, 8\}$  — узлы конечного элемента в локальной нумерации;  $\xi_p^i$  —  $i$ -я координата  $p$ -го узла;  $\xi^i \in [-1; 1]$  — произвольная точка области базисной функции или области натуральных координат. Производные функций форм (2.2.1) имеют следующие выражения

$$\begin{aligned}
 N_{p,1}(\xi^2, \xi^3) &= \frac{\xi_p^1}{8} (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
 N_{p,2}(\xi^1, \xi^3) &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) \frac{\xi_p^2}{8} (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
 N_{p,3}(\xi^1, \xi^2) &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) \frac{\xi_p^3}{8}.
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Рассмотрим теперь функции формы 20-узлового конечного элемента для вершинных и промежуточных узлов. Записываются они следующим образом [230–232]

$$\begin{aligned}
 N_p &= \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 2), \quad p = \{1, 2, \dots, 8\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^1 = 0, \quad p = \{17, 18, 19, 20\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^2 = 0, \quad p = \{9, 11, 13, 15\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), \quad \xi_p^3 = 0, \quad p = \{10, 12, 14, 16\},
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

где  $\xi^{i(2)}$  — возведение в степень 2 контравариантной компоненты  $\xi^i$ . Определим производные функций форм триквадратичного типа (2.2.3). Для вершинных узлов  $p = \{1, 2, \dots, 8\}$

ОНИ ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned}
N_{p,1} &= \frac{\xi_p^1}{8} (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (2\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 1), \\
N_{p,2} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) \frac{\xi_p^2}{8} (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + 2\xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 1), \\
N_{p,3} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) \frac{\xi_p^3}{8} (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + 2\xi_p^3 \xi^3 - 1).
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Выпишем теперь производные для промежуточных узлов. Начнём с параметров натуральных координат  $\xi_p^1 = 0$  для группы узлов  $p = \{17, 18, 19, 20\}$

$$\begin{aligned}
N_{p,1} &= -\frac{\xi^1}{2} (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
N_{p,2} &= (1 - \xi^{1(2)}) \frac{\xi_p^2}{4} (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
N_{p,3} &= (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) \frac{\xi_p^3}{4}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Производные для параметра натуральных координат  $\xi_p^2 = 0$  и группы узлов  $p = \{9, 11, 13, 15\}$

$$\begin{aligned}
N_{p,1} &= \frac{\xi_p^1}{4} (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
N_{p,2} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \\
N_{p,3} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) \frac{\xi_p^3}{4}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Производные для параметра натуральных координат  $\xi_p^3 = 0$  и группы узлов  $p = \{10, 12, 14, 16\}$

$$\begin{aligned}
N_{p,1} &= \frac{\xi_p^1}{4} (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), \\
N_{p,2} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) \frac{\xi_p^2}{4} (1 - \xi^{3(2)}), \\
N_{p,3} &= (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) \left( -\frac{\xi^2}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Стоит отметить важное свойство элементов высшего порядка. Они позволяют аппроксимировать криволинейную границу линией второго порядка и не имеют различных эффектов запираия в отличие от элементов трилинейного типа, что позволяет с достаточной точностью аппроксимировать нелинейные поля перемещений при неоднородном напряжённно-деформированном состоянии(когда определяющие соотношения зависят от

координат). Что касается недостатка трилинейных полиномов, то в данной работе будет описан метод редуцированного и селективного интегрирования, в том числе для почти несжимаемой среды, с обобщением на микрополярную теорию, благодаря чему можно преодолеть эффект запираания. Для построения аппроксимации искомым полям перемещений и микровращений даны полиномы двух типов. Это позволяет построить решение, которое обладает большей скоростью сходимости при меньших вычислительных затратах с заданной точностью, о чём и будет изложено в последующих частях работы.

### 2.3. Дискретизация функционала Лагранжа по пространственным координатам. Численное интегрирование Гаусса

Прежде чем вернуться к задаче (1.8.6) и выполнить ее дискретизацию, выпишем лагранжиан в компонентном виде и раскроем скобки

$$\begin{aligned}
L(w, \psi) &= \frac{1}{2} a(w, \psi; w, \psi) - l(w, \psi), \quad \forall w_i, \psi_i: w_i|_{\Sigma_1} = 0, \psi_i|_{\Sigma_1} = 0, \\
a(w, \psi; w, \psi) &= \int_V (A^{ijkl} (w_{l,k} - C_{kl}^{\cdot m} \psi_m) (w_{j,i} - C_{ij}^{\cdot n} \psi_n) + D^{ijkl} \psi_{l,k} \psi_{j,i}) dV = \\
&= \int_V (A^{ijkl} w_{l,k} w_{j,i} - A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m w_{j,i} - A^{ijkl} w_{l,k} C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + \\
&\quad + D^{ijkl} \psi_{l,k} \psi_{j,i}) dV, \\
l(w, \psi) &= \int_V (F^j w_j + m^j \psi_j) \rho dV + \int_{\Sigma_2} (P^j w_j + \mu^j \psi_j) d\Sigma, \\
&\quad n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} = P^j, \quad n_i \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Представим независимые векторы  $w_i, \psi_i$  в базисе кусочно-полиномиальных функций (2.2.1), (2.2.3), воспользовавшись разложением в ряд (2.1.4)

$$\begin{aligned}
L(\hat{w}, \hat{\psi}) &= \frac{1}{2} a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) - l(\hat{w}, \hat{\psi}), \quad \forall \hat{w}_i, \hat{\psi}_i: \hat{w}_i|_{\Sigma_1} = 0, \hat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0, \\
a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) &= \int_V (A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \hat{w}_l^p \hat{w}_j^q - A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,i} \hat{\psi}_l^p \hat{w}_j^q - \\
&\quad - A^{inkl} N_{p,k} N_q C_{in}^{\cdot j} \hat{w}_l^p \hat{\psi}_j^q + A^{inkm} C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} N_p N_q \hat{\psi}_l^p \hat{\psi}_j^q + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \hat{\psi}_l^p \hat{\psi}_j^q) dV, \\
l(\hat{w}, \hat{\psi}) &= \int_V (F^j N_q \hat{w}_j^q + m^j N_q \hat{\psi}_j^q) \rho dV + \int_{\Sigma_2} (P^j N_q \hat{w}_j^q + \mu^j N_q \hat{\psi}_j^q) d\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Введём обозначения для функционалов  $a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi})$  и  $l(\widehat{w}, \widehat{\psi})$ , приняв во внимание, что  $N_{p,k}, N_{q,i}$  — производные по декартовым координатам подпространства слабого решения

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} &= \int_V A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} dV, & \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &= \int_V (A^{inkm} C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} N_p N_q dV + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i}) dV, \\ \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} &= \int_V A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,i} dV, & \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} &= \int_V A^{inkl} N_{p,k} N_q C_{kl}^{\cdot n} dV, \\ \mathbb{F}_{(1)q}^j &= \int_V F^n N_{q\rho} dV + \int_{\Sigma_2} P^j N_q d\Sigma, & \mathbb{F}_{(2)q}^j &= \int_V m^j N_{q\rho} dV + \int_{\Sigma_2} \mu^j N_q d\Sigma, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где  $\mathbb{K}_{(\cdot)pq}^{lj}$  — компоненты тензорно-блочных матриц жёсткости микрополярной теории упругости;  $\mathbb{F}_{(1)q}^j$  — компоненты блочного вектора массовых и поверхностных сил;  $\mathbb{F}_{(2)q}^j$  — компоненты блочного вектора массовых и поверхностных пар. Принимая во внимание для определяющих соотношений (1.8.2) существование упругого потенциала для обратимых процессов имеем свойство (1.8.14) по которому не трудно установить симметрию компонент тензорно-блочных матриц жёсткости для материалов произвольной анизотропии

$$\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} = \mathbb{K}_{(1)qp}^{jl}, \quad \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} = \mathbb{K}_{(2)qp}^{jl}, \quad \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} = \mathbb{K}_{(3)qp}^{jl}, \quad \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} = \mathbb{K}_{(4)qp}^{jl}, \quad (\mathbf{A} \approx \mathbf{A}^T, \mathbf{D} \approx \mathbf{D}^T). \quad (2.3.4)$$

Важно отметить, что для построения численного решения интегро-дифференциальных выражений (2.1.3), (2.3.2), элементы которых содержат объёмные и поверхностные интегралы от функций и их первых производных, необходим переход в подпространство базисных функций, которые формируют 8-узловые или 20-узловые конечные элементы. С этой целью в методе конечных элементов используется неполное отображение декартовой области на область натуральных или криволинейных координат. Идея заключается в том, что векторные или тензорные функции представленные в криволинейном базисе это функции, компоненты которых зависят от криволинейных координат, но в тоже время базис остаётся декартов. Тогда правило ковариантного дифференцирования эквивалентно дифференцированию в декартовой области, и производные по криволинейным координатам выражаются без коэффициентов связности или символов Кристоффеля

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{e}^i \nabla_i (a^j \mathbf{e}_j) = \left( \frac{\partial a^j}{\partial \xi^i} + a^l \Gamma_{li}^j \right) \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \frac{\partial a^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j, & \Gamma_{li}^j \mathbf{e}_j &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \xi^i} \equiv 0, \\ \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{e}^i \nabla_i (a_j \mathbf{e}^j) = \left( \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - a_l \Gamma_{ji}^l \right) \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, & & (2.3.5) \\ \nabla \mathbf{a} &= \nabla_i a^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \nabla_i a_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{,i}^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{j,i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$  — декартов базис;  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  — декартовы мультибазисные векторы (диадное тензорное произведение);  $\xi^i$  — координаты криволинейного базиса или натуральные координаты. Такое неполное отображение позволяет применить численного интегрирование Гаусса–Лежандра, в результате чего произвольный призматический (конечный) элемент переходит в куб с ребром равным двум и координатами на отрезке  $[-1, +1]$ , а функции отображения имеют вид

$$x^i = x^i(\xi^j), \quad x_i = N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{x}_i^p, \quad (2.3.6)$$

где  $N_p$  — полиномы, заданные выражением (2.2.1) или (2.2.3);  $\hat{x}_i^p$  —  $i$  координата  $p$  узла конечного элемента, см. (рисунок 2.1). Взаимосвязь между областью натуральных координат (областью мастера-элемента) и декартовой представлены соотношениями [230–232]

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} = A_j^k, \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = B_k^i, \quad \frac{\partial N_p}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s} B_k^s, \quad \frac{\partial N_q}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t} \frac{\partial \xi^t}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t} B_i^t, \quad (2.3.7)$$

$$dV = J dV_\xi, \quad \mathbf{n} d\Sigma = \mathbf{n} J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad \epsilon_{ijm} \mathbf{n}^m J_\Sigma = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^j} \right),$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор, компоненты которого определяются соотношением (2.3.6);  $\mathbf{n}^m$  —  $m$ -й вектор единичной нормали;  $\epsilon_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты;  $J = \det [A_j^i]$  — якобиан. Важно помнить, что базис для области натуральных координат и декартовой области одинаков в отличие от преобразования компонент, которое подчиняется правилу ковариантного дифференцирования указанному выше (2.3.5). Так что в результате таких преобразований не возникает символов Кристоффеля или коэффициентов связности, что в свою очередь является неким приближением точного решения, основанного на тензорном аппарате и ковариантном дифференцировании. С другой стороны, математическое доказательство сходимости метода конечных элементов к точному решению обосновано теоремой Лакса–Мильграма и доказательством сжатия оператора, связанным с характерным размером конечного элемента. Эта особенность и лежит в основе аксиоматики метода конечных элементов.

При задании вектора поверхностной силы  $\mathbf{P}$  или пары  $\boldsymbol{\mu}$  удобно её представить как произведение абсолютной величины на нормаль  $\mathbf{n}$ . В таком случае не представляется сложным заменить нормаль и поверхностный якобиан векторным произведением локального базиса, который определяет соотношение единицы поверхности между декартовым базисом и областью натуральных координат. Так как одни и те же полиномы  $N_p$  используются и для аппроксимации (2.1.2), (2.1.4) и для отображения (2.3.6), то говорят, что конечные элементы являются изопараметрическими [230–232]. Это даёт возможность записать вы-

ражения (2.3.3) в области натуральных координат

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t J dV_\xi, & \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,t} B_i^t J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{inkl} N_{p,s} C_{in}^{\cdot j} N_q B_k^s J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &= \int_{V_e} [A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} + D^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t] J dV_\xi, \\
\mathbb{F}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} F^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} P^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, & \mathbb{F}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} m^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} \mu^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi,
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

где  $V_\xi, \Sigma_\xi$  — объем и поверхность тела в области мастера-элемента соответственно; функции  $B, J, J_\Sigma$ , связывающие область мастера-элемента с декартовой областью, определяемые выражениями (2.3.7). Обычно, при записи уравнений равновесия (что и будет выполнено далее) в области одного конечного элемента, дополнительно указывают поверхностные силы, возникающие на границе конечного элемента внутри области. Однако при ассемблировании или суммировании компонент блочных векторов сил и пар  $\mathbb{F}_{(\cdot)q}^j$  по всей конечномерной области внутренние силы и пары взаимосокращаются. По этому внутренние силы и пары  $\mathbb{F}_{(\cdot)q}^j$  не входят в выражения (2.3.8), полагая их взаимосокращение при ассемблировании. Принимая во внимание выражения компонент тензорно-блочных матриц жёсткости и векторов сил и пар в области натуральных координат одного конечного элемента (2.3.8), дискретный лагранжиан (2.3.2) примет вид

$$\begin{aligned}
L(\hat{w}, \hat{\psi}) &= \frac{1}{2} a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) - l(\hat{w}, \hat{\psi}), \quad \forall \hat{w}_i, \hat{\psi}_i: \quad \hat{w}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \hat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0, \\
a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) &= \mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \hat{w}_i^p \hat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \hat{\psi}_i^p \hat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \hat{w}_i^p \hat{\psi}_j^q + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \hat{\psi}_i^p \hat{\psi}_j^q, \\
l(\hat{w}, \hat{\psi}) &= \mathbb{F}_{(1)q}^j \hat{w}_j^q + \mathbb{F}_{(2)q}^j \hat{\psi}_j^q,
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

где  $p = \{1, 2, \dots, 8\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.1) и формируют 8-узловой пространственный конечный элемент, или  $p = \{1, 2, \dots, 20\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.3) и формируют 20-узловой пространственный конечный элемент см. (рисунок 2.1);  $l, j = 1, 2, 3$  для трёхмерной постановки задачи (1.8.6).

Как было указано ранее, для численного интегрирования применяется метод Гаусса, суть которого состоит в замене интегральных выражений (2.3.8) квадратурными форму-

Таблица 2.1. Гауссовы квадратуры  $\xi_a$ , с количеством точек интегрирования  $n$  по направлению и весовыми коэффициентами  $C_a$

$n$	$\xi_a$	$C_a$
1	0	2.0
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1.0
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$

лами

$$\int_{V_\xi} f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) dV_\xi = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n C_a C_b C_c f(\xi_a^1, \xi_b^2, \xi_c^3), \quad (2.3.10)$$

$$\int_{\Sigma_\xi} f(\xi^1, \xi^2) d\Sigma_\xi = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n C_a C_b f(\xi_a^1, \xi_b^2),$$

где  $f$  — функция подинтегральных выражений (2.3.8);  $C_a, \xi_a$  — квадратуры берутся из таблицы 2.1 или в общем случае находятся из системы уравнений

$$\sum_{a=1}^n C_a \xi_a^q = \int_{-1}^{+1} \xi^q d\xi, \quad q = 0, \dots, 2n - 1, \quad (2.3.11)$$

где  $q$  — степень интегрируемого полинома;  $n$  — число точек интегрирования. Иными словами точность квадратурной формулы Гаусса с  $n$  точками интегрирования точна для полиномов степени  $q$  и определяется из выражения

$$q = 2n - 1. \quad (2.3.12)$$

Таким образом, для точного(полного) интегрирования полиномов трилинейного типа (2.2.1) по каждому из трёх направлений использовалась двухточечная схема интегрирования, т. е. восемь точек интегрирования на элемент. И три точки интегрирования по каждому из направлений для точного(полного) интегрирования полиномов квадратичного типа (2.2.3) что составляет двадцать семь точек на элемент.

## 2.4. Дискретизация функционала Лагранжа по пространственным координатам при неизотермических процессах (обобщенный принцип Дюамеля-Неймана)

Дискретизация функционала Лагранжа по пространственным координатам (2.1.4) при неизотермических процессах задачи (1.9.2) во многом идентична задаче (1.8.6) при изотермических процессах и выражениям (обозначениям) компонент тензорно-блочных матриц жёсткости и векторов сил(моментов) для области декартовых (2.3.3) и натуральных координат (2.3.8). Отличие состоит лишь в том, что ранее определённый оператор или упругий потенциал свободной энергии (1.5.14) зависит не только от искомым полей перемещений и микровращений, но и от температуры(не зависит от времени) и содержит тензоры теплового расширения  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$ , которые сопряжены в общем случае с материальными тензорами тепловой структуры отличными от механической  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\vartheta, \underline{\underline{\mathbf{D}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{D}}}_\vartheta$ . Кроме того упругий потенциал содержит ещё и начальные тензорные поля  $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_0, \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}_0, \underline{\underline{\mathbf{P}}}_0, \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0$  образованные источниками немеханической природы или являющиеся результатом решения несвязанных задач.

Выпишем лагранжиан при неизотермических процессах (1.9.2) в компонентном виде и раскроем скобки

$$\begin{aligned}
L(w, \psi, \vartheta) &= \frac{1}{2} a(w, \psi; w, \psi) + \frac{1}{2} a(\vartheta; \vartheta) - l(w, \psi, \vartheta), \quad \forall w_i, \psi_i: w_i|_{\Sigma_1} = 0, \psi_i|_{\Sigma_1} = 0, \\
a(w, \psi; w, \psi) &= \int_V (A^{ijkl} (w_{l,k} - C_{kl}^{\cdot m} \psi_m - \gamma_{kl}^0) (w_{j,i} - C_{ij}^{\cdot n} \psi_n - \gamma_{ij}^0) + D^{ijkl} (\psi_{l,k} - \\
&\quad - \varkappa_{kl}^0) (\psi_{j,i} - \varkappa_{ij}^0)) dV = \int_V (A^{ijkl} w_{l,k} w_{j,i} - A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m w_{j,i} - A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 w_{j,i} - \\
&\quad - A^{ijkl} w_{l,k} C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 C_{ij}^{\cdot n} \psi_n - A^{ijkl} w_{l,k} \gamma_{ij}^0 + \\
&\quad + A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m \gamma_{ij}^0 + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 \gamma_{ij}^0 + D^{ijkl} \psi_{l,k} \psi_{j,i} - D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \psi_{j,i} - D^{ijkl} \psi_{l,k} \varkappa_{ij}^0 + \\
&\quad + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \varkappa_{ij}^0) dV, \\
a(\vartheta; \vartheta) &= \int_V (A^{ijkl} a_{kl} a_{ij} + D^{ijkl} b_{kl} b_{ij}) \vartheta^2 dV, \\
l(w, \psi, \vartheta) &= \int_V [\rho F^j w_j + \rho m^j \psi_j + A^{ijkl} a_{kl} \vartheta w_{j,i} - P_0^{ij} w_{j,i} - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta C_{ij}^{\cdot m} \psi_m + \\
&\quad + P_0^{ij} C_{ij}^{\cdot m} \psi_m - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta \gamma_{ij}^0 + P_0^{ij} \gamma_{ij}^0 + D^{ijkl} b_{kl} \vartheta \psi_{j,i} - \mu_0^{ij} \psi_{j,i} - D^{ijkl} b_{kl} \vartheta \varkappa_{ij}^0 + \\
&\quad + \mu_0^{ij} \varkappa_{ij}^0] dV + \int_{\Sigma_2} (P^j w_j + \mu^j \psi_j) d\Sigma, \quad n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} = P^j, \quad n_i \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j.
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Стоит отметить что функционал  $a(w, \psi; w, \psi)$  при раскрытии скобок содержит линейные слагаемые относительно полей макроперемещений  $w$  и микровращений  $\psi$ , связанные с работой начальных тензорных полей. В таком случае производная по узловым переменным  $\hat{w}, \hat{\psi}$  при дальнейшей дискретизации по пространственным координатам для слагаемых  $A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 w_{j,i}$ ,  $A^{ijkl} w_{l,k} \gamma_{ij}^0$ ,  $A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 C_{ij}^{\cdot n} \psi_n$ ,  $A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m \gamma_{ij}^0$ ,  $D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \psi_{j,i}$ ,  $D^{ijkl} \psi_{l,k} \varkappa_{ij}^0$  очевидно будет связана с узловыми силами и моментами, а значит данные слагаемые уместно отнести к линейному функционалу  $l(w, \psi, \vartheta)$ . При этом слагаемые  $A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 \gamma_{ij}^0$ ,  $D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \varkappa_{ij}^0$  не зависят от  $w, \psi$ , следовательно не будут оказывать влияния на узловые силы аналогично функционалу  $a(\vartheta; \vartheta)$ .

Представим независимые векторы  $w_i, \psi_i$  в базисе кусочно-полиномиальных функций (2.2.1), (2.2.3), воспользовавшись разложением в ряд (2.1.4) вводя дополнительно обозна-

чение для функционала  $a(\gamma_0, \varkappa_0; \gamma_0, \varkappa_0)$

$$\begin{aligned}
L(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta) &= \frac{1}{2} [a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) + a(\gamma_0, \varkappa_0; \gamma_0, \varkappa_0) + a(\vartheta; \vartheta)] - l(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta) - l(\gamma_0, \varkappa_0, \vartheta), \\
a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) &= \int_V (A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \widehat{w}_l^p \widehat{w}_j^q - A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,i} \widehat{\psi}_l^p \widehat{w}_j^q - \\
&\quad - A^{inkl} N_{p,k} N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{w}_l^p \widehat{\psi}_j^q + A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q + \\
&\quad + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q) dV, \\
a(\gamma_0, \varkappa_0; \gamma_0, \varkappa_0) &= \int_V (A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 \gamma_{ij}^0 + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \varkappa_{ij}^0) dV, \\
l(w, \psi, \vartheta) &= \int_V [\rho F^j N_q \widehat{w}_j^q + \rho m^j N_q \widehat{\psi}_j^q + A^{ijkl} a_{kl} \vartheta N_{q,i} \widehat{w}_j^q - P_0^{ij} N_{q,i} \widehat{w}_j^q - \\
&\quad - A^{inkl} a_{kl} N_q \vartheta C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_j^q + P_0^{in} C_{in}^{\cdot j} N_q \widehat{\psi}_j^q + D^{ijkl} b_{kl} \vartheta N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q - \mu_0^{ij} N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q + \\
&\quad + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{w}_j^q - A^{inkl} \gamma_{kl}^0 N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_j^q + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q] dV + \int_{\Sigma_2} (P^j N_q \widehat{w}_j^q + \\
&\quad + \mu^j N_q \widehat{\psi}_j^q) d\Sigma, \\
l(\gamma_0, \varkappa_0, \vartheta) &= \int_V [P_0^{ij} \gamma_{ij}^0 - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta \gamma_{ij}^0 + \mu_0^{ij} \varkappa_{ij}^0 - D^{ijkl} b_{kl} \vartheta \varkappa_{ij}^0] dV, \\
\forall \widehat{w}_i, \widehat{\psi}_i: \widehat{w}_i|_{\Sigma_1} &= 0, \quad \widehat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} = P^j, \quad n_i \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Таким образом выражения билинейных и линейных функционалов (2.4.2) были получены переносом линейных слагаемых  $A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 w_{j,i}$ ,  $A^{ijkl} w_{l,k} \gamma_{ij}^0$ ,  $A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 C_{ij}^{\cdot n} \psi_n$ ,  $A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m \gamma_{ij}^0$ ,  $D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \psi_{j,i}$ ,  $D^{ijkl} \psi_{l,k} \varkappa_{ij}^0$  в линейный функционал  $l(w, \psi, \vartheta)$  при учёте симметрии материальных тензоров (2.3.4) в результате чего справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{w}_j^q + A^{klij} \gamma_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{w}_j^q &= 2A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{w}_j^q, \\
A^{inkl} \gamma_{kl}^0 N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_j^q + A^{klin} \gamma_{kl}^0 N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_j^q &= 2A^{inkl} \gamma_{kl}^0 N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{\psi}_j^q, \\
D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q + D^{klij} \varkappa_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q &= 2D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 N_{q,i} \widehat{\psi}_j^q.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Аналогично изотермическим процессам введём обозначения для функционалов  $a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi})$  и  $l(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta)$ , которые являются идентичными декартовой области (2.3.3) и области натуральных координат (2.3.8). Отличие заключается в дополнительном обозначении слагае-

мых для функционала  $l(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta)$  в декартовой области

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(1)q}^j &= \int_V [A^{ijkl} a_{kl} \vartheta + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 - P_0^{ij}] N_{q,i} dV, \\ \mathbb{T}_{(2)q}^j &= \int_V [(P_0^{in} - A^{in kl} a_{kl} \vartheta - A^{in kl} \gamma_{kl}^0) C_{in}^{\cdot j} N_q + \\ &\quad + (D^{ijkl} b_{kl} \vartheta - \mu_0^{ij} + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0) N_{q,i}] dV, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

и в области натуральных координат учитывая соотношения (2.3.7)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} [A^{ijkl} a_{kl} \vartheta + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 - P_0^{ij}] N_{q,t} B_i^t J dV_\xi, \\ \mathbb{T}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} [(P_0^{in} - A^{in kl} a_{kl} \vartheta - A^{in kl} \gamma_{kl}^0) C_{in}^{\cdot j} N_q + \\ &\quad + (D^{ijkl} b_{kl} \vartheta - \mu_0^{ij} + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0) N_{q,t} B_i^t] J dV_\xi. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Принимая во внимание выражения компонент тензорно-блочных матриц жёсткости и векторов сил и пар в области натуральных координат одного конечного элемента (2.3.8), (2.4.5), дискретный лагранжиан при неизотермических процессах (2.4.1) и заданными начальными тензорными полями  $\underline{\gamma}_0$ ,  $\underline{\varkappa}_0$ ,  $\underline{\mathbf{P}}_0$ ,  $\underline{\mu}_0$  примет вид

$$L(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta) = \frac{1}{2} [a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) + a(\gamma_0, \varkappa_0; \gamma_0, \varkappa_0) + a(\vartheta; \vartheta)] - l(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta) - l(\gamma_0, \varkappa_0, \vartheta),$$

$$a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) = \mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p \widehat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p \widehat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p \widehat{\psi}_j^q + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q, \quad (2.4.6)$$

$$l(\widehat{w}, \widehat{\psi}, \vartheta) = \left( \mathbb{F}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j \right) \widehat{w}_j^q + \left( \mathbb{F}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j \right) \widehat{\psi}_j^q,$$

$$\forall \widehat{w}_i, \widehat{\psi}_i: \widehat{w}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \widehat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} = P^j, \quad n_i \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j,$$

где  $p = \{1, 2, \dots, 8\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.1) и формируют 8-узловой пространственный конечный элемент, или  $p = \{1, 2, \dots, 20\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.3) и формируют 20-узловой пространственный конечный элемент (см. рисунок 2.1);  $l, j = 1, 2, 3$  для трёхмерной постановки задачи (1.8.6).

## 2.5. Система линейных алгебраических уравнений для среды произвольной анизотропии при изотермических и неизотермических процессах. Ассемблирование

Как было сказано ранее, если в бесконечном ряду (2.1.2) метода Ритца оставить только первые  $N$  членов, то лагранжианы (1.8.6), (1.9.2), (1.10.1) превращаются в функцию  $6N$  переменных из которых  $3N$  макроперемещений  $\widehat{w}^p$  и  $3N$  микровращений  $\widehat{\psi}^p$ , где  $p = 1, \dots, N$ . Для отыскания минимума нашего дискретного лагранжиана (2.3.9) задачи (1.8.6) нужно приравнять нулю все производные от  $L$  по  $\widehat{w}$  и  $\widehat{\psi}$  принимая во внимание (2.1.3), симметрию компонент тензорно-блочной матрицы жёсткости (2.3.4) и соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{w}_b^a} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \widehat{\psi}_b^a} = 0, \quad \frac{\partial \widehat{w}_l^p}{\partial \widehat{w}_b^a} = \frac{\partial \widehat{\psi}_l^p}{\partial \widehat{\psi}_b^a} = g_{a \cdot}^p g_{\cdot l}^b, \quad \frac{\partial \widehat{w}_j^q}{\partial \widehat{w}_b^a} = \frac{\partial \widehat{\psi}_j^q}{\partial \widehat{\psi}_b^a} = g_{a \cdot}^q g_{\cdot j}^b, \quad (2.5.1)$$

где  $g_{\cdot j}^i \equiv \delta_j^i$  — компоненты изотропного тензора второго ранга, эквивалентные дельте Кронеккера. В таком случае нетрудно прийти к следующей системе линейных алгебраических уравнений для микрополярной среды произвольной анизотропии с центром симметрии при изотермических процессах [107–109, 212–214]

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \widehat{w}_j^q} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \widehat{\psi}_j^q} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)q}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} & -\mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} & +\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}_l^p \\ \widehat{\psi}_l^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_{(1)q}^j \\ \mathbb{F}_{(2)q}^j \end{Bmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Систему уравнений (2.5.2) нетрудно записать в тензорном виде, если учесть что  $l, j$  — компоненты тензорных блоков или векторов

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \widehat{\mathbf{w}}^q} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \widehat{\boldsymbol{\psi}}^q} = 0, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq} & -\mathbb{K}_{(2)pq} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq} & +\mathbb{K}_{(4)pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{(1)q} \\ \mathbf{F}_{(2)q} \end{Bmatrix}. \quad (2.5.3)$$

Аналогичным образом записав критерий стационарности для дискретного лагранжиана при неизотермических процессах (2.4.6) задачи (1.9.2), приравняв нулю все производные от  $L$  по  $\widehat{w}$ ,  $\widehat{\psi}$  также принимая во внимание (2.1.3), симметрию компонент тензорно-блочной матрицы жёсткости (2.3.4) и соотношения (2.5.1) придём к системе линейных алгебраических уравнений для микрополярной среды произвольной анизотропии с центром симметрии при неизотермических процессах, выполнив также предварительно переобозначения

индексов  $a, b$  на  $l, j$  [107–109, 212–214]

$$\begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj}\widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj}\widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj}\widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj}\widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} & -\mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} & +\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}_l^p \\ \widehat{\psi}_l^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j \\ \mathbb{F}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j \end{Bmatrix}. \quad (2.5.4)$$

Систему уравнений (2.5.4) нетрудно записать в тензорном виде, если учесть что  $l, j$  — компоненты тензорных блоков или векторов

$$\begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq} & -\mathbb{K}_{(2)pq} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq} & +\mathbb{K}_{(4)pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_q + \mathbf{T}_q \\ \mathbf{F}_q + \mathbf{T}_q \end{Bmatrix}. \quad (2.5.5)$$

Для краевой задачи статики микрополярной теории упругости имеем систему из  $6N$  линейных алгебраических уравнений (2.5.2) – (2.5.5) относительно  $6N$  неизвестных узловых макроперемещений  $\widehat{w}^p$  и микровращений  $\widehat{\psi}^p$ .

Системы линейных алгебраических уравнений (2.5.2) – (2.5.5) задач (1.8.6), (1.9.2) записаны в области одного конечного элемента (2.3.8), (2.4.5). Для получения же системы с областью определения по всем кусочно-полиномиальным функциям, использован прием суммирования или ассемблирования, в основе которого — отображение всех локальных индексов узлов  $p, q$  по номеру конечного элемента  $e$  на глобальные узлы  $P = P(p, e)$ ,  $Q = Q(q, e)$  с последующим суммированием одноимённых компонент тензорных блоков матрицы жёсткости и векторов сил(моментов). Тогда компоненты глобальной тензорно-блочной матрицы жесткости и блочного вектора узловых сил и моментов будут определять систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных  $\widehat{w}_l^P, \widehat{\psi}_l^Q$  уже по всей области дискретной модели

$$\sum_{e=1}^E \sum_{p,q=1}^n \mathbb{K}_{P(p,e)Q(q,e)}^{lj} = \mathbb{K}_{PQ}^{lj}, \quad \sum_{e=1}^E \sum_{q=1}^n \mathbb{F}_{Q(q,e)}^j = \mathbb{F}_Q^j, \quad \mathbb{K}_{PQ}^{lj} \widehat{\cdot}^P = \mathbb{F}_Q^j, \quad (2.5.6)$$

где  $E$  — число конечных элементов в глобальной области;  $n$  — число узлов в одном конечном элементе;  $N$  — число узлов во всей глобальной области. В дальнейшем, чтобы исключить многообразие обозначаемых символов разного регистра при написании системы линейных алгебраических уравнений с учётом ассемблирования (2.5.6) или без него, будем ссылаться на системы (2.5.2) – (2.5.5) полагая область определения локальную или глобальную в зависимости от контекста излагаемой темы. При этом прописные символы  $P, Q$  далее заменяются строчными  $p, q$ .

Таким образом, используя основную идею метода Ритца, было построено численное решение задач (1.8.6), (1.9.2) в виде систем линейных алгебраических уравнений (2.5.2) – (2.5.5), эквивалентное краевой постановки задачи смешанного типа (1.7.2) при изотер-

мических и неизотермических процессах для микрополярных сред с центром симметрии произвольной анизотропии.

## 2.6. Система линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропной среды

Под системой линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропной среды понимается система (2.5.2), компоненты тензорно-блочных матриц и векторов сил(момент) которой имеют подстановку материальных тензоров  $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{D}}$ , определяемых из выражений (1.6.1), (1.6.2) для трансверсально-изотропной среды.

Представленные ниже компоненты для удобства записи являются подынтегральными и содержат производные по декартовым координатам, которые впоследствии выражаются через область мастера-элемента соотношениями (2.3.7). Начнём с вывода подынтегральных выражений первого блока тензора  $K_{(1)pq}^{lj}$  в компонентной форме

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{lj} &= A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} = a_1 N_{p,N} N_{q,M} \gamma_{NM}^{lj} + a_2 N_{p,M} N_{q,M} \gamma_{NN}^{lj} + a_3 N_{p,N} N_{q,M} \gamma_{MN}^{lj} + \\
&+ a_4 (N_{p,3} N_{q,M} \gamma_{3M}^{lj} + N_{p,M} N_{q,3} \gamma_{M3}^{lj}) + a_5 (N_{p,3} N_{q,i} g_3^l \epsilon^{ij} + N_{p,k} N_{q,3} \epsilon^{kl} g_3^j) + \\
&+ a_6 N_{p,M} N_{q,M} \gamma_{33}^{lj} + a_7 (N_{p,3} N_{q,M} \gamma_{M3}^{lj} + N_{p,M} N_{q,3} \gamma_{3M}^{lj}) + a_8 (N_{p,3} N_{q,i} \epsilon^{il} g_3^j - \\
&- N_{p,k} N_{q,3} g_3^l \epsilon^{jk}) + a_9 N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{MM}^{lj} + a_{10} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{33}^{lj}.
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Подставляя значения компонент  $l, j = 1, 2, 3$  в формулах (2.6.1), получим выражения для компонент первого блока  $K_{(1)pq}^{lj}$  поэлементно:

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{11} &= (a_1 + a_2 + a_3)N_{p,1}N_{q,1} + a_2N_{p,2}N_{q,2} + a_3N_{p,3}N_{q,3}, \\
K_{(1)pq}^{22} &= a_2N_{p,1}N_{q,1} + (a_1 + a_2 + a_3)N_{p,2}N_{q,2} + a_9N_{p,3}N_{q,3}, \\
K_{(1)pq}^{12} &= a_1N_{p,1}N_{q,2} + a_3N_{p,2}N_{q,1}, \quad K_{(1)pq}^{21} = a_1N_{p,2}N_{q,1} + a_3N_{p,1}N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{33} &= a_6(N_{p,1}N_{q,1} + N_{p,2}N_{q,2}) + a_{10}N_{p,3}N_{q,3}, \\
K_{(1)pq}^{13} &= a_4N_{p,1}N_{q,3} - a_5N_{p,2}N_{q,3} + a_7N_{p,3}N_{q,1} - a_8N_{p,3}N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{31} &= a_4N_{p,3}N_{q,1} - a_5N_{p,3}N_{q,2} + a_7N_{p,1}N_{q,3} - a_8N_{p,2}N_{q,3}, \\
K_{(1)pq}^{23} &= a_4N_{p,2}N_{q,3} + a_5N_{p,1}N_{q,3} + a_7N_{p,3}N_{q,2} + a_8N_{p,3}N_{q,1}, \\
K_{(1)pq}^{32} &= a_4N_{p,3}N_{q,2} + a_5N_{p,3}N_{q,1} + a_7N_{p,2}N_{q,3} + a_8N_{p,1}N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Далее выпишем компоненты второго  $K_{(2)pq}^{lj}$

$$\begin{aligned}
K_{(2)pq}^{lj} &= A^{ijkm}C_{km}^{\cdot\cdot l}N_pN_{q,i} = N_p \left( a_2N_{q,M}C_{MN}^{\cdot\cdot l}g_N^j + a_3N_{q,M}C_{NM}^{\cdot\cdot l}g_N^j + a_5N_{q,3}C_{km}^{\cdot\cdot l}\epsilon^{km}g_3^j + \right. \\
&+ a_6N_{q,M}C_{M3}^{\cdot\cdot l}g_3^j + a_7 \left( N_{q,M}C_{3M}^{\cdot\cdot l}g_3^j + N_{q,3}C_{M3}^{\cdot\cdot l}g_M^j \right) + a_8 \left( N_{q,i}\epsilon^{im}C_{3m}^{\cdot\cdot l}g_3^j - N_{q,3}C_{k3}^{\cdot\cdot l}\epsilon^{jk} \right) + \\
&\left. + a_9N_{q,3}C_{3M}^{\cdot\cdot l}g_M^j \right)
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

и третьего  $K_{(3)pq}^{lj}$  блочных тензоров

$$\begin{aligned}
K_{(3)pq}^{lj} &= A^{inkl}N_{p,k}N_qC_{in}^{\cdot\cdot l} = N_q \left( a_2N_{p,M}g_M^lC_{MN}^{\cdot\cdot j} + a_3N_{p,N}g_M^lC_{MN}^{\cdot\cdot j} + a_5N_{p,3}g_3^lC_{in}^{\cdot\cdot j}\epsilon^{in} + \right. \\
&+ a_6N_{p,M}g_3^lC_{M3}^{\cdot\cdot j} + a_7 \left( N_{p,3}g_M^lC_{M3}^{\cdot\cdot j} + N_{p,M}g_3^lC_{3M}^{\cdot\cdot j} \right) + a_8 \left( N_{p,3}\epsilon^{il}C_{i3}^{\cdot\cdot j} - N_{p,k}\epsilon^{nk}g_3^lC_{3n}^{\cdot\cdot j} \right) + \\
&\left. + a_9N_{p,3}g_M^lC_{3M}^{\cdot\cdot j} \right).
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Также подставляя значения компонент  $l, j = 1, 2, 3$  в формулы (2.6.3), (2.6.4) получим выражения для компонент второго  $K_{(2)pq}^{lj}$  и третьего  $K_{(3)pq}^{lj}$  блоков поэлементно:

$$\begin{aligned}
K_{(2)pq}^{11} &= K_{(2)pq}^{22} = -a_8 N_p N_{q,3}, & K_{(3)pq}^{11} &= K_{(3)pq}^{22} = -a_8 N_{p,3} N_q, \\
K_{(2)pq}^{33} &= 2a_5 N_p N_{q,3}, & K_{(2)pq}^{12} &= N_p N_{q,3} (a_7 - a_9), & K_{(2)pq}^{21} &= N_p N_{q,3} (a_9 - a_7), \\
K_{(3)pq}^{33} &= 2a_5 N_{p,3} N_q, & K_{(3)pq}^{12} &= N_{p,3} N_q (a_9 - a_7), & K_{(3)pq}^{21} &= N_{p,3} N_q (a_7 - a_9), \\
K_{(2)pq}^{13} &= N_p N_{q,2} (a_6 - a_7) - a_8 N_p N_{q,1}, & K_{(2)pq}^{31} &= N_p N_{q,2} (a_3 - a_2), \\
K_{(3)pq}^{13} &= N_{p,2} N_q (a_3 - a_2), & K_{(3)pq}^{31} &= N_{p,2} N_q (a_6 - a_7) - a_8 N_{p,1} N_q, \\
K_{(2)pq}^{23} &= N_p N_{q,1} (a_7 - a_6) - a_8 N_p N_{q,2}, & K_{(3)pq}^{32} &= N_{p,1} N_q (a_7 - a_6) - a_8 N_{p,2} N_q, \\
K_{(2)pq}^{32} &= N_p N_{q,1} (a_2 - a_3), & K_{(3)pq}^{23} &= N_{p,1} N_q (a_2 - a_3).
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Компоненты четвертого блочного тензора  $K_{(4)pq}^{lj}$  в общем виде

$$\begin{aligned}
K_{(4)pq}^{lj} &= A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{\dots l} C_{in}^{\dots j} + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} = N_p N_q [a_2 C_{MN}^{\dots l} C_{MN}^{\dots j} + a_3 C_{NM}^{\dots l} C_{MN}^{\dots j} + \\
&+ a_6 C_{M3}^{\dots l} C_{M3}^{\dots j} + a_7 (C_{3M}^{\dots l} C_{M3}^{\dots j} + C_{M3}^{\dots l} C_{3M}^{\dots j}) + a_8 (C_{3m}^{\dots l} C_{i3}^{\dots j} \epsilon^{im} - C_{k3}^{\dots l} C_{3n}^{\dots j} \epsilon^{nk}) + \\
&+ a_9 C_{3M}^{\dots l} C_{3M}^{\dots j}] + d_1 N_{p,N} N_{q,M} \gamma_{NM}^{lj} + d_2 N_{p,M} N_{q,M} \gamma_{NN}^{lj} + d_3 N_{p,N} N_{q,M} \gamma_{MN}^{lj} + \\
&+ d_4 (N_{p,3} N_{q,M} \gamma_{3M}^{lj} + N_{p,M} N_{q,3} \gamma_{M3}^{lj}) + d_5 (N_{p,3} N_{q,i} g_3^l \epsilon^{ij} + N_{p,k} N_{q,3} \epsilon^{kl} g_3^j) + \\
&+ d_6 N_{p,M} N_{q,M} \gamma_{33}^{lj} + d_7 (N_{p,3} N_{q,M} \gamma_{M3}^{lj} + N_{p,M} N_{q,3} \gamma_{3M}^{lj}) + \\
&+ d_8 (N_{p,3} N_{q,i} \epsilon^{il} g_3^j - N_{p,k} N_{q,3} g_3^l \epsilon^{jk}) + d_9 N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{MM}^{lj} + d_{10} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{33}^{lj}.
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Компоненты четвертого блочного тензора  $K_{(4)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(4)pq}^{11} &= N_p N_q (a_6 - 2a_7 + a_9) + (d_1 + d_2 + d_3) N_{p,1} N_{q,1} + d_2 N_{p,2} N_{q,2} + d_3 N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(2)pq}^{22} &= N_p N_q (a_6 - 2a_7 + a_9) + d_2 N_{p,1} N_{q,1} + (d_1 + d_2 + d_3) N_{p,2} N_{q,2} + d_9 N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{33} &= N_p N_q (2a_2 - 2a_3) + d_6 (N_{p,1} N_{q,1} + N_{p,2} N_{q,2}) + d_{10} N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{12} &= d_1 N_{p,1} N_{q,2} + d_3 N_{p,2} N_{q,1}, \quad K_{(4)pq}^{21} = d_1 N_{p,2} N_{q,1} + d_3 N_{p,1} N_{q,2}, \\
K_{(4)pq}^{13} &= d_4 N_{p,1} N_{q,3} - d_5 N_{p,2} N_{q,3} + d_7 N_{p,3} N_{q,1} - d_8 N_{p,3} N_{q,2}, \\
K_{(4)pq}^{31} &= d_4 N_{p,3} N_{q,1} - d_5 N_{p,3} N_{q,2} + d_7 N_{p,1} N_{q,3} - d_8 N_{p,2} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{23} &= d_4 N_{p,2} N_{q,3} + d_5 N_{p,1} N_{q,3} + d_7 N_{p,3} N_{q,2} + d_8 N_{p,3} N_{q,1}, \\
K_{(4)pq}^{32} &= d_4 N_{p,3} N_{q,2} + d_5 N_{p,3} N_{q,1} + d_7 N_{p,2} N_{q,3} + d_8 N_{p,1} N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

Поскольку материальные параметры системы (2.5.2) входят только в компоненты тензорно-блочных матриц жёсткости, то совместно с выражениями (2.6.1) – (2.6.7) получаем итоговую систему линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропного материала с центром симметрии при изотермических процессах.

Таким образом условие стационарности дискретного лагранжиана (2.3.9), (2.4.6) позволяет перейти от уравнений в частных производных к системе линейных алгебраических уравнений (2.5.2), в данном случае для трансверсально-изотропной микрополярной среды (2.6.1) – (2.6.7) которая связана с краевой задачей в перемещениях (1.7.2).

Наряду с этим актуальным является определение тензорных полей напряжений и моментных напряжений, которые нетрудно получить по известным полям перемещений и микровращений найденные из системы уравнений (2.5.2). Чтобы записать выражения тензорных полей для трансверсально-изотропного материала, подставим в определяющие соотношения (1.8.1), (1.8.2) дискретные выражения компонент несимметричных тензоров деформаций (1.1.8) и изгибов-кручений (1.1.11) определяемые в базисе кусочно-полиномиальных функций (2.1.4)

$$\begin{aligned}
\gamma_{kl}^N &= \nabla_k w_l^N - \epsilon_{klm} \psi_m^N = N_{p,k} \widehat{w}_l^p - \epsilon_{klm} N_p \widehat{\psi}_m^p, \\
\chi_{kl}^N &= \nabla_k \psi_l^N = N_{p,k} \widehat{\psi}_l^p,
\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

где  $N_{p,k}$  — производные в декартовом базисе, связанные с производными натуральных координат соотношениями (2.3.7). Тогда нетрудно записать выражения для компонент

тензора напряжений в дискретном виде, учитывая определения материального тензора  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  для трансверсально-изотропной среды (1.6.1)

$$\begin{aligned}
P_N^{ij} &= A^{ijkl} \gamma_{kl}^N = A^{ijkl} (N_{p,k} \widehat{w}_l^p - \epsilon_{klm} N_p \widehat{\psi}_m^p) = a_1 \gamma_{MM}^{ij} N_{p,N} \widehat{w}_N^p + a_2 \gamma_{MN}^{ij} (N_{p,M} \widehat{w}_N^p - \\
&- \epsilon_{MNM} N_p \widehat{\psi}_m^p) + a_3 \gamma_{MN}^{ij} (N_{p,N} \widehat{w}_M^p - \epsilon_{NMM} N_p \widehat{\psi}_m^p) + a_4 (\gamma_{MM}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p + \gamma_{33}^{ij} N_{p,M} \widehat{w}_M^p) + \\
&+ a_5 (\epsilon^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p + \gamma_{33}^{ij} \epsilon^{kl} N_{p,k} \widehat{w}_l^p - 2\gamma_{33}^{ij} N_p \widehat{\psi}_3^p) + a_6 \gamma_{M3}^{ij} (N_{p,M} \widehat{w}_3^p - \epsilon_{M3m} N_p \widehat{\psi}_m^p) + \\
&+ a_7 (\gamma_{M3}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_M^p - \gamma_{M3}^{ij} \epsilon_{3Mm} N_p \widehat{\psi}_m^p + \gamma_{3M}^{ij} N_{p,M} \widehat{w}_3^p - \gamma_{3M}^{ij} \epsilon_{3Mm} N_p \widehat{\psi}_m^p) + a_8 (\epsilon^{il} g_3^j N_{p,3} \widehat{w}_l^p - \\
&- \epsilon^{il} g_3^j \epsilon_{3lm} N_p \widehat{\psi}_m^p - g_3^i \epsilon^{jk} N_{p,k} \widehat{w}_3^p + g_3^i \epsilon^{jk} \epsilon_{k3m} N_p \widehat{\psi}_m^p) + a_9 \gamma_{3M}^{ij} (N_{p,3} \widehat{w}_M^p - \epsilon_{3Mm} N_p \widehat{\psi}_m^p) + \\
&+ a_{10} \gamma_{33}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p,
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

и моментных напряжений с учётом материального тензора  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  также для трансверсально-изотропной среды (1.6.2)

$$\begin{aligned}
\mu_N^{ij} &= D^{ijkl} \chi_{kl}^N = D^{ijkl} N_{p,k} \widehat{\psi}_l^p = d_1 \gamma_{MM}^{ij} N_{p,N} \widehat{\psi}_N^p + d_2 \gamma_{MN}^{ij} N_{p,M} \widehat{\psi}_N^p + d_3 \gamma_{MN}^{ij} N_{p,N} \widehat{\psi}_M^p + \\
&+ d_4 (\gamma_{MM}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p + \gamma_{33}^{ij} N_{p,M} \widehat{\psi}_M^p) + d_5 (\epsilon^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p + \gamma_{33}^{ij} \epsilon^{kl} N_{p,k} \widehat{\psi}_l^p) + d_6 \gamma_{M3}^{ij} N_{p,M} \widehat{\psi}_3^p + \\
&+ d_7 (\gamma_{M3}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_M^p + \gamma_{3M}^{ij} N_{p,M} \widehat{\psi}_3^p) + d_8 (\epsilon^{il} g_3^j N_{p,3} \widehat{\psi}_l^p - g_3^i \epsilon^{jk} N_{p,k} \widehat{\psi}_3^p) + d_9 \gamma_{3M}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_M^p + \\
&+ d_{10} \gamma_{33}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p.
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

## 2.7. Система линейных алгебраических уравнений для ортотропной среды

Под системой линейных алгебраических уравнений для ортотропной среды понимается система (2.5.2), компоненты тензорно-блочных матриц которой имеют подстановку материальных тензоров  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ , определяемых из выражений (1.6.4), (1.6.5) для ортотропной среды.

Представленные ниже компоненты для удобства записи также как и в случае трансверсально-изотропной среды являются подынтегральными и содержат производные по декартовым координатам, которые впоследствии выражаются через область мастера-элемента соотношениями (2.3.7). Аналогично трансверсально-изотропной среде, начнём с вы-

вода подынтегральных выражений первого блока тензора  $K_{(1)pq}^{lj}$  в компонентной форме

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{lj} &= A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} = A^{1111} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{11}^{lj} + A^{2222} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{22}^{lj} + A^{3333} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{33}^{lj} + \\
&+ A^{1122} (N_{p,2} N_{q,1} \gamma_{21}^{lj} + N_{p,1} N_{q,2} \gamma_{12}^{lj}) + A^{1133} (N_{p,3} N_{q,1} \gamma_{31}^{lj} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma_{13}^{lj}) + \\
&+ A^{2233} (N_{p,3} N_{q,2} \gamma_{32}^{lj} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma_{23}^{lj}) + \\
&+ A^{1212} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{22}^{lj} + A^{1221} (N_{p,2} N_{q,1} \gamma_{12}^{lj} + N_{p,1} N_{q,2} \gamma_{21}^{lj}) + A^{2121} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{11}^{lj} + \\
&+ A^{1313} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{33}^{lj} + A^{1331} (N_{p,3} N_{q,1} \gamma_{13}^{lj} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma_{31}^{lj}) + A^{3131} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{11}^{lj} + \\
&+ A^{2323} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{33}^{lj} + A^{2332} (N_{p,3} N_{q,2} \gamma_{23}^{lj} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma_{32}^{lj}) + A^{3232} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{22}^{lj}.
\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Придавая значения индексам  $l, j = 1, 2, 3$  из формулы (2.7.1), получим выражения для компонент первого блока  $K_{(1)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{11} &= A^{1111} N_{p,1} N_{q,1} + A^{2121} N_{p,2} N_{q,2} + A^{3131} N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(1)pq}^{22} &= A^{2222} N_{p,2} N_{q,2} + A^{3232} N_{p,3} N_{q,3} + A^{1212} N_{p,1} N_{q,1}, \\
K_{(1)pq}^{33} &= A^{3333} N_{p,3} N_{q,3} + A^{1313} N_{p,1} N_{q,1} + A^{2323} N_{p,2} N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{12} &= A^{1122} N_{p,1} N_{q,2} + A^{1221} N_{p,2} N_{q,1}, \quad K_{(1)pq}^{21} = A^{1122} N_{p,2} N_{q,1} + A^{1221} N_{p,1} N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{13} &= A^{1133} N_{p,1} N_{q,3} + A^{1331} N_{p,3} N_{q,1}, \quad K_{(1)pq}^{23} = A^{2233} N_{p,2} N_{q,3} + A^{2332} N_{p,3} N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{31} &= A^{1133} N_{p,3} N_{q,1} + A^{1331} N_{p,1} N_{q,3}, \quad K_{(1)pq}^{32} = A^{2233} N_{p,3} N_{q,2} + A^{2332} N_{p,2} N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Также представим в общем виде компоненты второго  $K_{(2)pq}^{lj}$  блоков тензора

$$\begin{aligned}
K_{(2)pq}^{lj} &= A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,i} = N_p (A^{1212} N_{q,1} C_{12}^{\cdot l} g_2^j + A^{1221} (N_{q,1} C_{21}^{\cdot l} g_2^j + N_{q,2} C_{12}^{\cdot l} g_1^j) + \\
&+ A^{2121} N_{q,2} C_{21}^{\cdot l} g_1^j + A^{1313} N_{q,1} C_{13}^{\cdot l} g_3^j + A^{1331} (N_{q,1} C_{31}^{\cdot l} g_3^j + N_{q,3} C_{13}^{\cdot l} g_1^j) + \\
&+ A^{3131} N_{q,3} C_{31}^{\cdot l} g_1^j + A^{2323} N_{q,2} C_{23}^{\cdot l} g_3^j + A^{2332} (N_{q,2} C_{32}^{\cdot l} g_3^j + N_{q,3} C_{23}^{\cdot l} g_2^j) + \\
&+ A^{3232} N_{q,3} C_{32}^{\cdot l} g_2^j),
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

и третьего  $K_{(3)pq}^{lj}$  блоков тензора

$$\begin{aligned}
K_{(3)pq}^{lj} &= A^{ijkl} N_{p,k} N_q C_{in}^{\dots j} = N_q (A^{1212} N_{p,1} g_2^l C_{12}^{\dots j} + A^{1221} (N_{p,2} g_1^l C_{12}^{\dots j} + N_{p,1} g_2^l C_{21}^{\dots j}) + \\
&+ A^{2121} N_{p,2} g_1^l C_{21}^{\dots j} + A^{1313} N_{p,1} g_3^l C_{13}^{\dots j} + A^{1331} (N_{p,3} g_1^l C_{13}^{\dots j} + N_{p,1} g_3^l C_{31}^{\dots j}) + \\
&+ A^{3131} N_{p,3} g_1^l C_{31}^{\dots j} + A^{2323} N_{p,2} g_3^l C_{23}^{\dots j} + A^{2332} (N_{p,3} g_2^l C_{23}^{\dots j} + N_{p,2} g_3^l C_{32}^{\dots j}) + \\
&+ A^{3232} N_{p,3} g_2^l C_{32}^{\dots j}).
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Аналогичным образом, придавая значения индексам  $l, j = 1, 2, 3$  из формул (2.7.3), (2.7.4) запишем выражения второго блока тензора  $K_{(2)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(2)pq}^{11} &= K_{(2)pq}^{22} = K_{(2)pq}^{33} = 0, \\
K_{(2)pq}^{12} &= N_p N_{q,3} (A^{2332} - A^{3232}), \quad K_{(2)pq}^{13} = N_p N_{q,2} (A^{2323} - A^{2332}), \\
K_{(2)pq}^{21} &= N_p N_{q,3} (A^{3131} - A^{1331}), \quad K_{(2)pq}^{31} = N_p N_{q,2} (A^{1221} - A^{2121}), \\
K_{(2)pq}^{23} &= N_p N_{q,1} (A^{1331} - A^{1313}), \quad K_{(2)pq}^{32} = N_p N_{q,1} (A^{1212} - A^{1221})
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

и третьего блока тензора  $K_{(3)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(3)pq}^{11} &= K_{(3)pq}^{22} = K_{(3)pq}^{33} = 0, \\
K_{(3)pq}^{12} &= N_{p,3} N_q (A^{3131} - A^{1331}), \quad K_{(3)pq}^{13} = N_{p,2} N_q (A^{1221} - A^{2121}), \\
K_{(3)pq}^{21} &= N_{p,3} N_q (A^{2332} - A^{3223}), \quad K_{(3)pq}^{31} = N_{p,2} N_q (A^{2323} - A^{2332}), \\
K_{(3)pq}^{23} &= N_{p,1} N_q (A^{1212} - A^{1221}), \quad K_{(3)pq}^{32} = N_{p,1} N_q (A^{1331} - A^{1313}).
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Компоненты четвертого блока тензора  $K_{(4)pq}^{lj}$  представим в общем виде

$$\begin{aligned}
K_{(4)pq}^{lj} = & A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{\cdot\cdot l} C_{in}^{\cdot\cdot j} + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} = N_p N_q [A^{1212} C_{12}^{\cdot\cdot l} C_{12}^{\cdot\cdot j} + \\
& + A^{1221} (C_{21}^{\cdot\cdot l} C_{12}^{\cdot\cdot j} + C_{12}^{\cdot\cdot l} C_{21}^{\cdot\cdot j}) + A^{2121} C_{21}^{\cdot\cdot l} C_{21}^{\cdot\cdot j} + A^{1313} C_{13}^{\cdot\cdot l} C_{13}^{\cdot\cdot j} + \\
& + A^{1331} (C_{31}^{\cdot\cdot l} C_{13}^{\cdot\cdot j} + C_{13}^{\cdot\cdot l} C_{31}^{\cdot\cdot j}) + A^{3131} C_{31}^{\cdot\cdot l} C_{31}^{\cdot\cdot j} + A^{2323} C_{23}^{\cdot\cdot l} C_{23}^{\cdot\cdot j} + \\
& + A^{2332} (C_{32}^{\cdot\cdot l} C_{23}^{\cdot\cdot j} + C_{23}^{\cdot\cdot l} C_{32}^{\cdot\cdot j}) + A^{3232} C_{32}^{\cdot\cdot l} C_{32}^{\cdot\cdot j}] + \\
& + D^{1111} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{11}^{lj} + D^{2222} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{22}^{lj} + D^{3333} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{33}^{lj} + D^{1122} (N_{p,2} N_{q,1} \gamma_{21}^{lj} + \\
& + N_{p,1} N_{q,2} \gamma_{12}^{lj}) + D^{1133} (N_{p,3} N_{q,1} \gamma_{31}^{lj} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma_{13}^{lj}) + \\
& + D^{2233} (N_{p,3} N_{q,2} \gamma_{32}^{lj} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma_{23}^{lj}) + \\
& + D^{1212} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{22}^{lj} + D^{1221} (N_{p,2} N_{q,1} \gamma_{12}^{lj} + N_{p,1} N_{q,2} \gamma_{21}^{lj}) + D^{2121} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{11}^{lj} + \\
& + D^{1313} N_{p,1} N_{q,1} \gamma_{33}^{lj} + D^{1331} (N_{p,3} N_{q,1} \gamma_{13}^{lj} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma_{31}^{lj}) + D^{3131} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{11}^{lj} + \\
& + D^{2323} N_{p,2} N_{q,2} \gamma_{33}^{lj} + D^{2332} (N_{p,3} N_{q,2} \gamma_{23}^{lj} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma_{32}^{lj}) + D^{3232} N_{p,3} N_{q,3} \gamma_{22}^{lj}.
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

И выражения четвертого блока тензора  $K_{(4)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(4)pq}^{11} = & (A^{2323} - 2A^{2332} + A^{3232}) N_p N_q + D^{1111} N_{p,1} N_{q,1} + D^{2121} N_{p,2} N_{q,2} + D^{3131} N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{22} = & (A^{1313} - 2A^{1331} + A^{3131}) N_p N_q + D^{2222} N_{p,2} N_{q,2} + D^{1212} N_{p,1} N_{q,1} + D^{3232} N_{p,3} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{33} = & (A^{1212} - 2A^{1221} + A^{2121}) N_p N_q + D^{3333} N_{p,3} N_{q,3} + D^{1313} N_{p,1} N_{q,1} + D^{2323} N_{p,2} N_{q,2}, \\
K_{(4)pq}^{12} = & D^{1122} N_{p,1} N_{q,2} + D^{1221} N_{p,2} N_{q,1}, \quad K_{(4)pq}^{21} = D^{1122} N_{p,2} N_{q,1} + D^{1221} N_{p,1} N_{q,2}, \\
K_{(4)pq}^{13} = & D^{1133} N_{p,1} N_{q,3} + D^{1331} N_{p,3} N_{q,1}, \quad K_{(4)pq}^{23} = D^{2233} N_{p,2} N_{q,3} + D^{2332} N_{p,3} N_{q,2}, \\
K_{(4)pq}^{31} = & D^{1133} N_{p,3} N_{q,1} + D^{1331} N_{p,1} N_{q,3}, \quad K_{(4)pq}^{32} = D^{2233} N_{p,3} N_{q,2} + D^{2332} N_{p,2} N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Очевидно, что материалы параметры системы (2.5.2) входят только в компоненты тензорно-блочных матриц жёсткости. В таком случае совместно с выражениями (2.7.1) – (2.6.8) получаем итоговую систему линейных алгебраических уравнений для ортотропно-го материала с центром симметрии при изотермических процессах.

Используя задачу минимизации (1.8.6) и вариационный принцип Лагранжа краевая задача приведена к системе линейных алгебраических уравнений (2.5.2) для ортотропной микрополярной среды при изотермических процессах (2.7.1) – (2.6.8) которая также связана с краевой задачей в перемещениях (1.7.2).

Рассмотрим определение тензорных полей напряжений и моментных напряжений для ортотропного материала, которые нетрудно получить по известным полям перемещений и микровращений, найденные из системы линейных алгебраических уравнений (2.5.2), (2.7.1) – (2.6.8). Чтобы записать выражения тензорных полей, подставим в определяющие соотношения (1.8.1), (1.8.2) дискретные выражения компонент тензора деформаций (1.1.8) и изгибов-кручений (1.1.11) определённые в базисе кусочно-полиномиальных функций по ранее выписанным выражениям (2.6.8) для компонент материальных тензоров  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  ортотропной среды (1.6.4), (1.6.5). В таком случае можно записать компоненты несимметричного тензора напряжений

$$\begin{aligned}
P_N^{ij} &= A^{ijkl} \gamma_{kl}^N = A^{ijkl} (N_{p,k} \widehat{w}_l^p - \epsilon_{klm} N_p \widehat{\psi}_m^p) = A^{1111} \gamma_{11}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_1^p + A^{2222} \gamma_{22}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_2^p + \\
&+ A^{3333} \gamma_{33}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p + A^{1122} (\gamma_{11}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_2^p + \gamma_{22}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_1^p) + A^{1133} (\gamma_{11}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p + \gamma_{33}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_1^p) + \\
&+ A^{2233} (\gamma_{22}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_3^p + \gamma_{33}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_2^p) + A^{1212} \gamma_{12}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_2^p - A^{1212} \gamma_{12}^{ij} N_p \widehat{\psi}_3^p + \\
&+ A^{1221} (\gamma_{12}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_1^p + \gamma_{12}^{ij} N_p \widehat{\psi}_3^p + \gamma_{21}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_2^p - \gamma_{21}^{ij} N_p \widehat{\psi}_3^p) + A^{2121} \gamma_{21}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_1^p + \\
&+ A^{2121} \gamma_{21}^{ij} N_p \widehat{\psi}_3^p + A^{1313} \gamma_{13}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_3^p + A^{1313} \gamma_{13}^{ij} N_p \widehat{\psi}_2^p + A^{1331} (\gamma_{13}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_1^p - \gamma_{13}^{ij} N_p \widehat{\psi}_2^p + \\
&\gamma_{31}^{ij} N_{p,1} \widehat{w}_3^p + \gamma_{31}^{ij} N_p \widehat{\psi}_2^p) + A^{3131} \gamma_{31}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_1^p - A^{3131} \gamma_{31}^{ij} N_p \widehat{\psi}_2^p + A^{2323} \gamma_{23}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_3^p - \\
&- A^{2323} \gamma_{23}^{ij} N_p \widehat{\psi}_1^p + A^{2332} (\gamma_{23}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_2^p + \gamma_{23}^{ij} N_p \widehat{\psi}_1^p + \gamma_{32}^{ij} N_{p,2} \widehat{w}_3^p - \gamma_{32}^{ij} N_p \widehat{\psi}_1^p) + \\
&+ A^{3232} \gamma_{32}^{ij} N_{p,3} \widehat{w}_2^p + A^{3232} \gamma_{32}^{ij} N_p \widehat{\psi}_1^p
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

и компоненты несимметричного тензора моментных напряжений

$$\begin{aligned}
\mu_N^{ij} &= D^{ijkl} \varkappa_{kl}^N = D^{ijkl} N_{p,k} \widehat{\psi}_l^p = D^{1111} \gamma_{11}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_1^p + D^{2222} \gamma_{22}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_2^p + D^{3333} \gamma_{33}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p + \\
&+ D^{1122} (\gamma_{11}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_2^p + \gamma_{22}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_1^p) + D^{1133} (\gamma_{11}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p + \gamma_{33}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_1^p) + D^{2233} (\gamma_{22}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_3^p + \\
&+ \gamma_{33}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_2^p) + D^{1212} \gamma_{12}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_2^p + D^{1221} (\gamma_{12}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_1^p + \gamma_{21}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_2^p) + D^{2121} \gamma_{21}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_1^p + \\
&+ D^{1313} \gamma_{13}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_3^p + D^{1331} (\gamma_{13}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_1^p + \gamma_{31}^{ij} N_{p,1} \widehat{\psi}_3^p) + D^{3131} \gamma_{31}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_1^p + \\
&D^{2323} \gamma_{23}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_3^p + D^{2332} (\gamma_{23}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_2^p + \gamma_{32}^{ij} N_{p,2} \widehat{\psi}_3^p) + D^{3232} \gamma_{32}^{ij} N_{p,3} \widehat{\psi}_2^p.
\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

## 2.8. Система линейных алгебраических уравнений для изотропной среды при неизотермических процессах. Расщеплённые уравнения

Прежде чем записать систему линейных алгебраических уравнения для изотропной среды при неизотермических процессах вспомним, что ранее был построен дискретный функционал Лагранжа (2.4.6) и на ряду с обозначениями для тензорно–блочных матриц жёсткости и векторов сил и пар (2.3.8) были введены обозначения блочных векторов узловых сил и пар (2.4.5), образованных наличием заданного стационарного температурного поля и начальными тензорными полями  $\underline{\gamma}_0$ ,  $\underline{\varkappa}_0$ ,  $\underline{\mathbf{P}}_0$ ,  $\underline{\mu}_0$  немеханической природы или являющиеся результатом решения несвязанных задач. Далее, записав критерий стационарности для дискретного лагранжиана получена система линейных алгебраических уравнений в компонентном (2.5.4) и в тензорном виде (2.5.5) для краевой постановки задачи смешанного типа (1.7.2) или вариационного уравнения (1.9.2) для микрополярных сред с центром симметрии произвольной анизотропии.

Под системой линейных алгебраических уравнений для изотропной среды при неизотермических процессах понимается система (2.5.4), компоненты тензорно–блочных матриц и узловых векторов сил(моментов) которой имеют подстановку материальных тензоров  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ , определяемых из выражений (1.6.7) для изотропной среды.

После подстановки материальных тензоров изотропного материала в обозначения (2.3.8), (2.4.5) выпишем выражения, которые для удобства записи также как и в случае ортотропной среды являются подынтегральными и содержат производные по декартовым координатам впоследствии выражаются через область натуральных координат соотношениями (2.3.7). Аналогично ортотропной среде, начнём с вывода подынтегральных выражений компонент  $K_{(1)pq}^{lj} - K_{(4)pq}^{lj}$ ,  $T_{(1)q}^j$ ,  $T_{(2)q}^j$  в общем виде

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{lj} &= \lambda N_{p,l} N_{q,j} + (\mu + \alpha) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\mu - \alpha) N_{p,j} N_{q,l}, \\
K_{(2)pq}^{lj} &= -2\alpha \epsilon_{lji} N_p N_{q,i}, \quad K_{(3)pq}^{lj} = 2\alpha \epsilon_{ljk} N_{p,k} N_q, \\
K_{(4)pq}^{lj} &= \delta N_{p,l} N_{q,j} + (\gamma + \beta) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\gamma - \beta) N_{p,j} N_{q,l} + 4\alpha N_p N_q \delta_{lj}, \\
T_{(1)q}^j &= (\lambda I_1(\underline{\mathbf{a}} \vartheta + \underline{\boldsymbol{\gamma}}_0) \delta_{ij} + (\mu + \alpha) (a_{ij} \vartheta + \gamma_{ij}^0) + (\mu - \alpha) (a_{ji} \vartheta + \gamma_{ji}^0) - P_{ij}^0) N_{q,i}, \\
T_{(2)q}^j &= (P_{in}^0 \epsilon_{inj} - 2\alpha \epsilon_{klj} (a_{kl} \vartheta + \gamma_{kl}^0)) N_q + (\delta I_1(\underline{\mathbf{b}} \vartheta + \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_0) \delta_{ij} + (\gamma + \beta) (b_{ij} \vartheta + \varkappa_{ij}^0) + \\
&\quad + (\gamma - \beta) (b_{ji} \vartheta + \varkappa_{ji}^0) - \mu_{ij}^0) N_{q,i},
\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

где  $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$  — материальные параметры среды.

Если положим  $\alpha = 0$ , то получим расщепленную систему уравнений (2.5.4), (2.5.2) относительно независимых переменных  $\widehat{w}, \widehat{\psi}$ . Данное свойство приводит не только к системе линейных алгебраических уравнений симметричной теории упругости относительно первого блока, но и к однородным уравнениям для аппроксимации поля перемещений и микровращений, что отражает одинаковую сущность математического аппарата схожего с классической теорией упругости. Это нетрудно заметить, если в выражениях (2.8.1) при отсутствии начальных тензорных полей принять  $\alpha = 0, \beta = 0$ .

Далее, придавая значения индексам  $l$  и  $j$  из формулы (2.8.1), для  $K_{(1)pq}^{lj}$  получим

$$\begin{aligned}
K_{(1)pq}^{11} &= (\lambda + 2\mu) N_{p,1} N_{q,1} + (\mu + \alpha) (N_{p,2} N_{q,2} + N_{p,3} N_{q,3}), \\
K_{(1)pq}^{22} &= (\lambda + 2\mu) N_{p,2} N_{q,2} + (\mu + \alpha) (N_{p,3} N_{q,3} + N_{p,1} N_{q,1}), \\
K_{(1)pq}^{33} &= (\lambda + 2\mu) N_{p,3} N_{q,3} + (\mu + \alpha) (N_{p,1} N_{q,1} + N_{p,2} N_{q,2}), \\
K_{(1)pq}^{12} &= \lambda N_{p,1} N_{q,2} + (\mu - \alpha) N_{p,2} N_{q,1}, \quad K_{(1)pq}^{21} = \lambda N_{p,2} N_{q,1} + (\mu - \alpha) N_{p,1} N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{13} &= \lambda N_{p,1} N_{q,3} + (\mu - \alpha) N_{p,3} N_{q,1}, \quad K_{(1)pq}^{23} = \lambda N_{p,2} N_{q,3} + (\mu - \alpha) N_{p,3} N_{q,2}, \\
K_{(1)pq}^{31} &= \lambda N_{p,3} N_{q,1} + (\mu - \alpha) N_{p,1} N_{q,3}, \quad K_{(1)pq}^{32} = \lambda N_{p,3} N_{q,2} + (\mu - \alpha) N_{p,2} N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Если положим  $\alpha = 0$ , то из (2.8.2) определим компоненты матрицы жесткости классической трехмерной теории упругости, образующие при изотермических процессах систему линейных алгебраических уравнений вида  $\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_i^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j$ . Аналогично выпишем компонен-

ты для кососимметричных тензоров  $K_{(2)pq}^{lj}$  и  $K_{(3)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(2)pq}^{\alpha\alpha} &= K_{(3)pq}^{\alpha\alpha} = 0, \quad \langle \alpha = 1, 2, 3 \rangle \\
K_{(2)pq}^{12} &= -2\alpha N_p N_{q,3}, \quad K_{(2)pq}^{13} = +2\alpha N_p N_{q,2}, \quad K_{(2)pq}^{23} = -2\alpha N_p N_{q,1}, \\
K_{(2)pq}^{21} &= +2\alpha N_p N_{q,3}, \quad K_{(2)pq}^{31} = -2\alpha N_p N_{q,2}, \quad K_{(2)pq}^{32} = +2\alpha N_p N_{q,1}, \\
K_{(3)pq}^{12} &= +2\alpha N_{p,3} N_q, \quad K_{(3)pq}^{13} = -2\alpha N_{p,2} N_q, \quad K_{(3)pq}^{23} = +2\alpha N_{p,1} N_q, \\
K_{(3)pq}^{21} &= -2\alpha N_{p,3} N_q, \quad K_{(3)pq}^{31} = +2\alpha N_{p,2} N_q, \quad K_{(3)pq}^{32} = -2\alpha N_{p,1} N_q.
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Аналогично выпишем компоненты для  $K_{(4)pq}^{lj}$  поэлементно

$$\begin{aligned}
K_{(4)pq}^{11} &= (\delta + 2\gamma) N_{p,1} N_{q,1} + (\gamma + \beta) (N_{p,2} N_{q,2} + N_{p,3} N_{q,3}) + 4\alpha N_p N_q, \\
K_{(4)pq}^{22} &= (\delta + 2\gamma) N_{p,2} N_{q,2} + (\gamma + \beta) (N_{p,3} N_{q,3} + N_{p,1} N_{q,1}) + 4\alpha N_p N_q, \\
K_{(4)pq}^{33} &= (\delta + 2\gamma) N_{p,3} N_{q,3} + (\gamma + \beta) (N_{p,1} N_{q,1} + N_{p,2} N_{q,2}) + 4\alpha N_p N_q, \\
K_{(4)pq}^{12} &= \delta N_{p,1} N_{q,2} + (\gamma - \beta) N_{p,2} N_{q,1}, \quad K_{(4)pq}^{13} = \delta N_{p,1} N_{q,3} + (\gamma - \beta) N_{p,3} N_{q,1}, \\
K_{(4)pq}^{23} &= \delta N_{p,2} N_{q,3} + (\gamma - \beta) N_{p,3} N_{q,2}, \quad K_{(4)pq}^{32} = \delta N_{p,3} N_{q,2} + (\gamma - \beta) N_{p,2} N_{q,3}, \\
K_{(4)pq}^{21} &= \delta N_{p,2} N_{q,1} + (\gamma - \beta) N_{p,1} N_{q,2}, \quad K_{(4)pq}^{31} = \delta N_{p,3} N_{q,1} + (\gamma - \beta) N_{p,1} N_{q,3}.
\end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Если учесть отсутствие начальных тензорных полей  $\underline{\gamma}_0$ ,  $\underline{\varkappa}_0$ , и что для изотропного материала компоненты тензоров  $\underline{\mathbf{a}}$ ,  $\underline{\mathbf{b}}$  принимают выражения  $a_{ij} = \alpha_\tau g_{ij}$ ,  $b_{ij} = \beta_\tau g_{ij}$ , где  $\alpha_\tau$ ,  $\beta_\tau$  — коэффициенты линейного теплового расширения и изгибов-кручений, соответственно,

то не трудно выписать компоненты для  $T_{(1)q}^j, T_{(2)q}^j$  поэлементно

$$\begin{aligned}
T_{(1)q}^1 &= ((3\lambda + 2\mu) \alpha_\tau \vartheta - P_0^{11}) N_{q,1} - P_0^{21} N_{q,2} - P_0^{31} N_{q,3}, \\
T_{(1)q}^2 &= ((3\lambda + 2\mu) \alpha_\tau \vartheta - P_0^{22}) N_{q,2} - P_0^{32} N_{q,3} - P_0^{12} N_{q,1}, \\
T_{(1)q}^3 &= ((3\lambda + 2\mu) \alpha_\tau \vartheta - P_0^{33}) N_{q,3} - P_0^{13} N_{q,1} - P_0^{23} N_{q,2}, \\
T_{(2)q}^1 &= ((3\delta + 2\gamma) \beta_\tau \vartheta - \mu_0^{11}) N_{q,1} - \mu_0^{21} N_{q,2} - \mu_0^{31} N_{q,3} + (P_0^{23} - P_0^{32}) N_q, \\
T_{(2)q}^2 &= ((3\delta + 2\gamma) \beta_\tau \vartheta - \mu_0^{22}) N_{q,2} - \mu_0^{32} N_{q,3} - \mu_0^{12} N_{q,1} + (P_0^{31} - P_0^{13}) N_q, \\
T_{(2)q}^3 &= ((3\delta + 2\gamma) \beta_\tau \vartheta - \mu_0^{33}) N_{q,3} - \mu_0^{13} N_{q,1} - \mu_0^{23} N_{q,2} + (P_0^{12} - P_0^{21}) N_q.
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

Используя краевую задачу смешанного типа (1.7.2) и эквивалентную формулировку вариационного принципа Лагранжа (1.9.2) для изотропной микрополярной среды с центром симметрии при неизотермических процессах была получена система линейных алгебраических уравнений (2.5.4), компоненты тензорно-блочных матриц и узловых векторов сил(моментов) которой после подстановки материальных тензоров изотропной среды  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  принимают вид (2.8.1) – (2.8.5).

## 2.9. Система линейных алгебраических уравнений для модели натянутой нити в среде произвольной анизотропии

Вспомним, что задача минимизации функционала Лагранжа для модели натянутой нити в микрополярной упругой среде также связана с постановкой (1.7.2) и может быть сформулирована через работу сил и моментов нити на соответствующих макродвижениях и микровращениях, полагая наличие контакта без отслоения. Таким образом действие натянутой нити заменяется эквивалентным внешним воздействием, что позволяет сформулировать задачу (1.10.1) аналогичную постановке краевой задачи смешанного типа (1.7.2). Также в основе подхода лежит параметризация кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Это позволяет выписать уравнения равновесия (1.10.10), (1.10.11) для произвольной точки спрямлённой нити.

Чтобы получить систему линейных алгебраических уравнений для модели натянутой нити выполним дискретизацию лагранжиана (1.10.1) и запишем критерий стационарности (1.8.7), (2.1.3), (2.5.1), воспользовавшись теоремой вариационного принципа Лагранжа (1.8.1) о минимуме потенциальной энергии для микрополярной среды [83, 87, 142, 157, 189–192, 203, 208].

Начнём с дискретизации функционала Лагранжа (1.10.1) по пространственным координатам. Представим независимые векторы  $w_i, \psi_i$  в базисе кусочно-полиномиальных функций (2.2.1), (2.2.3), воспользовавшись разложением в ряд (2.1.4) и представив работу нити с учётом параметризации кривой (1.10.8) и уравнений равновесия в произвольной точке нити (1.10.10), (1.10.11)

$$L(\widehat{w}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{2} a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) - s(\widehat{w}, \widehat{\psi}), \quad \forall \widehat{w}_i, \widehat{\psi}_i: \quad \widehat{w}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \widehat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0,$$

$$a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi}) = \int_V (A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \widehat{w}_l^p \widehat{w}_j^q - A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,i} \widehat{\psi}_l^p \widehat{w}_j^q -$$

$$- A^{inkl} N_{p,k} N_q C_{in}^{\cdot j} \widehat{w}_l^p \widehat{\psi}_j^q + A^{inkm} C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} N_p N_q \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q) dV, \quad (2.9.1)$$

$$s(\widehat{w}, \widehat{\psi}) = \int_S (f^j N_q \widehat{w}_j^q + r^j N_q \widehat{\psi}_j^q) dS \approx \sum_{i=0}^n (f_i^j N_q (\xi_i^k) \widehat{w}_j^q + r_i^j N_q (\xi_i^k) \widehat{\psi}_j^q),$$

$$\xi_i^k = \xi^k(x_i^k), \quad x_i^k = x^k(t_i), \quad S \subset V,$$

где  $s(\widehat{w}, \widehat{\psi})$  — работа натянутой нити на соответствующем поле перемещений и микро-вращений в конечномерном подпространстве слабого решения, если заданы тождества  $\widehat{w} \equiv \widehat{u}$ ,  $\widehat{\psi} \equiv \widehat{\varphi}$ ;  $S$  — длина нити в упругом пространстве или области  $V$  микрополярной среды;  $f_i^j$ ,  $r_i^j$  —  $j$  компонента силы и момента, соответственно, возникающие в произвольной точке  $t_i$  натянутой нити (см. рисунок 1.8), определяемые выражениями (1.10.10), (1.10.11), (1.10.4) с учётом введённой параметризации кривой (1.10.8);  $\xi_i^k = \xi^k(x_i^k)$  — натуральные координаты точки  $t_i$ , определяемые из задачи изопараметрического отображения, обратного к выражению (2.3.6), о чём будет более подробно изложено далее.

Как и в случае с дискретным лагранжианом (2.3.2) обозначения для билинейного функционала  $a(\widehat{w}, \widehat{\psi}; \widehat{w}, \widehat{\psi})$  идентичны ранее введённым обозначениям компонент тензорно-блочных матриц жёсткости декартовой области (2.3.3) и выражениям компонент тензорно-блочных матриц жёсткости (2.3.8) области натуральных координат. А вот линейный функционал работы нити  $s(\widehat{w}, \widehat{\psi})$  можно дополнить следующими обозначениями в декартовой области

$$\mathbb{S}_{(1)q}^j = \int_S f^j N_q dS \approx \sum_{i=0}^n f_i^j N_q (\xi_i^k), \quad \mathbb{S}_{(2)q}^j = \int_S r^j N_q dS \approx \sum_{i=0}^n r_i^j N_q (\xi_i^k), \quad (2.9.2)$$

$$a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots < t_n = b, \quad t_i \in V, \quad S \subset V$$

и области натуральных координат одного конечного элемента

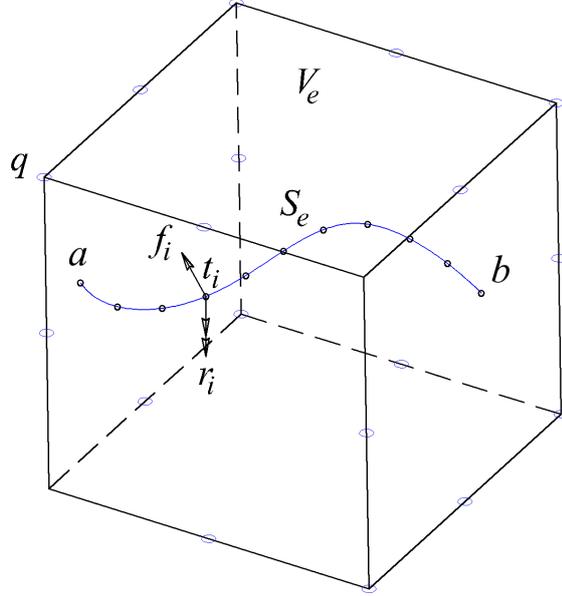


Рисунок 2.2. Модель спрямляемой нити  $S_e$ , ограниченной областью конечного элемента  $V_e$  к определению силы  $\mathbb{S}_{(1)q}^j$  и момента  $\mathbb{S}_{(2)q}^j$  в  $q$  узле конечного элемента, причём  $a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots < t_n = b$ ,  $t_i \in V_e$ ,  $S_e \subset V_e$ .

$$\mathbb{S}_{(1)q}^j = \int_{S_e} f^j N_q J_s dS_\xi \approx \sum_{i=a}^b f_i^j N_q(\xi_i^k), \quad \mathbb{S}_{(2)q}^j = \int_{S_e} r^j N_q J_s dS_\xi \approx \sum_{i=a}^b r_i^j N_q(\xi_i^k), \quad (2.9.3)$$

$$a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots < t_n = b, \quad t_i \in V_e, \quad S_e \subset V_e,$$

где  $\mathbb{S}_{(1)q}^j, \mathbb{S}_{(2)q}^j$  —  $j$  компонента силы и момента, соответственно, в  $q$  узле конечного элемента. Иными словами на узел  $q$  конечного элемента приходится  $q$  часть результирующей силы или пары от натянутой нити, ограниченной областью этого конечного элемента (см. рисунок 2.2), величина которой определяется суммой произведений сил  $\mathbf{f}_i$  или пар  $\mathbf{r}_i$  на значение соответствующей функции формы  $N_q$  в точке  $t_i$  данного участка нити.

Тогда, принимая во внимание выражения для компонент тензорно-блочных матриц жёсткости (2.3.8) и введённые обозначения векторов сил(пар) (2.9.3), дискретный лагранжиан (2.9.1) примет вид

$$L(\hat{w}, \hat{\psi}) = \frac{1}{2} a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) - s(\hat{w}, \hat{\psi}), \quad \forall \hat{w}_i, \hat{\psi}_i: \quad \hat{w}_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \hat{\psi}_i|_{\Sigma_1} = 0,$$

$$a(\hat{w}, \hat{\psi}; \hat{w}, \hat{\psi}) = \mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \hat{w}_l^p \hat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \hat{\psi}_l^p \hat{w}_j^q - \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \hat{w}_l^p \hat{\psi}_j^q + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \hat{\psi}_l^p \hat{\psi}_j^q, \quad (2.9.4)$$

$$s(\hat{w}, \hat{\psi}) = \mathbb{S}_{(1)q}^j \hat{w}_j^q + \mathbb{S}_{(2)q}^j \hat{\psi}_j^q,$$

где  $p = \{1, 2, \dots, 8\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.1) и формируют 8-узловой пространственный конечный элемент, или  $p = \{1, 2, \dots, 20\}$ , если функции формы определены выражениями (2.2.3) и формируют 20-узловой пространственный конечный элемент (см. рисунок 2.1);  $l, j = 1, 2, 3$  для трёхмерной постановки задачи (1.8.6).

Дискретизация лагранжиана по пространственным координатам (2.9.4) с учётом введённых обозначений (2.3.8), (2.9.3) и записи критерия стационарности (1.8.7), (2.1.3), (2.5.1) позволяет прийти к системе линейных алгебраических уравнений для модели натянутой нити

$$\begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)q}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} & -\mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} & +\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}_l^p \\ \widehat{\psi}_l^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{S}_{(1)q}^j \\ \mathbb{S}_{(2)q}^j \end{Bmatrix} \quad (2.9.5)$$

или в тензорном виде, если учесть что  $l, j$  — компоненты тензорных блоков или векторов

$$\begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq} & -\mathbb{K}_{(2)pq} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq} & +\mathbb{K}_{(4)pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_q \\ \mathbf{S}_q \end{Bmatrix}. \quad (2.9.6)$$

Примечательно, что выписанные системы линейных алгебраических уравнений (2.9.5), (2.9.6) модели натянутой нити справедливы для микрополярных материалов произвольной анизотропии. При этом достаточно учесть выражения компонент тензорно-блочных матриц жёсткости которые были ранее выписаны для трансверсально-изотропной (2.6.1) – (2.6.7) ортотропной (2.7.1) – (2.7.8) и изотропной среды (2.8.1) – (2.8.4). Также не трудно выполнить обобщение модели натянутой нити на неизотермические процессы, и дополнительно учесть начальные тензорные поля  $\boldsymbol{\gamma}_0$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$  образованные источниками немеханической природы или являющиеся результатом решения несвязанных задач. В таком случае достаточно дополнить уравнения справа (2.5.4), (2.5.5) узловыми силами и моментами, заданными выражениями (2.9.2), (2.9.3)

$$\begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{S}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{S}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} & -\mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} & +\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}_l^p \\ \widehat{\psi}_l^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{S}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j \\ \mathbb{S}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j \end{Bmatrix} \quad (2.9.7)$$

или в тензорном виде

$$\begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq} & -\mathbb{K}_{(2)pq} \\ -\mathbb{K}_{(3)pq} & +\mathbb{K}_{(4)pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_q + \mathbf{T}_q \\ \mathbf{S}_q + \mathbf{T}_q \end{Bmatrix}. \quad (2.9.8)$$

Вернёмся к рассмотрению изопараметрического отображения, обратного к соотношениям (2.3.6) и найдём натуральные координаты  $\xi_i^k = \xi^k(t_i^k)$  произвольной точки  $t_i$  натянутой нити (см. рисунок 2.2), ограниченной областью конечного элемента а по ним уже определим узловые силы и моменты используя выражения (2.9.2), (2.9.3). Как известно, естественное отображение возникает при переходе из области декартовых координат в область натуральных координат когда возникает необходимость взять интегралы (2.3.8), (2.4.5), (2.9.3) методом Гаусса, выполнив их замену квадратурными формулами (2.3.11). Однако, задача нахождения натуральных координат по декартовым сопряжена с решением системы в общем случае нелинейных уравнений методом Ньютона, суть которого заключается в разложении системы в ряд Тейлора до производных первого порядка и определении очередного приближения корня, удовлетворяющего заданной невязке. Рассмотрим систему нелинейных уравнений изопараметрического отображения (2.3.6), когда известны декартовы координаты  $t^j$  произвольной точки нити, принимая во внимание равенство ковариантных и контравариантных компонент в декартовом базисе  $\hat{x}_j^p \equiv \hat{x}^{pj}$

$$f^j(\xi^k) = 0, \quad f^j(\xi^k) = x^j(\xi^k) - t^j, \quad x^j(\xi^k) = N_p(\xi^k) \hat{x}^{pi}, \quad (2.9.9)$$

где  $x^j(\xi^k)$  — функция изопараметрического отображения аппроксимируемая функциями формы  $N_p(\xi_j)$  8-узловой (2.2.1) или 20-узловой конечного элемента (2.2.3);  $t^j$  — декартовы координаты произвольной точки натянутой нити, в которой действуют векторы силы и момента;  $\xi^j$  — искомые натуральные координаты;  $\hat{x}^{pi}$  —  $j$  координата  $p$  узла конечного элемента. Для нахождения натуральных координат  $\xi^j$  воспользуемся методом Ньютона, разложив систему уравнений (2.9.9) в ряд Тейлора, ограничившись только лишь первым приближением  $m = 1$

$$f^j(\xi^k) = \sum_{n=0}^m \left[ (\xi^i - \xi_0^i) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right]^n \frac{f^j(\xi_0^k)}{n!}, \quad h^j = \xi^j - \xi_0^j, \quad (2.9.10)$$

где  $\xi_0^j = 0$  — начальное приближение системы. В таком случае мы приходим к системе из 3-х линейных алгебраических уравнений относительно  $h^j$

$$h^i N_{p,i}(\xi_0^k) \hat{x}^{pj} = -f^j(\xi_0^k), \quad \xi^j = \xi_0^j + h^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.9.11)$$

Стоит отметить, что, например, поиск приближенного решения шестого порядка точности для системы уравнений (2.9.11) выполняется как правило за одну итерацию для функций формы  $C^1$  дифференцируемых по каждой координате. Исключения могут составить полиномы серендипова семейства. Определив для произвольной точки нити натуральные координаты  $\xi^j$  по соотношениям (2.9.11) мы находим узловые силы и пары (2.9.3) от действия преднапряжения в каждом узле дискретной модели подпространства слабого решения.

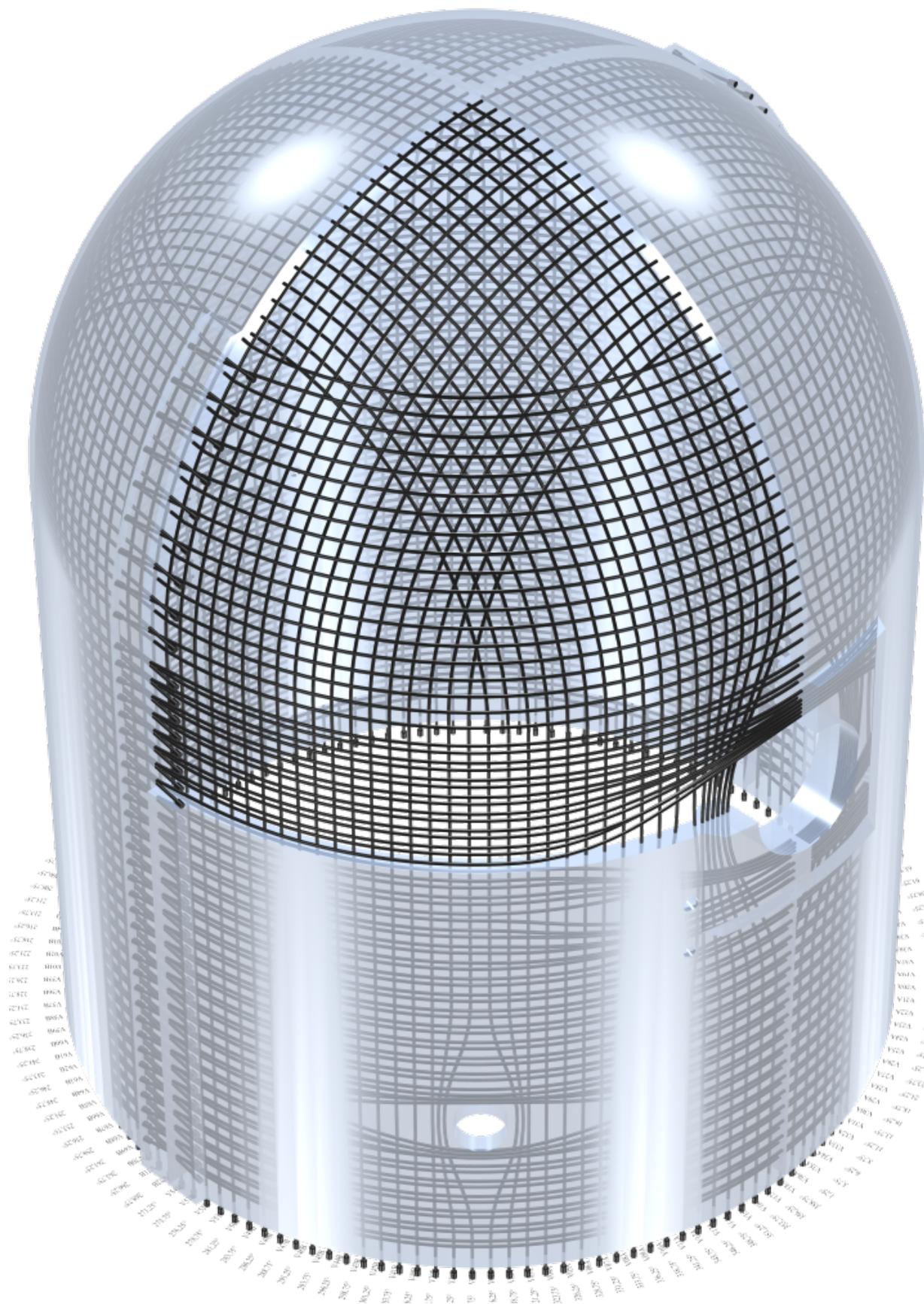


Рисунок 2.3. Конструкция гермооболочки АЭС-2006 и система самонатяжённых канатов

Учитывая евклидову метрику параметризованной пространственной кривой была сформулирована вариационная модель (1.10.1) эквивалентная смешанной краевой задаче (1.7.2), которая методом Ритца приводится к системе линейных алгебраических уравнений для материала произвольной анизотропии с обобщением на неизотермические процессы (2.9.5) – (2.9.8).

Описанная выше задача имеет большое практическое значение для проектирования уникальных сооружений атомных электростанций, поскольку позволяет оценить эксплуатационную пригодность преднапряжённого контейнента или защитной оболочки энергоблока (см. рисунок 2.3). Именно преднапряжение контейнента формируется посредством стальных армоканатов, расположенных в теле защитной оболочки контейнента либо по ортогональной схеме рисунок 2.3 (АЭС-2006, АЭС Куданкулам) либо по геликоидальной схеме (Балаковская АЭС). Однако, вышеизложенная модель учитывает воздействие нити только как внешнее, эквивалентное преднапряжённому армопучку, без учёта его жёсткости. По этому на практике обычно используют усреднённый модуль упругости железобетонной конструкции, который уже учитывает и расположенные в каркасе арматурные блоки и арматурные канаты, совместно с облицовкой и другими элементами. С другой стороны есть интерес в использовании модели натянутых нитей, например в мостостроении или при создании композиционных материалов летательных аппаратов, в которых также важно учитывать преднапряжение или перераспределение усилий в краевых элементах чтобы в естественном состоянии (при эксплуатации) разгрузить зоны концентрации напряжений.

## **2.10. Обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования на микрополярную среду ("reduced and selective integration")**

Как известно лагранжевы полиномы пространственного 8-узлового конечного элемента (2.2.1) приводят к эффекту запираания ("locking effect") из-за ложных мод с нулевой энергией ("spurious zero-energy modes"). Вследствие чего элемент имеет жесткость большую чем на самом деле. Один из способов преодоления данного недостатка в почти несжимаемых средах — использование техники редуцированного и селективного интегрирования. Впервые для пластин данная техника была подробно описана авторами Hughes T.J.R., Cohen M., Haroun M. в работе [167]. Особенности реализации этого подхода в рамках симметричной теории упругости можно найти также в работе Зинкевича и Тейлора [231]. Основная идея заключается в замене энергии объемных деформаций в точках интегрирования Гаусса, средней энергией по элементу. Чтобы выполнить обобщение данной идеи на микрополярную среду, запишем аналогичный потенциал [107–109] учитывая

шаровые тензоры деформаций и изгибов-кручений

$$\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{A}} \otimes \overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{D}} \otimes \overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}} \right), \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{G}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}} = \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\varkappa}) \mathbf{G}, \quad (2.10.1)$$

где  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}}$ ,  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}}$  — шаровой тензор деформаций и изгибов-кручений, соответственно;  $I_1(\cdot)$  — первый инвариант тензора второго ранга;  $\mathbf{G}$  — единичный тензор второго ранга. Подставим в выражения (2.10.1) компоненты изотропных материальных тензоров (1.6.7) [109]

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w})_{ij} A^{ijkl} \overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w})_{kl} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \nabla_i w_j \nabla_k w_l g^{ij} g^{kl}, \quad (2.10.2)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})_{ij} D^{ijkl} \overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})_{kl} = \frac{3\delta + 2\gamma}{3} \nabla_i \psi_j \nabla_k \psi_l g^{ij} g^{kl}.$$

Воспользовавшись методом Ритца для выражений (2.10.2) и приняв производные функций форм по декартовым координатам, запишем потенциал (2.10.1) в дискретном виде

$$\check{W}(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{K}_{(1)pq}^{lj} + \overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj} \right) \widehat{\psi}_l^p \widehat{\psi}_j^q, \quad (2.10.3)$$

$$\overset{\circ}{K}_{(1)pq}^{lj} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} N_{p,k} N_{q,i} g^{kl} g^{ij},$$

$$\overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj} = \frac{3\delta + 2\gamma}{3} N_{p,k} N_{q,i} g^{kl} g^{ij},$$

где  $\overset{\circ}{K}_{(1)pq}^{lj}$ ,  $\overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj}$  — удельная жесткость шаровой части тензора деформаций и изгибов-кручений, соответственно. Далее учитывая выражения (2.10.3) запишем полную жесткость шаровой части тензора деформаций и изгибов-кручений в натуральных координатах

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{(1)pq}^{lj} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \int_{V_e} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t g^{kl} g^{ij} J dV_\xi, \quad (2.10.4)$$

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{(4)pq}^{lj} = \frac{3\delta + 2\gamma}{3} \int_{V_e} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t g^{kl} g^{ij} J dV_\xi,$$

и воспользуемся правилом численного интегрирования Гаусса по одно и двух точечной схеме для решения системы (2.5.2), (2.5.4), (2.9.7) учитывая подынтегральные выражения

(2.10.4)

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(\cdot)pq}^{lj} &\approx 8 \mathring{K}_{(\cdot)pq}^{lj}(0, 0, 0) J(0, 0, 0) + \\ &+ \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{c=1}^2 \omega_a \omega_b \omega_c \left( K_{(\cdot)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) - \mathring{K}_{(\cdot)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) \right) J(\xi_a, \xi_b, \xi_c), \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

$$\omega_i = 1, \quad \xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

где  $\omega_i, \xi_i$  — квадратуры Гаусса–Лежандра для двух точечной схемы интегрирования. При выводе компонент тензорно-блочных матриц жёсткости из упругого потенциала (2.10.1) в котором материальные тензоры  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  сопряжены с шаровой частью тензора деформаций и изгибов-кручений был учтён тот факт, что первый инвариант от кососимметричного тензора есть ноль. Это и обуславливает отсутствие блоков  $K_{(2)pq}^{lj}, K_{(3)pq}^{lj}$  в выражениях (2.10.3), (2.10.4).

Рассмотрим модель кубика со стороной 10 мм, на верхнюю грань которого действует равномерное давление  $P = 120 \text{ Н/мм}^2$ , при этом нижняя грань имеет жесткое заземление, (см. рисунок 2.4). Примем изотропный материал с параметрами  $[\text{Н/мм}^2]$   $\lambda = 2.096\text{E}+003$ ,  $\mu = 1.033\text{E}+003$  [179, 182, 184]. С целью сравнения схем интегрирования модель аппроксимирована по схеме 01x01x01 и 10x10x10 конечными элементами трилинейного и квадратичного (серендипова) типа. Для проверки математического аппарата аппроксимации поля микровращений воспользуемся свойством расщепления системы уравнений (2.5.2), (2.8.2) – (2.8.5) при изотермических процессах, приняв  $\alpha = 0, \beta = 0$ . В этом случае к верхней грани можно приложить фиктивную поверхностную пару  $\mu = 120 \text{ Н/мм}$ , приняв фиктивные материальные параметры изотропного материала  $[\text{Н}]$   $\delta = 2.096\text{E}+003, \gamma = 1.033\text{E}+003$ . На свободной поверхности задан нулевой вектор напряжений поверхностных сил и пар.

Стоит отметить, что численный эксперимент был проведен в собственной программе, а полученные результаты сравнивались с программой ABAQUS в рамках классической теории упругости. Решение системы (2.5.2), (2.8.2) – (2.8.5) при изотермических процессах выполнялось методом сопряженных градиентов CGM реализованного на основе стека CUDA C, C++ с параллельными вычислениями на графическом процессоре. Как видно из результатов эксперимента, во-первых, решения собственной программы идентичны ABAQUS. Во-вторых, трилинейные полиномы пространственного 8-узлового конечного элемента с обычной двухточечной схемой интегрирования приводят к эффекту запирания ("locking effect") из-за ложных мод с нулевой энергией ("spurious zero-energy modes"). Вследствие чего элемент имеет жесткость большую чем на самом деле. Применение же к трилинейным полиномам (2.2.1) схемы редуцированного и селективного интегрирова-

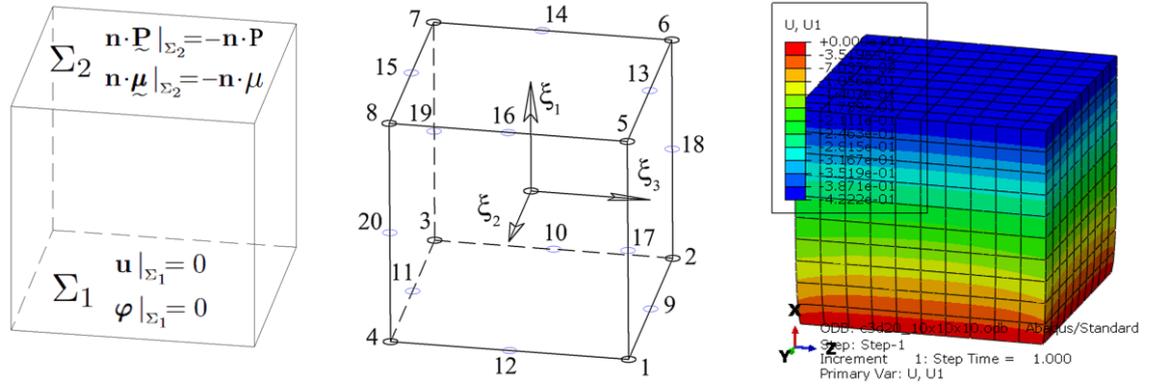


Рисунок 2.4. Слева на право – расчетная схема, нумерация узлов 8-ми и 20-ти узлового конечного элемента, поле перемещений деформированного кубика.

Таблица 2.2. Сравнение перемещений(микровращений) верхней грани кубика для разных моделей и схем интегрирования.

п.п.	Модель и схема интегрирования	$u(\varphi)$	Расхождение, %
1.	01x01x01 C3D8 CUDA C	-3.8086664E-001	9.8
2.	01x01x01 C3D8 CUDA C(SI), ABAQUS	-4.1725940E-001	1.2
3.	01x01x01 C3D20 CUDA C, ABAQUS	-4.1588050E-001	1.5
4.	10x10x10 C3D20 CUDA C, ABAQUS	-4.2224000E-001	0.0

ния (2.10.5) преодолевает этот недостаток. Представленная схема является базовой для конечных элементов ABAQUS, ANSYS симметричной теории упругости.

Таким образом, с учетом выражений изотропных  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  и шаровых  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}}$ ,  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  тензоров микрополярной теории упругости для полиномов трilinearного типа (2.2.1) представлена схема редуцированного и селективного интегрирования в тензорно-блочной форме (2.10.5), которая впоследствии используются для исключения эффекта запираения и существенного повышения точности решения системы линейных алгебраических уравнений (2.5.4), в том числе для почти несжимаемых материалов. Данные результаты могут быть актуальными для исследования задач наномеханики микрополярного континуума с целью изучения механических свойств материала методом конечных элементов.

## 2.11. Аппроксимация поля перемещений и микровращений полиномами смешанной степени

Очевидно, что для материальных тензоров  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  характерна некоторая несогласованность по масштабному параметру длины  $D^{ijkl} \sim l^2 A^{ijkl}$  [1, 57, 111]. Для учета этой особенности в краевых задачах микрополярной теории упругости предлагается использовать аппроксимирующие полиномы более высокого порядка для поля перемещений, чем для поля микровращений [1, 43, 57, 111]. Следуя этой идеи, выпишем компоненты тензорно-

блочных матриц жесткости и векторов сил для материала произвольной анизотропии при неизотермических процессах (2.5.4), (2.5.5), (2.4.5), (2.3.8) полагая отсутствие начальных тензорных полей  $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s}^w N_{q,t}^w B_k^s B_i^t J dV_\xi, & \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p^\psi N_{q,t}^w B_i^t J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{inkl} N_{p,s}^w C_{in}^{\cdot j} N_q^\psi B_k^s J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &= \int_{V_e} \left[ A^{inkm} N_p^\psi N_q^\psi C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} + D^{ijkl} N_{p,s}^\psi N_{q,t}^\psi B_k^s B_i^t \right] J dV_\xi \\
\mathbb{F}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} F^j N_q^w J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} S^j N_q^w J_\Sigma d\Sigma_\xi, & \mathbb{F}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} m^j N_q^\psi J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} R^j N_q^\psi J_\Sigma d\Sigma_\xi, \\
\mathbb{T}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} (P_0^{ij} - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta) N_{q,t}^w B_i^t J dV_\xi, \\
\mathbb{T}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} \left[ (A^{inkl} a_{kl} \vartheta - P_0^{in}) C_{in}^{\cdot j} N_q^\psi + (\mu_0^{ij} - D^{ijkl} b_{kl} \vartheta) N_{q,t}^\psi B_i^t \right] J dV_\xi,
\end{aligned} \tag{2.11.1}$$

где  $N_p^w$  — полиномы, формирующие серендипов 20-ти узловый квадратичный конечный элемент для аппроксимации поля перемещений в вершинах и в промежуточных узлах конечного элемента [231]

$$\begin{aligned}
N_p^w &= \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 2), & p &= \{1, 2, \dots, 8\}, \\
N_p^w &= \frac{1}{4} (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), & \xi_p^1 &= 0, & p &= \{17, 18, 19, 20\}, \\
N_p^w &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), & \xi_p^2 &= 0, & p &= \{9, 11, 13, 15\}, \\
N_p^w &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), & \xi_p^3 &= 0, & p &= \{10, 12, 14, 16\}, \\
\xi_p^i &= \pm 1,
\end{aligned} \tag{2.11.2}$$

$N_p^\psi$  — полиномы трилинейного типа формирующие 8-ми узловой конечный элемент для аппроксимации поля микровращений [231]

$$N_p^\psi = \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad p = \{1, 2, \dots, 8\}, \quad \xi_p^i = \pm 1, \quad (2.11.3)$$

где  $\xi^{i(2)}$  — возведение в степень 2 контравариантной компоненты  $\xi^i$  вектора натуральных координат. При построении глобальной матрицы жесткости стоит учесть, что блок  $\mathbb{K}_{(1)}$  формирует матрицу размером  $3\overset{w}{n} \times 3\overset{w}{n}$ , где  $\overset{w}{n}$  — число узлов модели, сформированной 20-ти узловыми конечными элементами. В тоже время блок  $\mathbb{K}_{(4)}$  формирует глобальную матрицу жесткости с шагом(офсетом) по строкам и столбцам равным  $3\overset{w}{n}$  размером  $3\overset{\psi}{n} \times 3\overset{\psi}{n}$ , где  $\overset{\psi}{n}$  — число узлов модели, сформированной 8-ми узловыми конечными элементами. При построении глобальной матрицы жесткости блоками  $\mathbb{K}_{(2)}$ ,  $\mathbb{K}_{(3)}$ ,  $\mathbb{K}_{(4)}$ , можно принять правило, по которому с точностью до транспонирования, для узлов функций форм трилинейного типа  $N_p^\psi$  задается шаг(офсет) по строкам равный  $3\overset{w}{n}$ , а для узлов  $N_q^\psi$  задается шаг(офсет) по столбцам равный  $3\overset{w}{n}$ . Таким образом можно соорудить глобальную матрицу жесткости размером  $(3\overset{w}{n} + 3\overset{\psi}{n}) \times (3\overset{w}{n} + 3\overset{\psi}{n})$  по строкам и столбцам, соответственно.

Вспомним, что трилинейные полиномы пространственного 8-узлового конечного элемента интегрируемые по двухточечной схеме приводят к эффекту запираия ("locking effect") из-за ложных мод с нулевой энергией ("spurious zero-energy modes"). По этому для преодоления этого недостатка к полиномам данного типа в микрополярной среде, также как и в классической, применяется обобщенная схема редуцированного и селективного интегрирования ("reduced and selective integration") (2.10.3), (2.10.5), подробно изложенная выше на примере изотропной среды

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &\approx 8\overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj}(0, 0, 0) J(0, 0, 0) + \\ &+ \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{c=1}^2 \omega_a \omega_b \omega_c \left( K_{(4)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) - \overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) \right) J(\xi_a, \xi_b, \xi_c), \end{aligned} \quad (2.11.4)$$

$$\overset{\circ}{K}_{(4)pq}^{lj} = \frac{3\delta + 2\gamma}{3} N_{p,k} N_{q,i} g^{kl} g^{ij}, \quad \omega_a = 1, \quad \xi_a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a = 1, 2,$$

где  $\omega_a$ ,  $\xi_a$  — квадратуры Гаусса–Лежандра для двух точечной схемы интегрирования;  $\overset{\circ}{K}_{(4)}$  — удельная жесткость шаровой части тензора изгиба-кручения.

Для анализа тензорных полей кинематических (1.1.8), (1.1.11) и определяющих соотношений (1.5.4), (1.5.7), (1.8.2) изотропного материала (1.6.7) при неизотермических

процессах с учетом (2.11.2), (2.11.3) удобно записать выражения в дискретном виде

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ij} &= N_{p,i}^w \widehat{w}_j^p - \epsilon_{ijm} N_p^\psi \widehat{\psi}_m^p - a_\tau \delta_{ij} \vartheta, & \varkappa_{ij} &= N_{p,i}^\psi \widehat{\psi}_j^p - b_\tau \delta_{ij} \vartheta, \\
 p_{ij} &= \lambda (N_{p,k}^w \widehat{w}_k^p - 3 a_\tau \vartheta) \delta_{ij} + (\mu + \alpha) N_{p,i}^w \widehat{w}_j^p + (\mu - \alpha) N_{p,j}^w \widehat{w}_i^p - 2 \alpha \epsilon_{ijm} N_p^\psi \widehat{\psi}_m^p - \\
 &- 2 \mu a_\tau \delta_{ij} \vartheta - p_{ij}^0, \\
 \mu_{ij} &= \gamma (N_{p,k}^\psi \widehat{\psi}_k^p - 3 b_\tau \vartheta) \delta_{ij} + (\delta + \beta) N_{p,i}^\psi \widehat{\psi}_j^p + (\delta - \beta) N_{p,j}^\psi \widehat{\psi}_i^p - 2 \mu b_\tau \delta_{ij} \vartheta - \mu_{ij}^0,
 \end{aligned} \tag{2.11.5}$$

здесь  $N_{p,i}^w$ ,  $N_{p,j}^w$ ,  $N_{p,i}^\psi$ ,  $N_{p,j}^\psi$  — производные функций форм в декартовом базисе.

Рассмотрим модель кубика со стороной 0.02 мм, на верхнюю грань которого действует равномерное давление  $P = 120$  Н/мм<sup>2</sup>, при этом боковые грани жестко заземлены (см. рисунок 2.5). Примем изотропный материал — полые стеклянные сферы в эпоксидной матрице [179, 182, 184] с параметрами [Н/мм<sup>2</sup>]  $\lambda = 2096$ ,  $\mu = 1033$ ,  $\alpha = 115$ ; [Н]  $\delta = -2.73$ ,  $\gamma = 4.10$ ,  $\beta = 0.13$ . Модель кубика симметричной теории упругости выполнена в программе ABAQUS и аппроксимирована по схеме 20x20x20 конечными элементами квадратичного типа C3D20. Модель кубика микрополярной теории упругости аппроксимирована по той же схеме конечными элементами квадратичного типа C6D20 и конечными элементами с полиномами смешанной степени C6D208 в программе собственной разработки, реализованной в стеке C++, CUDA C. Здесь для моделирования симметричной теории упругости микрополярным конечным элементом C6D20 был принят материальный параметр  $\alpha = 0$ . Общее число узлов модели для элементов типа C3D20, C6D20 составляет 35721, для элементов типа C6D208 — 44982, из них 9261 узел приходится на полиномы Лагранжа типа. Общее число конечных элементов каждого типа составляет 8000. Решение системы (2.5.2), (2.8.1) выполнялось итерационным методом сопряженных градиентов CGM без предобусловливателя. Вычисления проводились на графической видеокарте GEFORCE GTX 960M.

Таблица 2.3. Сравнение скорости сходимости итерационного процесса CGM при аппроксимации конечными элементами типа C6D20 и C6D208

Тип КЭ	Итераций	Невязка $\tau$	Отношение $r_1/r_0$	Время, сек.
C6D20	8613	9.953374e-11	8.903740e-01	162
C6D208	4057	9.778749e-11	8.985241e-01	36

Как видно из таблицы 2.3, в отличие от конечного элемента C6D20 применение C6D208 с полиномами смешанной степени для рассмотренной задачи увеличивает скорость сходимости более чем в 4 раза и уменьшает количество итераций более чем в 2

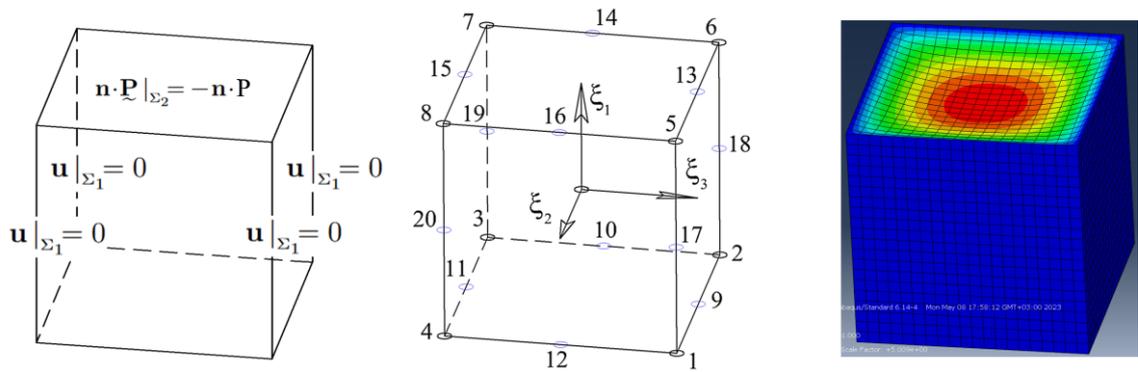


Рисунок 2.5. Слева на право – схема задания кинематических и статических граничных условий на грани куба; узлы квадратичных элементов C6D20 и элементов C6D208 со смешанными полиномами; конечно-элементная деформированная модель куба, изополя вертикальных перемещений

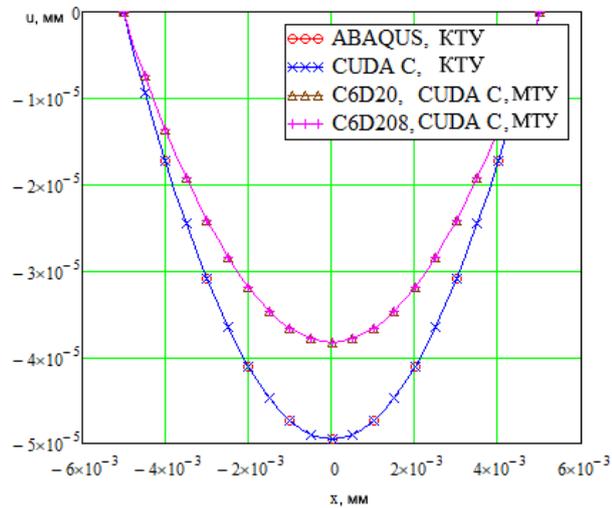


Рисунок 2.6. Графики вертикальных перемещений  $u$ , мм вдоль средней линии нижней грани кубика для классической и микрополярной среды

раза. Из рисунка 2.6 также видно, что графики перемещений симметричной теории упругости вдоль средней линии нижней грани кубика, найденные из численного эксперимента программой ABAQUS и собственной программой совпадают. Графики перемещений аппроксимированные конечными элементами типа C6D20, C6D208 также совпадают. Данные результаты свидетельствуют о корректно реализованной модели микрополярной среды аппроксимированной полиномами смешанной степени. Кроме того, перемещения средней точки нижней грани для классической и микрополярной среды отличаются на  $\approx 23\%$ . Это обусловлено тем что размеры кубика соизмеримы с масштабным параметром длины при изгибе стеклопластика  $l_b = 0.032$  мм которому соответствует  $\alpha = 115$  Н/мм<sup>2</sup>. Этот материальный параметр наряду с параметрами  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  отвечают за микрополярные свойства материала и являются одними из важных характеристик микрополярной изотропной среды [57, 142, 157, 179, 182, 184].

## Анализ численного решения некоторых трёхмерных задач

Для исследования масштабных эффектов микрополярных материалов в предыдущих главах был сформулирован вариационный принцип Лагранжа и методом Ритца краевая задача приведена к системе линейных алгебраических уравнений в тензорно-блочном виде. В данной главе численное решение вариационной модели сравнивается с экспериментальными данными и апробируется на аналитических решениях задачи о кручении цилиндрического тела, задачи о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины, задачи о чистом изгибе цилиндрического тела. Приводятся результаты определения параметров напряженно-деформированного состояния для задачи о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия призматического тела при одноосном растяжении, задачи о кубе, задачи о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями.

### 3.1. Задача о кручении цилиндрического тела

**Постановка задачи и общее решение.** Рассмотрим краевую задачу классической [122, 130, 223] и микрополярной теорий упругости [159, 160] о кручении цилиндрического изотропного тела, под действием осевого крутящего момента (см. рисунок 3.1). Данная задача относится к элементарным трехмерным задачам теории упругости [130, 223]. Поставим задачу об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) микрополярной теории упругости в рамках теории малых деформаций и сравним результаты численного эксперимента вышеизложенной вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4):

- с аналитическим решением симметричной теории упругости Сен-Венана [122];
- с аналитическим решением Готье [159, 160];
- с результатами эксперимента Рюгера, Лейкса о кручении ретикулированного пенополеуретана [217].

Состояние равновесия цилиндрического тела рассмотрим без учёта переменной температуры и массовых сил (пар). Тогда уравнения равновесия (1.8.11) и статические граничные условия на границе  $\Sigma_2$  (1.8.12) для декартовой области в компонентах будут иметь вид:

$$p_{ji,j} = 0, \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} p_{jk} = 0, \quad n_j p_{ji} |_{\Sigma_2} = S_i, \quad n_j \mu_{ji} |_{\Sigma_2} = R_i. \quad (3.1.1)$$

Определяющие соотношения (1.8.2) изотропной среды с центром симметрии (1.6.7) для декартовой области в компонентах [87]:

$$p_{ij} = \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji}, \quad (3.1.2)$$

$$\mu_{ij} = \gamma \varkappa_{kk} \delta_{ij} + (\delta + \beta) \varkappa_{ij} + (\delta - \beta) \varkappa_{ji}.$$

Если для несимметричного тензора деформаций  $\gamma_{ij}$  выделить его симметричную  $\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$  и кососимметричную часть, зависящую от разности макро- и микроповоротов  $\gamma_{[ij]} = \epsilon_{ijk} (\vartheta_k - \psi_k)$ , то компоненты тензора напряжений можно выразить так

$$p_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\alpha \epsilon_{ijk} (\vartheta_k - \psi_k), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (w_{j,i} + w_{i,j}), \quad \vartheta_k = \frac{1}{2} w_{j,i} \epsilon_{ijk}. \quad (3.1.3)$$

Здесь  $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$  — материальные параметры микрополярной изотропной среды, определяются из выражений

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}, \quad \mu = G, \quad \alpha = \frac{GN^2}{1 - N^2}, \quad (3.1.4)$$

$$\gamma = 2G l_t^2 \frac{1 - \Psi}{\Psi}, \quad \delta = G l_t^2, \quad \beta = G(4l_b^2 - l_t^2),$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $N$  — число несимметричности “coupling number”;  $\Psi$  — полярный коэффициент “polar ratio”;  $l_t$  — масштабный параметр длины при кручении;  $l_b$  — масштабный параметр длины при изгибе [87, 217].

Кинематические соотношения (1.1.8), (1.1.11) в компонентной форме для декартовой области

$$\gamma_{ij} = w_{j,i} - \epsilon_{ijk} \psi_k, \quad \varkappa_{ij} = \psi_{j,i} \quad (3.1.5)$$

замыкают систему (3.1.1), (3.1.2), (3.1.5) из 42 уравнения относительно 42 неизвестных  $p_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}, \varkappa_{ij}, w_i, \psi_i$ .

Отметим, что аналитическое решение данной задачи в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  представлено в работах [159, 160]. По условию задачи боковая поверхность цилиндрического тела  $r = a$  является свободной  $n_j p_{ji} |_{\Sigma_2} = 0, n_j \mu_{ji} |_{\Sigma_2} = 0$ . На торцевых гранях  $z = 0, z = c$  заданы поверхностные силы и пары, которые приводятся к паре с осевым моментом  $T$

$$T = - \int_{\Sigma_{z=0}} (r p_{z\theta} + \mu_{zz}) d\Sigma, \quad T = \int_{\Sigma_{z=c}} (r p_{z\theta} + \mu_{zz}) d\Sigma. \quad (3.1.6)$$

Система уравнений и краевые условия симметричной теории упругости [122] являются частным случаем микрополярной теории и легко получаются из выражений (3.1.1) – (3.1.3), (3.1.5), (3.1.6) полагая  $\psi_i$  равными нулю и симметрию компонент материального тензора  $A^{ijkl} = A^{klij} = A^{jikl}$ . Тогда передача нагрузок через элемент поверхности проис-

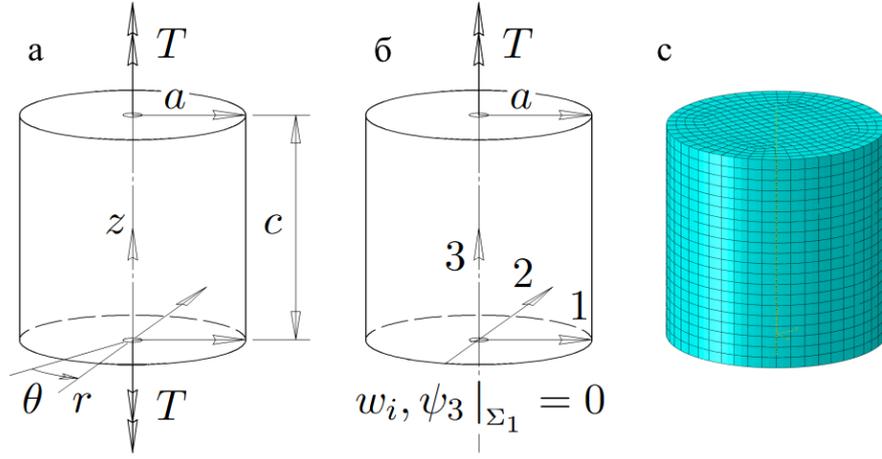


Рисунок 3.1. Расчётная схема цилиндрического тела к аналитическому решению (а); к численному решению вариационной постановки (б); конечно-элементная схема (с)

ходит только лишь за счёт главного вектора напряжений  $\mathbf{P}$ , образуя в элементе объёма симметричные тензорные поля  $\mathbf{P}$ .

Выпишем аналитическое решение задачи микрополярной теории упругости (3.1.1), (3.1.2), (3.1.5), (3.1.6) в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  [160] с точностью до обозначений и выражений материальных параметров

$$\begin{aligned}
 p_{\theta z} &= \mu C_1 r - 2\alpha C_9 I_1(pr), & p_{z\theta} &= \mu C_1 r + 2\alpha C_9 I_1(pr), \\
 \mu_{rr} &= (\gamma + 2\delta) p C_9 I_0(pr) - \frac{2\delta}{r} \left( C_9 I_1(pr) + \frac{C_1 r}{2} \right), \\
 \mu_{\theta\theta} &= \gamma p C_9 I_0(pr) + \frac{2\delta}{r} \left( C_9 I_1(pr) - \frac{C_1 r}{2} \right), & \mu_{zz} &= \gamma p C_9 I_0(pr) + 2\delta C_1, \\
 u_r = u_z &= 0, & u_\theta &= C_1 r z, & \theta &= \frac{u_\theta}{r}, & \varphi_r &= -\frac{C_1 r}{2} + C_9 I_1(pr), & \varphi_z &= C_1 z,
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

где  $\theta$  — угол закручивания при заданной координате  $z$ ;  $I_n$  — модифицированная функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка;  $p$ ,  $C_1$ ,  $C_9$  — параметры, определяемые из выражений

$$\begin{aligned}
 p^2 &= \frac{4\alpha}{\gamma + 2\delta}, & A &= \pi a^2, \\
 C_9 &= \frac{T}{2A} \left[ \left( \frac{\mu a^2}{4\delta} + \frac{3}{2} \right) (\gamma + 2\delta) p I_0(pa) - \left( \frac{\mu a^2}{4\delta} + 2 \right) \frac{2\delta}{a} I_1(pa) \right]^{-1}, \\
 C_1 &= 2C_9 \left( \frac{\gamma + 2\delta}{2\delta} p I_0(pa) - \frac{I_1(pa)}{a} \right).
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Аналитическое решение симметричной теории упругости, получено используя полу-обратный метод Сен-Венана и с точностью до обозначений имеет вид [122]

$$C_0 = \frac{2T}{\mu\pi a^4}, \quad u_1 = -C_0zy, \quad u_2 = C_0zx, \quad u_\theta = C_0zr, \quad \theta = \frac{u_\theta}{r}, \quad (3.1.9)$$

$$p_{31} = p_{13} = -C_0\mu y, \quad p_{32} = p_{23} = C_0\mu x, \quad p_{\theta z} = p_{z\theta} = C_0\mu r.$$

Для оценки масштабного эффекта при кручении используется параметр относительной жёсткости (“relative stiffness”) [160]

$$\Omega = 1 + 6 \left( \frac{l_t}{a} \right)^2 \frac{1 - \frac{4}{3}\Psi\chi}{1 - \Psi\chi}, \quad l_t^2 = \frac{\delta}{\mu}, \quad \chi = \frac{I_1(pa)}{pa I_0(pa)}, \quad (3.1.10)$$

который легко выразить через отношение перемещений  $u_\theta/u_{\theta_m}$ , если учесть жёсткость как отношение момента к углу закручивания для микрополярной  $T/\theta_m$  и классической  $T/\theta$  теории [122, 160]

$$\Omega = \frac{T}{\theta_m} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{u_\theta}{u_{\theta_m}}, \quad (3.1.11)$$

где  $\theta_m$ ,  $u_{\theta_m}$  — определяются выражениями (3.1.7);  $\theta$ ,  $u_\theta$ , — выражениями (3.1.9). По этому для построения графика зависимости относительной жёсткости от размера образца согласно схеме на рисунке 3.1 б, с, геометрические параметры варьируются в рамках представленного ниже интервала. Важно отметить, что исходя из положительной определённости оператора (потенциала) деформаций и изгибов-кручений (1.8.2) для параметров изотропной среды  $p^2$ ,  $l_t^2$ ,  $\chi$  должны выполняться неравенства [160]

$$p^2 \geq 0, \quad l_t^2 \geq 0, \quad 0 \leq \Psi \leq \frac{3}{2}, \quad 0 \leq \chi \leq \frac{1}{2}. \quad (3.1.12)$$

**Первая модель.** К оценке и сравнению численного решения вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4) с аналитическим (3.1.7) – (3.1.11) [122, 160] и численным решением авторов [165] рассмотрим расчётную схему рисунок 3.1 б, с, геометрические параметры которой  $a = 0.2$  мм,  $c = 0.4$  мм. Аппроксимация векторных полей  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  выполнялась как 8-узловыми лагранжевыми КЭ (2.2.1) так и 20-узловыми серендиповыми КЭ (2.2.3) (к сравнению). Для 8-узлового элемента была принята схема редуцированного и селективного интегрирования, используемая в том числе для почти несжимаемой среды [110, 215, 231]. Это позволило получить точность результатов для 8-узловых КЭ на порядок выше. Конечно-элементная схема состоит из 6720 8-узловых и 20-узловых элементов. Общее количество узлов  $N = 7581$  для 8-узловых КЭ и  $N = 29417$  для 20-узловых. Число уравнений для микрополярной теории упругости  $6N$  и  $3N$  – для классической. Материальные параметры среды [Н/мм<sup>2</sup>]  $\lambda = 157513$ ,  $\mu = 10500$ ,  $\alpha = 3500$ ; [Н]  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 105$ ,  $\beta = -105$  соответствуют параметрам  $E = 30843.8$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0.46875$ ,  $N = 0.5$ ,  $\Psi = 1$ ,  $l_t = 0.1$

мм,  $l_b = 0$  мм, указанным в работе [165]. Кинематические граничные условия заданы на торцевой поверхности модели  $z = 0$

$$w_i, \psi_3 \big|_{\Sigma_1} = 0 \quad (3.1.13)$$

дополняют естественные граничные условия (граничные условия Неймана или граничные условия 2-го рода) на свободной поверхности.

На торцевой поверхности  $z = c$  заданы интегральные краевые условия (3.1.6), в которых поверхностные силы  $p_{z\theta}$  и пары  $\mu_{zz}$ , определяемые из аналитического решения (3.1.7), приводятся к осевому крутящему моменту  $T = 1$  Н·мм. Для удовлетворения этому краевому условию поверхностные силы и пары приводятся к узловым силам  $\mathbb{F}_{(1)q}^j$  и парам  $\mathbb{F}_{(2)q}^j$  (2.3.8) следующим образом

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad R^1 = R^2 = 0, \quad R^3 = \mu_{zz}, \quad (3.1.14)$$

$$S^1 = -\frac{x^2 p_{z\theta}}{r}, \quad S^2 = \frac{x^1 p_{z\theta}}{r}, \quad S^3 = 0, \quad r = \sqrt{x^I x^I}, \quad I = 1, 2,$$

где  $x^I$  — компоненты векторной функции (2.3.6). Поверхностные интегралы брались численно по 2-точечной схеме Гаусса для каждого из направлений 8-узлового КЭ (4 точки интегрирования) и по 3-точечной схеме для 20-узлового КЭ (9 точек интегрирования). Именно учёт аналитического (нелинейного) распределения как напряжений  $p_{z\theta}$ , так и моментных напряжений  $\mu_{zz}$  (к задаче при  $\Psi = 1.5$ ), согласно (3.1.14) позволил на порядок повысить точность результатов, в отличие от работы авторов [165], где использована линейная аппроксимация для  $p_{z\theta}$ , а величина  $\mu_{zz}$  является постоянной  $\Psi = 1 \rightarrow \gamma = 0 \rightarrow \mu_{zz,r} = 0$ . Что очевидно из выражений (3.1.4), (3.1.7).

**Вторая модель.** Сравнение численного решения с результатами эксперимента Рюгера, Лейкса [217] в задаче о кручении образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм выполняется по аналогичной схеме (см. рисунок 3.1 б, с) первой модели (число узлов и элементов, — аналогичное). Однако определению подлежит только лишь параметр относительной жёсткости  $\Omega$ . В связи с этим, геометрические параметры варьируются от  $a = 1.3$  мм,  $c = 2.6$  мм до  $a = 20$  мм,  $c = 40$  мм. Материальные параметры [Н/мм<sup>2</sup>]  $\lambda = 4.2E - 002$ ,  $\mu = 2.8E - 002$ ,  $\alpha = 1.379$ ; [Н]  $\gamma = -4.779E - 002$ ,  $\delta = 7.168E - 002$ ,  $\beta = -0.072$  соответствуют принятым параметрам  $E = 7.28E - 002$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $N = 0.99$ ,  $\Psi = 1.5$ ,  $l_t = 1.6$  мм,  $l_b = 0$  мм в работе [217]. Кинематические граничные условия (3.1.13) на торцевой поверхности  $z = 0$  также дополняют естественные граничные условия на свободной поверхности. Для удовлетворения краевым условиям на торце  $z = c$  поверхностные силы и пары с осевым моментом  $T = 0.002$  Н·мм приводятся к узловым силам и парам также по выражению (3.1.14).

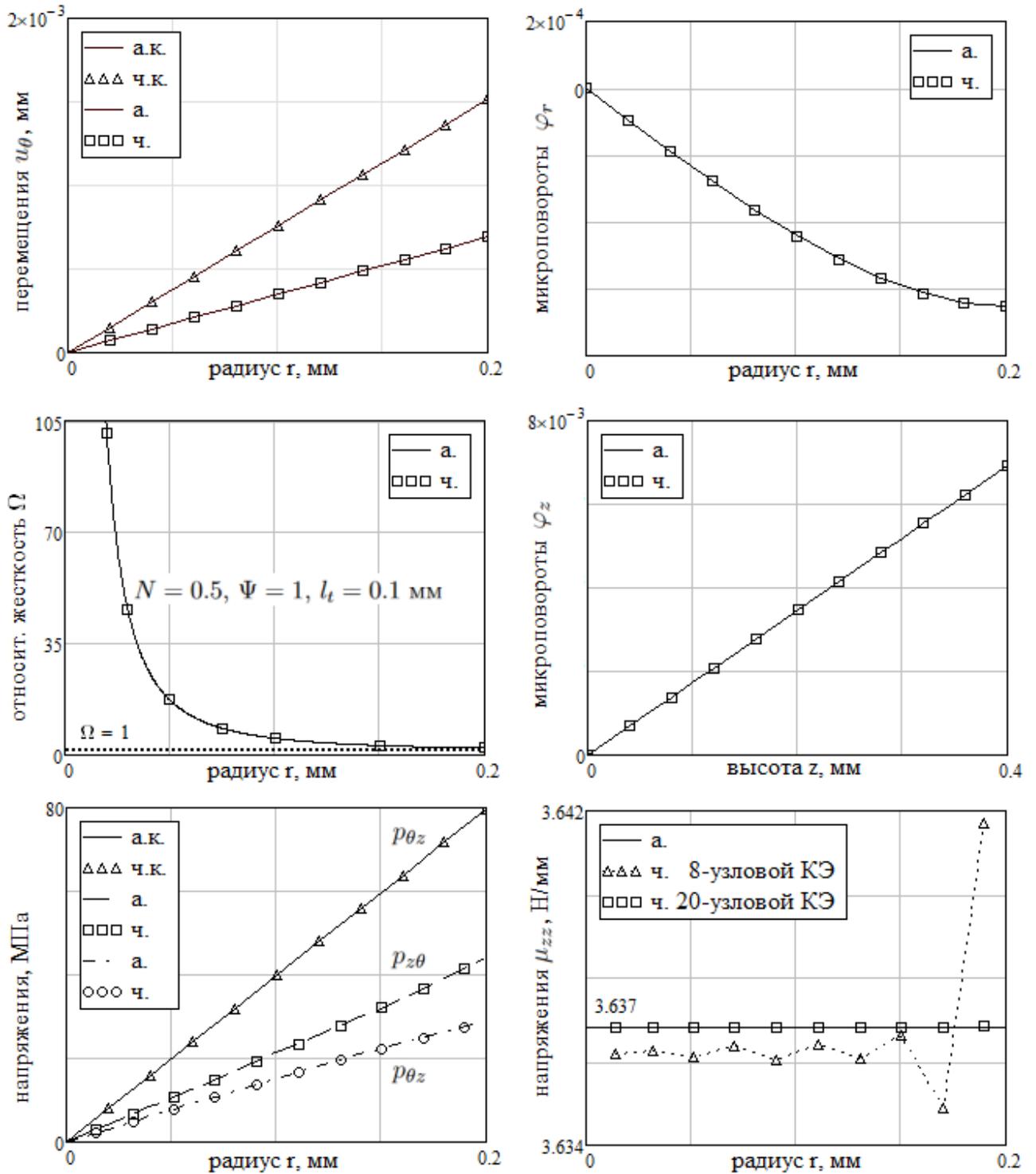


Рисунок 3.2. Зависимость параметров напряжённо-деформированного состояния от радиуса  $r$ , высоты  $z$  и размера модели  $a$ , где  $a$  — обозначение легенды аналитических кривых; ч. — численное решение; к. — классическая теория упругости, иначе — микрополярная.

**Анализ и сравнение результатов.** Для перемещений  $u_\theta$  графики зависимости были построены в сечении  $z = c/2$ . Компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений для изотропного материала с центром симметрии были аппроксимированы базисными

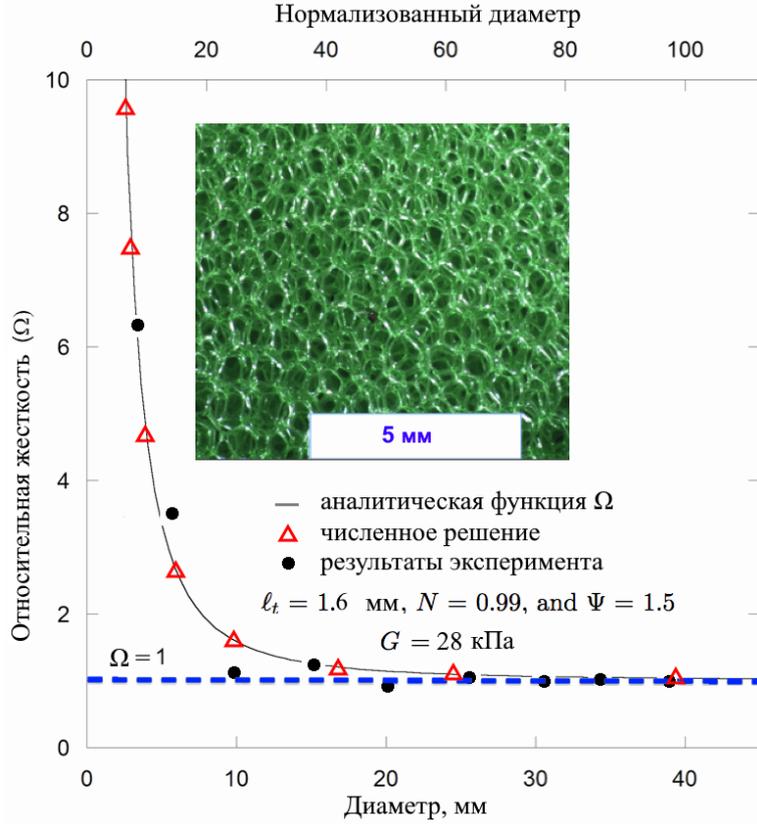


Рисунок 3.3. Масштабный эффект при кручении образца из пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм. Относительная жёсткость  $\Omega$  задана выражением (3.1.10);  $\Delta$  — численное решение(рисунок 3.1 б, с);  $\bullet$  — экспериментальные данные [217].

функциями при  $\xi^i = 0$  по узловым кинематическим величинам из выражений

$$p_{ij} = \lambda N_{p,k} \widehat{w}_k^p \delta_{ij} + (\mu + \alpha) N_{p,i} \widehat{w}_j^p + (\mu - \alpha) N_{p,j} \widehat{w}_i^p - 2 \alpha \epsilon_{ijm} N_p \widehat{\psi}_m^p, \quad (3.1.15)$$

$$\mu_{ij} = \gamma N_{p,k} \widehat{\psi}_k^p \delta_{ij} + (\delta + \beta) N_{p,i} \widehat{\psi}_j^p + (\delta - \beta) N_{p,j} \widehat{\psi}_i^p.$$

Рассмотрим результаты первой модели см. рисунок 3.1, 3.2. Относительная погрешность величин  $u_\theta$ ,  $p_{z\theta}$ ,  $p_{\theta z}$  между аналитическим и численным решением при аппроксимации 8-узловыми КЭ в рамках классической теории составила  $0.001 \div 0.008$  % и  $0.018 \div 0.030$  %, – в рамках микрополярной теории. При этом для данного типа элемента, как было указано выше, использовался метод редуцированного и селективного интегрирования [110], который позволил получить решения на порядок точнее. А вот аппроксимация 20-узловыми КЭ в рамках микрополярной теории показала несколько меньшую погрешность  $0.001 \div 0.008$  %. Что касается аппроксимации величин  $\varphi_r$  20-узловыми КЭ, то наибольшая относительная погрешность составила 0.028 %, что на порядок меньше 8-узловых КЭ. Это и очевидно, учитывая нелинейный характер распределения  $\varphi_r$  вдоль радиального направления. Также достаточно точной оказалась аппроксимация величины  $\varphi_z$  с наибольшей погрешностью 0.05 % для 8-узловых КЭ и менее 0.001 % для 20-узловых. Любопытной оказа-

лась аппроксимация величины  $\mu_{zz}$  8-узловыми элементами с относительной погрешностью  $0.006 \div 0.134$  %. Однако 20-узловые элементы обеспечили относительную погрешность менее  $0.00016$  %. Несущественной оказалась и относительная погрешность при определении величины  $\Omega$ , всего лишь  $0.001 \div 0.02$  %, которую дали 8-узловые элементы.

Вторая модель (кручение цилиндрического образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки  $0.4$  мм рисунок 3.1, 3.3). Относительная погрешность между численным и аналитическим решением параметра  $\Omega$  как и для первой модели несущественна. В тоже время наблюдаемый по результатам эксперимента масштабный эффект достаточно хорошо согласуется с найденными параметрами  $N = 0.99$ ,  $\Psi = 1.5$ ,  $l_t = 1.6$  мм при  $R^2 = 0.85$  согласно работе Рюгера, Лейкса [217] в рамках микрополярной теории упругости, чего не может предсказать классическая теория упругости.

**Выводы.** Из сравнения описанных выше результатов в рамках численного решения вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4) задачи о кручении цилиндрического тела можно сделать вывод, что математический аппарат микрополярной теории упругости реализован корректно; обобщённый метод редуцированного и селективного интегрирования в рамках рассмотренной задачи позволил на порядок улучшить точность решения, а чувствительность модели к масштабному эффекту позволяет в достаточной степени предсказывать физическое поведение материала с микроструктурой. Это является актуальным при проектировании свойств композиционных материалов с микро- и наноструктурой.

### 3.2. Задача о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины. Задача о чистом изгибе цилиндрического тела

**Постановка задачи и общее решение.** Рассмотрим краевую задачу классической [122, 130, 223] и микрополярной теорий упругости [159, 160] о цилиндрическом изгибе изотропной пластинки постоянной толщины (см. рисунок 3.7). Легко убедиться из классической теории упругости, что в условиях чистого изгиба, когда деформированное и напряжённое состояния равновесия пластинки возникают под действием только лишь изгибающих моментов  $\pm M_z$  приложенных на единицу длины по торцам  $x = 0$ ,  $x = a$  (при этом главный вектор сил равен 0), поверхность пластинки станет седлообразной (поверхность гиперболического параболоида) [122, 130, 223] (см. рисунок 3.7 (а)). В таком состоянии пластинка имеет двоякую кривизну. Для задания условий цилиндрического изгиба, на торцах  $z = 0$ ,  $z = a$  прикладываются моменты  $\pm M_1$ , зависящие от  $\pm M_z$  такие, что кривизны в плоскостях, параллельных  $yz$  становятся равными 0.

Поставим задачу об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластинки в рамках теории малых деформаций и сравним результаты численного эксперимента вышеизложенной вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4):

— с аналитическим решением симметричной теории упругости [122, 130, 223];

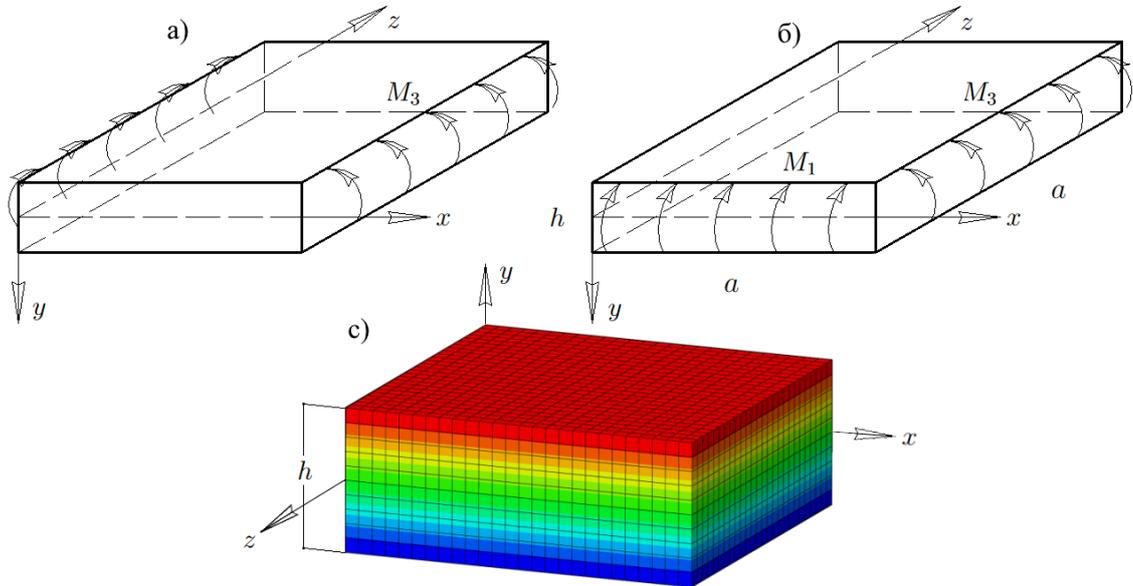


Рисунок 3.4. Расчётная схема чистого изгиба пластинки 2 краевой задачи (а); расчётная схема цилиндрического изгиба пластинки 2 краевой задачи (б); конечно-элементная схема цилиндрического изгиба пластинки 3 краевой задачи (с)

- с аналитическим решением несимметричной теории упругости Готье [159, 160];
- с результатами эксперимента о чистом изгибе ретикулированного пенополиуретана цилиндрической формы (как частный случай задачи о цилиндрическом изгибе) [217].

Кроме того, на основе принципа Сен-Венана делается попытка в рамках задачи о цилиндрическом изгибе микрополярной изотропной пластинки определить параметры  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$ , например, если отсутствует аналитическое решение данных величин. В этом случае статические краевые условия задаются аналогично классической теории только лишь распределением поверхностных сил и корректируются с учётом получаемых значений  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$  из численного эксперимента вдали от краевой зоны, используя принцип Сен-Венана.

Состояние равновесия пластинки рассмотрим без учёта переменной температуры и массовых сил (пар). В этом случае замкнутая система уравнений для декартовой области в компонентах будет аналогична задачи изложенной ранее (3.1.1), (3.1.2), (3.1.5).

Для записи аналитического решения [159, 160], рассмотрим условия 2 краевой задачи. Так, поверхность пластинки  $y = \pm h/2$  является свободной  $n_j p_{ji} |_{\Sigma_2} = 0$ . На торцевых гранях  $x = 0$ ,  $x = a$  заданы поверхностные силы и пары, которые приводятся к паре с изгибающим моментом  $\pm M_3$  на единицу длины

$$M_3|_{x=0} = \int_{-h/2}^{h/2} (y p_{11} + \mu_{31}) dy, \quad M_3|_{x=a} = - \int_{-h/2}^{h/2} (y p_{11} + \mu_{31}) dy, \quad \int_{-h/2}^{h/2} p_{11} d\Sigma = 0. \quad (3.2.1)$$

Краевые условия на торцевых гранях пластинки  $z = 0$ ,  $z = a$  также являются интегральными, образованы поверхностными силами и парами, которые также приводятся к паре с

изгибающим моментом  $\pm M_1$  на единицу длины

$$M_1|_{z=0} = - \int_{-h/2}^{h/2} (y p_{33} - \mu_{13}) d\Sigma, \quad M_1|_{z=a} = \int_{-h/2}^{h/2} (y p_{33} - \mu_{13}) d\Sigma, \quad \int_{-h/2}^{h/2} p_{33} d\Sigma = 0, \quad (3.2.2)$$

и связаны с моментом  $M_3$  соотношением

$$M_1 = \frac{D\nu - (\delta - \beta)h}{D + (\delta + \beta)h} M_3, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3.2.3)$$

где  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно; здесь и далее  $M_1$ ,  $M_3$  — изгибающие моменты считаются положительными, если поворот, возникающий под действием момента, виден с конца соответствующей оси совершающимся против часовой стрелки. С точностью до знака момента и выражений материальных параметров запишем решение задачи о цилиндрическом изгибе микрополярной изотропной пластинки [159, 160]

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{E}{1 - \nu^2} \frac{M_3 y}{D + (\delta + \beta)h}, & p_{33} &= \nu p_{11}, \\ \mu_{31} &= -\frac{(\delta + \beta)M_3}{D + (\delta + \beta)h}, & \mu_{13} &= -\frac{(\delta - \beta)M_3}{D + (\delta + \beta)h}, & \varphi_3 &= \frac{M_3 x}{D + (\delta + \beta)h}, \\ w_1 &= -\frac{M_3 x y}{D + (\delta + \beta)h}, & w_2 &= \frac{M_3}{2(D + (\delta + \beta)h)} \left( x^2 + \frac{\nu y^2}{1 - \nu} \right), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где  $p_{11}$ ,  $p_{33}$  — напряжения;  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$  — моментные напряжения;  $\varphi_3$  — микроповороты;  $w_1$ ,  $w_2$  — макродоplacements. Полагая  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\varphi_3$ ,  $\mu_{ij}$  равными 0 из выражений (3.2.4) легко получить решения классической теории упругости [122, 130, 223]

$$p_{11} = -\frac{E}{1 - \nu^2} \frac{M_3 y}{D}, \quad p_{33} = \nu p_{11}, \quad w_1 = -\frac{M_3 x y}{D}, \quad w_2 = \frac{M_3}{2D} \left( x^2 + \frac{\nu y^2}{1 - \nu} \right). \quad (3.2.5)$$

В силу линейности, например, решение задачи классической теории упругости о цилиндрическом изгибе пластинки можно получить как сумму двух решений задач о чистом изгибе балки [122].

При малой кривизне, в силу линейности задачи  $1/R \approx \partial^2 w_2 / \partial x^2$ , справедливо выражение

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{M_3}{D + (\delta + \beta)h}, \quad \frac{1}{R} = \theta, \quad \theta_m = \frac{M_3}{D + (\delta + \beta)h}, \quad \theta = \frac{M_3}{D}, \quad (3.2.6)$$

где  $\theta_m$ ,  $\theta$  — угол поворота сечения на единицу длины вдоль оси  $x$  в рамках микрополярной и классической теорий упругости, соответственно. Очевидно, что вклад величины  $D = O(h^3)$  при толщине  $h < 1$ , несущественный в сравнении с величиной  $(\delta + \beta)h$ , которая определяет больший вклад в микрополярную изгибную жёсткость пластинки  $D + (\delta + \beta)h$ . И наоборот, если  $h \gg 1$  изгибная жёсткость микрополярной пластинки асимптотически

стремиться к классической. По этому для оценки масштабного эффекта при изгибе, аналогично ранее изложенной задаче о кручении, введём величину относительной жёсткости

$$\Omega = \frac{M_3}{\theta_m} \frac{\theta}{M_3} = 1 + 12 \left( \frac{d}{h} \right)^2, \quad d^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} (\delta + \beta), \quad \Omega = \frac{w_2}{w_{2m}} \quad (3.2.7)$$

где последнее тождество очевидно, учитывая выражения  $w_{2m}$  в рамках микрополярной (3.2.4) и  $w_2$  классической (3.2.5) теорий упругости. Последнее актуально для численной оценки относительной жёсткости вариационной модели.

Рассмотрим условия 3 краевой задачи для сравнения численного решения вышеизложенной вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4) с аналитическим решением микрополярной (3.2.4) и классической (3.2.5) теорий упругости (см. рисунок 3.7 (б), (в)). В этом случае действие моментов  $M_3$ ,  $M_1$  на соответствующей грани пластинки  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y \in [-h/2, h/2]$  заменяется следующими кинематическими условиями

$$w_1(0, y, z) = \varphi_3(0, y, z) = w_2(0, 0, z) = 0, \quad w_3(x, y, 0) = \varphi_1(x, y, 0) = 0, \quad (3.2.8)$$

которые дополняют естественные граничные условия Неймана на свободной поверхности. Граничные условия при  $x = a$ ,  $z = a$ ,  $y \in [-h/2, h/2]$ , аналогичные (3.2.1), (3.2.2), для удовлетворения которым поверхностные силы и пары приводятся к узловым величинам используя выражения

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad (3.2.9)$$

принимаемые из тождеств на соответствующей грани

$$\begin{aligned} x = a, \quad S^1 = -p_{11} y, \quad S_2 = S_3 = 0, \quad R_1 = R_2 = 0, \quad R_3 = \mu_{31}, \\ z = a, \quad S^3 = -p_{33} y, \quad S_1 = S_2 = 0, \quad R_2 = R_3 = 0, \quad R_1 = \mu_{13}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где  $y$  — компонента векторной функции (2.3.6). Поверхностные интегралы брались численно по 2-точечной схеме Гаусса для каждого из направлений 8-узлового КЭ (4 точки интегрирования) и по 3-точечной схеме для 20-узлового КЭ (9 точек интегрирования).

**Первая модель** имеет расчётную схему 3 краевой задачи (см. рисунок 3.7 б, в) геометрические параметры которой  $a = 25$  мм,  $h = 10$  мм. Аппроксимация векторных полей  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  выполнялась как 8-узловыми лагранжевыми КЭ (2.2.1) так и 20-узловыми серендиповыми КЭ (2.2.3) (к сравнению). Для 8-узлового элемента использовалась схема редуцированного и селективного интегрирования, используемая в том числе для почти несжимаемой среды [110, 215, 231]. Это позволило получить точность результатов для 8-узловых КЭ на порядок выше по сравнению с обычной 2-точечной схемой интегрирования. Конечно-элементная схема состоит из 6760 8-узловых (20-узловых) элементов. Общее количество узлов  $N = 8019$  для 8-узловых КЭ и  $N = 30753$  для 20-узловых. Число уравнений для

микрополярной теории упругости  $6N$  и  $3N$  – для классической. Материальные параметры среды  $[\text{H}/\text{мм}^2]$   $\lambda = 0.042$ ,  $\mu = 0.028$ ,  $\alpha = 0.0093$ ;  $[\text{H}]$   $\gamma = -0.048$ ,  $\delta = 0.07168$ ,  $\beta = 0.4704$  соответствуют параметрам ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм, указанным в работе Рюгера, Лейкса [217]. На грани  $x = a$  краевые условия приводятся к изгибающему моменту  $M_3 = -0.0002 \text{ Н}\cdot\text{мм}$ , а на грани  $z = a$  к моменту  $M_1$ , определяемому выражением (3.2.3).

На первом этапе численному определению и сравнению подлежат параметры НДС пластинки согласно аналитическому решению (3.2.4), (3.2.5). Вторым этапом ставится задача (проверка подхода) по определению параметров  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$  (например, если отсутствует аналитическое решение данных параметров), из принципа Сен-Венана, когда на соответствующей грани заданы лишь поверхностные силы  $p_{11}$ ,  $p_{33}$

$$M_3|_{x=0} = - \int_{-h/2}^{h/2} y p_{11} dy, \quad M_3|_{z=a} = \int_{-h/2}^{h/2} y p_{33} dy, \quad \int_{-h/2}^{h/2} p_{11} dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} p_{33} dy = 0, \quad (3.2.11)$$

приводимые к тем же моментам что и в выражениях (3.2.1), (3.2.2). Согласно этому принципу полученное решение, соответствующее какому-нибудь распределению поверхностных сил (пар), будет приближённо описывать НДС при любом другом распределении поверхностных сил (пар) по торцам, если только эти силы (пары) приводятся к паре с тем же моментом. Тогда последовательным приближением попробуем определить  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$  в сечении на равноудалении от границ  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $z = 0$ ,  $z = a$  и сравнить с аналитическим решением (3.2.4).

**Вторая модель** к сравнению численного решения с результатами эксперимента [217] в задаче о чистом изгибе цилиндрического образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм выполняется по аналогичной схеме (см. рисунок 3.1 б, с), при этом число узлов и элементов, – аналогичное, а ось  $x$  является осью стержня. На торце  $x = c$  задан изгибающий момент

$$M_3|_{x=c} = - \int_{\Sigma_{x=c}} (y p_{11} + \mu_{31}) d\Sigma, \quad \int_{\Sigma_{x=c}} p_{11} d\Sigma = 0, \quad p_{11} = -\frac{M_3 y}{J}, \quad J = \frac{\pi a^4}{4}, \quad (3.2.12)$$

величина которого принимается произвольной. Кинематические граничные условия на торце  $x = 0$

$$w_1(0, y, z) = 0, \quad \varphi_3(0, y, z) = 0, \quad w_2(0, 0, 0) = 0, \quad w_3(0, 0, z) = 0, \quad w_3(0, y, 0) = 0, \quad (3.2.13)$$

дополняют естественные граничные условия на свободной поверхности  $r = a$  с нулевыми поверхностными силами и парами  $n_j p_{ji}|_{\Sigma_{r=a}} = 0$ ,  $n_j \mu_{ji}|_{\Sigma_{r=a}} = 0$ . Определению подлежит параметр  $\mu_{31}$  (используя последовательные приближения ранее описанного подхода для

первой модели, основанного на принципе Сен-Венана), а также параметр относительной жёсткости при изгибе  $\Omega$  определяемый последним выражением (3.2.7). В связи с этим, геометрические параметры варьируются от  $a = 1.3$  мм,  $c = 2.6$  мм до  $a = 20$  мм,  $c = 40$  мм. Материальные параметры соответствуют принятым параметрам экспериментального образца в работе [217] аналогично первой модели.

**Анализ и сравнение результатов.** Для перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  графики были построены в зависимости от координаты  $x$  при  $y = -h/2$ . Напряжения  $p_{11}$  построены вдоль оси  $y$  при  $x = 12.5$ ,  $z = 12.5$ , используя аппроксимацию базисными функциями при  $\xi^i = 0$  по узловым кинематическим величинам из выражений (3.1.15).

Рассмотрим результаты первой модели 3 краевой задачи о цилиндрическом изгибе пластинки см. рисунок 3.5. Относительная погрешность величин  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $p_{11}$  между аналитическим и численным решением при аппроксимации 8-узловыми КЭ в рамках микрополярной теории составила 0.04% и 0.1% для величины  $\Omega$ . При этом для данного типа элемента, как было указано выше, использовался метод редуцированного и селективного интегрирования [110], который позволил на порядок увеличить точность решения. Аппроксимация 20-узловыми КЭ оказалась на порядок точнее, что и очевидно.

Вторым этапом используя численный эксперимент и принцип Сен-Венана с последующей корректировкой статических граничных условий на торцах пластинки. Так за 2 итерации удалось получить решение близкое к аналитическому с относительной погрешностью всего лишь  $0.65 \div 1.03\%$ . Что свидетельствует о положительном результате. При этом параметры НДС  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{13}$  определялись численно вдали от краевой зоны.

И наконец из анализа результатов эксперимента, численного и аналитического решения второй модели (к задаче о чистом изгибе цилиндрического образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм) можно сделать вывод о сомнительном аналитическом решении в работах [175, 217], потому как параметры НДС в аналитическом решении содержат лишь распределение поверхностных сил  $p_{11}$  без учёта поверхностных пар  $\mu_{31}$  [175], что противоречит микрополярной модели [142, 159, 160, 165]. С другой стороны, используя постановку 3 краевой задачи и численное определение параметров НДС с учётом  $\mu_{31}$  ранее описанным способом на основе принципа Сен-Венана показывают достаточно хорошую корреляцию с результатами эксперимента (см. рисунок 3.6).

**Выводы.** Из сравнения описанных выше результатов эксперимента и аналитического решения с численным решением вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4) задачи о цилиндрическом изгибе изотропной микрополярной пластинки и задачи о чистом изгибе изотропного микрополярного цилиндра можно сделать вывод, что 1) математический аппарат реализован корректно; 2) обобщённый метод редуцированного и селективного интегрирования в рамках рассмотренной задачи позволил на порядок улучшить точность решения; 3) на основе построенного вариационного принципа Лагранжа и численного эксперимента в рамках трёхмерной краевой задачи также показано, что микрополярные среды действительно демонстрируют существенные размерные эффекты при изгибе и кручении;

4) численное решение с учётом принципа Сен-Венана позволяет оценить корректность аналитического решения, на примере рассмотренной задачи о чистом изгибе микрополярного изотропного цилиндра.

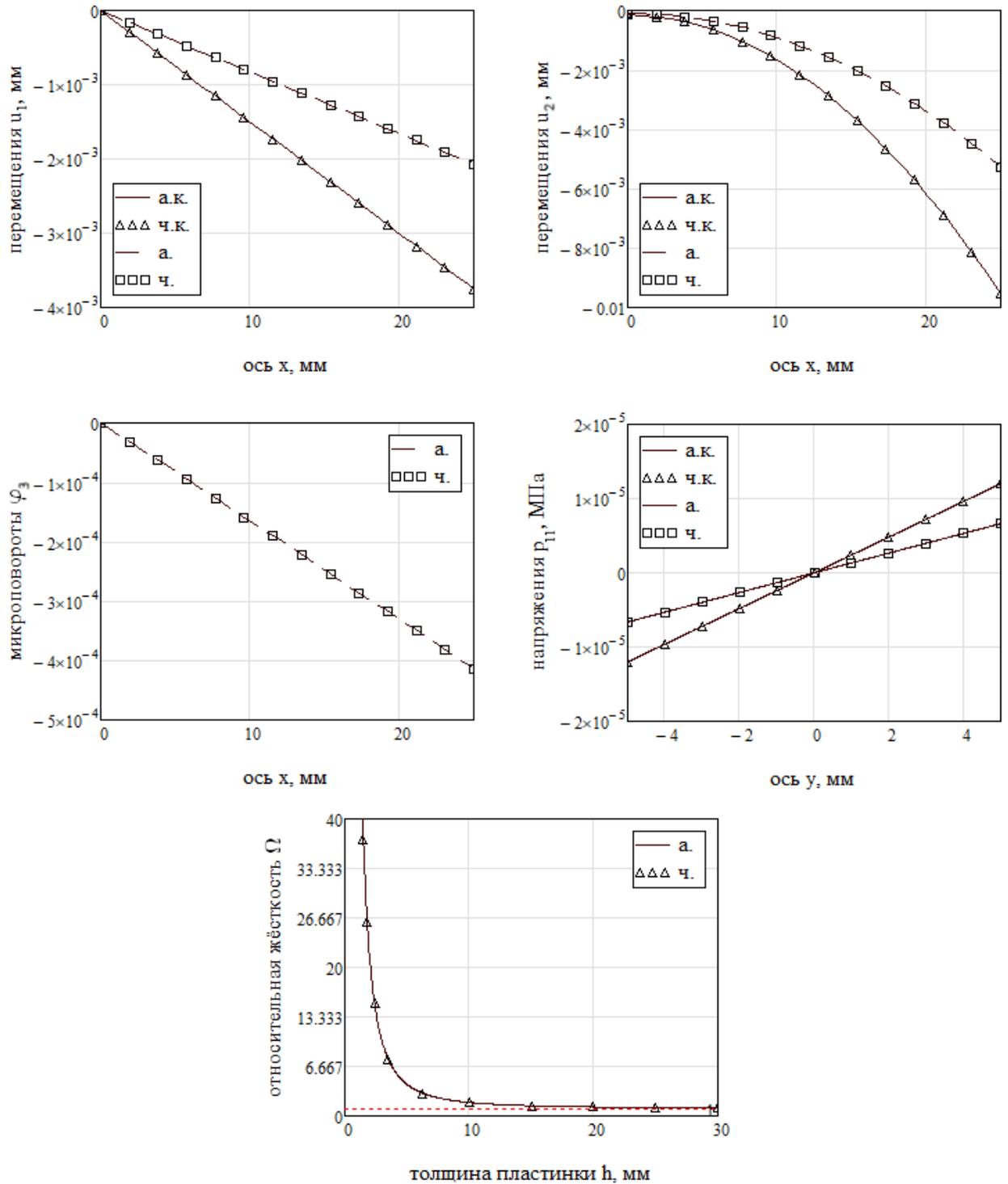


Рисунок 3.5. Зависимость параметров напряжённо-деформированного состояния от координат  $x$ ,  $y$  и толщины  $h$  пластинки, где а. — обозначение легенды аналитических кривых; ч. — численное решение; к. — классическая теория упругости, иначе — микрополярная.

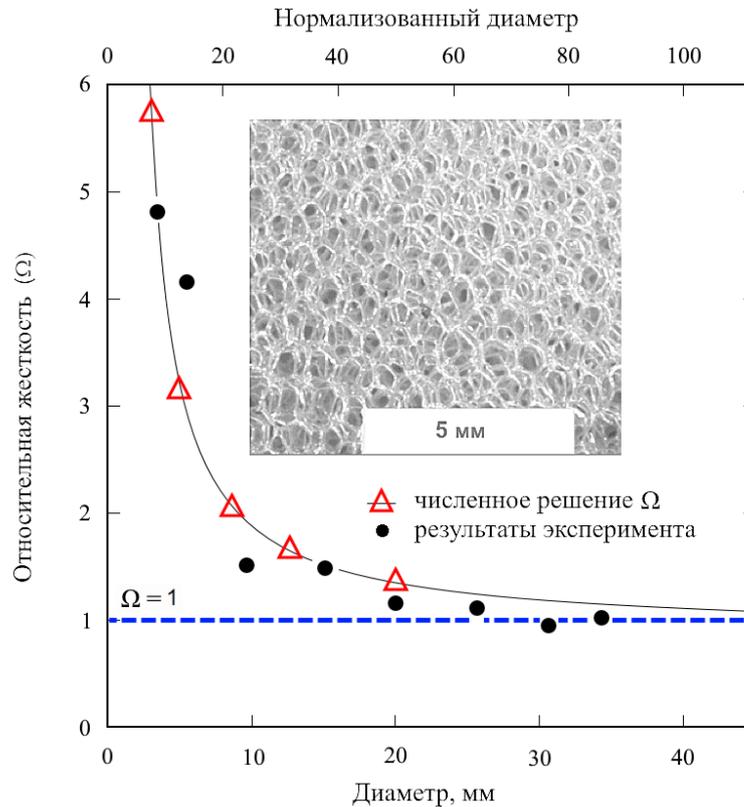


Рисунок 3.6. Масштабный эффект при изгибе цилиндрического образца из пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм. Относительная жёсткость  $\Omega$  задана последним выражением (3.2.7);  $\Delta$  — численное решение;  $\bullet$  — экспериментальные данные [217].

### 3.3. Задача о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия призматического тела

Аналитическое решение задачи о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия пластинки в условиях одноосного растяжения для изотропной микрополярной среды представлено в работах [142, 157, 168]. Позднее Коин уточнил некорректно заданные неравенства на материальные параметры [153]. Также работе [192] Накамуры и Лейксом было представлено численное решение аналогичной задачи методом конечных элементов на основе вариационного принципа для изотропной и ортотропной микрополярной среды. В данной работе рассматривается плоско-напряжённое состояние, а искомые поля перемещений и микровращений раскладываются по базису кусочно-полиномиальных функций треугольных конечных элементов.

Для оценки характера распределения концентрации напряжений вблизи круглого отверстия в зависимости от параметров модели рассмотрим пластинку конечных размеров и конечной толщины  $2b \times 2b \times h$ , ( $b = 1$  мм,  $h = 0.1$  мм) ослабленную круглым отверстием радиуса  $a = 0.1$  мм в условиях одноосного растяжения под действием поверхностной силы  $p = 100$  Н/мм<sup>2</sup> вдоль оси  $x$ .

Поставим задачу об определении концентрации напряжений пластинки конечных размеров и конечной толщины ослабленной круглым отверстием в рамках теории малых деформаций используя численное решение вариационной модели (1.8.6), (2.5.2), (2.8.2)–(2.8.4). В этом случае 3 краевая задача имеет следующие граничные условия (см. рисунок 3.7)

$$w_1(-b, y, z) = w_2(x, -b, z) = w_3(x, y, 0) = 0, \quad n_j p_{ji} |_{\Sigma_{x=b}} = n_i p, \quad n_j \mu_{ji} |_{\Sigma_{x=b}} = 0, \quad (3.3.1)$$

которые дополняют естественные граничные условия Неймана на свободной поверхности. Для удовлетворения статическим граничным условиям поверхностные силы и пары приводятся к узловым величинам используя выражения

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_{\Sigma} d\Sigma_{\xi}, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_{\Sigma} d\Sigma_{\xi}, \quad (3.3.2)$$

принимаемые из тождеств на соответствующей грани

$$\begin{aligned} x = +b, & \quad S^1 = p, \quad S^2 = S^3 = 0, \quad R^i = 0, \\ x = -b, & \quad S^2 = S^3 = 0, \quad R^i = 0, \\ y = -b, & \quad S^1 = S^3 = 0, \quad R^i = 0, \\ z = 0, & \quad S^1 = S^2 = 0, \quad R^i = 0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

В качестве материала модели принят стеклопластик (полые стеклянные сферы в эпоксидной матрице), имеющий следующие свойства микрополярной изотропной среды:  $\lambda = 2.096\text{E}+003 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\mu = 1.033\text{E}+003 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\alpha = 1.15\text{E}+002 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\delta = -2.9 \text{ Н}$ ,  $\gamma = 4.4 \text{ Н}$ ,  $\beta = -0.13 \text{ Н}$  [182–184]. По толщине пластина имеет четыре ряда элементов (солоидов) типа C6D20 с общим числом узлов – 18417. Стоит отметить, что аппроксимация кинематических векторов выполнялась кусочно-полиномиальными функциями 20-узловой конечно-

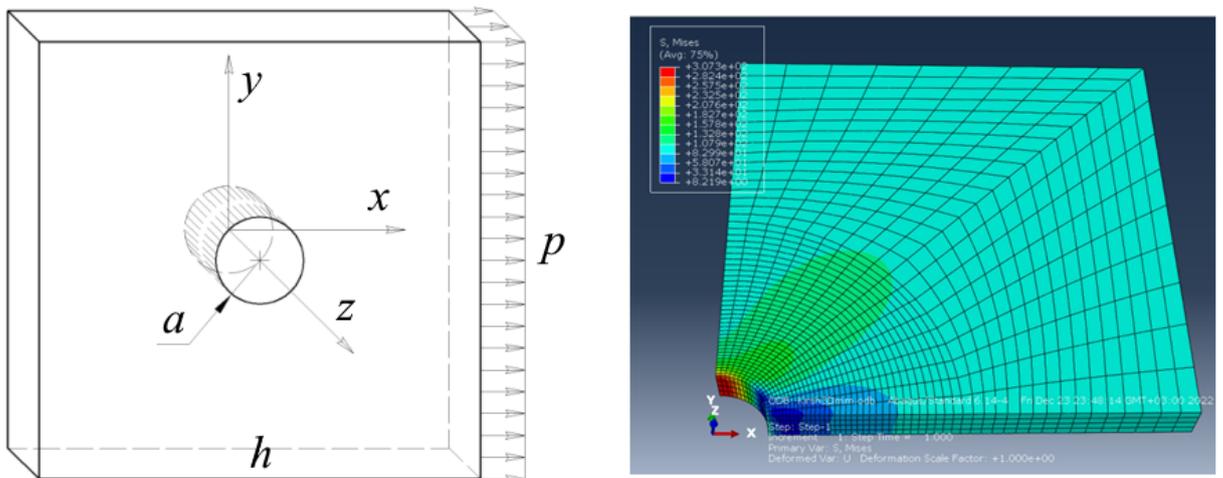


Рисунок 3.7. Слева направо – расчётная и конечно-элементная схемы

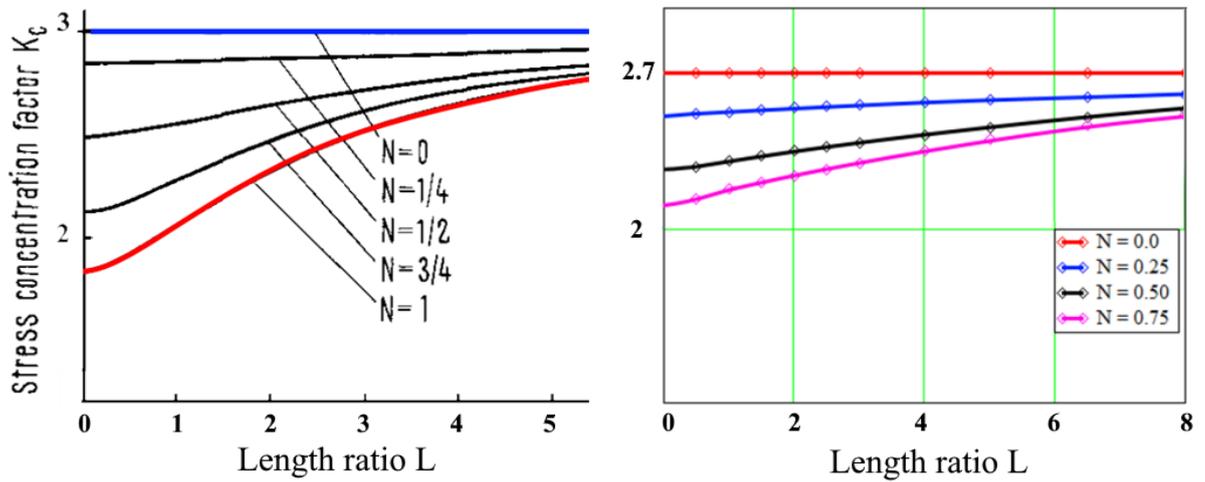


Рисунок 3.8. Слева направо – аналитическое решение о распределении коэффициента концентрации напряжений вблизи отверстия пластинки для микрополярной среды [153, 168]; численное решение 3 краевой задачи для призматического элемента с отверстием

го элемента и для сравнения, смешанными кусочно-полиномиальными функциями 20- и 8-узлового конечного элемента.

Для получения зависимости коэффициента концентрации напряжений вблизи круглого отверстия от масштабного параметра (отношение радиуса отверстия к масштабному параметру длины материала) [182–184], была выполнена серия численных экспериментов (не менее 44), в которых варьировался радиус отверстия  $a$  и моментное число (“couple number”)  $N = \{0.00, 0.25, 0.50, 0.75\}$ . По результатам численных экспериментов построены графики которые представлены на рисунке 3.8.

Из графиков распределения концентрации напряжений на рисунке 3.8 видна зависимость от моментного числа  $N$  и от масштабного параметра  $a/l$  как на графике слева для аналитического решения так и на графике справа для численного решения трёхмерной задачи. А характер распределения коэффициента концентрации напряжений позволяет сделать вывод, что реализованный математический аппарат моделирования микрополярной среды, основанный на теории [142, 157] позволяет оценивать масштабные параметры модели в рамках 3 краевой задачи в трёхмерной постановке. Что касается построения численного решения связанного с аппроксимацией полиномами смешанной степени, то в таблице 3.1 представлены результаты о скорости сходимости итерационного метода сопряжённых градиентов при использовании конечных элементов серендипова типа C6D20 и типа C6D208 с полиномами смешанной степени.

Из таблицы 3.1 видно, что аппроксимация полиномами смешанной степени C6D208 (поле перемещений аппроксимируется полиномами серендипова типа, а поле микровращений аппроксимируется полиномами лагранжева типа с учётом схемы редуцированного и селективного интегрирования) позволяет повысить скорость сходимости итерационного процесса до 4 раз и сократить число итераций до 2 раз.

Таблица 3.1. Сравнение скорости сходимости итерационного процесса CGM при аппроксимации конечными элементами типа C6D20 и C6D208 для трёхмерной задачи

Тип КЭ	Итераций	Невязка $\tau$	Отношение $r_1/r_0$	Время, сек.
C6D20	45945	9.757389e-11	8.135025e-01	443
C6D208	23815	9.864350e-11	6.385734e-01	111

### 3.4. Задача о кубе

Задача о кубе для анализа построения численного решения микрополярной теории упругости в трёхмерной постановке является естественной, потому как конечные размеры модели в трёх измерениях одного порядка. Целью данной задачи является показать зависимость механической модели микрополярной среды от масштабных параметров модели и микроструктуры материала. Вообще проявление эффекта микрополярной среды в механических задачах статики, как и определение материальных параметров (кроме динамических задач) основано на экспериментах с изгибом и кручением образцов. Ведь микрополярная теория достаточно хорошо предсказывает масштабные эффекты на изгиб и кручение, однако теория не чувствительна к растяжению или сжатию [182–184, 217].

Перейдём непосредственно к задаче и рассмотрим модель куба которая имеет аналогичную расчётную схему, представленную рисунком 2.5. Однако в данном численном эксперименте будем варьировать длину ребра куба  $L = 0.01, 0.1, 1.0, 1.635, 16.35$  мм и моментное число ("couple number")  $N = 0.0, 0.2, 0.5, 0.75$  (влияет на параметр  $\alpha$ ) для того чтобы оценить степень проявляемого масштабного эффекта и микрополярные свойства материала [153, 182–184, 192, 217].

Материал модели примем из пенополиуретана высокой плотности с масштабным параметром длины микроструктуры  $l = 1.635$  мм и материальными параметрами  $\lambda = 797.333$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\mu = 104$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\alpha = 0.00, 4.33, 34.667, 113.71$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\delta = -26.652$  Н,  $\gamma = 39.978$  Н,  $\beta = 4.505$  Н [182–184]. Конечно-элементная модель аппроксимирована элементами типа C6D208 по схеме, аналогично задаче, представленной рисунком 2.5.

Из вышеприведённых графиков можно сделать вывод, что построение численного решения микрополярной трёхмерной теории упругости, основанного на вариационном принципе Лагранжа и методе Рунге соответствует математическому аппарату теории Эрингена [1, 5, 49, 57, 75, 76, 80–83, 87, 91, 99, 115, 117, 119, 120, 131, 132, 141, 142, 151, 152, 154, 155, 157, 161, 162, 179, 180, 182, 183, 189–196, 210, 218, 219, 226, 227]. При этом предложенная аппроксимация искомых полей макроперемещений и микровращений оправдала изыскания увеличением скорости сходимости и уменьшением числа итераций при решении системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом сопряжённых градиентов. Проведенные исследования подтверждают существенные размерные эффекты при изгибе для микрополярных сред. А чувствительность модели к масштабному эффекту позволяет

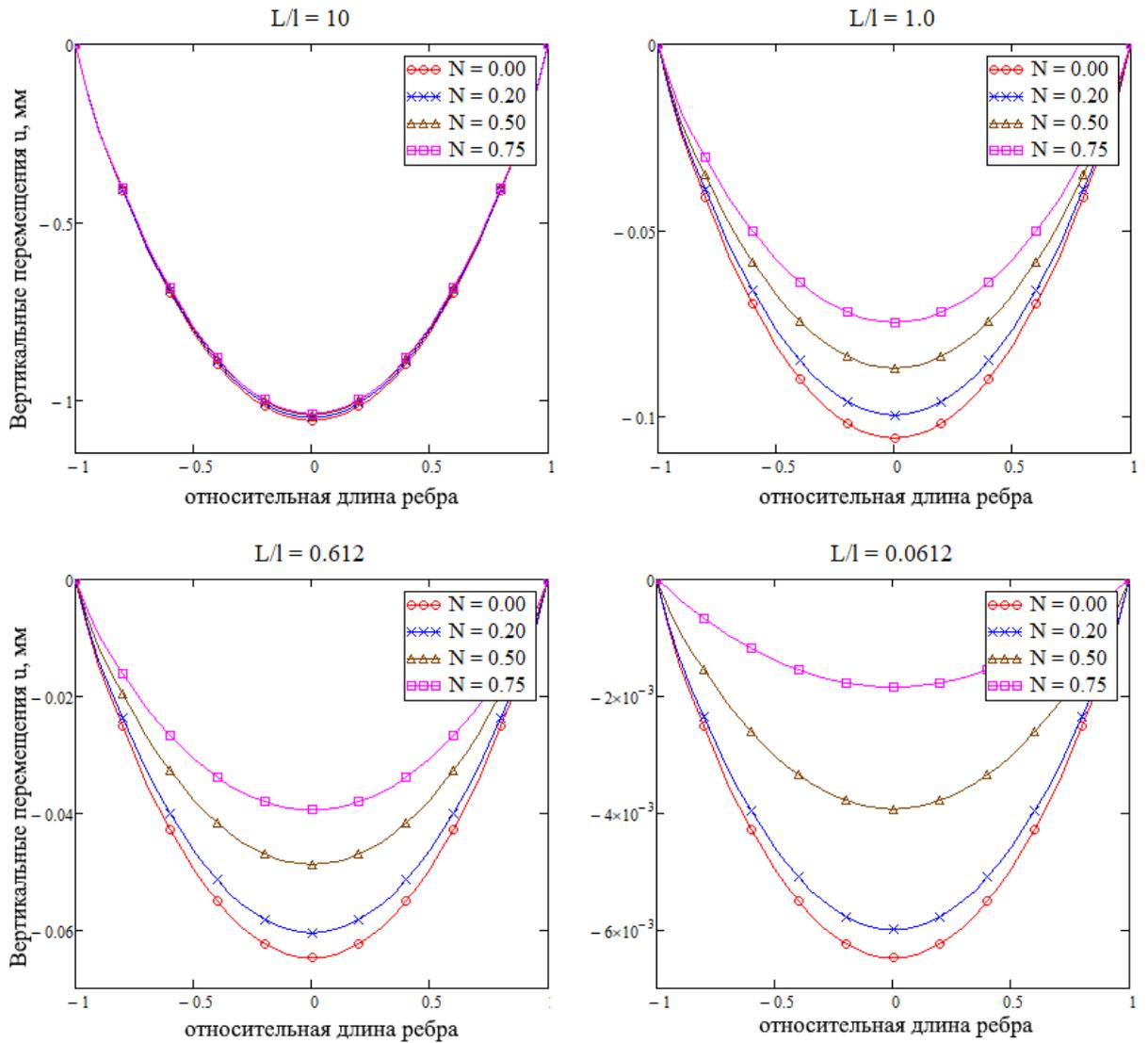


Рисунок 3.9. Слева – направо, сверху – вниз: графики перемещений вдоль средней линии нижней грани куба со стороной ребра  $L = 16.4$  мм и отношением  $L/l = 10$ ; со стороной ребра  $L = 1.64$  мм и отношением  $L/l = 1$ ; со стороной ребра  $L = 1.0$  мм и отношением  $L/l = 0.612$ ; со стороной ребра  $L = 0.1$  мм и отношением  $L/l = 0.0612$

в достаточной степени предсказывать физическое поведение материала с микроструктурой.

### 3.5. Задача о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями

Для иллюстрации и верификации построения численного решения вариационной модели натянутой нити, описанной в предыдущих главах, рассмотрим задачу о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями в рамках классической теории упругости без учёта силы трения. Материал цилиндра изотропный из стеклопластика с параметрами  $[N/mm^2]$   $\lambda = 2.096E+003$ ,  $\mu = 1.033E+003$ .

С этой целью рассмотрим симметричную часть цилиндра конечных размеров, с радиусом 0.08 мм внутренней грани, 0.10 мм внешней грани и высотой 0.10 мм. Четверть цилиндра имеет симметричные кинематические граничные условия см. рисунок 3.10. Первая модель имеет на внешней грани поверхностную силу 120 Н/мм<sup>2</sup>, вторая модель на поверхности с радиусом кривизны 0.0995 мм имеет ряд, состоящий из  $n = 40$  преднапряжённых нитей без учёта силы трения, равномерно расположенных по высоте и имеющие усилия, эквивалентные действию поверхностной силы на внешнюю грань. Усилие каждой нити легко определить из соотношений (1.10.3), определив сначала усилие приходящее на весь ряд нитей  $N_{tot} = pR = 120 \cdot 0.0995 = 11.94$  Н/мм, а затем на каждую нить  $N_i = N_{tot}/n = 11.94/40 = 0.2985$  Н/мм.

Следует отметить, что напряжения вблизи наружной грани модели у ряда натянутых нитей имеют существенные градиенты. При этом вдали от локального воздействия нити характер распределения напряжений сглаживается и несущественно отличается от напряжений (в том числе на внутренней грани), образованных действием наружной поверхностной силой см. рисунок 3.11, 3.12. Этот факт объясняется хорошо известным принципом Сен-Венана. На рисунке 3.12 представлены изополя и изоповерхности напряжений от действия трёх натянутых нитей.

Выполняя анализ и сравнение результатов численного решения модели толстостенного цилиндра конечных размеров от действия поверхностной силы и натянутых нитей представленных на рисунках 3.11, 3.12 можно сделать вывод о корректно реализованном математическом аппарате вариационной постановки модели натянутых нитей.

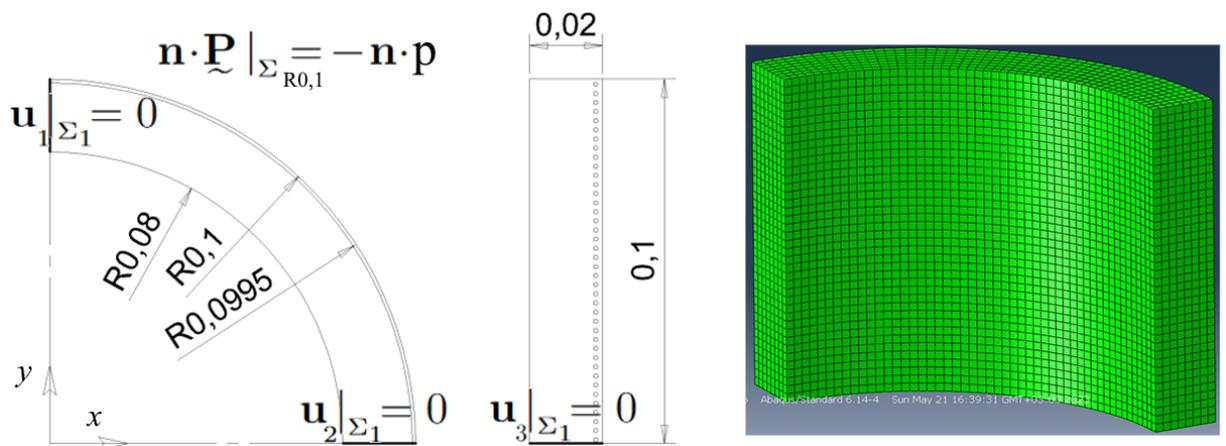


Рисунок 3.10. Расчётная схема [мм] и конечно-элементная модель толстостенного цилиндра конечных размеров с преднапряжёнными нитями

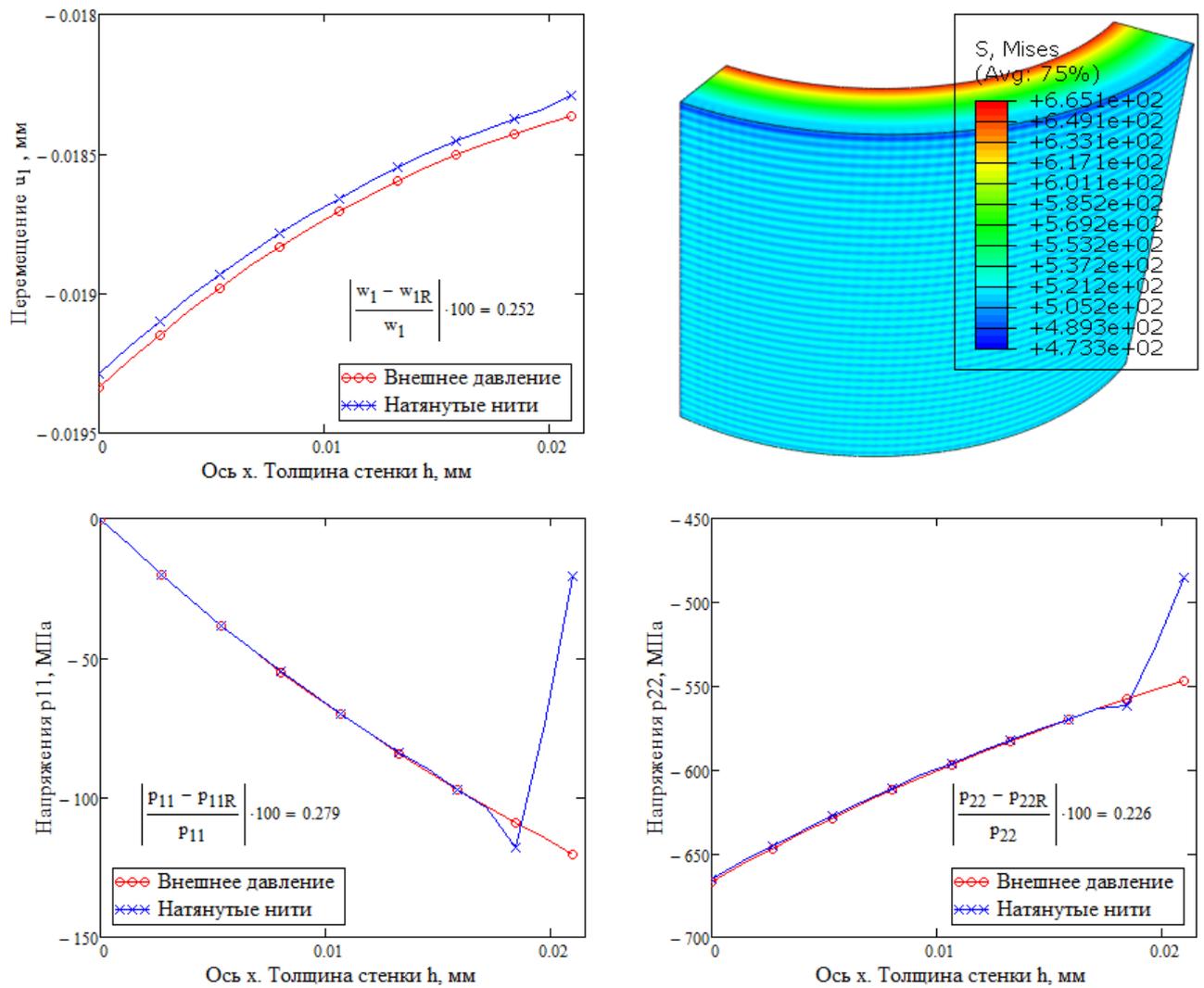


Рисунок 3.11. Зависимость параметров НДС от толщины толстостенного цилиндра под действием внешнего давления и натянутых нитей

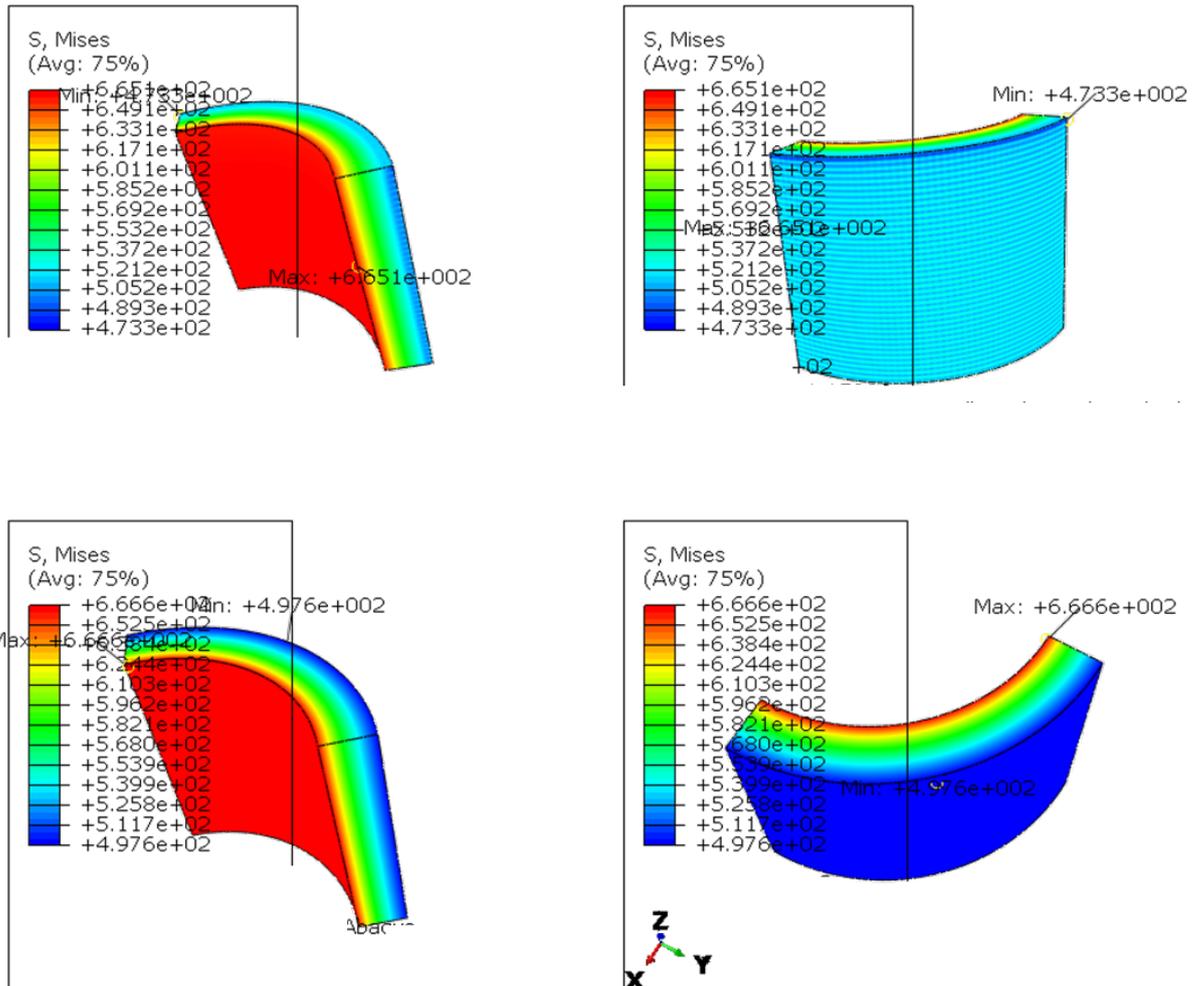


Рисунок 3.12. Напряжения, МПа от действия натянутых нитей(верхний ряд) и от действия поверхностной силы(нижний ряд)

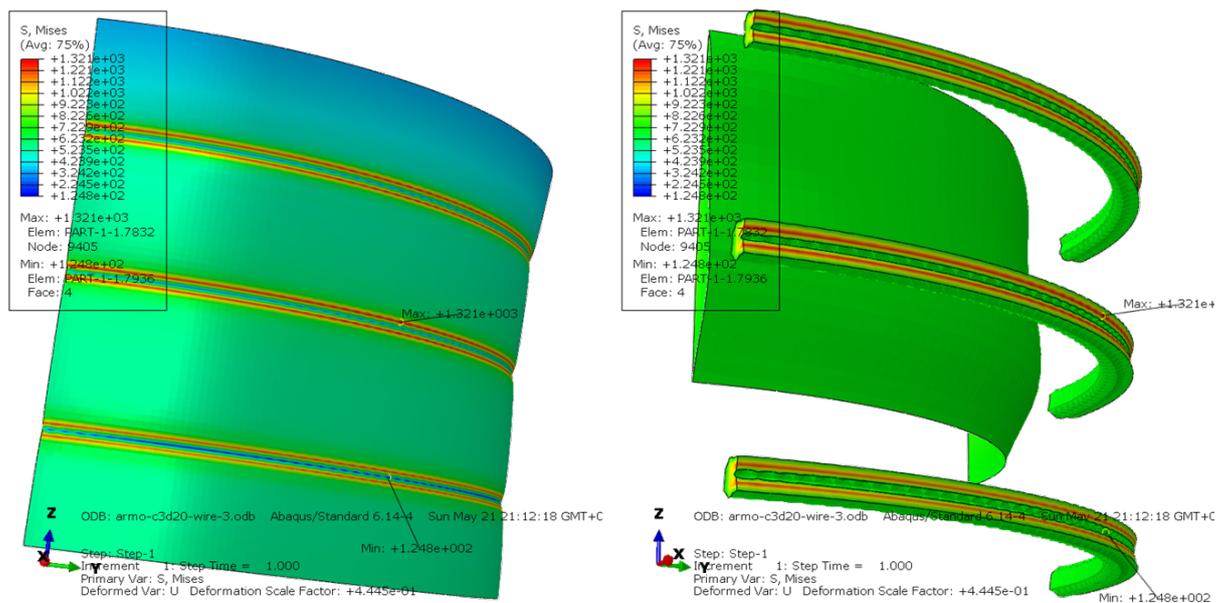


Рисунок 3.13. Напряжённо-деформированное состояние от действия трёх натянутых нитей

## Заключение

1. В рамках вариационной постановки был предложен подход, согласно которому упругий потенциал (или интегральное тождество) для микрополярного материала с центром симметрии произвольной анизотропии приводится к системе линейных алгебраических уравнений в виде тензорно-блочной записи без использования матричных операторов градиентов. Это позволило выписать систему линейных алгебраических уравнений для трансверсально-изотропного, ортотропного и изотропного материалов при неизотермических процессах с использованием тензорного аппарата механики, заменив матричные представления сокращённой тензорной формой.
2. Построенное решение для микрополярной теории упругости, всилу материальных параметров разной размерности в определяющих соотношениях, способны моделировать масштабные эффекты, подтверждаемые экспериментом. На механических моделях показано, что жёсткость при кручении (изгибе) или концентрация напряжений вблизи круглого отверстия зависят от масштабных параметров образца, характера микроструктуры (радиуса, толщины, размера пор или включений). Данный результат позволяет определить масштабные параметры модели из численного эксперимента.
3. Из законов термодинамики для функции свободной энергии при неизотермических процессах (когда задано стационарное температурное поле) построен упругий потенциал и введена энергетически сопряжённая пара, которая учитывает тепловые изгибы-кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями (деформаций, изгибов-кручений, напряжений, моментных напряжений), образованные либо источниками немеханической природы, либо являющиеся результатом решения несвязанной задачи. При этом тепловая структура может отличаться от механической, что означает различие материальных тензоров тепловой и механической структуры.
4. Уточнение решения в рамках микрополярной теории упругости на основе обобщенного метода редуцированного и селективного интегрирования в тензорном виде позволило на порядок повысить точность аппроксимации лагранжевыми полиномами для искомым векторных полей, в том числе для почти несжимаемых материалов. А применение полиномов смешанной степени на примере задачи о кубе позволило в 4 раза увеличить скорость сходимости при решении СЛАУ итерационным методом.
5. Для микрополярной среды сформулирована вариационная постановка модели натянутой нити (1.10.1) на основе параметризации кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$  через работу сил и моментов нити на соответствующих макроперемещениях и микровращениях.

6. Представлено решение задачи о кубе при различных вариациях масштабного параметра и моментного числа, а также решение задачи о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями.
7. Реализован решатель с применением технологии GPGPU в стеке C++, CUDA C для многопоточных вычислений на графических видеокартах. Реализованные КЭ для исследования микрополярной модели: (для верификации) CPS3, CPE3, CPS4, CPE4, C3D8, C3D20; микрополярные C6D8, C6D20, C6D208 (полиномы смешанной степени).

**Результаты, представленные в данной диссертации, получены автором лично и были опубликованы в работах [84, 105–111, 212–216].**

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Адамов А.А.* О вычислительных эффектах при решении краевых задач для изотропного однородного континуума Коссера. Доклад VI Российской научно-технической конференции "Механика Микронеоднородных Материалов и Разрушение". Екатеринбург 2010г. <http://www.imach.uran.ru/conf/mmp/mp13.htm>
2. *Александров К.С.* Упругие свойства анизотропных сред. Автореф. докт. дисс. — М.: Ин-т кристаллогр. АН СССР, 1967.
3. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
4. *Амбарцумян С.А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. — Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. — С. 214.
5. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц. // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2, вып. 7. — С. 1399-1409.
6. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1984, 352 с.
7. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, (1):22–36, 2008.
8. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
9. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.
10. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Физматгиз, 1962.
11. *Векуа И.Н.* Вариационные принципы построения теории оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1970. 15с.
12. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286с.
13. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
14. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука. 1988.
16. *Гарагаши И.А., Николаевский В.Н.* Механика Коссера для наук о Земле. Вычислительная механика сплошных сред. 2009, т. 2, № 4, с.44-66.
17. *Герасович К.* Кромочные эффекты в слоистых композитах. Прикладная механика композитов. Сб. ста-тей 1986-1988 гг. Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 44. М.: Мир. 1989, с. 295–341.

18. *Горбачев В.И., Емельянов А.Н.* Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, (1):95–107, 2014.
19. *Гузъ А.Н., Коханенко Ю.В.* Краевые эффекты в композитах. Прикладная механика. 1995. т. 31, № 3, с. 3–23.
20. *Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А.* Путеводитель по пакету LATEX и его расширению LATEX2e. — М.: Мир, 1999.
21. *Гуцин В.В., Потапов А.И., Рубцов С.Н.* Измерение скорости ротационной компоненты импульса, распространяющегося в рыхлом грунте. Труды Нижегородской акустической научной сессии: ННГУ. 2002, с. 366-368.
22. *Дараган С.К., Люке Е.И., Николаевский В.Н.* Нелинейная сейсмическая волна в зоне дробления массива каменной соли. ДАН. 1996, т. 351, № 3, с. 393-397.
23. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011.
24. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. — М.: Высш. шк., 2001.
25. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1, 2. — М.: Эдиториал. УРСС, 1998.
26. *Дудников В.А., Назаров С.А.* Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. — № 2. — С. 306–309.
27. *Еремеев В.А.* О локальной группе материальной симметрии в механике микрополярных сред. Матем. моделир. систем и процессов. межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 2006, № 14, с. 62-73.
28. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. — М.: Наука, 2008. — Т. 288.
29. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 328 с.
30. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. — Пермь, 2009. — Т. 2, № 2. — С.40-47.
31. *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: учебное пособие. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2003, 339 с.
32. *Зорич В.А.* Математический анализ: Часть 1 – 10-е изд. — МЦНМО, 2019 – 564 с.
33. *Иванов А.О., Туржиллин А.А.* Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа с помощью числа Борсука. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. 33-38.
34. *Иванов А.О.* Метрическая геометрия: расстояние Хаусдорфа. Видеолекции. Летняя школа для студентов мехмата МГУ. Красновидово, 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=gxQWbWDza34>
35. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. Учебник. 3-е изд. — М.: Изд-во, 1990.
36. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. // Прочность и пластичность. М.: Наука. — 1971. — С. 54–61.

37. *Киселев Ф.Б.* Применение метода осреднения для определение термоупругих свойств метаматериала с квазипериодической структурой // 51 школа-конференция АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ. Сборник тезисов докладов 2024, с. 113–113
38. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика / Сб. пер. – М.: Мир. – 1965. – № 3. – с. 89-112.
39. *Колмогоров А.Н., Фомин С.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
40. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. — М.: Изд-во МФТИ, 1995.
41. *Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физич. мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – с. 77-90.
42. *Корепанов В.В., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости. // Известия РАН. МТТ. 2008, № 2, с. 63–70.
43. *Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – с. 76–91.
44. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
45. *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука. 1972.
46. *Косевич А.М.* Теория кристаллической решетки (физическая механика кристаллов) Харьков: Вища школа. 1988.
47. *Кривцов А.М.* Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит. 2007, 304 с.
48. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир. 1984, 334 с.
49. *Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // Физика твердого тела. – 1963. – Т. 5, № 9. – С. 2591-2598.
50. *Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н.* Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объёмных волн. ПМТФ. 2008, т. 49, № 2, с. 196-203.
51. *Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера. Известия РАН. МТТ. 2007, № 4, с. 100–113.
52. *Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера. Акустический журнал. 2006, т. 52, № 2, с. 227–235.
53. *Кулеш М.А., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости. Известия РАН. МТТ.

- 2002, № 5, с. 69–82.
54. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках в рамках континуума Коссера. ПМТФ. 2007, т. 48, № 1, с. 143-150.
  55. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера. ПМТФ. 2005, т. 46, № 4, с. 116-124.
  56. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. – Новосибирск, 2001. –Т. 42, № 4. – С. 145-154.
  57. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. М.: Наука. 1975, 416 с.
  58. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
  59. *Левин В.М., Николаевский В.Н.* Осреднение по объему и континуальная теория упругих сред с микроструктурой. Совр. проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение. 1982, с. 182 – 193.
  60. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.
  61. *Леонгардт Ф.* Предварительно напряжённый железобетон. Пер. с нем. В. Н. Гаранина. — М.: Стройиздат // F. Leongardt. — Springer — Verlag. — 1980.
  62. *Леонгардт Ф.* Напряженно армированный железобетон и его практическое применение. Пер. с нем. В. К. Житомирского; под редакцией и с предисловием Г. И. Бердичевского. — М.: Стройиздат, 1957, 587 с.
  63. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977.
  64. *Лифшиц И.М.* О тепловых свойствах цепных и слоистых структур при низких температурах ЖЭТФ. 1952. Т. 22. №4. С. 475–486.
  65. *Лохин В.В.* Нелинейные тензорные функции в пространстве Минковского // В кн.: Научные труды Ин-та механики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 31. — С. 6–66.
  66. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // Прикл. мат. мех. — 1963. — 27, № 3. — С. 393–417.
  67. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
  68. *Лурье К.А.* Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1979. — 6. — С. 86–93
  69. *Лурье С.А., Белов П.А.* Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: Изд-во ВЦ РАН. 2000, 151 с.
  70. *Лурье С.А., Белов П.А.* Теория идеальных адгезионных взаимодействий. Механика композиционных материалов и конструкций, 13(3):23–29, 2007
  71. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. — 1982. — Т. 28, № 6. — С. 838-840.

72. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, 1980.
73. Мизгушов И.И. Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.
74. Минаков А.П. Основы механики нити // Научно-исследовательские труды Московского текстильного института. – 1941, т. 9, вып. 1. с. 1–88
75. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений Механика / Сб. пер. – М.: Мир. – 1964. – № 4. – С. 115-128. 7. Р.Д.
76. Миндлин Р.Д., Г.Ф. Тирстен Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости. Механика, сб. перев. 1964, № 4, с. 80 – 114.
77. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
78. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987, 464 с.
79. Никабадзе М.У. К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 16.11.1988. № 8149-B88. 45 с.
80. Никабадзе М.У. К условиям совместности в линейной микрополярной теории // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2010. № 5. 48–51.
81. Никабадзе М.У. К условиям совместности и уравнениям движения в микрополярной линейной теории упругости // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1. С. 63-66.
82. Никабадзе М.У. Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 12.07.88. № 5588-B88. 30 с.
83. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. 2014. – 515 с.
84. **Никабадзе М.У., Романов А.В. О некоторых вопросах микрополярной теории призматических упругих тел. Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, М.: Издательство ООО «МАКС Пресс» 2019, том 2, с. 744-746.**
85. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидомеханика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
86. Николаи Е.Л. Труды по механике. – М.: Гос. изд. технико-теорет. лит., 1955.
87. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с
88. Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. Сиодзава К., Танака К. Введение в микромеханику. – М.: Металлургия, 1987. – 280с.
89. Підстригач Я.С. Умові теплового контакту твердих тіл // Доповіді АН УРСР. 1963. № 7. С. 872–874
90. Павлов И.С. Гранулированная среда с вращением частиц. Двумерная модель. Пробл. прочн. и пластич. 2003, Вып. 65, с. 53–64.
91. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401-408.

92. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 6. –С. 1117-1120.
93. *Пелех Б.Л., Коровайчук И.М.* К механике композитных сред с несовершенными связями на поверхностях раздела фаз // Механика композитных материалов. 1984. № 4. С. 606–611.
94. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. Третье издание. – М.: Изд-во МГУ, 1986. М.: Мир. 1975. 872 с
95. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 272 с. – ШЫИТ 5-9221-0649-Х.
96. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Лекции по теории упругости. – М.: Ленанд, 2018. 208 с
97. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984, 336 с.
98. *Победря Б.Е.* Принципы вычислительной механики композитов. Механика композитных материалов, 32(6):41–63, 1996.
99. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. Второе издание. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
100. *Победря Б.Е.* Элементы структурной механики деформируемого твердого тела. Матем. моделир. си-стем и процессов; Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 1996, № 4, с. 66–74.
101. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определение материальных функций линейной моментной теории вязко-упругости. Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. 2007, № 5, с. 36–41.
102. *Подстригач Я.С.* Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде // Докл. АН УССР. 1982. № 12. С. 30–32.
103. *Поляков В.А., Ю.Ю. Перов.* Экспериментальные методы оценки кромочного эффекта. Обзор. Механика композитных материалов. 1989, №2, с. 318–331.
104. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
105. **Романов А.В.** Численное моделирование защитных оболочек атомных электростанций. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 1, с. 49–51
106. **Романов А.В.** Численное моделирование системы преднапряжения защитных оболочек АЭС с использованием функций форм «неправильного» гексаэдра. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 6, с. 37–47
107. **Романов А.В.** О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально–изотропной среды. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. с. 35–39.

108. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. с. 68–72.
109. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. с. 64–68.
110. *Романов А.В.* Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. №1. с. 65–69.
111. *Романов А.В.* О полиномах смешанной степени в задачах микрополярной теории упругости. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 4. с. 51–56.
112. *Романов А.В.* Масштабные эффекты микрополярного изотропного тела с центром симметрии. Математика в созвездии наук. Материалы международной конференции, посвященной 85-летию академика В. А. Садовниченко, М.: Издательство ООО «МАКС Пресс» 2024.
113. *Романов А.В.* Приведение краевой задачи к тензорно-блочной форме СЛАУ для оценки масштабных эффектов микрополярной теории упругости. Материалы XXX Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова. Сборник тезисов, том 2, с. 166–170. –М.: Торус пресс, 2024. – 176 с.
114. *Романов А.В.* Уточнение аппроксимации лагранжевыми полиномами к оценке масштабных эффектов микрополярной среды // 51 школа-конференция АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ. Сборник тезисов докладов 2024, с. 200–200
115. *Савин Г.Н.* Основные задачи плоской моментной теории упругости. Механика деформируемых тел. Избранные труды. Киев: Наукова думка. 1979, с. 222-237.
116. *Садовская О.В.* Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Ж. вычисл. математики и математ. физики. –2009. – Т. 49, № 2. – С. 313–322.
117. *Садовский В.М., О.В. Садовская, Варыгина М.П.* Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах. Вычислительная механика сплошных сред. 2009, т. 2, № 4, с. 111-121.
118. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984, 472 с.
119. *Саркисян С.О.* Особенности напряженно-деформированного состояния тонких пластин в рамках теории микрополярной упругости. Вычислительная механика сплошных сред. 2009, т. 2, № 1, с. 81-95.

120. *Саркисян С.О.* Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости. Физ. мезомеханика. 2008, т. 11, № 5, с. 41–54.
121. *Седов Л.И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. // ПММ, 1968. Т. 32. — № 5. — С. 771–785.
122. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды // Т.2 6-е изд., СПб.: Лань, 2004.
123. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. – Ч. 1,2. – М.: Высшая Школа, 1987.
124. *Свистков А.Л., Евлампиева С.Е.* Использование сглаживающего оператора осреднения для вычисления значений макроскопических параметров в структурно-неоднородных материалах. Прикладная механика и теоретическая физика. 2003, т. 44, № 5, с. 151–161.
125. *Смолин И.Ю.* Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне. Матем. моделир. систем и процессов: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 2006, № 14, с 189-204.
126. *Смолин И.Ю.* Моделирование деформации и разрушения материалов с явным и неявным учётом их структуры. Дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.02.04. Томск. 2008, 310 с.
127. *Соляев Ю.О.* Неклассические масштабные эффекты в прикладных моделях градиентной теории упругости и электроупругости. Диссертация доктора физико-математических наук. МГУ 2022.
128. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.
129. *Большова Л.А.* Труды ИБРАЭ РАН / под общ. ред. чл.-кор. РАН; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. — М. : Наука, 2007— .Вып. 6 : Механика преднапряженных защитных оболочек АЭС / науч. ред. Р. В. Арутюнян. —2008. — 151 с. : ил. — ISBN 978-5-02-087031-9 (в пер.). // <http://ibrae.ac.ru/pubtext/13/>
130. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука. 1975, 576 с.
131. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения. // Механика / Сб. пер. 1965. №. 3. С.113-140.
132. *Шардаков И.Н., Кулеш М.А.* Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера. Матем. моделир. систем и процессов; Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 2001, № 9, с 187-201.
133. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: Часть 1 – 9-е изд. – Лань, 2008. – 448 с.
134. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости неоднородных сред. М.: Наука. 1977, 400 с.
135. *Шоркин В.С., Вильчевская Е.Н., Ромашин С.Н.* Модель влияния электрического поля на механические свойства диэлектрика // Известия ТулГУ. Технические науки. 2023. Вып. 7. с. 63 – 71.
136. *Шоркин В.С., Голенков В.А., Якушина С.И.* Математическая модель описания нелокальных взаимодействий частиц континуума //Фундаментальные и прикладные

- проблемы техники и технологии. – 2020. – №. 6. – С. 3-10.
137. *Шоркин В.С.* Нелинейные дисперсионные свойства высокочастотных волн в градиентной теории упругости. // *Механика твердого тела.* – 2011. – № 6. – С. 104–121.
  138. *Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Азаров А.С.* Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел. // *Материаловедение.* – 2011. – № 2. – С. 2–7.
  139. *Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Якушина С.И.* Вариант подхода к моделированию линейной упругой среды. // *Известия Тульского государственного университета Естественные науки.* 2013. Вып. 2. Ч.2. – С. 284–296.
  140. *Щербаков В.П.* Очерк о механике нити // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности.* - 2007. - N 6. - с. 86–89
  141. *Эглит М.Э.* Лекции по основам механики сплошных сред М.: Либроком, 2010. 208 с.
  142. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости. Разрушение. Под ред. Г. Либовица. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир. 1975, с. 646–751.
  143. *Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритынский Я.И., Мигушов И.И.* Основы механики нити – М.: Легкая индустрия, 1973.
  144. *Adomeit G.* Ausbreitung elastischer Wellen und Bestimmung von Materialkonstanten im Cosserat-Kontinuum. Aachen: Techn. Hochschule. 1967, 78 s.
  145. *Anderson W.B., Lakes R.S.* Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage inclosed-cell polymeth-acrylimide foam. *J. Mat. Sci.* 1994, v. 29, p. 6413-6419.
  146. *Anderson W.B., R.S. Lakes., Smith M.C.* Holographic evaluation of warp in the torsion of a bar of cellular solid. // *Cellular Polymers*, 14, 1-13 (1995).
  147. *Askar A.* Molecular crystals and the polar theories of the continua (Experimental values of material coefficient for KNO<sub>3</sub>) // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. – P. 293.
  148. *Brenner S.C. and Scott L.R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Texts in Applied Mathematics, volume 15. Springer Verlag, New York, 3th edition, 2008.
  149. *Brezny R., Green D.J.* Characterization of edge effects in cellular materials. *J. of Material Science.* 1990, v. 25, p. 4571-4578.
  150. *Chen C.P., Lakes. R.* Dynamic wave dispersion and loss properties of conventional and negative Poisson’s ratio polymeric cellular materials. *Cellular Polymers.* 1989, v. 8, p. 343-369.
  151. *Cohen H.* Dislocations in couple-stress elasticity // *J. of Mathematics and Physics.* – 1966. – V. 45. – P. 35.
  152. *Cosserat E. et F.* Theorie des Corp Deformables. Paris. Librairie Scientifique A.Hermann et Fils. 1909. 226p.
  153. *Cowin S.C.* An Incorrect Inequality in Micropolar Elasticity Theory // *Zangew. Math. Phys.* 21, 494 1970.

154. *Ellis R.W., Smith C.W.* A thin-plate analysis and experimental evaluation of couple-stress effects // *Experimental Mechanics*. – 1967. – V 7. – P. 372.
155. *Ericksen J.L., Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1958. – V. 1, N. 4. – P. 295-323.
156. *Eringen A.C.* Theory of micropolar elasticity. In *Fracture, 1* (edited by H. Liebowitz) Academic Press. N.Y.: 1968. 621-729 pp.
157. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories 1. Foundation and solids. Springer-Verlag. N.Y.: 1999. 341 p.
158. *Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O.* Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium. *ZAMM*, 97(9):1064–1071, 2017
159. *Gauthier R. D.* Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity. Doctoral dissertation, University of Colorado, 1974.
160. *Gauthier R, Jahsman W.* A quest for micropolar elastic constants. *J Appl Mech* 1975;42(2):369–74. <https://doi.org/10.1115/1.3423583>
161. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants. Part 1. *Trans. ASME. Ser. E., J. Appl. Mech.* 1975, v. 42, № 2, p. 369-374.
162. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants. Part 2. *Arch. Mech.* 1981, v. 33, № 5, p. 717-737.
163. *Gibson L.J. and Ashby M.F.* Cellular Solids. Pergamon, Oxford; 2nd Ed., Cambridge (1997).
164. *Green A.E., Rivlin R.S.* Simple force and stress multipoles // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1964. – V. 16, N 5. –P. 325-353.
165. *Grbčić S., Ibrahimbegović A., Jelenić G.* Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes. 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.04.005>
166. *Hoppman W.H., Shahwan F.O.F.* Physical model of a 3-Constant isotropic elastic material // *Transactions Trans. ASME.* – 1965. – V. E32. – P. 837.
167. *Hughes T. J. R., Cohen M., Haroun M.* Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates // *Nuclear Engineering and Design*, Yol. 46, 1978, pp.203-222.
168. *Kaloni P.N., Ariman T.* Stress Concentrations in Micropolar Elasticity // *Zangew. Math. Phys.* 18, 136 1967.
169. *Khurana A., Tomar S.K.* Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – N. 46. – P. 135-150.
170. *Khurana A., Tomar S.K.* Transmission of longitudinal wave at a plane interface between micropolar elastic and chiral solid half-spaces: Incidence from micropolar half-space // *J. of Sound and Vibration.* – 2008. –N. 311. – P. 973-990.

171. *Kirsch G.* Die theorie der eiaistizit und die bedirfnisse der festigkeislehre // Zentralblatt Berlin Deutscher Ingenieure, 1898. – P. 42.
172. *Koiter W.T.* Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenicl. Acad. Wet. – 1964. – V. B67. – P. 17.
173. *Korepanov V.V., M.A. Kulesh, V.P. Matveenko, Shardakov I.N.* Analytical and numerical solutions of two-dimensional problems of asymmetric elasticity theory. European Congress on Comput. Meth. in App. Sci. and Eng. ECCOMAS 2004, Jyväskylä, Finland, 24–28 July. 2004, p. 1-19.
174. *Kosevich A.M.* Crystal Lattice: Phonons, Solitons, Dislocations. Berlin, New York, Wiley-VCI-I, 1999.
175. *Krishna Reddy G.V., Venkatasubramanian N.K.* On the flexural rigidity of a micropolar elastic circular cylinder //J. Applied Mechanics 45, 429-431 (1978).
176. *Kroener E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechnics // Int. J. Eng. Sci. – 1963. –V. 1. – P. 261.
177. *Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N.* Parametric analysis of analytical solutions to one - and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity. //Z. Angew. Math. Mech. 2003, v. 83, №4, p. 238-248.
178. *Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bashaileishvili M.O. and T.V. Burchuladze T.V.* 1976, Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity (Moscow: Nauka) (in Russian)
179. *Lakes R.* Cosserat micromechanics of structured media: Experimental methods. Proc. Amer. Soc. for Composites, 3rd Technical Conference, Seatle, Sept. 25-29. 1988, p. 505-516.
180. *Lakes R.S.* Elastic freedom in cellular solids and composite materials Mathematics of Multiscale Materials. Ed. K. Golden, G. Grimmert, R. James, G. Milton, P. Sen. IMA V. 99, Springer, NY, Berlin. 1998, p. 129-153.
181. *Lakes R.S.* On the torsional properties of single osteons // J. Biomechanics, 28, 1409-1410 (1995).
182. *Lakes R.S.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // Continuum models for materials with micro-structure ed. H. Muhlhaus, J. Wiley, N. Y. Ch. 1. 1995, P. 1-22.
183. *Lakes R.S.* Size effects and micromechanics of a porous solid. J. Mat. Sci. 1983, v. 18, p. 2572-2580.
184. *Lakes R.S.* Experimental microelasticity of two porous solids. Int. J. Solids and Structures. 1986, v. 22, № 1, p. 55-63.
185. *Lakes R.S., Gorman D., Bonfield W.* Experimental microelasticity of two porous solids.// J. Materials Science, 20, 2882-2888 (1985).
186. *MacCullagh J.* Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., **21** (1839), 17–50.

187. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity. // Arch. Rational Mech. Anal. 16, 51–78 (1964).
188. *Mindlin R.D.* Stress functions for a Cosserat continuum // Int. J. Solids Structures, 1, 265-271 (1965).
189. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity. // Arch. Rational Mech. Anal. 16, 51–78 (1964).
190. *Mindlin R.D.* Influence of couple-stress on stress concentrations //Experimental Mechanics. – 1963. – V. 3, N. 1. – P. 1-7.
191. *Mindlin R.D., Tierstin H.F.* Effects of couple-stress in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1962. – V. 11, N. 5. – P. 415-488.
192. *Nakamura S., Lakes R.S.* Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a Cosserat elastic solid. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 1988, v. 66, № 3, p. 257-266.
193. *Neff P., Jeong J., Fischle A.* Stable identification of linear isotropic Cosserat parameters: bounded stiffness in bending and torsion implies conformal invariance of curvature. Preprint 2574,  
<http://www3.mathematik.tudarmstadt.de/fb/mathe/bibliothek/preprints.html>, submitted, 2/2009, 13 p. (дата обращения: 01.06.2009).
194. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. Springer. 1965, p. 153–158.
195. *Nikabadze M.U.* Compatibility conditions and equations of motion in the linear micropolar theory of elasticity // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2012, Vol. 67, № 1, pp. 18–22. Allerton Press, Inc., 2012.
196. *Nikabadze M.U.* 2014, Development of the method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies (M., Publ. House of the Board of Trustees mech.-math. facul. of MSU) 515 p (in Russian)  
<http://istina.msu.ru/media/publications/book/707/ea1/6738800/Monographiya.pdf>
197. *Nikabadze M.U.* 2016, Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42 279-317 DOI 10.1007/978-3-319-31721-2\_14
198. *Nikabadze M.U.* 2017, Topics on tensor calculus with applications to mechanics J. Math. Sci. 225:1 194 p
199. *Nikabadze M.U. and Ulukhanyan A.R.* 2016, Analytical solutions in the theory of thin bodies H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42 319-361 DOI 10.1007/978-3-319-31721-2\_15

200. *Nikabadze M.U.* On several issues of tensor calculus with applications to mechanics // Contemporary mathematics. Fundamental directions. 2015, Vol. 55, 3-194 (in Russian). <http://istina.msu.ru/media/publications/book/e25/00c/10117043/M.U.Nikabadze.pdf>
201. *Nowacki W.* Couple-stresses in the theory of thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techn. –1966. – V. 14. – P. 505-512.
202. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Vienna: Springer-Verlag; 1972.
203. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Warszawa: Polish Scientific Publishers. 1986, 383 p.
204. *Nyilas R.D., Kobas M., Spolenak R.* Synchrotron X-ray microdiffraction reveals rotational plastic deformation mechanisms in polycrystalline thin films. // Acta Materialia 57: 3738-3753 (2009).
205. *Park H.C., Lakes R.S.* Torsion of a micropolar elastic prism of square cross section. // Int. J. Solids, Structures, 23, 485-503 (1987).
206. *Park H.C., Lakes R.S.* Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration-sensitive constituent. // J. Biomechanics, 19, 385-397 (1986).
207. *Perkins R.W., Thompson D.* Experimental evidence of a couple-stress effect // AIAA Journal. American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1973. – V. 11. – P. 1053.
208. *Nowacki W.* Some Theorems of Asymmetric Thermoelasticity. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 15, № 5 (1967)
209. *Perkins R.W., Thompson D.* Experimental evidence of a couple-stress effect // AIAA Journal. American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1973. – V. 11. – P. 1053.
210. *Reissner E.* On kinematics and statics in finite-strain force and moment stress elasticity // Stud. Appl. Math. – 1973. – V. 52, N. 2. – P. 97-101.
211. *Rueger Z., Lakes R.S.* Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam // Philosophical Magazine, 96 (2), 93-111, January (2016)
- 212. Romanov A.V. A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of transversely isotropic medium. – Moscow Univ. Mech. Bull. 77, pp. 93–98 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0027133022040045>**
- 213. Romanov A.V. A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of orthotropic medium. – Moscow Univ. Mech. Bull. 78, pp. 23–28 (2023). <https://doi.org/10.3103/S0027133023010041>**
- 214. Romanov A.V. A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of non-isothermal process. – Moscow Univ. Mech. Bull. 78, pp. 114–118 (2023). <https://doi.org/10.3103/S0027133023040052>**
- 215. Romanov A.V. Application of Reduced and Selective Integration Techniques in the Micropolar Theory of Elasticity. – Moscow Univ. Mech. Bull. 79, pp. 65–69 (2024). <https://doi.org/10.3103/S002713302470002X>**
- 216. Romanov A.V. The Polynomials of Mixed Degree in Problems of Micropolar Theory of Elasticity. – Moscow Univ. Mech. Bull. 79, pp. 190–196 (2024).**

<https://doi.org/10.3103/S0027133024700171>

217. *Rueger Z., Lakes R.S.* Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam // Philosophical Magazine, 96 (2), 93-111, January (2016)
218. *Sadovskii V., Sadovskaya O.* Acoustic Approximation of the Governing Equations of Liquid Crystals under Weak Thermomechanical and Electrostatic Perturbations. In: Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures (Eds.: dell'Isola F., Eremeyev V.A., Porubov A.), Chapt. 17, P. 297–341. Ser.: Advanced Structured Materials, vol. 87. Cham: Springer, 2018.
219. *Sandru N.* On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity // Int. J. Eng. Sci. 1966. 4. N 1. 81–94.
220. *Shorkin V.S.* Linear theory of micropolar media with internal nonlocal potential interactions // ZAMM, e202300099 (2023) // <https://doi.org/10.1002/zamm.202300099>
221. *Tang P.Y.* Interpretation of bend strength increase of graphite by the couple stress theory. Comp. and Structures. 1983, v. 16, – p. 45-49.
222. *Timoshenko S.P.* History of Strength of Materials. Dover, NY, 1983.
223. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
224. *Tomar S.K., Khurana A.* Elastic waves in an electro-microelastic solid // Int. J. Solids Struct. – 2008. –N. 45. – P. 276-302.
225. *Tomar S.K., Khurana A.* Reflection and transmission of elastic waves from a plane interface between two thermo-microstretch solid half-spaces // Int. J. of Appl. Math. Mech. – 2009. – N. 5 (4). – P. 48-68.
226. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stress Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 11, N. 5. P. 385-399.
227. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 17, N. 2. P. 85-112.
228. *Vekua I N* 1978, Fundamentals of tensor analysis and covariant theory (Moscow: Nauka) (in Russian).
229. *Voigt W.* Theoretische Studien uber die Elastizitatsverhaltnisse der Krystalle Abn. Ges. Wiss. Gottingen: 1887. V. 34.
230. *Zienkiewicz O.C. and Cheung Y.K.* The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw Hill, 1967.
231. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2013.
232. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* The Finite Element Method for Solid Mechanics. 7th edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2014.
233. *Zubov L.M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. – Berlin: Heidelberg; N.Y.: Springer, 1997. – 205 p. 23. E.