УДК 519.997

Синтез оптимальных кусочно-гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов

Урюпин И.В.

Межведомственный Аналитический Центр,

ул. Поварская, 31/29, стр.2, Москва, 121069, Россия

e-mail: uryupin93@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается задача синтеза оптимальной траектории переключаемой системы, аппроксимирующей траекторию движения летательного аппарата (ЛА). Траектория представляется кусочно–гладкой функцией и в общем случае не может совпадать с непрерывной заданной кривой. Разработан алгоритм, осуществляющий поиск кусочно–линейной траектории, которая наилучшим образом аппроксимирует заданную непрерывную кривую для любого начального состояния. В отличие от обычной аппроксимации непрерывных функций, здесь учитывается также и количество переключений аппроксимирующей функции из одного состояния в другое. Каждый переход из одного состояния переключаемой системы в другое требует определенных затрат, которые суммируются в функционале качества. Приведены примеры численной реализации алгоритма.

Ключевые слова: переключаемая система, синтез, оптимальная траектория, алгоритм, оптимизация, функция цены, кусочно–линейная аппроксимация.

Введение

Переключаемые системы служат математическими моделями многорежимных систем автоматического управления технологическими процессами и движущимися объектами [1]. Процессы в таких системах имеют разнородное описание [3–7], а вектор состояния содержит как непрерывные, так и дискретные компоненты. В рассматриваемых в работе системах непрерывная часть, задающая движение объекта управления, описывается дифференциальными уравнениями, а дискретная (автоматная) часть [8], моделирующая работу устройства управления, – рекуррентными включениями. Такие системы являются частным случаем гибридных систем [1,9–13], в которых непрерывная компонента, как правило, отражает физические законы, технологические или технические принципы, а дискретная часть показывает работу устройства управления, например, цифровых автоматов с памятью. Обе части системы взаимосвязаны и влияют друг на друга в процессе управления. Как правило, автоматная часть характеризует операционную ситуацию, в которой происходит функционирование, определяя режим управляемого движения непрерывной части системы. Изменение состояния (переключение) автоматной части соответствует изменению операционной ситуации и смене режима работы системы. Качество управления переключаемой системой оценивается функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение дискретной части системы. Выбор количества переключений и моментов, в которые происходят переключения, является одним из ресурсов управления и подлежит оптимизации. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [14–16]. Таким образом, задача синтеза оптимальной переключаемой системы обобщает задачу синтеза оптимальной непрерывно-дискретной системы (НДС) [17].

Логико-динамические системы (ЛДС) [15,18,19] и динамические системы с автоматной частью относятся к переключаемым системам, обобщая системы с переменной структурой. Для описания работы логической (автоматной) части применялись рекуррентные уравнения (или включения) с мгновенным запаздыванием [16]. При этом моменты времени, в которые происходят переключения, определяются неявно, как точки разрыва траектории логической (автоматной) части системы. Такая форма описания приводит к сложным уравнениям для функции цены (аналогичной функции Гамильтона – Якоби – Беллмана), что отражается в достаточных условиях оптимальности. Для переключающих систем [16,20,21] и дискретных систем автоматного типа [14] была использована другая форма рекуррентных уравнений (или включений) с явным указанием неубывающей последовательности моментов переключений. Это более простое описание привело к конструктивным условиям оптимальности. Такой же способ используется для переключаемых систем. Отметим, что переключающие системы [16,20,21] и дискретные системы автоматного типа [14] моделируют работу автомата с памятью и представляют собой системы, которые на ограниченном непрерывном промежутке времени своего функционирования конечное число раз меняют свое состояние. Переключающие системы являются составной частью гибридных и переключаемых систем. Достаточные условия оптимальности управления динамическими системами, как правило, связаны с определением функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана). Для синтеза оптимальных переключаемых систем предлагается, как и в переключающих системах [16,20,21], искать вспомогательные функции – так называемые условные функции цены, из которых потом можно построить "настоящую" функцию цены. Дифференциальные и рекуррентные уравнения для этих вспомогательных функций выводятся на основе метода динамического программирования. Получить же дифференциальное уравнение (понимаемое в обычном смысле) для функции цены невозможно, поскольку она не дифференцируема.

Постановка задачи аппроксимации

Пусть на заданном промежутке времени $T=[0,1]$ дискретная часть динамической системы совершает N переключений в моменты времени $t_i, i=1,\ldots,N$, образующие неубывающую последовательность $\mathbf{T}=\{t_1,\ldots,t_N\}$:

$$0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le 1.$$

Между неравными последовательными моментами переключений дискретная часть сохраняет свое состояние, а непрерывная часть изменяется согласно дифференциальному уравнению:

$$x^{(n)}(t)=y(t), \qquad (1)$$

$$y(t)=y_{i-1}, \quad t_{i-1} \le t < t_i, \quad i=1,\ldots,N+1;$$

в моменты переключений скачки дискретной части удовлетворяют включению

$$y_i \in G \setminus \{y_{i-1}\}, \quad i=1,\ldots,N. \qquad (2)$$

В соотношениях (1), (2) $x(t)$ – состояние непрерывной составляющей системы в момент времени $t \in T$, $x(t) \in X \subset \square$, X – заданное множество допустимых состояний; $n \in \square_+$ – производная n – ого порядка; $y_i = y(t_i)$ – состояние дискретной части системы в момент времени $t_i \in \mathbf{T}$, $y_i \in Y \subset \square$, Y – заданное множество допустимых состояний; множество $G \subset \Delta y \cdot \square$.

Качество траектории оценивается функционалом

$$I = \int_0^1 (X(\theta) - x(\theta))^2 \, d\theta + \sum_{i=1}^{N} \lambda, \qquad (3)$$

где $X : [0,1] \to \square$ – заданная непрерывная аппроксимируемая функция, $x(\theta) = x - (\theta - t) y$ – аппроксимирующая линейная траектория, λ – положительная величина затрат на переключение состояния дискретной части системы. Суммирование в (3) проводится по всем точкам разрыва функции $y(\cdot)$. Множество точек разрыва $\mathbf{T}(y(\cdot))$ заранее не задано и определяется в процессе оптимизации. На практике, однако, количество переключений (изменений состояния) используемых устройств может быть ограничено в соответствии с техническими характеристиками. Поэтому задачу оптимального синтеза будем рассматривать также и при наличии ограничения общего количества тактовых моментов времени (переключений)

$$|\mathbf{T}| \le N,$$

где N – заданное неотрицательное целое число.

Требуется найти:

- Оптимальную траекторию $(x(\cdot), y(\cdot))$ для заданного начального состояния $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.
- Оптимальную позиционную конструкцию автоматной части переключаемой системы.
- Оптимальную траекторию, для лучшего начального состояния (x_0, y_0).

Оптимальность системы понимается как минимизация отклонения искомой кусочно-линейной траектории $x(\cdot)$ от заданной непрерывной траектории движения ЛА $X(\cdot)$ при одновременном уменьшении количества разрывов искомой траектории.

Алгоритм синтеза кусочно-линейной аппроксимации

Алгоритм синтеза заключается в построении функции цены (Гамильтона – Якоби – Беллмана) и нахождении оптимальной позиционной конструкции. Рассмотрим шаги алгоритма.

Шаг 0.

Находим нулевую образующую функцию φ_0, решая уравнение

$$\varphi_0(t,x,y) = \int_0^1 (X(\theta) - (x + (\theta - t)y))^2 d\theta, \tag{4}$$

$$0 \le t \le 1, \qquad 0 \le x \le 1, \quad y \in G.$$

Задаем номер $k = 1$ следующих искомых образующих функций цены и позиционных конструкции $\boldsymbol{z}_k$ и $\boldsymbol{\tau}_k$.

Шаг 1^{k}.

Находим образующую функцию цены $\varphi_k(t,x,y)$, из уравнения

$$\varphi_k(t,x,y)=\min_{t\le\tau\le 1}\left[\int_\tau^t \left(X(\theta)-(x+(\theta-t)y)\right)^2 d\theta+\right.$$

$$\left.+\min_{z\in G}\left(\varphi_{k-1}(\tau,x+(\theta-t)y,z)+\lambda\right)\right], \qquad (5)$$

при этом определяется оптимальная позиционная конструкция переключающей (дискретной) части системы:

$$\boldsymbol{z}_k(\tau,x,t,y)=\arg\min_{z\in G}\left(\varphi_{k-1}(\tau,x+(\theta-t)y,z)+\lambda\right), \qquad (6)$$

условный оптимальный момент переключения определяем так:

$$\boldsymbol{\tau}_k(t,x,y)=\arg\min_{t\le\tau\le 1}\left[\int_\tau^t \left(X(\theta)-(x+(\theta-t)y)\right)^2 d\theta+\right.$$

$$\left.+\min_{z\in G}\left(\varphi_{k-1}(\tau,x+(\theta-t)y,z)+\lambda\right)\right]. \qquad (7)$$

Шаг 2^{k}.

Итерационный процесс заканчивается, если функцию цены, найденную по k образующим нельзя улучшить:

$$\min_{0\le i\le k}\varphi_i(t,x,y)=\min_{0\le i\le k+1}\varphi_i(t,x,y), \qquad (8)$$

для всех позиций (t,x,y).

Дополнительным условием окончания может служить ограничение допустимого количества переключений, например, натуральным числом N. В этом случае, если $k<N$, то продолжаем построение функций цены с шага 1^k, полагая $k:=k+1$, иначе процесс синтеза завершается.

Шаг 3.

После завершения итерационных шагов переходим к нахождению оптимальной траектории, которая строится по позиционным конструкциям (6) и (7).

Для начальной позиции (t_0, x_0, y_0) определяем оптимальное количество переключений $N = \boldsymbol{K}(t_0, x_0, y_0)$, где

$$\boldsymbol{K}(t, x, y) = \arg\min_{k \in \mathbb{N}_+} \varphi_k(t, x, y),$$

а также определяем момент первого переключения:

$$t_1 = \boldsymbol{\tau}_N(t_0, x_0, y_0).$$

Далее возможны два случая:

1) Если момент переключения произошел позже начального состояния, т.е. $t_1 > t_0$, то на промежутке $[t_0, t_1)$ траектория автоматной части постоянна $y(t) = y_0$ и переход из одного состояния в другое $y_0 \to y_1 = \boldsymbol{z}_N(t_0, x(t_1), y_0, t_1)$ произойдет только в конце при $t = t_1$. При этом траектория $x(t)$ непрерывной части системы удовлетворяет уравнению (1) при постоянной функции $y(t) = y_0$.

2) Если момент переключения совпал с начальным состоянием, т.е. $t_1 = t_0$, то дискретная часть изменяет состояние $y_0 \to y_1 = \boldsymbol{z}_N(t_0, x_0, y_0, t_1)$ согласно (6). Состояние непрерывной части системы при этом не изменяется.

Таким образом, система приходит в новую позицию (t_1, x_1, y_1), в которой проводятся аналогичные действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $N - 1$. Отметим, что в случае, когда в начальной позиции (t_0, x_0, y_0) оптимальное количество переключений равно нулю, то переключений дискретной части нет и $y(t) = y_0$, $t \in T$.

Предлагаемый алгоритм можно использовать для решения задач с ограниченным числом N переключений. В этом случае на первом этапе используется дополнительное условие окончания. В остальном алгоритм синтеза остается без изменений.

Примеры численного решения

Рассмотрим несколько примеров численного решения задачи кусочно-линейной аппроксимации траектории переключаемой системы.

Требуется найти оптимальную позиционную конструкцию переключаемой системы и оптимальные аппроксимирующие траектории для следующих аппроксимируемых функций:

a) $X(\theta) = 1 - 4(\theta - 0.5)^2$;

b) $X(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$;

Рассмотрим решение, полученное для параболической функции *a)* (рис.1). Пространство позиций

$$\prod = \{t, x, y \mid 0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$$

разбивалось с шагом Δt по времени, по состоянию Δx и Δy по количеству допустимых звеньев аппроксимирующей траектории. Как показали расчеты, при $\Delta t = \Delta x = 0.05$ и $\Delta y = 1$, для траектории с оптимальными начальными условиями ошибка оказалась меньше 0.001. Затраты на переключения (λ) были равными 0.0001. Полученная аппроксимирующая траектория имеет 4 переключения (т.е. 5 звеньев), причем она симметрична. Первое переключение происходит в момент времени $t_1 = 0.25$, второе в момент $t_2 = 0.45$, третье и четвертое переключения при $t_3 = 0.55$ и $t_4 = 0.75$ соответственно. Из множества допустимых состояний, y принимает значения $\{-3;-1;0;1;3\}$. Состояния $\{-2;2\}$ отсутствуют. Данная траектория имеет следующие оптимальные начальные условия $x = 0.05$, $t = 0$, $y = 3$, при этом значение интеграла равно $I = \varphi_4(0.05, 0, 3) = 0.000723108$. Для выбранного λ максимальное число переключений составило 8.

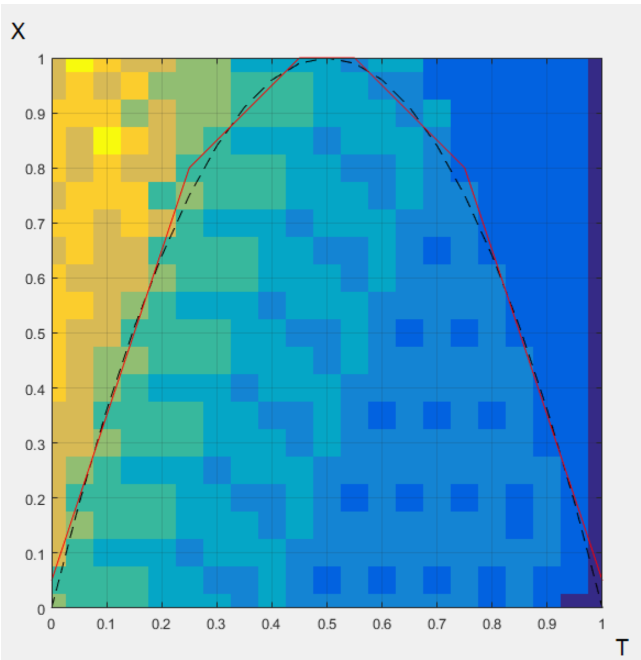

Рис.1 Решение примера *а)* при оптимальных начальных условиях.

Для наглядности рассмотрим результат той же задачи, но с произвольно заданными начальными условиями (рис.2). Пусть $t = 0.1$, $x = 0.85$, $y = 3$, этим условиям соответствует область с максимально допустимым числом переключений – 8. Здесь

$y \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ с $\Delta y = 1$ т.е. принимает все значения из множества Y. Значение интеграла при таких начальных условиях будет больше, чем при оптимальных и равно $I = \varphi_8(0.1, 0.85, 3) = 0.00759111$. Время работы алгоритма в первом случае составило 32.7 секунды, во втором 30.9 секунды.

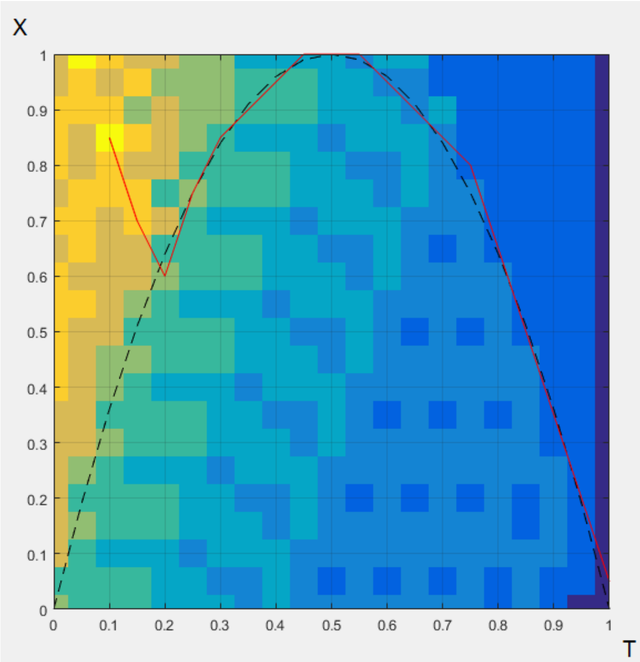

Рис.2 Решение примера *а)* при заданных начальных условиях.

В следующем примере в качестве аппроксимируемой функции взята косинусоида. На рис.3 представлен полученный результат для оптимальных начальных условий. Начальные параметры были взяты следующие: величина затрат $\lambda = 0.00001$. Множество допустимых позиций $y = \{0; 0.5; 1\}$ разбиение сетки по x и по t, были взяты равными 0.05. При данных параметрах количество переключений в системе составило – 8. Аппроксимирующая траектория имеет 6 переключений. Минимальное значение функционала $I = \varphi_6(0,0,1) = 0.0001404$. Время работы алгоритма составило 9.48 секунды.

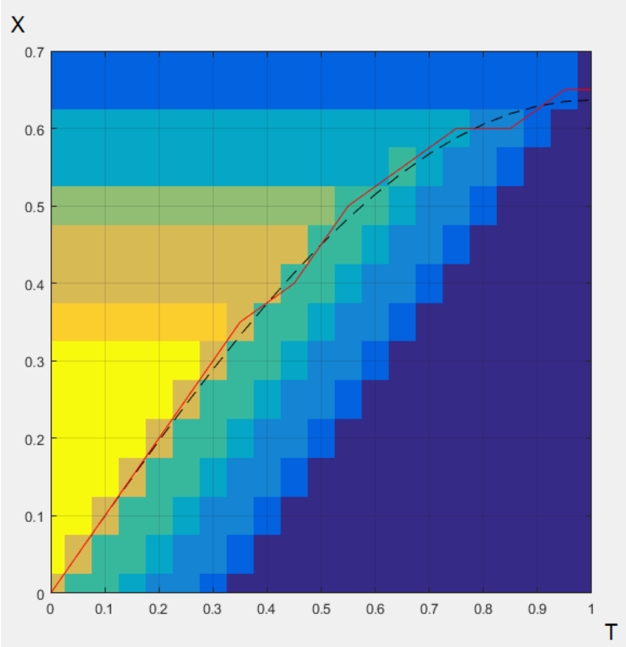

Рис. 3 Решение примера *b)* при оптимальных начальных условиях, с $\Delta y = 0.5$

Заключение

В данной статье рассмотрена задача синтеза оптимальной траектории переключаемой системы, аппроксимирующей непрерывную траекторию. Описана методика алгоритма синтеза одномерной оптимальной позиционной конструкции дискретной части переключаемой системы. В среде программирования MATLAB разработана программное обеспечение, реализующие алгоритм синтеза оптимальной траектории переключаемой системы для одномерного случая. Также получены численные решения академических примеров синтеза оптимальных траекторий переключаемой системы, выполняющих кусочно-линейную аппроксимацию непрерывных траекторий. Погрешность численного решения оказалась незначительной.

Библиографический список

1. Васильев С.Н., Маликов А.И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Сборник статей. – Казань: Фолиант, 2011. Т.1. – 452 с.
2. Котов К.Ю. Шпилевая О.Я. Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71 - 87.
3. Ji Z., Wang L., Guo X. Design of Switching Sequences for Controllability Realization of Switched Linear Systems // Automatica, 2007, vol. 43(4), pp. 662 - 668.
4. Liberzon D. Switching in systems and control, Boston, Birkhäuser, 2003, 233 p.
5. Lin H., Antsaklis P.J. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, vol. 54, no. 2, pp. 308 - 322.
6. Sun Z., Ge S. Analysis and Synthesis of Switched Linear Control Systems // Automatica, 2005, vol. 41(2), pp. 181 - 195.
7. Xu X., Antsaklis P.J. Optimal Control of Switched Systems Based on Parameterization of the Switching Instants // IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, vol. 49(1), pp. 2 - 16.
8. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudy.mai.ru/published.php?ID=73376
9. Гурман В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 70 - 75.

10. Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K. A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, no. 1, pp.31 - 45.

11. Brockett R.W. Hybrid Models for Motion Control Systems // Perspectives in the Theory and its Applications. Boston, Birkhäuser, 1993, no. 14, pp. 29 - 53.

12. Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y. Optimal Control of a Class of Hybrid Systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, vol. 46, no. 3, pp. 398 - 415.

13. Hedlund S., Rantzer A. Optimal Control of Hybrid Systems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, AZ, 1999, pp. 3972 - 3977.

14. Бортаковский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 5 - 26.

15. Бортаковский А.С. Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 41 - 55.

16. Бортаковский А.С. Синтез оптимальных переключающих систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 5. С. 48 - 72.

17. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 7. С. 57 - 66.

18. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: http://www.mai.ru/publications/index.php?ID=33013

19. Маликов А.И. Об устойчивости логико-динамических систем управления со структурными изменениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. № 2. С. 5 - 12.

20. Урюпин И. В. Приближенный синтез двумерных переключающих систем // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Москва, 8-12 июля 2016, МИАН. С. 211.

21. Урюпин И.В. Приближенный синтез переключающих систем // XLII международная конференция «Гагаринские Чтения». Тезисы докладов. Москва, 12-15 апреля 2016. Т.1. С. 474.