

На правах рукописи

Егор

Егорчев Михаил Вячеславович

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ НЕЙРОСЕТЕВОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре «Вычислительная математика и программирование» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ, Московский авиационный институт)

Научный руководитель: доктор технических наук, доцент
Тюменцев Юрий Владимирович

Официальные оппоненты: **Кузнецов Гений Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник НОЦ И. Н. Бутакова
Инженерной школы энергетики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Васильев Александр Николаевич,
доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры «Высшая математика» ФГАОУ
ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Ведущая организация: ФГУ «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»

Защита состоится 28 июня 2019 года в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 на базе Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=98297.

Автореферат разослан «___» мая 2019 года.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Отдел Учёного и диссертационных советов

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.125.04, кандидат
физико-математических наук

Расказова
Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математическое и компьютерное моделирование управляемых динамических систем (ДС) является неотъемлемым элементом процессов создания и эксплуатации объектов новой техники, в частности, летательных аппаратов (ЛА) различных классов. Одним из важных классов ДС являются детерминированные ДС с сосредоточенными параметрами. В рамках традиционного теоретического подхода к моделированию, такие системы описываются при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Методы формирования, анализа и применения подобных моделей к настоящему времени достаточно детально разработаны и с успехом используются для решения широкого круга задач.

Однако, по мере роста сложности создаваемых технических систем растут и требования к их моделям. В настоящее время возможности средств математического и компьютерного моделирования отстают от потребностей таких областей как авиация и ракетно-космическая техника, робототехника, управление сложными производственными процессами и т. п. Характерным для технических систем из этих областей является высокий уровень сложности моделируемых объектов и процессов, их многомерность, нелинейность и нестационарность, многообразие и сложность функций, реализуемых моделируемым объектом. Решение проблем моделирования таких систем обычно осложняется неполным и неточным знанием характеристик и свойств моделируемого объекта, а также условий, в которых он будет действовать. Кроме того, моделируемый объект может претерпевать изменения в его свойствах, в том числе резкие и существенные, непосредственно в процессе функционирования, например, вследствие повреждений в его конструкции. В этом случае модель объекта, сформированная ранее на основе его номинального состояния, становится неадекватной. Если эта модель используется, например, в системе управления высокоавтономным роботизированным беспилотным летательным аппаратом (БПЛА), возникает критическая ситуация.

В связи с этим актуальным является поиск новых средств моделирования сложных нелинейных управляемых ДС, действующих в условиях существенных и разнородных неопределенностей. Эти средства должны обеспечивать получение моделей с требуемым уровнем точности и быстродействия, которые, при необходимости, можно использовать в реальном времени в составе бортовых комплексов управляемых объектов. Получаемые модели должны об-

ладать свойством адаптивности для оперативного восстановления адекватности модели при изменениях в свойствах моделируемой системы. Традиционные модели ДС в форме дифференциальных уравнений с фиксированной правой частью при всех их несомненных достоинствах не удовлетворяют условию адаптивности. Требуемым свойством адаптивности обладают модели на основе искусственных нейронных сетей (НС), представляющие собой мощное средство моделирования нелинейных многомерных статических и динамических систем, в особенности при наличии значительного числа разнородных неопределенностей в моделируемых системах и условиях их использования.

Тем не менее, точность нейросетевых моделей (НС-моделей) на экспериментальных данных, не используемых при построении модели (обобщающая способность) существенно зависит от репрезентативности обучающего набора данных, а также от количества настраиваемых параметров модели. Так, при достаточно малом размере обучающего набора и достаточно большом количестве настраиваемых параметров, точность модели на тестовом наборе данных может быть крайне низкой (явление переобучения). В рамках традиционного нейросетевого подхода объект моделирования предполагается полностью неизвестным, т. е. рассматривается как «черный ящик», а соответствующие НС-модели формируются исключительно на основе экспериментальных данных о поведении ДС. В связи с этим, перспективной представляется задача развития гибридного, полуэмпирического нейросетевого подхода к моделированию, позволяющего формировать НС-модель с привлечением как теоретических знаний в соответствующих предметных областях, так и методов обучения моделей, характерных для ИНС. Данный подход позволяет уменьшить количество настраиваемых параметров по сравнению с чисто эмпирическими НС-моделями, сохранив при этом достаточную гибкость и возможность адаптации. Полуэмпирический нейросетевой подход может также рассматриваться как метод регуляризации модели за счет априорных теоретических знаний. Однако, предложенные ранее полуэмпирические НС-модели формулируются в дискретном времени, что снижает их гибкость с точки зрения возможности применения к ним различных численных методов интегрирования.

Целью данной работы является распространение полуэмпирического нейросетевого подхода к моделированию управляемых ДС, а также методов обучения полуэмпирических НС-моделей на случай непрерывного времени.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Распространить полуэмпирический нейросетевой подход к моделированию управляемых ДС на случай непрерывного времени.
2. Разработать алгоритм вычисления оценок значений производных функции ошибки для полуэмпирических НС-моделей в непрерывном времени.
3. Разработать алгоритм обучения полуэмпирических НС-моделей в непрерывном времени.
4. Разработать алгоритм планирования экспериментов для идентификации НС-моделей управляемых ДС в соответствии с критерием оптимальности, позволяющим учесть ограничения на область значений управлений и переменных состояния системы.
5. Осуществить вычислительные эксперименты для оценки эффективности разработанного класса моделей и методов их обучения применительно к задаче моделирования движения маневренного самолета.

Методы исследования. В данной работе использовались методы нейросетевого моделирования, идентификации динамических систем, численные методы оптимизации, метод продолжения решения по параметру, численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методы теории чувствительности.

Научная новизна:

1. Полуэмпирический нейросетевой подход к математическому моделированию ДС распространен на случай непрерывного времени. Сформулированы и доказаны теоремы об аппроксимационных свойствах полуэмпирических НС-моделей.
2. Предложены два алгоритма оценки значений градиента и матрицы Гессе функции ошибки для полуэмпирической НС-модели в непрерывном времени, которые можно рассматривать как непрерывные версии алгоритмов прямого и обратного распространения во времени. Сформулирована и доказана теорема об оценке сверху для величины соответствующей погрешности в зависимости от величин шагов по времени.
3. Разработан численный алгоритм обучения полуэмпирических НС-моделей в непрерывном времени на основе метода продолжения решения по параметру с функцией гомотопии, в качестве параметра которой выступает величина горизонта прогноза.

4. Разработан численный алгоритм планирования экспериментов для идентификации НС-моделей управляемых ДС, предполагающий декомпозицию управляющих сигналов на опорный маневр, максимизирующий критерий равномерности покрытия, и возмущающее воздействие, минимизирующее пик-фактор.

Теоретическая и практическая значимость работы. Класс полуэмпирических НС-моделей позволяет снизить количество настраиваемых параметров и повысить обобщающую способность эмпирических моделей посредством учета априорных теоретических знаний предметной области в структуре модели. Рассмотрение данных моделей в непрерывном времени позволяет повысить их гибкость с точки зрения возможности применения к ним различных численных методов интегрирования. Алгоритм обучения на основе метода продолжения решения по параметру с использованием функции гомотопии с регулируемой величиной горизонта прогноза позволяет эффективно обучать полуэмпирические НС-модели в непрерывном времени осуществлению прогноза поведения объекта моделирования на долгих сегментах времени, снижая чувствительность к начальному приближению для значений параметров. Алгоритм планирования экспериментов для идентификации НС-моделей управляемых ДС позволяет автоматизировать процесс сбора репрезентативного обучающего набора. Рассмотренный класс моделей может быть применен к задачам идентификации и управления с прогнозирующей моделью для нелинейных, многомерных и нестационарных ДС. Таким образом, этот подход может быть использован для разработки систем управления движением перспективных маневренных БПЛА. В соавторстве с Тюменцевым Ю. В. разработан и зарегистрирован соответствующий программный комплекс [10].

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью применения математического аппарата, а также результатами многочисленных вычислительных экспериментов. В качестве примера рассматривается задача моделирования движения маневренного самолета и идентификации его аэродинамических коэффициентов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

- 11-ая и 17-ая Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение» (Москва, 2013 и 2019);

- 11-ая, 12-ая и 13-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2012, 2013 и 2014);
- 15-ая, 16-ая, 17-ая, 19-ая и 20-ая Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика» (Москва, 2013, 2014, 2015, 2017 и 2018);
- 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS (St. Petersburg, 2014);
- 11-ая и 12-ая Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2016 и 2017);
- 8th Annual International Conference on Biologically Inspired Cognitive Architectures, BICA (Moscow, 2017).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 публикации, в том числе: 6 статей в журналах из перечня ВАК РФ, 6 статей в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus, 1 статья в журнале, индексируемом в базе данных Web of Science, 8 публикаций в изданиях, индексируемых в РИНЦ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации 155 страниц текста с 35 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 132 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приводится постановка задачи математического моделирования детерминированных управляемых нелинейных ДС с сосредоточенными параметрами. Традиционным классом математических моделей таких систем являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На объект моделирования накладываются определенные ограничения, гарантирующие существование и единственность решений соответствующих задач Коши, а также корректность постановки рассматриваемой задачи моделирования ДС.

Затем, дается краткое описание класса слоистых НС прямого распространения и теорема об универсальной аппроксимации, показывающая, что соответствующее параметрическое семейство функций всюду плотно в пространстве непрерывных функций на компакте. Также, приводятся некоторые методы обучения ИНС, алгоритмы прямого и обратного распространения для вычисления первых и вторых производных функции ошибки и один из подходов к выбору начальных значений параметров.

Далее описываются НС-модели ДС в дискретном времени: нелинейная авторегрессионная НС-модель с внешними входами (Nonlinear AutoRegressive model with eXogeneous inputs, NARX); НС-модель в пространстве состояний, частным случаем которой является рекуррентная НС Элмана; нейронные сети долго-краткосрочной памяти. Приводятся методы вычисления производных функции ошибки: алгоритм обратного распространения во времени (BackPropagation Through Time, ВРТТ) и алгоритм рекуррентного обучения в реальном времени (Real-Time Recurrent Learning, RTRL). Обсуждаются различные проблемы, возникающие при обучении рекуррентных НС-моделей осуществлению прогноза поведения объекта моделирования на долгих сегментах времени и их причины: проблема экспоненциально уменьшающейся либо увеличивающейся нормы градиента; проблема бифуркаций настраиваемой модели ДС; проблема «ложных» оврагов в рельефе функции ошибки. Также приводятся различные подходы к заданию значений переменных состояния в начальный момент времени.

Вторая глава посвящена исследованию полуэмпирического подхода к моделированию, позволяющего формировать модель с использованием как теоретических знаний предметной области, так и экспериментальных данных о реакции системы на внешние воздействия. Сначала рассматривается полуэмпирический подход к аппроксимации функций. В рамках данного подхода предполагается наличие дополнительных априорных знаний о неизвестной функции, помимо ее непрерывности — за счет таких знаний выбирается более узкий класс параметрических функций, что позволяет упростить задачу минимизации функции ошибки. Подобный учет априорного теоретического знания имеет регуляризирующий эффект и позволяет снизить количество настраиваемых параметров модели, сохранив при этом ее точность. Полуэмпирическая модель представляет собой параметрическое семейство функций, элементы которого являются композициями: некоторых фиксированных функций, отражающих

точное знание отдельных зависимостей; функций, принадлежащих некоторому параметрическому семейству специального вида (взвешенные линейные комбинации, тригонометрические многочлены и т. д.), отражающего знание общего характера отдельных зависимостей; функций, принадлежащих некоторому параметрическому семейству общего вида (НС прямого распространения, многочлены и т. д.), всюду плотному в пространстве непрерывных функций на компакте, и отражающему отсутствие каких-либо знаний об отдельных зависимостях. В свою очередь, на основе имеющихся экспериментальных данных осуществляется настройка параметров модели и ее структурная корректировка, необходимые для достижения требуемой точности, а также для адаптации модели (в случае, если неизвестная функция является нестационарной). Анализ полуэмпирических моделей показывает, что, хотя в общем случае они не являются универсальными аппроксиматорами непрерывных функций, они позволяют с любой заданной точностью аппроксимировать функции того вида, который был задан, исходя из теоретических знаний об объекте моделирования. Также показано, при каких условиях свойство универсальной аппроксимации сохраняется.

Применительно к задаче моделирования ДС, вводятся следующие обозначения: $\mathcal{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$ — рассматриваемый сегмент времени; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ — замкнутое ограниченное множество допустимых управлений; $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ — замкнутое ограниченное множество допустимых состояний; $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ — множество допустимых выходов. Обозначим через \mathfrak{S} неизвестную ДС, заданную уравнениями состояния и выхода с правыми частями $\mathbf{f}: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ и $\mathbf{g}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, соответственно. Также будем обозначать через $\mathbf{u}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ — управления; $\mathbf{x}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$ — траектории в пространстве состояний; $\mathbf{y}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ — наблюдаемые выходы. Здесь и далее используется Евклидова норма, а интеграл понимается в смысле Лебега.

В данной работе рассматриваются полуэмпирические НС-модели в непрерывном времени, обозначаемые \mathfrak{S} , и имеющие следующий вид:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}^f), \quad \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{w}^g), \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{x}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$ — оценка траектории в пространстве состояний; $\hat{\mathbf{y}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ — оценка значений наблюдаемых выходов; $\hat{\mathbf{f}}: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}^f \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ и $\hat{\mathbf{g}}: \mathcal{X} \times \mathcal{W}^g \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ — полуэмпирические НС-модели прямого распространения с параметрами \mathbf{w}^f и \mathbf{w}^g . Предполагается, что $\mathcal{W}^f \subset \mathbb{R}^{n_{w^f}}$ и $\mathcal{W}^g \subset \mathbb{R}^{n_{w^g}}$ — замкнутые

ограниченные множества допустимых значений параметров. Также вводится обозначение $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ для общего вектора параметров, где $\mathcal{W} = \mathcal{W}^f \times \mathcal{W}^g$ и $n_{\mathbf{w}} = n_{\mathbf{w}^f} + n_{\mathbf{w}^g}$.

Прежде всего анализируются возможности данного класса моделей воспроизводить поведение неизвестной ДС с заданной точностью. Для этого сначала вводятся следующие определения.

Определение 1. Для рассматриваемой ДС \mathfrak{S} , будем называть ε -корректными такие пары начальных состояний \mathbf{x}^0 и управлений \mathbf{u} , что: вектор-функция \mathbf{u} интегрируема; соответствующая траектория \mathbf{x} существует на всем сегменте времени \mathcal{T} и содержится в \mathcal{X} вместе с замыканием своей ε -окрестности.

Определение 2. Будем говорить, что $\hat{\mathfrak{S}}$ моделирует \mathfrak{S} с горизонтом прогноза T и точностью ε , если существует такое $\delta > 0$, что для любых ε -корректных (относительно \mathfrak{S}) \mathbf{x}^0 и \mathbf{u} , а также любого $\hat{\mathbf{x}}^0 \in B_\delta(\mathbf{x}^0)$, соответствующие траектории $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ существуют, и удовлетворяют условию

$$\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Также вводится обозначение $\text{Lip}_n(\mathcal{A})$ для пространства Липшицевых по всем аргументам вектор-функций из \mathcal{A} в \mathbb{R}^n . Затем, формулируется следующая Теорема 1.

Теорема 1. Пусть \mathcal{F} и $\hat{\mathcal{F}}$ — подмножества $\text{Lip}_{n_x}(\mathcal{X} \times \mathcal{U})$, \mathcal{G} и $\hat{\mathcal{G}}$ — подмножества $\text{Lip}_{n_y}(\mathcal{X})$. Предположим, что $\hat{\mathcal{F}}$ плотно в \mathcal{F} , а $\hat{\mathcal{G}}$ плотно в \mathcal{G} . Тогда для любых $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}}$, что соответствующая система $\hat{\mathfrak{S}}$ моделирует \mathfrak{S} с горизонтом прогноза T и точностью ε .

Описаны этапы процедуры формирования полуэмпирических НС-моделей. Применение данной процедуры подробно проиллюстрировано для демонстрационной ДС. Затем данная процедура применяется для формирования структуры полуэмпирических НС-моделей движения самолета для случаев продольного углового, полного углового и продольного траекторного движения. Структурная схема полученной модели для случая продольного углового движения показана на рис. 1. На данной схеме: α — угол атаки; ω_z — угловая скорость тангажа; V — скорость; m — масса; J_{zz} — момент инерции относительно боковой оси; S — площадь крыла; b_A — средняя аэродинамическая хорда; q — скоростной напор; g — ускорение силы тяжести; C_y, m_z — коэффициенты нормальной силы и момента тангажа; δ_b — угол отклонения стабилизатора;

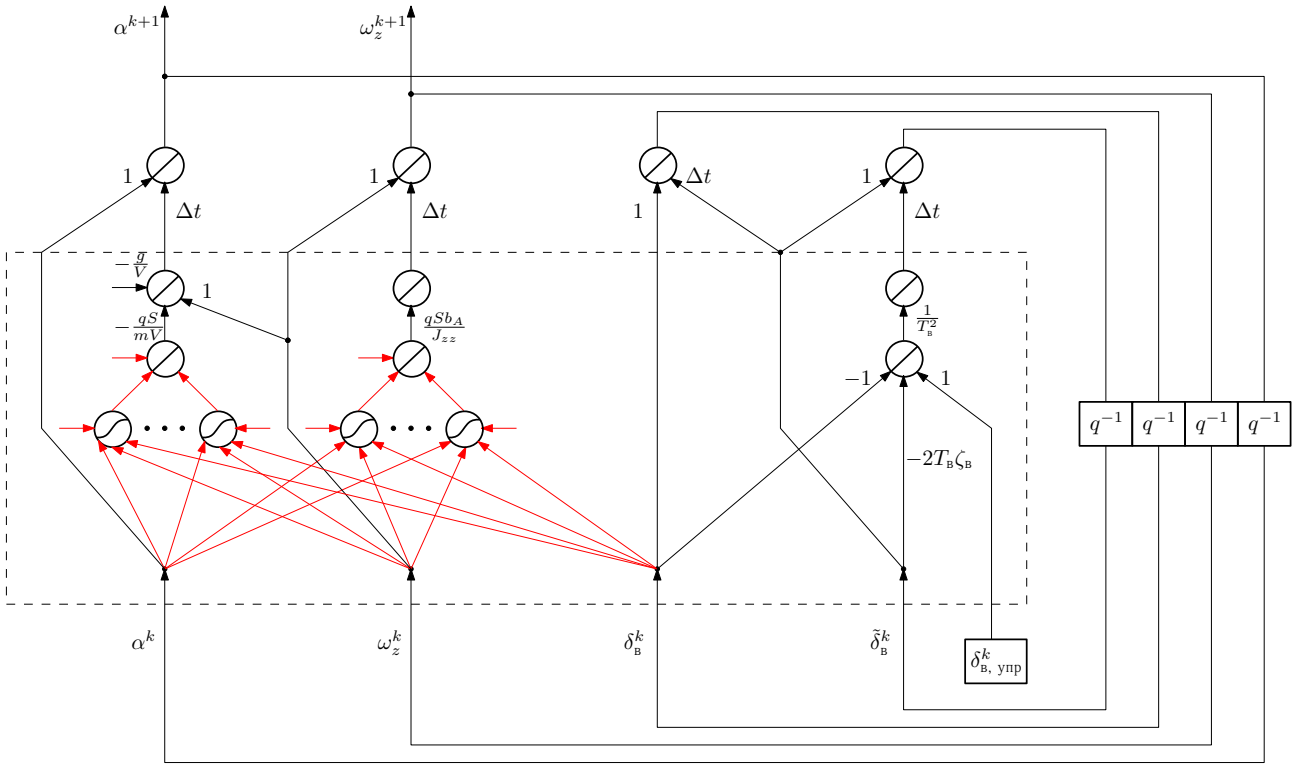


Рис. 1 — Полуэмпирическая НС-модель продольного углового движения ЛА

T_B, ζ_B — постоянная времени и коэффициент относительного демпфирования привода стабилизатора; $\delta_{B, \text{упр}}$ — командный сигнал на привод стабилизатора.

Поведение объекта моделирования анализируется на конечном множестве траекторий вида:

$$\mathcal{E} = \{ \langle p\mathbf{u}, p\mathbf{x}, p\mathbf{y} \rangle \}_{p=1}^P, \quad (2)$$

где P — количество траекторий; $p\mathbf{u}: [0, pT] \rightarrow \mathcal{U}$ — известные управления, поданные на вход; $p\mathbf{x}: [0, pT] \rightarrow \mathcal{X}$ — неизвестные траектории в пространстве состояний; $p\mathbf{y}: [0, pT] \rightarrow \mathcal{Y}$ — неизвестные траектории в пространстве выходов. Тогда, набор экспериментальных данных, требуемых для формирования моделей (1), имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \left\langle p\tilde{\mathbf{x}}^0, p\mathbf{u}, \left\{ \langle p t^k, p\tilde{\mathbf{y}}^k \rangle \}_{k=0}^{pK} \right\rangle \right\}_{p=1}^P, \quad (3)$$

где $p\tilde{\mathbf{x}}^0$ — оценка начального состояния, а $p\tilde{\mathbf{y}}^k$ — наблюдаемые выходы, измеренные в моменты времени $p t^k$. При этом, $p t^0 = 0$; $p t^{pK} = pT$; $p \Delta t^k = p t^{k+1} - p t^k$; $\overline{\Delta t} = \max_{p,k} p \Delta t^k$. Предполагается, что вместо истинных значений выходов $\mathbf{y}(t)$ имеются лишь измеренные $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$, где $\boldsymbol{\eta}(t)$ — белый гауссовский шум с ограниченным спектром, т. е. стационарный векторный гауссовский случайный процесс $\boldsymbol{\eta}(t)$ имеет математическое ожидание $M[\boldsymbol{\eta}(t)] = 0$ и ковариационную функцию $K_{\boldsymbol{\eta}}(t_1, t_2) = \text{sinc}(2\bar{\omega}(t_2 - t_1))\Sigma$, где $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_{n_y}^2)$.

Третья глава посвящена исследованию методов обучения полуэмпирических НС-моделей ДС. Вводятся обозначения ${}^p\hat{\mathbf{x}}$ и ${}^p\hat{\mathbf{y}}$ для оценок состояний и выходов модели (1), соответствующих начальным условиям и управлениям из (3). Предлагается гомотопия функции ошибки, позволяющая варьировать величину горизонта прогноза:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau) = (1 - \tau) \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{a}\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \int_0^{\tau^{pT}} \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{w}_j^E ({}^p\tilde{\mathbf{y}}_j(t) - {}^p\hat{\mathbf{y}}_j(t))^2 dt,$$

где $\tau \in [0, 1]$ — параметр гомотопии, $\mathbf{a} \in \mathcal{W}$ — начальные значения для параметров модели, \mathbf{w}_j^E — веса, обычно выбираемые обратно пропорциональными дисперсии шума измерений. Оценки наблюдаемых выходов ${}^p\tilde{\mathbf{y}}(t)$ как функции времени на $t \in [0, {}^pT]$ получаются путем интерполяции соответствующих значений из обучающего множества.

Гомотопия градиента функции ошибки имеет вид:

$$\frac{\partial E(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}_i} = (1 - \tau) (\mathbf{w} - \mathbf{a}) - \sum_{p=1}^P \int_0^{\tau^{pT}} \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{w}_j^E ({}^p\tilde{\mathbf{y}}_j(t) - {}^p\hat{\mathbf{y}}_j(t)) \frac{\partial {}^p\hat{\mathbf{y}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_i} dt.$$

Введем обозначение $\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau) = \frac{\partial E(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}}$ для гомотопии градиента функции ошибки. Для вычисления градиента требуются значения матрицы Якоби, получаемые посредством решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_j(0)}{\partial \mathbf{w}_i^f} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_i^f} = \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_j(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}^f)}{\partial \mathbf{w}_i^f} + \sum_{l=1}^{n_x} \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_j(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}^f)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_l(t)} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_l(t)}{\partial \mathbf{w}_i^f},$$

которая может рассматриваться как непрерывная версия алгоритма RTRL. Полученное решение используется для вычисления производных:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_i^f} = \sum_{l=1}^{n_x} \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_j(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{w}^g)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_l(t)} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_l(t)}{\partial \mathbf{w}_i^f}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_i^g} = \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_j(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{w}^g)}{\partial \mathbf{w}_i^g}.$$

Аналогичные выражения получены для матрицы Гессе функции ошибки и для вторых производных состояний.

Несмотря на то, что выражения для функции ошибки и ее производных являются точными, использование численных методов для решения соответствующих задач Коши и для вычисления определенного интеграла по времени, а также для интерполяции целевых значений наблюдаемых выходов вносит в них определенную погрешность. Анализируется асимптотическое поведение этой погрешности в зависимости от величины шагов по времени, в предполо-

жении, что неустранимая погрешность отсутствует. Принимается обозначение $C_n^r(\mathcal{A})$ для пространства r -гладких по всем аргументам вектор-функций из \mathcal{A} в \mathbb{R}^n . Вводятся следующие предположения.

Предположение 1. Управляющие сигналы ${}^p\mathbf{u}$, входящие в множество траекторий \mathcal{E} (2), являются кусочно-гладкими вектор-функциями времени, имеющими r -й порядок гладкости на каждом из промежутков, составляющих область определения; они имеют конечное множество точек разрыва первого рода.

Предположение 2. Набор экспериментальных данных $\tilde{\mathcal{E}}$ (3) содержит известные управления ${}^p\mathbf{u}$, а также точные значения начальных состояний ${}^p\tilde{\mathbf{x}}^0 = {}^p\mathbf{x}(0)$ и наблюдаемых выходов ${}^p\tilde{\mathbf{y}}^k = {}^p\mathbf{y}(pt^k)$.

Предположение 3. Оценки ${}^p\hat{\mathbf{x}}$, $\frac{\partial {}^p\hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{w}^f}$ и $\frac{\partial^2 {}^p\hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{w}^f{}^2}$ получаются путем решения задач Коши для соответствующих систем ОДУ с помощью явного одношагового метода, имеющего r_1 -й порядок точности при условии, что истинное решение имеет $(r_1 + 1)$ -й порядок гладкости по времени; при этом шаги выбираются таким образом, чтобы точки разрыва управления совпадали с узлами интегрирования.

Предположение 4. Функции ${}^p\tilde{\mathbf{y}}$ получаются путем интерполяции измеренных значений наблюдаемых выходов ${}^p\tilde{\mathbf{y}}^k$ по времени методом, имеющим r_2 -й порядок погрешности при условии, что истинные функции имеет $(r_2 + 1)$ -й порядок гладкости по времени.

Предположение 5. Оценки значений функции ошибки $E(\mathbf{w})$ и ее производных $\frac{\partial E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}$, $\frac{\partial^2 E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}^2}$ по параметрам \mathbf{w} получаются путем вычисления определенных интегралов методом, линейно зависящим от значений подынтегрального выражения в некоторых узлах, имеющим r_3 -й порядок погрешности при условии, что подынтегральное выражение имеет r_3 -й порядок гладкости по соответствующей переменной, при этом шаг интегрирования не превышает $\overline{\Delta t}$.

Затем, формулируется Теорема.

Теорема 2. Пусть \mathcal{F} — подмножество $C_{n_x}^r(\mathcal{X} \times \mathcal{U})$, \mathcal{G} — подмножество $C_{n_y}^r(\mathcal{X})$, $\hat{\mathcal{F}}$ — подмножество $C_{n_x}^{r+2}(\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}^f)$, $\hat{\mathcal{G}}$ — подмножество $C_{n_y}^{r+2}(\mathcal{X} \times \mathcal{W}^g)$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ задают неизвестную ДС \mathfrak{S} , а параметрические семейства вектор-функций $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}}$ задают полуэмпирическую НС-модель $\hat{\mathfrak{S}}$.

Далее, пусть выполняются Предположения 1 и 2. Допустим также, что для рассматриваемых значений параметров $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ и некоторого $\varepsilon > 0$, набор экспериментальных данных $\tilde{\mathcal{E}}$ вида (3) содержит только ε -корректные

относительно модели $\hat{\mathcal{S}}$ пары начальных состояний и управлений. Наконец, пусть выполняются Предположения 3–5, причем $r_1 \leq r$, $r_2 < r$, $r_3 \leq r$.

Тогда, существует такой максимальный шаг $\Delta t = \Delta t(\varepsilon) \leq \overline{\Delta t}$, что если ограничить им значения шагов численных методов, используемых при решении задач Коши, то полученные оценки значений функции ошибки и двух ее производных по параметрам будут иметь погрешность $O(\overline{\Delta t}^{\min\{r_1-1, r_2-1, r_3\}})$.

Также предлагается аналог алгоритма ВРТТ для случая непрерывного времени, основанный на использовании сопряженных уравнений. Данный алгоритм является более вычислительно эффективным по сравнению с вышеупомянутой непрерывной версией алгоритма RTRL, поскольку не требует расчета вторых производных всех переменных состояния, а лишь их линейных комбинаций. Например, в вышеупомянутой задаче моделирования продольного углового движения самолета он позволяет ускорить вычисление матрицы Гессе функции ошибки для 472 настраиваемых параметров в 11.8 раз, и выигрыш в скорости увеличивается с ростом сложности задачи. Однако, алгоритм обратного распространения во времени применим только если все обучающее множество известно заранее, а также требует наличия дополнительной памяти.

В соответствии с параметризованной теоремой Сарда, для почти всех значений параметров \mathbf{a} существует гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^{n_w} \times [0, 1)$, проходящая через точку $(\mathbf{a}, 0)$ и удовлетворяющая необходимым условиям локального экстремума функции ошибки. Более того, если эта кривая ограничена, то у нее имеется предельная точка в $(\bar{\mathbf{w}}, 1)$. Наконец, если матрица Якоби гомотопии градиента функции ошибки является невырожденной в этой точке, то кривая γ имеет конечную длину дуги. В частном случае, когда матрица Гессе $\frac{\partial^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}^2}$ является невырожденной во всех точках кривой γ , имеют место следующие свойства: матрица Гессе является положительно определенной; кривая состоит из локальных минимумов функции ошибки; параметр гомотопии τ монотонно возрастает вдоль кривой γ . В данном случае, вместо наилучшего параметра продолжения решения (длины дуги) можно использовать τ . Продолжение решения в таком случае заключается в решении задачи Коши для системы уравнений Давиденко:

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = - \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)^{-1} \partial \mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}}, \quad (4)$$

с начальным условием $\mathbf{w}(0) = \mathbf{a}$. Для того, чтобы избежать накопления ошибки численного решения задачи Коши, метод Левенберга-Марквардта исполь-

зается в качестве корректора, т. е. для фиксированных значений τ решается задача минимизации функции ошибки. Аппроксимация матрицы Гессе функции ошибки может быть получена методом Гаусса-Ньютона:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}_k} = \frac{\partial^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \tau)}{\partial \mathbf{w}_i \partial \mathbf{w}_k} \approx (1 - \tau) \delta_{ik} + \sum_{p=1}^P \int_0^{\tau^p T} \sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{w}_j^E \frac{\partial^p \hat{\mathbf{y}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_i} \frac{\partial^p \hat{\mathbf{y}}_j(t)}{\partial \mathbf{w}_k} dt,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Также рассматривается задача формирования репрезентативного набора данных вида (3), характеризующего поведение моделируемой системы на всей области допустимых значений переменных состояния и управления. Для получения такого набора данных необходимо сперва разработать план эксперимента. Предлагается подход к получению эффективного плана эксперимента на основе декомпозиции управляющих сигналов на две составляющие — опорный маневр и возмущающее воздействие. Опорные маневры имеют значительно более низкую частоту и более высокую амплитуду, и предназначены для приведения опорной траектории в некоторую исследуемую область пространства допустимых состояний. Они получаются путем решения задачи оптимального управления с целью максимизации равномерности покрытия рассматриваемой области прогнозируемыми траекториями. В свою очередь, возмущающее воздействие имеет высокую частоту и малую амплитуду, и предназначено для обеспечения разнообразия состояний в малой окрестности опорной траектории. Оно представлено полигармоническим сигналом с богатым частотным содержанием и с небольшим по величине значением пик-фактора.

В четвертой главе приведены результаты многочисленных вычислительных экспериментов по обучению полуэмпирических НС-моделей движения маневренного самолета. Полученные результаты показывают, что ошибки по всем наблюдаемым переменным незначительны и, кроме того, максимальные значения этих ошибок с течением времени практически не растут, что свидетельствует о хороших обобщающих свойствах полученной НС-модели. В качестве примера, абсолютные погрешности идентификации аэродинамического коэффициента момента тангажа на тестовом множестве приведены на рис. 2.

Приводится краткое описание разработанного программного комплекса, реализующего предложенные алгоритмы. Основная его часть написана на языке C++ с использованием следующих библиотек: библиотека линейной алгебры Eigen применяется для векторных и матричных операций, а также ре-

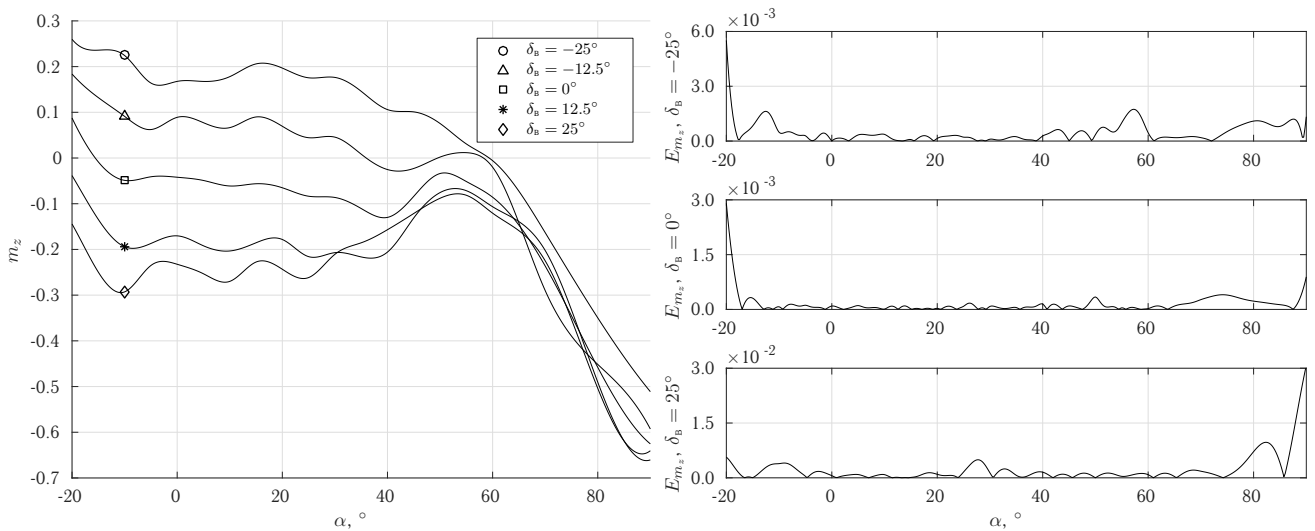


Рис. 2 — Оценки значений аэродинамического коэффициента m_z и их абсолютные погрешности E_{m_z} при фиксированных $\omega_z = 0$ °/с, $V = 150$ м/с

шения систем линейных алгебраических уравнений; библиотека автоматического дифференцирования CppAD используется для вычисления производных вектор-функций в точке; библиотека ANN предоставляет структуры данных и алгоритмы для приближенного поиска ближайших соседей в многомерном пространстве. Вычисления значений функции ошибки и ее производных в алгоритме обучения полуэмпирических НС-моделей были распараллелены по обучающим примерам с использованием средств многопоточности, предоставляемых стандартной библиотекой шаблонов STL. Процедура формирования полигармонических возмущающих воздействий опирается на метод оптимизации Нелдера-Мида, реализованный в MATLAB Optimization Toolbox. Эффективность полуэмпирических НС-моделей сравнивалась с НС-моделью NARX, реализованной в MATLAB Neural Network Toolbox. Структурная диаграмма программного комплекса приведена на рис. 3.

В заключении приведены общие выводы, которые позволяют сделать полученные результаты. Они состоят в том, что методы нейросетевого моделирования в сочетании со знаниями и опытом из соответствующей предметной области, а также из традиционного вычислительного моделирования, являются мощным и перспективным инструментом, потенциально пригодным для решения сложных прикладных проблем для управляемых систем различных классов. Рассмотренный класс моделей может быть применен к задачам идентификации и управления с прогнозирующей моделью для нелинейных, многомерных и нестационарных ДС. Таким образом, этот подход может быть исполь-



Рис. 3 — Структура программного комплекса

зован для разработки систем управления движением перспективных маневренных БПЛА.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Распространение полуэмпирического нейросетевого подхода к математическому моделированию ДС на случай непрерывного времени. Сформулированы и доказаны теоремы об аппроксимационных свойствах полуэмпирических НС-моделей. [1, 11, 9]
2. Два алгоритма оценки значений градиента и матрицы Гессе функции ошибки для полуэмпирической НС-модели в непрерывном времени, которые можно рассматривать как непрерывные версии алгоритмов RTRL и BPTT. Сформулирована и доказана теорема об оценке сверху для величины соответствующей погрешности в зависимости от величин шагов по времени. [9]

3. Численный алгоритм обучения полуэмпирических НС-моделей в непрерывном времени на основе метода продолжения решения по параметру с варьируемым горизонтом прогноза. [2, 5, 6, 9]
4. Численный алгоритм планирования экспериментов для идентификации НС-моделей управляемых ДС на основе декомпозиции управляющих сигналов на опорный маневр, обеспечивающий равномерное покрытие области обучающими примерами и полигармоническое возмущающее воздействие с минимальным пик-фактором. [4, 7, 9]
5. Зарегистрирован программный комплекс, реализующий предложенные численные алгоритмы. Эффективность программного комплекса подтверждается результатами вычислительных экспериментов для задачи моделирования управляемого движения маневренного самолета и идентификации его аэродинамических коэффициентов. [10]

Статьи в журналах из перечня ВАК РФ и/или индексируемых в международных наукометрических базах данных

1. Егорчев М. В., Козлов Д. С., Тюменцев Ю. В., Чернышев А. В. Нейросетевые полуэмпирические модели управляемых динамических систем // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2013. — № 9. — С. 3–10.
2. Егорчев М. В., Козлов Д. С., Тюменцев Ю. В. Идентификация аэродинамических характеристик летательного аппарата: нейросетевой полуэмпирический подход // Вестник Московского Авиационного Института. — 2014. — Т. 21, № 4. — С. 13–24.
3. Егорчев М. В., Козлов Д. С., Тюменцев Ю. В. Моделирование продольного углового движения самолета: сопоставление теоретического, эмпирического и полуэмпирического подходов // Научный вестник МГТУ ГА. — 2015. — № 211. — С. 116–123.
4. Егорчев М. В., Козлов Д. С., Тюменцев Ю. В. Нейросетевое полуэмпирическое моделирование продольного короткопериодического движения маневренного самолета // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». — 2015. — № 1. — С. 53–60.
5. Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V. Learning of semi-empirical neural network model of aircraft three-axis rotational motion // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). — 2015. — Vol. 24, № 3. — pp. 210–217. — (Scopus).

6. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Полуэмпирические нейросетевые модели управляемых динамических систем // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование». — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 241–255.
7. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Нейросетевой полуэмпирический подход к моделированию продольного движения и идентификации аэродинамических характеристик маневренного самолета // Труды МАИ. — 2017. — № 94. — С. 31–55.
8. *Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V.* Neural Network Semi-empirical Modeling of the Longitudinal Motion for Maneuverable Aircraft and Identification of Its Aerodynamic Characteristics // Studies in Computational Intelligence. — 2018. — Vol. 736. — pp. 65–71. — (Scopus).
9. *Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V.* Homotopy Continuation Training Method for Semi-Empirical Continuous-Time State-Space Neural Network Models // Studies in Computational Intelligence. — 2019. — Vol. 799. — pp. 115–120. — (Scopus).

Свидетельства о регистрации

10. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Программный комплекс «Нейросетевое полуэмпирическое моделирование управляемого движения летательных аппаратов» от 28.01.2015 № 2015611386.

Публикации в рецензируемых сборниках трудов

11. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Нейросетевые полуэмпирические модели управляемых динамических систем // Сборник научных трудов XV Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика — 2013». Ч. 2. — М. : МИФИ, 2013. — С. 22–31.
12. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Обучение полуэмпирической нейросетевой модели управляемого движения самолета // Сборник научных трудов XVI Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика — 2014». Ч. 2. — М. : МИФИ, 2014. — С. 263–272.
13. *Егорчев М. В.* Обучение полуэмпирической нейросетевой модели полного углового движения самолета // Сборник научных трудов XVII Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика — 2015». Ч. 2. — М. : МИФИ, 2015. — С. 20–30.
14. *Egorchev M. V., Kozlov D. S., Tiumentsev Yu. V.* Neural network adaptive semi-empirical models for aircraft controlled motion // Proceedings of the

- 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (St. Petersburg, Russia). — Sept. 2014. — pp. 1–8. — (Scopus).
15. *Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V.* Adaptive neural network based simulation of dynamical systems // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1761. — pp. 348–355. — (Scopus).
16. *Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V.* Semi-empirical Neural Network Based Approach to Modelling and Simulation of Controlled Dynamical Systems // Procedia Computer Science. — 2018. — Vol. 123. — pp. 134–139. — (Scopus).
17. *Egorchev M. V., Tiumentsev Yu. V.* Neural network identification of aircraft nonlinear aerodynamic characteristics // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2018. — Vol. 312, № 1. — pp. 1–5. — (Scopus, Web of Science).

Публикации по теме диссертации в других изданиях

18. *Козлов Д. С., Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Использование нейросетевых полуэмпирических моделей для обеспечения отказоустойчивого управления // Тезисы докладов XI Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение». — М. : МГППУ, 2013. — С. 59.
19. *Егорчев М. В., Козлов Д. С., Тюменцев Ю. В.* Нейросетевое моделирование управляемых динамических систем: полуэмпирический подход // Тезисы докладов 11-й Международной конференции «Авиация и космонавтика — 2012». — М. : МАИ, 2012. — С. 260–261.
20. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Полуэмпирическое нейросетевое моделирование продольного углового движения летательного аппарата // Тезисы докладов 12-й Международной конференции «Авиация и космонавтика — 2013». — М. : МАИ, 2013. — С. 46–48.
21. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Полуэмпирическое нейросетевое моделирование полного углового движения летательного аппарата // Тезисы докладов 13-й Международной конференции «Авиация и космонавтика — 2014». — М. : МАИ, 2014. — С. 613–615.
22. *Егорчев М. В., Тюменцев Ю. В.* Полуэмпирическое нейросетевое моделирование управляемых нелинейных динамических систем с непрерывным временем // Тезисы докладов XVII Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение». — М. : МГППУ, 2019. — С. 21–23.