УДК 519.852

О сходимости скелетного алгоритма решения обобщенной задачи линейного программирования

А.В. Горяинов

Аннотация

Для решения обобщенной задачи линейного программирования ранее был предложен новый, скелетный алгоритм, однако вопросы сходимости алгоритма подробно не рассматривались. В работе приводится доказательство возможности получить сколь угодно точное решение обобщенной задачи линейного программирования с помощью скелетного алгоритма за конечное число шагов.

Ключевые слова:

коррекция движения; линейная идеальная импульсная коррекция; обобщенная задача линейного программирования; скелетный алгоритм; метод генерации столбцов; сходимость.

1. Введение.

В процессе полета искусственного спутника Земли (ИСЗ) часто имеет место отклонение некоторых параметров траектории от их номинальных значений. Если это нежелательно, то возникает задача коррекции траектории ИСЗ. В качестве первого приближения обычно решается задача линейной идеальной импульсной коррекции, подразумевающая мгновенное и безошибочное изменение скорости ИСЗ в заданные моменты времени. Минимизация расхода топлива при коррекции приводит к решению обобщенной задачи линейного программирования, в которой векторы условий не заданы, а выбираются из заданных множеств [1,2]. В условиях коротких интервалов радиовидимости ИСЗ на коррекцию отводится мало времени, поэтому возникает необходимость выбора эффективного метода решении указанной задачи.

Использование стандартного метода генерации столбцов часто приводит к серии почти вырожденных итераций, на каждой из которых целевая функция мало меняется. Кроме того, сходимость этого метода не доказана. В [3,4] был предложен скелетный алгоритм – альтернативный метод решения обобщенной задачи линейного программирования. В отличие от метода генерации столбцов, он может привести к почти вырожденным итерациям лишь при достижении допустимого решения, близкого к оптимальному. Новый метод позволяет гарантированно получить решение задачи коррекции и дать корректирующий импульс за достаточно короткое время радиовидимости ИСЗ. Однако подробно вопрос сходимости скелетного алгоритма ранее не рассматривался.

2. Скелетный алгоритм

Приведем сначала подробное описание скелетного алгоритма в соответствии с [3].

Необходимо найти оптимальное решение задачи

$$\min_{\overset{m}{x}_i,\overset{m}{a}_i}\left\{\sum_{i=1}^{n}\overset{m}{x}_i : \sum_{i=1}^{n}\overset{m}{x}_i\overset{m}{a}_i=\overset{m}{b},\ \overset{m}{x}_i\ge 0,\ \overset{m}{a}_i=\overset{m}{P_i}\gamma,\ \|\gamma\|=1\right\}.$$

Ш а г 1. Построение вспомогательных задач.

Находим начальный допустимый базис $\left\{\overset{m}{a}_1,\dots,\overset{m}{a}_m\right\}$ (нумерация условна) такой, что $\sum_{i=1}^{m} z_i\overset{m}{a}_i=\overset{m}{b}$, $z_i\ge 0$.

Полагаем

$$\overset{m}{c}_0:=\sum_{i=1}^{m}z_i,\quad \overset{m}{a}_0:=\overset{m}{b}$$

и строим эквивалентную расширенную задачу:

$$\min_{\overset{m}{x}_i,\overset{m}{a}_i}\left\{\overset{m}{c}_0\overset{m}{x}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{m}{c}_i\overset{m}{x}_i : \overset{m}{x}_0\overset{m}{a}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{m}{x}_i\overset{m}{a}_i=\overset{m}{b},\ \overset{m}{x}_i\ge 0,\ \overset{m}{a}_i=\overset{m}{P_i}\gamma,\ \|\gamma\|=1\right\}.$$

Конструируем серию вспомогательных задач размерности j, $j=m-1,\dots 1$. Задача размерности j имеет вид

$$\min_{\overset{j}{x}_i,\overset{j}{a}_i}\left\{\overset{j}{c}_0\overset{j}{x}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{j}{c}_i\overset{j}{x}_i : \overset{j}{x}_0\overset{j}{a}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{j}{x}_i\overset{j}{a}_i=\overset{j}{b},\overset{j}{x}_i\ge 0,\overset{j}{a}_i=\overset{j}{P}_i\gamma,\ \|\gamma\|=1\right\},$$

и строится по следующим формулам:

$$\overset{j}{P}_i := \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & I_j \\ 0 & \end{pmatrix} \left(I - \overset{j+1}{a}_0 \frac{\overset{j+1}{e'_1}}{\overset{j+1}{e'_1}\overset{j+1}{a}_0} \right) \overset{j+1}{P}_i,$$

$$\overset{j}{c}_i := 1 - \overset{j}{u}'_i \gamma, \quad \overset{j}{u}_i := \overset{j+1}{u}_i - \overset{j+1}{\pi}' \overset{j+1}{P}_i,$$

$$\overset{j}{a}_0 := \overset{j}{b} = \overset{j}{P}_{f(j)} \overset{j}{\gamma}^*, \quad \overset{j}{c}_0 := 1 - \overset{j}{u}'_{f(j)} \overset{j}{\gamma}^*, \quad \overset{j}{\pi} := \frac{\overset{j}{c}_0}{\left\|\overset{j}{a}_0\right\|^2} \overset{j}{a}_0.$$

Здесь $f(j)$ и $\overset{j}{\gamma}^*$ – любые такие, что хотя бы одна из компонент вектора $\overset{j}{a}_0$ существенно отлична от нуля.

Если для какого-либо j оказывается, что $\overset{j}{c}_i > 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$, то переходим к шагу 5.

В противном случае после построения одномерной задачи полагаем $J = m$ и переходим к шагу 2.

Ш а г 2. Решение одномерной задачи.

После выполнения первого шага получаем одномерную задачу

$$\min_{\overset{1}{x}_i, \overset{1}{a}_i} \left\{ \overset{1}{c}_0 \overset{1}{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{c}_i \overset{1}{x}_i : \overset{1}{x}_0 \overset{1}{a}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{x}_i \overset{1}{a}_i = \overset{1}{b}, \overset{1}{x}_i \ge 0, \overset{1}{a}_i = \overset{1}{P}_i \gamma, \| \gamma \| = 1 \right\}.$$

Она решается стандартным методом генерации столбцов. Вычисляются следующие величины:

$$\overset{1}{\pi} := \frac{\overset{1}{c}_0}{\overset{1}{a}_0},$$

$$\overset{0}{u}'_i := \overset{1}{u}'_i + \overset{1}{\pi} \overset{1}{P}_i, \quad i^* := \arg\max_i \left\| \overset{0}{u}_i \right\|,$$

$$\overset{1}{\Delta} := 1 - \left\| \overset{0}{u}_{i^*} \right\|.$$

Если $\overset{1}{\Delta} = 0$ (на практике проверяется условие $\overset{1}{\Delta} < -\varepsilon$ для малого положительного ε), то переходим к шагу 5.

В противном случае вычисляются

$$\gamma^* := \frac{\overset{0}{u}_{i^*}}{\left\| \overset{0}{u}_{i^*} \right\|}, \quad \overset{1}{a}{}^* := \overset{1}{P}_{i^*} \gamma^*, \quad \overset{1}{c}{}^* := 1 - \overset{1}{u}_{i^*} \gamma^*,$$

$$\overset{1}{\alpha} := \frac{\overset{1}{a}{}^*}{\overset{1}{a}_0},$$

Если $\overset{1}{\alpha} \le 0$, переходим к шагу 3.

Иначе полагаем

$$\overset{1}{a}_0 := \overset{1}{a}{}^*, \quad \overset{1}{c}_0 := \overset{1}{c}{}^*$$

и заново повторяем шаг 2.

Ш а г 3. Подъем.

Последовательно находим величины $\overset{k}{\alpha}, k = 2, 3, 4...$ из формул

$$\overset{k}{P}_{i^*} \gamma^* - \sum_{t=1}^{k-1} \overset{t}{\alpha} \operatorname{pt}^{k-t} \left[\overset{t}{a}_0 \right] = \overset{k}{\alpha} \overset{k}{a}_0.$$

Прообразы векторов в этих формулах считаются следующим образом. Если $k < J$, то

$$\operatorname{pt}^{k-t} \left[\overset{t}{a}_0 \right] := \overset{k}{P}_{f(t)} \overset{t}{\gamma}{}^*, t = 1, ..., k-1.$$

В противном случае

$$\operatorname{pt}^{k-t} \left[\overset{t}{a}_0 \right] := \overset{k}{P}_{f(t)} \overset{t}{\gamma}{}^*, t = 1, ..., k-1, t \ne J,$$

$$\operatorname{pt}^{k-J} \left[\overset{J}{a}_0 \right] := \overset{J}{\beta}_1 \overset{k}{P}_{J_1} \gamma_{J_1} + \overset{J}{\beta}_2 \overset{k}{P}_{J_2} \gamma_{J_2} + ... + \overset{J}{\beta}_s \overset{k}{P}_{J_s} \gamma_{J_s}.$$

Вычисления проводятся до тех пор, пока для некоторого j величина $\overset{j}{\alpha}$ не будет положительной (иначе говоря, значения $\overset{k}{\alpha}$ вычисляются в цикле, условием выхода из которого является $\overset{k}{\alpha} > 0$).

После этого переходим к шагу 4.

Ш а г 4. Спуск.

Записываем выражение для нового вспомогательного вектора $\overset{j}{a}_{0new}$:

$$\overset{j}{a}_{0new} = \frac{1}{\overset{j}{\alpha}}\left(\overset{j}{a}_p - \overset{1}{\alpha}\,\mathrm{pt}^{j-1}\left[\overset{1}{a}_0\right] - \ldots - \overset{j}{\alpha}\,\mathrm{pt}\left[\overset{j-1}{a}_0\right]\right).$$

Раскрываем в нем выражения для прообразов, приводим подобные слагаемые и получаем линейную комбинацию вида

$$\overset{j}{a}_{0new} = \overset{j}{\beta}_1 \overset{j}{P}_{j_1}\gamma_{j_1} + \overset{j}{\beta}_2 \overset{j}{P}_{j_2}\gamma_{j_2} + \ldots + \overset{j}{\beta}_s \overset{j}{P}_{j_s}\gamma_{j_s}.$$

Запоминаем и храним в памяти размерность текущей задачи $J := j$, номера $J_i := j_i$, коэффициенты $\overset{J}{\beta}_i := \overset{j}{\beta}_i$ и векторы $\gamma_{J_i} := \gamma_{j_i}$, $i = 1,\ldots,s$.

Пересчитываем $\overset{j}{c}_0$:

$$\overset{j}{c}_0 := \overset{j}{c}_{0new} = \overset{j}{\beta}_1\left(1 - \overset{j}{u}_{j_1}\gamma_{j_1}\right) + \overset{j}{\beta}_2\left(1 - \overset{j}{u}_{j_2}\gamma_{j_2}\right) + \ldots + \overset{j}{\beta}_s\left(1 - \overset{j}{u}_{j_s}\gamma_{j_s}\right).$$

После этого для $k = j-1, j-2,\ldots,1$ пересчитываем $\overset{k}{u}_i$, $\overset{k}{c}_0$ и $\overset{k}{\pi}$ по формулам

$$\overset{k}{u}_i := \overset{k+1}{u}_i - \overset{k+1}{\pi}{}' \overset{k+1}{P}_i,$$

$$\overset{k}{c}_0 := 1 - \overset{k}{u}{}'_{f(k)} \overset{k}{\gamma}{}^*,$$

$$\overset{k}{\pi} := \frac{\overset{k}{c}_0}{\left\|\overset{k}{a}_0\right\|^2}\overset{k}{a}_0$$

и переходим к шагу 2.

Ш а г 5. Окончание решения задачи.

Если ни одного подъема к m-мерной задаче совершено не было, положим

$$x_i^* := \begin{cases} z_i, \, i \in I_B, \\ 0, \, i \notin I_B, \end{cases} i = 1,...m;$$

$$a_i^* := \overset{m}{a}_i, \, i = 1,...m.$$

$\left\langle x^*, a_1^*, ..., a_m^* \right\rangle$ – оптимальное решение задачи.

В противном случае при последнем подъеме к m-мерной задаче вектор $\overset{m}{a}_{0new}$ был пересчитан как

$$\overset{m}{a}_{0new} = \overset{m}{\beta}_1 \overset{m}{P}_{m_1} \gamma_{m_1} + \overset{m}{\beta}_2 \overset{m}{P}_{m_2} \gamma_{m_2} + ... + \overset{m}{\beta}_s \overset{m}{P}_{m_s} \gamma_{m_s}.$$

Положим

$$\overset{*}{x}_{m_1} := \overset{m}{\beta}_1, \, \overset{*}{x}_{m_2} := \overset{m}{\beta}_2, ..., \overset{*}{x}_{m_s} := \overset{m}{\beta}_s,$$

$$x_k^* := 0, \, k = 1,...,n, \, k \neq m_1,...,m_s;$$

$$a_1^* := \overset{m}{P}_{m_1} \gamma_{m_1}, \, a_2^* := \overset{m}{P}_{m_2} \gamma_{m_2}, ..., a_s^* := \overset{m}{P}_{m_s} \gamma_{m_s}.$$

$\left\langle x^*, a_1^*, ..., a_s^* \right\rangle$ – оптимальное решение задачи.

3. О сходимости скелетного алгоритма

В случае решения обычной задачи линейного программирования интерес представляет величина, на которую улучшается значение целевой функции на каждой итерации алгоритма, и число итераций, за которое может быть получено оптимальное решение задачи. Вопрос о сходимости как таковой не ставится, так как оптимальное решение гарантированно будет найдено за конечное число шагов (в самом худшем случае – после поочередного включения в базис всех C_n^m возможных комбинаций векторов a_i). При применении скелетного алгоритма для решения обобщенной задачи вопрос о его сходимости приобретает большую важность, в особенности в свете того, что сходимость метода генерации столбцов вообще говоря не доказана.

Покажем, что скелетный алгоритм сходится, в том смысле, что приближенное решение задачи с наперед заданной точностью может быть получено за конечное число шагов.

Пусть на некоторой итерации алгоритма в базис задачи размерности j

$$\min_{\overset{j}{x}_i,\overset{j}{a}_i}\left\{\overset{j}{c}_0\overset{j}{x}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{j}{c}_i\overset{j}{x}_i : \overset{j}{x}_0\overset{j}{a}_0+\sum_{i=1}^{n}\overset{j}{x}_i\overset{j}{a}_i=\overset{j}{b},\overset{j}{x}_i\ge 0,\overset{j}{a}_i=\overset{j}{P}_i\gamma,\|\gamma\|=1\right\} \qquad (1)$$

вводятся векторы $\left\{\overset{j}{a}_p,\overset{j}{a}_i, i=1,\dots,j-1\right\}$ (нумерация условна), и величина $\overset{j-1}{D}$ определена как

$$\overset{j-1}{D}=\overset{j}{\Delta}_p-\sum_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}\overset{j}{\Delta}_k. \qquad (2)$$

Пусть также коэффициенты $\lambda_1,\dots,\lambda_j$ определены следующим образом:

$$\lambda_1=\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}},\quad \lambda_i=\frac{-\overset{i}{\alpha}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}, i=2,\dots,j, \qquad (3)$$

Оценим сначала разность между текущим и оптимальным значениями целевой функции задачи.

Пусть

$$D^{(\lambda)}=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\overset{j}{\Delta}_i \qquad (4)$$

(здесь нумерация величин $\overset{j}{\Delta}_i$ изменена для удобства записи).

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$D^*=\min_{\lambda_i}\left\{\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\overset{j}{\Delta}_i : \sum_{i=1}^{j}\lambda_i\overset{j-1}{a}_i=0,\sum_{i=1}^{j}\lambda_i=1,\lambda_i\ge 0,\overset{j-1}{a}_i=\overset{j-1}{P}_i\gamma,\|\gamma\|=1\right\}. \qquad (5)$$

Лемма 1.

Пусть $\left(\overset{j}{\tilde{x}}_1, \dots, \overset{j}{\tilde{x}}_n\right)$ – наилучшее среди допустимых базисных решений задачи (1) и M – такое число, что

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{j}{\tilde{x}}_i \le M. \qquad (6)$$

Пусть также $\Delta_i^{(D)}$ – относительные разности в задаче (5) и $\Delta_{\min}^{(D)} \text{В} \min\limits_i \Delta_i^{(D)}$.

Обозначим через L и $\tilde{L}$ значения целевой функции задачи (1) на текущем решении и решении $\left(\overset{j}{\tilde{x}}_1, \dots, \overset{j}{\tilde{x}}_n\right)$, соответственно.

Тогда

$$L - \tilde{L} \le M \left| \frac{\overset{j-1}{D}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}} + \Delta_{\min}^{(D)} \right|. \qquad (7)$$

Доказательство.

▷ Утверждение леммы непосредственно следует из результатов, полученных в работе **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, согласно которым справедливы соотношения:

$$\tilde{L} \ge L + MD^*$$

и

$$D^* \ge D^{(\lambda)} + \Delta_{\min}^{(D)}.$$

Отсюда, учитывая, что $D^* < 0$ и $D^{(\lambda)} < 0$, получаем, что справедливо неравенство

$$\tilde{L} \ge L - M \left| D^{(\lambda)} + \Delta_{\min}^{(D)} \right|.$$

Из (2), (3), (4) очевидно следует, что

$$D^{(\lambda)} = \frac{\overset{j-1}{D}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}}$$

Таким образом, окончательно оценка разности между L и $\tilde{L}$ примет вид

$$L-\tilde{L} \le M\left|\frac{\overset{j-1}{D}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}} + \Delta^{(D)}_{\min}\right|,$$

что и требовалось доказать. ◁

Оценим теперь улучшение значения целевой функции, происходящее при введении в базис векторов $\left\{\overset{j}{a}_p, \overset{j}{a}_i,\ i=1,\dots,j-1\right\}$. Согласно [3] оно равно $\dfrac{\left|\overset{j-1}{D}\right|}{\overset{j}{\alpha}}$. Интерес представляет верхняя оценка величины $\overset{j}{\alpha}$, так как при больших $\overset{j}{\alpha}$ улучшение будет малым.

$\overset{j}{\alpha}$ находится из выражения

$$\overset{j}{a}_p - \sum_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}\overset{j}{a}_k = \overset{j}{\alpha}\overset{j}{a}_0. \tag{8}$$

Учитывая введенные выше обозначения (3) и изменив нумерацию векторов, можно переписать (8) в виде

$$\sum_{k=1}^{j}\lambda_k \overset{j}{a}_k = \alpha^{(\lambda)}\overset{j}{a}_0. \tag{9}$$

Пусть $\overset{j}{\alpha}_{\max}$ и $\alpha^{(\lambda)}_{\max}$ – максимально возможные значения $\overset{j}{\alpha}$ и $\alpha^{(\lambda)}$ соответственно. Очевидно, что $\alpha^{(\lambda)}_{\max}$ есть решение обобщенной задачи линейного программирования

$$\max_{\overset{j}{\alpha},\lambda_i,\overset{j}{a}_i}\left\{\alpha^{(\lambda)} : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overset{j}{a}_i - \overset{j}{\alpha}\overset{j}{a}_0 = 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, \overset{j}{a}_i = \overset{j}{P}_i\gamma, \|\gamma\| = 1\right\},$$

которую можно привести к более привычному для нас виду задачи минимизации:

$$-\min_{\overset{j}{\alpha},\lambda_i,\overset{j}{a}_i}\left\{-\alpha^{(\lambda)} : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overset{j}{a}_i - \overset{j}{\alpha}\overset{j}{a}_0 = 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, \overset{j}{a}_i = \overset{j}{P}_i\gamma, \|\gamma\| = 1\right\}. \tag{10}$$

Обозначим относительные разности в задаче (10) через $\Delta_i^{(\alpha)}$ и примем $\Delta^{(\alpha)}_{\min}\text{В}\min\limits_i \Delta_i^{(\alpha)}$. Согласно теории линейного программирования верно

$$-\alpha_{\max}^{(\lambda)} = -\alpha^{(\lambda)} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Delta_i^{(\alpha)} - \alpha_{\max}^{(\lambda)} \Delta_0^{(\alpha)},$$

откуда, если учесть, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и $\Delta_0^{(\alpha)} = 0$, следует, что

$$-\alpha_{\max}^{(\lambda)} \geq -\alpha^{(\lambda)} + \Delta_{\min}^{(\alpha)}$$

или, иначе,

$$\alpha_{\max}^{(\lambda)} \leq \alpha^{(\lambda)} - \Delta_{\min}^{(\alpha)}. \qquad (11)$$

Из (2), (8), (9) следует, что

$$\alpha^{(\lambda)} = \frac{\overset{j}{\alpha}}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}}, \quad \alpha_{\max}^{(\lambda)} = \frac{\overset{j}{\alpha}_{\max}}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}}.$$

Подставив эти выражения в (11), получаем

$$\frac{\overset{j}{\alpha}_{\max}}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}} \leq \frac{\overset{j}{\alpha}}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}} - \Delta_{\min}^{(\alpha)}.$$

или, иначе,

$$\overset{j}{\alpha}_{\max} \leq \overset{j}{\alpha} - \Delta_{\min}^{(\alpha)} \left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}\right). \qquad (12)$$

Таким образом, справедлива следующая лемма:

Лемма 2.

Значение $\overset{j}{\alpha}$ на последующих итерациях не может быть больше, чем

$$\overset{j}{\alpha} - \Delta_{\min}^{(\alpha)} \left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} \overset{k}{\alpha}\right),$$

где $\Delta_{\min}^{(\alpha)}$ – минимальная относительная разность в задаче (10).

Эти две леммы позволяют доказать, что наилучшее допустимое базисное решение может быть найдено за конечное число итераций.

Теорема 1.

Для задачи (1) решение, обеспечивающее значение целевой функции, отличное от обеспечиваемого наилучшим допустимым базисным решением $\left(\overset{j}{\tilde{x}}_1, \ldots, \overset{j}{\tilde{x}}_n\right)$ не более чем на ε может быть получено не более чем за

$$\frac{M\left|\dfrac{\overset{j-1}{D}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}+\Delta_{\min}^{(D)}\right|\left(\dfrac{\overset{j}{\alpha}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}-\Delta_{\min}^{(\alpha)}\right)}{\dfrac{\varepsilon}{M}+\Delta_{\min}^{(D)}}$$

итераций (под итерацией понимается последовательность спусков и подъемов, приводящих к очередному улучшению значению целевой функции в (1)).

Доказательство.

$\triangleright$ Согласно лемме 1 если мы хотим получить приближенное решение с точностью ε, то нужно прекратить вычисления, как только величина $\overset{j-1}{D}$ станет такой, что

$$M\left|\frac{\overset{j-1}{D}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}+\Delta_{\min}^{(D)}\right|\le\varepsilon,$$

т.е.

$$\left|\overset{j-1}{D}\right|\le\left(\frac{\varepsilon}{M}+\Delta_{\min}^{(D)}\right)\left(1-\sum_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}\right).$$

Таким образом, в силу леммы 2 улучшение целевой функции на каждой итерации не может быть меньше чем

$$\frac{\left(\dfrac{\varepsilon}{M}+\Delta_{\min}^{(D)}\right)\left(1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}\right)}{\overset{j}{\alpha}-\Delta_{\min}^{(\alpha)}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}\right)}=\frac{\dfrac{\varepsilon}{M}+\Delta_{\min}^{(D)}}{\dfrac{\overset{j}{\alpha}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}-\Delta_{\min}^{(\alpha)}},$$

а в силу леммы 2 разность между L и $\tilde{L}$ не превышает

$$M\left|\frac{\overset{j-1}{D}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}+\Delta_{\min}^{(D)}\right|.$$

Отсюда получаем, что решение с требуемой точностью будет получено не более чем за

$$\frac{M\left|\frac{\overset{j-1}{D}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}+\Delta_{\min}^{(D)}\right|\left(\frac{\overset{j}{\alpha}}{1-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\overset{k}{\alpha}}-\Delta_{\min}^{(\alpha)}\right)}{\frac{\varepsilon}{M}+\Delta_{\min}^{(D)}}$$

итераций. ◁

При решении вспомогательных задач вида (1) нужно либо найти оптимальное решение задачи, либо установить факт ее неразрешимости. Установить его можно, когда найдено допустимое базисное решение, обеспечивающее наилучшее по сравнению со всеми остальными допустимыми базисными решениями значение целевой функции, и оказывается, что оно не является оптимальным. Таким образом, процедура решения каждой вспомогательной задачи сводится к нахождению наилучшего допустимого базисного решения. Если задача разрешима, то оно является оптимальным решением задачи, если же она неразрешима, то найдя его мы установим факт неразрешимости. Теорема 1 показывает, что при использовании скелетного алгоритма это решение будет найдено с любой наперед заданной точностью ε за конечное число шагов, доказывая таким образом сходимость скелетного алгоритма.

В случае, когда вспомогательные задачи размерности $1,\ldots,k$ неразрешимы, $\overset{k-1}{D}=\overset{k-2}{D}=\ldots=\overset{1}{D}$. Это означает, что если при некотором подъеме мы дошли до m-мерной задачи и улучшили значение целевой функции в ней, и при этом $\overset{1}{D}$ мало, то мало также и $\overset{m-1}{D}$ и мы получили почти оптимальное решение исходной задачи.

Предположение о том, что существует M, удовлетворяющее (6), справедливо, поскольку целевая функция ограничена на множестве допустимых базисных решений. Однако оценить эту величину в общем случае не получается. Поэтому теорема 1, вообще говоря, лишь утверждает факт сходимости алгоритма за конечное число шагов, не позволяя оценить это число.

На практике, однако, часто встречаются задачи, в которых все коэффициенты целевой функции равны единице (к задачам такого вида сводятся, например, задача линейной идеальной коррекции траектории и задача L-оптимального планирования эксперимента). В этом случае в качестве оценки M логично использовать текущее значение целевой функции L.

Библиографический список

1. *Лидов М.Л.* Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решения. // Космические исследования. 1971. Т.9. № 5. С. 687-706.

2. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.

3. *Бахшиян Б.Ц., Горяинов А.В.* Решение задачи L-оптимального планирования эксперимента при помощи скелетного алгоритма. // Автоматика и телемеханика. 2010. №4. с. 3-15.

4. *Бахшиян Б.Ц., Горяинов А.В.* Скелетный алгоритм решения задач линейного программирования и его применение для решения оптимальных задач оценивания. // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т. 5. №2. с. 5-16.

Сведения об авторе

Горяинов Александр Владимирович, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).

Тел. (495) 945-75-79, e-mail agoryainov@gmail.com