

**Математическая модель расчета напряжений и давления на тело летчика
в противоперегрузочном костюме (ППК) или высотнoкомпенсирующем костюме (ВКК)
с накладными камерами**

Р.Г. Тазетдинов, А.А. Аверьянов, В.А. Зотов

Составлена математическая модель и получены решения систем уравнений равновесия, позволяющие рассчитать напряжения (погонные силы) в материале и давления на тело летчика в ППК и ВКК с накладными камерами в рабочем состоянии.

В рабочем, т.е. надутом воздухом, состоянии накладная, или плоская, герметичная камера ППК или ВКК имеет довольно сложную форму [1], поэтому рассчитывать возникающие в материале силовой оболочки напряжения, а также оказываемое костюмом компенсирующее давление на тело летчика прямыми аналитическими методами невозможно. Существующие численные методики также чрезвычайно сложны и неудобны для решения этой задачи, так как они в основном рассчитаны на оболочки с заданными границами [2,3]. В данном же случае границы камеры не определены. Дело в том, что периметр поперечного сечения костюма всегда несколько больше периметра сечения тела, поэтому после наддува воздухом вследствие натяжения материала силовой оболочки костюма края камеры и чехла, в который она вложена, приподнимаются. В итоге поперечное сечение камеры (и чехла) принимает форму, подобную приведенной на рис. 1.

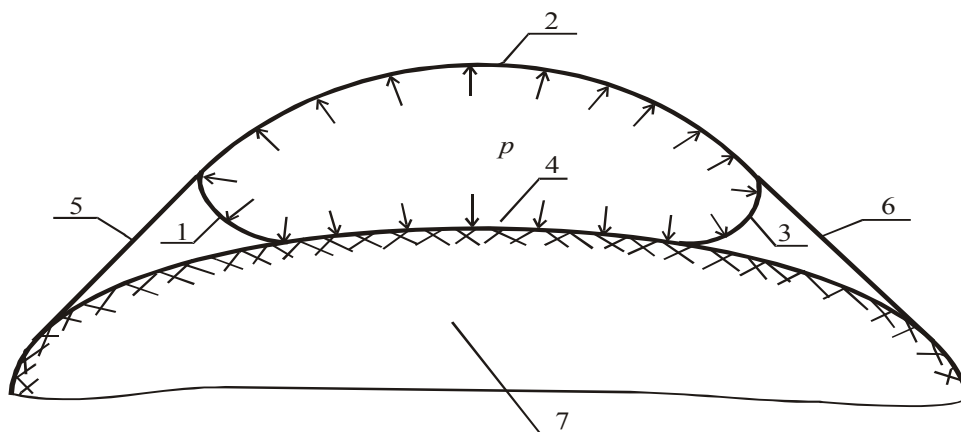


Рис.1 Вид поперечного сечения ППК или ВКК с герметичной камерой накладного (плоского) типа на теле человека в рабочем состоянии

Рис.1. Вид поперечного сечения ППК или ВКК с герметичной камерой накладного (плоского) типа на теле человека в рабочем состоянии

Сложность задачи заключается в том, что для определения формы камеры необходимо знать распределение напряжений в чехле, в который она вложена (сама камера, сделанная из эластичного материала, имеет несколько большие размеры, чем чехол, поэтому ее можно считать ненагруженной). Для расчета же напряжений надо, в свою очередь, знать геометрические параметры камеры с чехлом, следовательно, задача расчета формы и усилий является единой.

Для упрощения анализа данное поперечное сечение можно разделить на 4 однородные сектора: левый (если смотреть на человека спереди) боковой 1, верхний 2, правый боковой 3, нижний 4, опертый о тело человека 7. Сектора 1-3 являются свободными и отделяются друг от друга бескамерными частями костюма 5, 6, или перемычками. Такая форма надутой камеры с чехлом логически следует из условия их замкнутости и наличия связей в виде перемычек и опоры.

Соответственно и всю камеру с чехлом можно разделить на 4 участка, образованные соответствующими секторами: левый боковой, верхний, правый боковой, нижний. Поскольку все участки нагружены однородной нагрузкой, т.е. газовым давлением p , то их поверхности являются гладкими и достаточно плавно изменяются во всех направлениях. Поэтому для практических расчетов сектора, образующие каждый участок, можно аппроксимировать дугами окружности общем случае с переменным радиусом. Это относится и к нижнему участку, контактирующему с телом, так как линию контакта тела с чехлом также в первом приближении можно аппроксимировать дугой окружности. Центры окружностей для каждого участка будут располагаться на некоторой линии, или оси, в общем случае пространственной. Это позволяет приближенно рассматривать каждый участок надутой камеры с чехлом как сегмент оболочки вращения, причем ось вращения в общем случае искривлена.

Принятое допущение является основным для составления математической модели расчета формы камеры и усилий в чехле. Оно позволяет избежать сложной и громоздкой методики расчета, связанной с решением пространственной вариационной или иной задачи. Соответствие данной модели реальной картине было нами проверено экспериментально на манекенах и теле человека, и была получена удовлетворительная сходимость с погрешностью не более 5-7%.

Вторым допущением, которое мы примем для упрощения расчетов, является пренебрежение модулем сдвига материала силовой оболочки, т. е. тангенциальными напряжениями, что является обычным при расчете мягких оболочек [3].

В настоящей работе рассмотрим только первую часть общей задачи – определение зависимости напряжений в чехле и давления на тело от геометрических параметров так, как если бы последние были уже известны. Очевидно, что при принятых допущениях, учитывая также, что напряжения изгиба в ткани близки нулю, в оболочке каждого участка действуют только растягивающие напряжения, или мембранные силы, а сама задача их расчета является статически

определимой. Для ее решения можно использовать систему уравнений равновесия, приведенной в [4]. Проанализируем возможность ее аналитического решения для различных участков чехла, при этом сохраним данные в [4] обозначения величин: θ – поперечный угол по дуге окружности; φ – угол между нормалью к поверхности оболочки и касательной к оси вращения; Φ – угол между вертикальной осью (осью человека) и нормалью к поверхности оболочки (меридианный угол); N_θ , N_φ – соответственно погонные силы (линейные напряжения), т. е. силы на единицу длины в направлении, перпендикулярном этой силе, действующие по направлениям θ и φ ; r_1 , r_2 – главные радиусы кривизны оболочки в меридианной плоскости и плоскости, перпендикулярной к ней; r_0 – радиус образующей окружности; R – радиус кривизны оси вращения.

1 Верхний участок

Для данного участка в первом приближении можно принять, что ось вращения прямолинейная. Тогда с учетом второго допущения система уравнений равновесия примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos \varphi &= 0; \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} &= p. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из первого уравнения системы (9) следует

$$N_\theta = N_\theta(\varphi),$$

т.е., N_θ не зависит от θ . Используя третье уравнение системы (9), представим ее второе уравнение в виде

$$\frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\varphi r_2 \cos \varphi = p r_1 r_2 \cos \varphi. \quad (2)$$

Общее решение данного уравнения без правой части (однородного) имеет вид

$$(N_\varphi r_0)_0 = \frac{c}{\sin \varphi},$$

где c – постоянная интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения получаем методом вариации постоянной c .

$$(N_\varphi r_0)_{но} = \frac{p \int r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Общее решение неоднородного уравнения находим как

$$N_\varphi r_0 = \frac{p \int r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi + c^*}{\sin \varphi},$$

где c^* - произвольная постоянная, зависящая в общем случае от θ .

Для определения c^* учтем, что при начальном угле оболочки $\varphi = \varphi_0$, $r_0 = 0$, а N_φ конечна.

Тогда

$$0 = \frac{p \left(\int r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi \right)_{\varphi_0}}{\sin \varphi} + \frac{c^*}{\sin \varphi},$$

или

$$c^* = -p \left(\int r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi \right)_{\varphi_0}.$$

Подставляя последнюю формулу в (11), получаем окончательно

$$N_\varphi = \frac{p}{r_0 \sin \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi. \quad (3)$$

С учетом (3) из третьего уравнения системы (1) находим

$$N_\theta = pr_2 \left(1 - \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi} r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi}{r_1 r_2 \sin^2 \varphi} \right). \quad (4)$$

Есл

вычислить

мембранн

В ч

одятся к

а для бес

$\frac{\pi}{2} = const$)

получаем

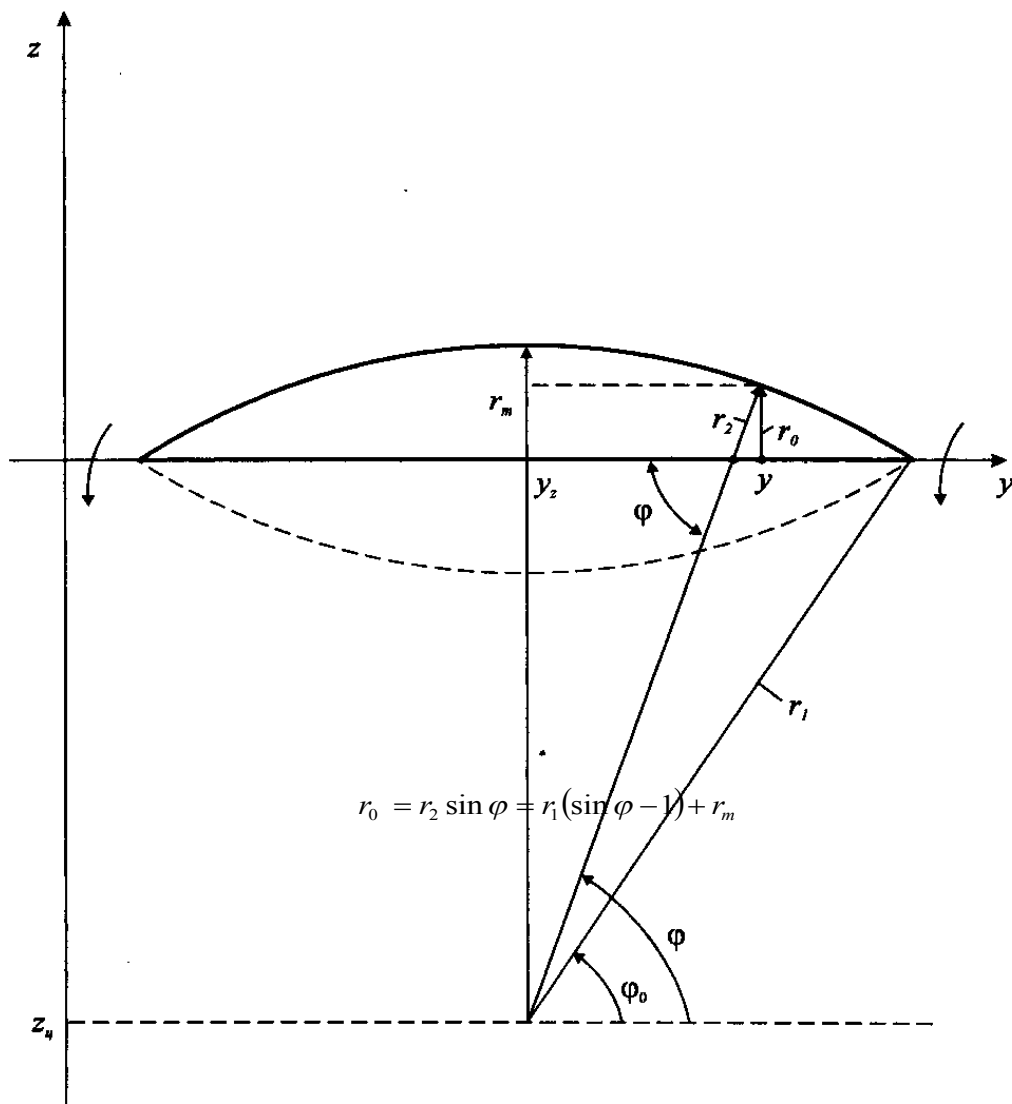
В

r_1 вокруг

прямолин

(5)

где r_m -



$$r_0 = r_2 \sin \varphi = r_1 (\sin \varphi - 1) + r_m$$

Рис. 2. Схема к определению геометрических параметров оболочки при $r_1 = const$

Кроме того,

$$r_m = r_1(1 - \sin \varphi_0) . \quad (6)$$

С учетом (15) получим

$$r_0 = r_2 \sin \varphi = r_1(\sin \varphi - \sin \varphi_0) . \quad (7)$$

Используя (16), находим из (12), (13)

$$N_\varphi = \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right) , \quad (8)$$

$$N_\theta = \frac{pr_2}{2} \left(1 + \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right) = \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) . \quad (9)$$

Если же начальный угол φ_0 трудно определить, а наоборот, легче измерить максимальное значение радиуса окружности r_m , то с учетом формулы (15) N_φ и N_θ проще находить из выражений

$$N_\varphi = \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{r_m}{r_1 \sin \varphi} \right), \quad (10)$$

$$N_\theta = \frac{pr_2}{2} \left(1 + \frac{r_m}{r_1 \sin \varphi} \right) = \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{r_m}{r_1}\right)^2}{\sin^2 \varphi} \right). \quad (11)$$

Если определение углов φ и φ_0 затруднительно, то удобнее пользоваться определением N_φ и N_θ в декартовых координатах. Из рис. 2 можно также получить

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \pm \frac{\sqrt{r_1^2 - (y - y_u)^2}}{r_1}; \\ \sin \varphi_0 &= -\frac{z_u}{r_1}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где y_u, z_u - координаты центра окружности дуги, вращением которой образована оболочка (знак «+» относится к случаю, когда $z > z_u$, «-» - когда $z < z_u$). Подставляя (12) в формулы (8), (9), получаем

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{pr_1}{2} \left(1 \pm \frac{z_u}{\sqrt{r_1^2 - (y - y_u)^2}} \right); \\ N_\theta &= \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{z_u^2}{r_1^2 - (y - y_u)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В первой из формул (22) знак «+» надо брать при $z_u < 0$, а при $z_u > 0$ в случае $z > z_u$, знак «-» берется при $z_u > 0$ в случае $z < z_u$. Максимальные значения N_φ и N_θ достигаются при $y = y_z$ и равны

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi_{max}} &= \frac{pr_1}{2} \left(1 \pm \frac{z_u}{z_l} \right); \\ N_{\theta_{max}} &= \frac{pr_1}{2} \left(1 - \frac{z_u^2}{z_l^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

2 Боковые участки

Все боковые участки чехлов надутых камер можно рассматривать как сегменты оболочек вращения с изогнутой в одной плоскости осью вращения, имеющей в общем случае переменный радиус. В этом случае система уравнений равновесия принимает вид

$$\left. \begin{aligned} (N_\varphi - N_\theta) \frac{r_0 \sin \theta}{R + r_0 \cos \theta} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos \tilde{\varphi} &= 0; \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} &= p. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Данная система в общем случае может быть решена лишь численно. Однако в некоторых практически важных случаях можно найти и ее аналитическое решение.

Рассмотрим изогнутый круговой цилиндр ($r_0 = const$). В данном случае главный радиус кривизны в меридианном направлении r_1 можно вычислить по формуле:

$$r_1 = \frac{R}{\cos \theta} + r_0, \quad (15)$$

Кроме того, радиус кривизны оси вращения здесь всегда направлен по нормали к меридиану, поэтому $\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{2}$. Тогда из второго уравнения системы (21) следует лишь что $N_\varphi = const$. С учетом изложенного, из первого и третьего уравнений системы (23) получаем уравнение

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \left(2 + \frac{R}{r_0 \cos \theta} \right) \frac{r_0 \sin \theta}{R + r_0 \cos \theta} = -p r_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (16)$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$N_\theta = \frac{c}{r_0 \cos \theta (R + r_0 \cos \theta)},$$

где c – постоянная интегрирования. Методом вариации постоянной c находим общее решение неоднородного уравнения.

$$N_\theta = \frac{p \frac{(R + r_0 \cos \theta)^2}{2} + c_1}{\cos \theta (R + r_0 \cos \theta)},$$

где c_1 - новая произвольная постоянная. Ее найдем из условия, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, а из третьего уравнения (23) $N_\theta = pr_0$, так как $r_1 \rightarrow \infty$. Тогда

$$c_1 = -\frac{pR^2}{2}.$$

С учетом этого выражения получаем решение уравнения (16) в окончательном виде

$$N_\theta = \frac{pr_0}{2} \left(\frac{2R + r_0 \cos \theta}{R + r_0 \cos \theta} \right). \quad (17)$$

Выражение для N_φ можно получить с помощью (16) из третьего уравнения системы (14).

$$N_\varphi = pr_1 - N_\theta \frac{r_2}{r_1} = pr_1 \left(1 - \frac{r_0}{2r_2} \frac{2R + r_0 \cos \theta}{R + r_0 \cos \theta} \right).$$

Отсюда, с учетом $r_0 = r_2$ и (15), находим

$$N_\varphi = \frac{pr_0}{2}. \quad (18)$$

Нижний участок

В данном случае на материал действует не только газовое давление, но и силы нормальной реакции со стороны поверхности тела, а также силы трения чехла об эту поверхность. В первом приближении эти участки также представим как сегменты оболочки вращения с прямолинейными осями. Тогда система уравнений равновесия запишется в виде.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \tau r_0 &= 0; \\ \frac{\partial (N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos \varphi - \tau r_1 r_0 &= 0; \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} &= -p + p_n, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где p_n - давление нормальной реакции; τ - напряжение трения. Его можно принять равным напряжению трения скольжения, так как равновесие устанавливается после некоторого скольжения материала по поверхности тела:

$$\tau = \mu p_n, \quad (20)$$

где μ - коэффициент трения скольжения, который мы примем постоянным.

В системе (19) неизвестными являются N_θ, N_φ, p_n . Подставляя (20) в (19) и интегрируя первое ее уравнение, получаем

$$N_{\theta} = \mu \int_{\theta_2}^{\theta} p_n d\theta + N_{\theta_2}, \quad (21)$$

где N_{θ_2} - значение N_{θ} на границе с одним из боковых секторов, т.е. при $\theta = \theta_2$. Оно определяется из уравнения равновесия на границе с одним из боковых секторов:

$$N_{\theta_2} = N_{\theta_2}^{(\beta)} \cos \beta, \quad (22)$$

где $N_{\theta_2}^{(\beta)}$ - граничное значение поперечной погонной силы в любом из двух боковых секторов.

Из первого и третьего уравнений системы (19) можно получить уравнение

$$\frac{\partial(N_{\varphi} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\varphi} r_2 \cos \varphi = (p_n - p + \mu p_n \operatorname{tg} \varphi) r_1 r_2 \cos \varphi.$$

Решение данного уравнения можно записать аналогично решению уравнения (2):

$$N_{\varphi} = \frac{1}{r_0 \sin \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (p_n - p + \mu p_n \operatorname{tg} \varphi) r_1 r_2 \cos \varphi d\varphi. \quad (23)$$

Подставляя (21) и (23) в третье уравнение системы (19), получаем уравнение для определения p_n :

$$\frac{1}{r_1 r_2 \sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (p_n - p + \mu p_n \operatorname{tg} \varphi) r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi + \frac{\mu}{r_2} \int_{\theta_2}^{\theta} p_n r_0 d\theta + \frac{N_{\theta_2}}{r_2} = p_n - p. \quad (24)$$

При заданных величинах $\mu, p, r_1(\theta, \varphi), r_0(\varphi), N_{\theta_2}(\varphi)$ данное интегральное уравнение можно решить численным методом. Если в первом приближении пренебречь трением ($\mu \approx 0$), то

$$N_{\theta} = N_{\theta_2}, \quad (21')$$

а уравнение (24) принимает вид

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} (p_n - p) r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi + r_1 \sin^2 \varphi N_{\theta_2} - (p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Дифференцируя по φ , можно данное уравнение превратить в дифференциальное:

$$(p_n - p) r_1 r_0 \cos \varphi d\varphi - ((p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi)'_{\varphi} = -(r_1 \sin^2 \varphi N_{\theta_2})'_{\varphi}. \quad (25)$$

Решая однородное уравнение

$$\frac{d((p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi)}{d\varphi} = \frac{(p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

получаем его общее решение в виде

$$(p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi = c \sin \varphi,$$

где c - постоянная интегрирования. Общее решение неоднородного уравнения (25) находим методом вариации постоянной c :

$$(p_n - p) r_1 r_2 \sin^2 \varphi = r_1 N_{\theta_2} \sin \varphi + \int r_1 N_{\theta_2} \cos \varphi d\varphi + c^*, \quad (26)$$

где c^* - новая произвольная постоянная. Ее можно найти, используя третье уравнение системы (19). Положим $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 - граничное значение φ в сечении θ . Тогда

$$(p_n - p)r_1 r_2|_{\varphi_2} = N_{\varphi_2} r_2(\varphi_2) + N_{\theta_2}(\varphi_2) r_1(\varphi_2).$$

Полагая в уравнении (26) также $\varphi = \varphi_2$ и приравнивая друг к другу правые части двух последних уравнений, находим

$$c^* = N_{\varphi_2} r_2(\varphi_2) \sin \varphi_2 - \left(\int r_1 N_{\theta_2} \cos \varphi d\varphi \right)_{\varphi_2}.$$

С учетом этого выражения в (26), получаем в окончательном виде

$$p_n = p + \frac{N_{\theta_2}(\varphi)}{r_2} + \frac{N_{\varphi_2}(\theta) r_2(\varphi_2) \sin \varphi_2}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_1 r_0} \int_{\varphi_2}^{\varphi} r_1 N_{\theta_2} \cos \varphi d\varphi. \quad (27)$$

Подставляя полученное решение в (23) при $\mu = 0$, находим выражение для N_φ :

$$N_\varphi = \frac{I}{r_0 \sin \varphi} \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} N_{\theta_2}(\varphi) r_1 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + N_{\varphi_2}(\theta) r_2(\varphi_2) \sin \varphi r_1 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi \int_{\varphi_2}^{\varphi} r_1 N_{\theta_2} \cos \varphi d\varphi \right). \quad (28)$$

Если r_1 не зависит от φ , а $N_{\theta_2} = const$, то формулы (27), (28) принимают вид

$$p_n = p + \frac{2N_{\theta_2}}{r_2} + \frac{N_{\varphi_2}(\theta) r_2(\varphi_2) \sin \varphi_2}{r_1 r_0} - \frac{N_{\theta_2} \sin \varphi_2}{r_0}, \quad (29)$$

$$N_\varphi = \frac{I}{r_0 \sin \varphi} \left(N_{\theta_2} r_1 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0) + N_{\varphi_2}(\theta) r_2(\varphi_2) \sin \varphi r_1 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) - \frac{N_{\theta_2} r_1}{2} \sin \varphi_2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right). \quad (30)$$

Необходимо, однако, подчеркнуть, что в формулах (28), (30) φ_0 в общем случае зависит от θ .

В случае кругового цилиндра, т.е. когда $r_1 \rightarrow \infty$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) формулы (29), (30) сводятся к

$$p_n = p + \frac{N_{\theta_2}}{r_0}, \quad (29')$$

$$N_\varphi = N_{\varphi_2}(\theta). \quad (30')$$

Если определение φ_0 путем экстраполяции затруднительно, то, как и п. 1 можно в формуле (30) применить замену:

$$\sin \varphi_0 = 1 - \frac{r_m}{r_1}$$

и вычислять N_φ по формуле

$$N_{\varphi} = \frac{\sin \varphi - \left(1 - \frac{r_m}{r_1}\right)}{r_0 \sin \varphi} \left(N_{\theta_2} r_1 \left(\sin \varphi + 1 - \frac{r_m}{r_1} \right) + N_{\varphi_2} (\theta) r_2 (\varphi_2) \sin \varphi_2 - \frac{N_{\theta_2} r_1}{2} \sin \varphi_2 \right). \quad (31)$$

Вместо углов φ и φ_0 в (29)...(31) можно воспользоваться также декартовыми координатами, применяя формулы (12).

Список литературы

1. Акопов М.Г., Дудник М.Н. Расчет и проектирование авиационных систем индивидуального жизнеобеспечения. – М.: Машиностроение, 1983. – 231с.
2. Ермолов В.В., Бэрд У.У., Бубнер Э. и др. Пневматические строительные конструкции.– М.: Стройиздат, 1983. – 439с.
3. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек // Известия АН СССР. Сер. МТТ.-1971, №6.- с. 89-94
4. Тазетдинов Р.Г. Равновесие элемента тонкостенной оболочки вращения с криволинейной осью // Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 16. – <http://www.mai.ru>

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Тазетдинов Рустем Галятдинович, профессор кафедры технологии материалов Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.

Аверьянов Андрей Анатольевич, соискатель кафедры технологии материалов Московского авиационного института (государственного технического университета)

Зотов Владимир Анатольевич, соискатель кафедры технологии материалов Московского авиационного института (государственного технического университета)