

Разработка математической модели погрузочно-разгрузочного устройства с всенаправленными колесами

Нгуен Ньы Ман

В статье предложена наиболее общая математическая модель погрузочно-разгрузочного устройства (ПРУ) с тремя всенаправленными колесами типа «омни» [1], описывающая не только плоское движение тележки, рассматриваемой вместе со своими колесами как единое твердое тело, но и пространственное движение ее платформы, соединяющейся к колесам амортизаторами. Учет пространственного движения подпружиненной платформы ПРУ позволяет исследовать работу инерциального блока измерения, располагаемого в платформе и состоящего из датчиков линейных ускорений и датчиков угловых скоростей, что является невозможным при использовании только плоского движения, как в [2,3,4,5]. Далее проведено имитационное моделирование движения тележки в целях демонстрации особенностей ее маневра.

Ключевые слова: пространственное движение, математическая модель, тележка, всенаправленное колесо, имитационное моделирование.

Всенаправленные колеса позволяют ПРУ совершать практически любое движение по любому направлению и вращение вокруг своих осей, или одновременно оба эти маневра. Кроме того, с помощью особенной маневренности этих колес ПРУ может достигать определенной точки опорной поверхности с заданной ориентацией без необходимости движения назад и вперед, как в случае использования обыкновенных колес. Такие возможности позволяют уменьшить размер требуемого пространства зоны погрузки и сократить время обслуживания ЛА, что имеет экономическое значение.

Существует много видов всенаправленных ПРУ: с двумя, с тремя, с четырьмя и больше колесами. В данной статье исследуется только тележка с тремя колесами типа «омни» (омни-колеса) [1], поскольку ПРУ такого типа имеет следующие преимущества [6]:

- действительную всенаправленную маневренность: тележка может двигаться по любому направлению и вращаться вокруг любой определенной точки опорной поверхности без проскальзывания;

- устойчивость: для каждой комбинации вращений колес по скорости и направлению существует только одно возможное движение тележки;

- отсутствие конфликта между колесами: для произвольной комбинации вращений колес по скорости и направлению всегда существует соответствующее возможное движение тележки.

Эти преимущества обеспечивают возможность высокоточного автоматического управления движением тележки.

Многие математические модели мобильных роботов с всенаправленными колесами были разработаны, например в [2,3,4,5]. Однако, поскольку мобильные роботы характеризуются маленьким размером, а также простой конструкцией, все эти модели были описаны либо как простые линейные модели, либо с допущением того, что платформа робота жестко укреплена с колесами (т.е. без амортизаторов). При этом платформа робота вместе с колесами рассматривается как единое твердое тело, которое совершает простое плоское движение по опорной поверхности. В данной статье предложена более сложная математическая модель, описывающая движение тележки, используемой в качестве ПРУ. При этом движение тележки является сочетанием пространственного движения ее платформы и плоского движения колес.

I. Математическая модель тележки с тремя омни-колесами

1. Общие сведения о тележке с тремя омни-колесами

Рассматриваемая здесь тележка, в самом простом представлении, состоит из платформы, в которой расположены двигатели, измерительно-вычислительный блок, подъемный механизм, и трех всенаправленных колес. В качестве всенаправленного колеса здесь используется омни-колесо, т.е. колесо, на периферии диска которого укреплены ролики по касательной к окружности диска (рис. 1).

Платформа тележки имеет форму цилиндра высотой L_2 с основанием радиуса L_1 . Три омни-колеса 1, 2, 3, имеющих массу m и радиус r каждое, расположены симметрично вокруг платформы таким образом, чтобы их оси вращения составляли угол 120° между собой (рис.1, а). С целью упрощения математических выражений для описания движения тележки (но не теряя общности предложенной задачи), считаем платформу вместе с расположенными в ней двигателями, всеми приборами, механизмами, необходимыми для работы тележки сплошным цилиндром массой M .

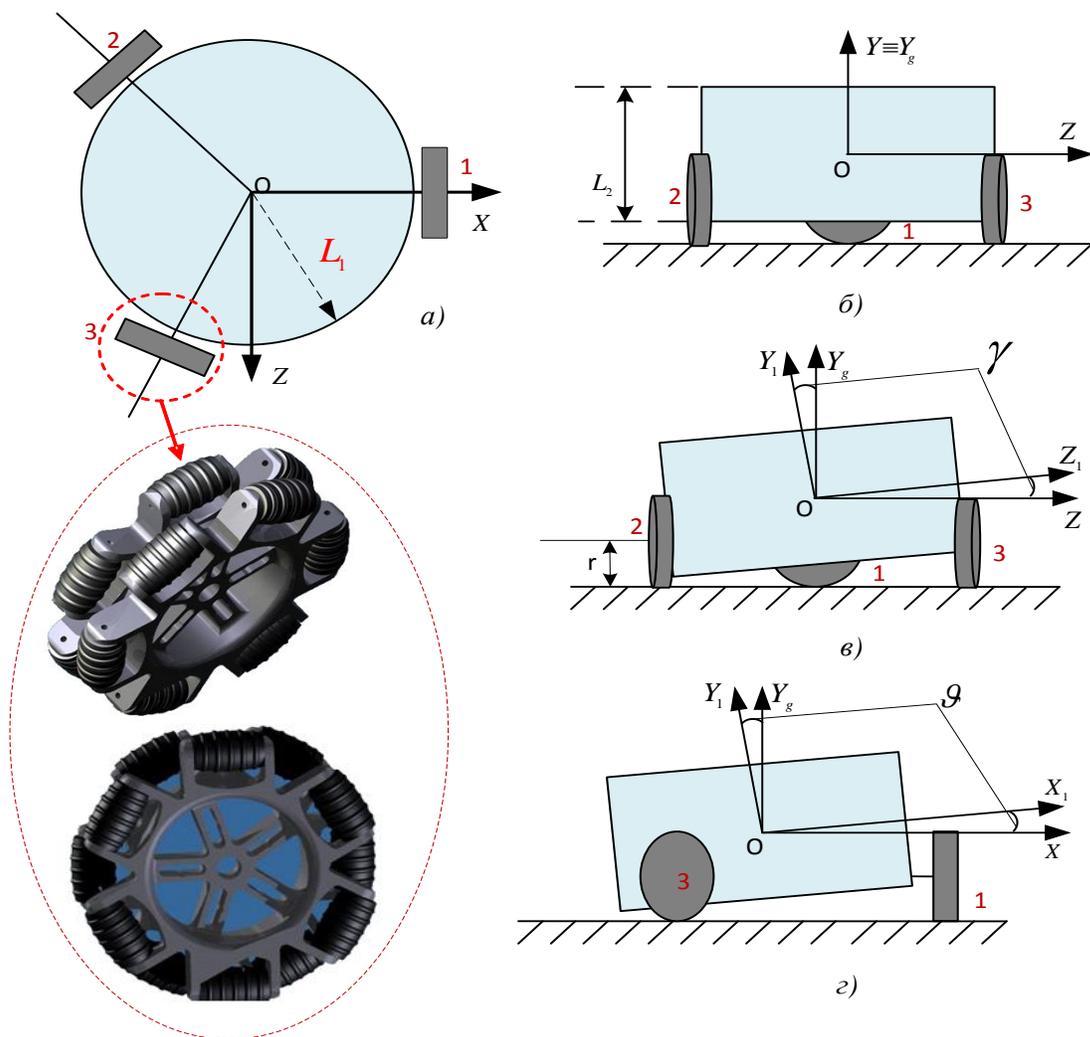


Рис.1. Обобщенная схема тележки с тремя омни-колесами и ее положения при движении: а - вид сверху; б - вид сзади, без крена; в - вид сзади, с креном; г – вид сбоку

В настоящее время техника изготовления позволяет создать омни-колесо, ролики которого расположены на двух соединенных дисках таким образом, чтобы внешняя окружность колеса была ровная и круглая, т.е. его профиль похож на профиль обычного колеса (рис. 1). Поскольку ролики омни-колеса расположены так, что их оси вращения являются касательными к окружности колеса, движение колеса является результирующим двух движений – движения «вперед» по вращению диска и движения «вбок» по вращению ролика. Т.к. каждое колесо может совершать одновременно два перпендикулярных друг другу движения без скольжения, то в результате сочетания движений колес, тележка может двигаться без скольжения по любому направлению.

2. Используемые системы координат

Для исследования движения тележки на рис. 2 представлены три используемых системы координат: нормальная земная $OX_g Y_g Z_g$, опорно-связанная $OXYZ$ и связанная $OX_1 Y_1 Z_1$.

Нормальная земная система координат $OX_g Y_g Z_g$. Начало координат – центр масс O тележки, ось OY_g направлена по местной вертикали. Основная плоскость $OX_g Z_g$ совпадает с местной горизонтальной плоскостью, т.е. плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной OY_g . Ось OX_g направлена с запада на восток параллельно касательной к географической параллели, а ось OZ_g расположена параллельно касательной к меридиану в направлении с севера на юг. Поскольку тележка движется с относительно маленькой скоростью (максимально 1м/с), влиянием вращения Земли можно пренебречь, и считать систему $OX_g Y_g Z_g$ инерциальной.

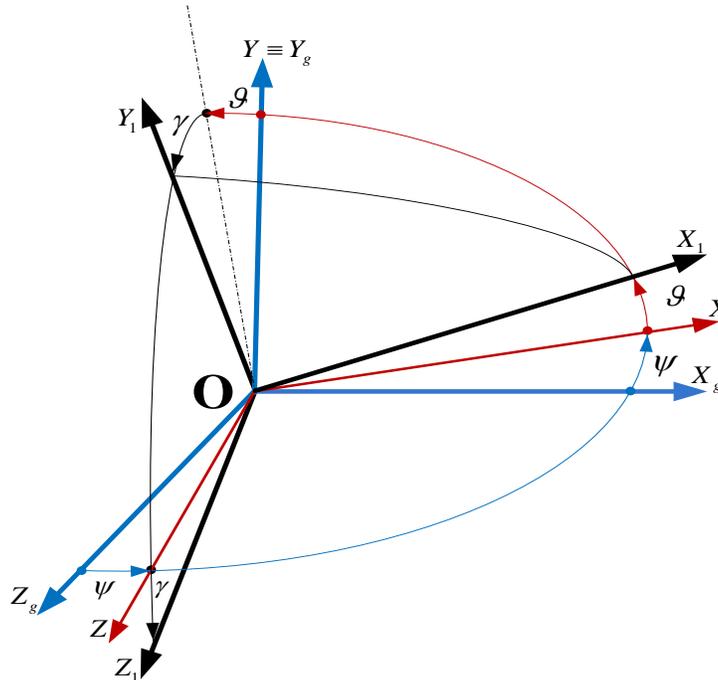


Рис. 2. Системы координат, используемые для исследования движения тележки

Опорно-связанная система $OXYZ$. Во время движения траектория тележки является плоской, определяемой положениями трех колес на опорной поверхности, а ее платформа с помощью амортизаторной системы может совершить пространственное движение. Следовательно, необходимо использовать систему координат $OXYZ$, сопровождающую оси колес. Начало этой системы совпадает с центром масс тележки, а ее основная плоскость OXZ совпадает с плоскостью,

проходящей через три оси вращения колес. Ось OY совпадает с осью OY_g , а ось OX - осью вращения первого колеса. Ось OZ создает вместе с OX и OY правую систему. Система $OXYZ$ отличается от земной системы углом курса ψ .

Связанная система $OX_1Y_1Z_1$. Начало координат – это центр масс O тележки. Плоскость OX_1Z_1 – плоскость, содержащая поперечное сечение платформы тележки и проходящая через точку O . Ось OY_1 направлена по продольной оси платформы (оси цилиндра). Когда тележка находится в спокойном разгрузочном состоянии, а ее платформа находится в балансировке, ось OX_1 параллельна оси вращения колеса 1, т.е. совпадает с осью OX . Ось OZ_1 создает вместе с осями OX_1 и OY_1 правую систему. Система $OX_1Y_1Z_1$ отличается от системы $OXYZ$ двумя углами: углом тангажа \mathcal{S} и углом крена γ . На самом деле $OX_1Y_1Z_1$ отличается от $OXYZ$ не двумя, а тремя углами. Третий угол – угол курса ψ^* . Однако, на практике, конструкция амортизатора обеспечивает малое значение угла ψ^* , т.е. платформа не может сильно «крутиться» относительно колес тележки вокруг продольной оси, что приводит к изгибу амортизатора. Т.к. учет этого «изгиба» намного усложняет систему уравнений движения тележки, считаем, что изгиба амортизатора нет, и поэтому ψ^* мал, и ось OX_1 всегда находится на вертикальной плоскости, проходящей через ось OX .

3. Уравнение работы двигателя

Каждое колесо тележки оснащено собственным двигателем постоянного тока с независимым возбуждением. Дифференциальное уравнение силовой цепи управления двигателем [7]:

$$\frac{d^2}{dt^2} J_{\text{я}} = \frac{k_{\text{у.м}} U - (T_{\text{у.м}} R_{\text{я}} + L_{\text{я}}) \frac{d}{dt} J_{\text{я}} - R_{\text{я}} J_{\text{я}} - T_{\text{у.м}} c_e \dot{\omega}_{\text{д}} - c_e \omega_{\text{д}}}{T_{\text{у.м}} L_{\text{я}}}, \quad (1)$$

где $T_{\text{у.м}}$ - постоянная времени усилителя мощности; $k_{\text{у.м}}$ - коэффициент передачи по напряжению; $L_{\text{я}}$ - индуктивность якорной цепи; $R_{\text{я}}$ - сопротивление якорной цепи; c_e - коэффициент противоЭ.Д.С.; $J_{\text{я}}$ - ток якоря; U - входное напряжение усилителя мощности; $\omega_{\text{д}}$ - угловая скорость вала двигателя.

Момент, развиваемый двигателем:

$$M_{\text{д}} = c_m J_{\text{я}},$$

где c_m - постоянная электродвигателя.

4. Динамика всенаправленных колес

Движение омни-колеса является результирующим двух движений – движения «вперед» по вращению диска и движения «вбок» по вращению ролика. Эти два движения перпендикулярны друг другу, поэтому их можно рассматривать независимо.

Известно, что момент сопротивления качению зависит не только от нормальной нагрузки, но и от смещения вектора этой силы от середины контактной поверхности. Для ролика, из-за значительного маленького размера плоскости вращения (поперечного сечения) по сравнению с диском колеса, его моментом сопротивления качению можно пренебречь. Это означает, что движение «вбок» каждого колеса можно рассматривать как абсолютное проскальзывание, поэтому для расчета не учитываем силы и моменты сопротивления качению роликов. Здесь необходимо отметить, что такое допущение можно сделать только для движения «вбок» колеса. Для движения «вперед» колеса, силы и моменты сопротивления существенно больше, вследствие чего тележка не будет проскальзывать, если скорость вращения колеса не превысит допуска.

Рассмотрим схему сил и моментов, действующих на колесо, катящееся без скольжения на недеформируемой поверхности. В этом случае считается, что все силы и моменты располагаются в вертикальной плоскости.

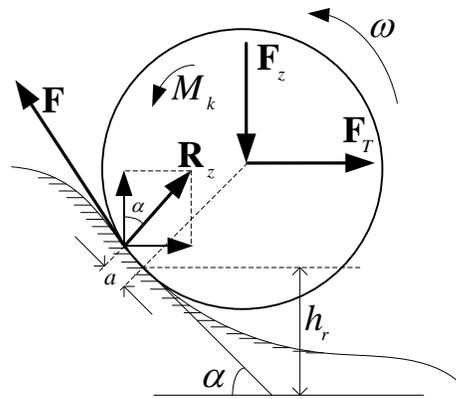


Рис. 3. Силы и моменты, действующие на колесо, находящееся на неровной опорной поверхности

Здесь α - угол наклона опорной поверхности; h_r - высота опорной поверхности в положении колеса; F – продольная составляющая реакции опорной поверхности; R_z – нормальная составляющая реакции опорной поверхности, смещенная относительно середины контактной поверхности на некоторое расстояние a ; F_T – сила тяги колеса, т.е. составляющая равнодействующих сил, приложенных к колесу со стороны платформы тележки; F_z – нормальная нагрузка колеса,

составляющая из силы реакции амортизатора и веса самого колеса; M_k – момент, развиваемый электродвигателем.

В реальных условиях колесные ПРУ движутся по опорной поверхности со случайным микропрофилем [8], причем его ордината (высота) подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ_r и функцией корреляционной $R(t) = \sigma_r^2 e^{-\varepsilon|V_w|t}$, где ε - коэффициент корреляции, V_w - линейная скорость колеса, t - время движения. Т.к. тележка совершает движение любого вида по любому направлению, колеса могут проходить через одно и то же местоположение опорной поверхности в разные моменты времени. Это приводит к тому, что модель профиля опорной поверхности, используемая для компьютерного моделирования движения тележки, не зависит от времени, а только от положения колеса. Кроме того, угол наклона опорной поверхности α в одном местоположении для каждого колеса является разным, определенным по углу ориентации диска и направлению скорости данного колеса. Построение общего двухмерного случайного профиля такого типа для трех колес является весьма сложным с точки зрения математического моделирования, поэтому в данной статье для каждого колеса используем отдельный профиль, зависящий от времени и скорости. При этом ордината профиля (высота местоположения колес) имеет вид [9]:

$$h_{ri}^{k+1} = e^{-\varepsilon V_{wi} \Delta T} h_{ri}^k + \sigma_{ri} \sqrt{1 - e^{-2\varepsilon V_{wi} \Delta T}} \xi_i^{k+1},$$

где ΔT - шаг дискретизации; ξ - независимые нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1.

Соответственно, углы наклона опорной поверхности вычисляются по формулам:

$$\alpha_i = \arctg \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{V_{wi} \Delta T}.$$

Оснащенный на каждом колесе электродвигатель используется не только для создания крутящего момента, но и в качестве тормозного устройства. Развиваемый двигателем момент M_k является крутящим или тормозным моментом в зависимости от его знака (по отношению к знаку скорости вращения колеса). Уравнения динамики колеса имеют следующий вид [8]:

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{M_{ki}}{r} - f_i R_{zi} - \frac{I_w}{r} \dot{\omega}_i; \\ F_i \sin \alpha + R_{zi} \cos \alpha - F_{zi} &= m_i r \dot{\omega}_i \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_i = \frac{a}{r} \approx 0.01(1 + V_{wi}/160)$ – коэффициент сопротивления качению, V_{wi} – линейная скорость колеса ; I_w – момент инерции колеса относительно его оси вращения; $\dot{\omega}_i$ – угловая скорость колеса; индекс i указывает номер колеса, $i = 1, 2, 3$.

Из (2), с учетом малости угла наклона поверхности α получается:

$$F_i \approx \frac{M_{ki}}{r} - f_i F_{zi} - \left(f_i m_i r \alpha_i + \frac{I_w}{r} \right) \dot{\omega}_i.$$

Перепишем в матричном виде, обозначая $\mathbf{M}_f = f\mathbf{F}_z$:

$$\mathbf{M}_k - \mathbf{M}_f = r\mathbf{F} + \mathbf{I}_w \dot{\mathbf{W}}, \quad (3)$$

где \mathbf{I}_w – диагональная матрица, элементы которой равны $f_i m_i r \alpha_i + \frac{I_w}{r}$.

5. Система уравнений движения тележки

Рассмотрим схему сил, показанную на рис. 4. В этой схеме F_1, F_2, F_3 – продольные силы колес, т.е. составляющие равнодействующих сил, приложенных к колесам со стороны опорной поверхности.

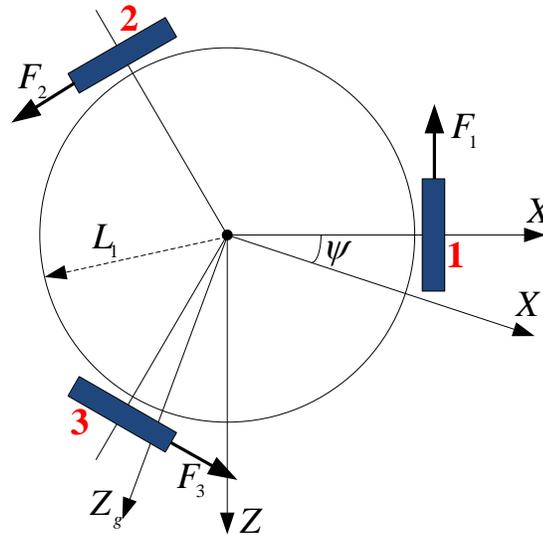


Рис. 4. Схема продольных сил, действующих на колеса со стороны опорной поверхности

Пусть $\mathbf{F}_w = (F_1 \ F_2 \ F_3)^T$ – вектор продольных сил, действующие на колеса со стороны опорной поверхности; $\mathbf{F}_g = (F_{Xg} \ F_{Zg} \ M_{Yg})^T$ – вектор обобщенных сил в Земной СК, где F_{Xg}, F_{Zg} –

проекции вектора результирующих сил на оси земной СК; M_{Y_g} - момент сил, действующих на тележку, включая платформу и колеса, относительно вертикальной оси OY_g .

Между ними имеется следующее соотношение [3]:

$$\mathbf{F}_g = C_{OE} (C_{WO} \mathbf{F}_w), \quad (4)$$

где C_{WO} - матрица перехода, позволяющая переписать вектор \mathbf{F}_w в СК $OXYZ$; C_{OE} - матрица перехода от СК $OXYZ$ к земной СК $OX_g Y_g Z_g$;

$$C_{OE} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C_{WO} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1 & 0.5 & 0.5 \\ L_1 & L_1 & L_1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, вектор \mathbf{F}_g может выражаться таким образом:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{I} \dot{\mathbf{W}}_g, \quad (5)$$

где $\mathbf{W}_g = (V_{X_g} \quad V_{Z_g} \quad \omega)^T$ - вектор обобщенных скоростей; ω - угловая скорость тележки

вокруг оси OY_g , $\omega = \frac{r(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{3L_1}$, (см. [4]);

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} M + 3m & 0 & 0 \\ 0 & M + 3m & 0 \\ 0 & 0 & I_{Y_g} \end{pmatrix} - \text{матрица обобщенных масс.}$$

I_{Y_g} - момент инерции тележки относительно оси OY_g :

$$I_{Y_g} = I_x \sin^2(\vartheta) + I_y \cos^2 \vartheta \cos^2 \gamma + I_z \cos^2 \vartheta \sin^2 \gamma + 3mL_1^2.$$

Вектор \mathbf{W}_g непосредственно выражается через угловые скорости колес:

$$\mathbf{W}_g = r C_{OE} C_{OW}^{-1} \mathbf{W},$$

где $\mathbf{W} = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3)^T$; $C_{OW} = C_{WO}^T$.

Откуда следует:

$$\dot{\mathbf{W}}_g = r C_{OE} C_{OW}^{-1} \dot{\mathbf{W}} + r \dot{C}_{OE} C_{OW}^{-1} \mathbf{W}. \quad (6)$$

Из (4), (5) и (6) получается:

$$\mathbf{F} = \frac{(\mathbf{A}\dot{\mathbf{W}} + \omega\mathbf{B}\mathbf{W})r}{9}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A} = C_{WO}^{-1} C_{OE}^{-1} \mathbf{I} C_{OE} C_{OW}^{-1} = \begin{pmatrix} 4(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} \\ -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & 4(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} \\ -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & -2(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} & 4(M+3m) + \frac{I_{Yg}}{L_1^2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \frac{C_{WO}^{-1} C_{OE}^{-1} \mathbf{I} \dot{C}_{OE} C_{OW}^{-1}}{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3}(M+3m) & 2\sqrt{3}(M+3m) \\ 2\sqrt{3}(M+3m) & 0 & -2\sqrt{3}(M+3m) \\ -2\sqrt{3}(M+3m) & 2\sqrt{3}(M+3m) & 0 \end{pmatrix}.$$

Моменты, приложенные к валу двигателей:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\partial - \mathbf{M}_{c,\partial} - ik_{\text{вт.}\partial} \mathbf{W} - i(I_\partial + I_p) \dot{\mathbf{W}}, \quad (8)$$

где $\mathbf{M}_\partial = (M_{\partial 1} \quad M_{\partial 2} \quad M_{\partial 3})^T$ - моменты, развиваемые двигателями;

$\mathbf{M}_{c,\partial} = (M_{c,\partial 1} \quad M_{c,\partial 2} \quad M_{c,\partial 3})^T$ - моменты сухого трения подшипников двигателей; $k_{\text{вт.}\partial}$ - коэффициент вязкого трения подшипников двигателей; I_∂, I_p - моменты инерции вала и редуктора двигателей, соответственно; i - передаточное число редуктора двигателей.

Моменты, приложенные к валу колес:

$$\mathbf{M}_k = i\mu\mathbf{M} - \mathbf{M}_{c,n} - k_{\text{вт.}n} \mathbf{W}, \quad (9)$$

где $\mathbf{M}_{c,n} = (M_{c,n1} \quad M_{c,n2} \quad M_{c,n3})^T$ - моменты сухого трения подшипников колес; $k_{\text{вт.}n}$ - коэффициент вязкого трения подшипников колес; μ - КПД редуктора двигателей.

Подставляем (1), (8) в (9):

$$\mathbf{M}_k = i\mu\mathbf{C}_M \mathbf{J}_\gamma - (i\mu\mathbf{M}_{c,\partial} + \mathbf{M}_{c,n}) - (i^2\mu k_{\text{вт.}\partial} + k_{\text{вт.}n}) \mathbf{W} - i^2\mu(I_\partial + I_p) \dot{\mathbf{W}}, \quad (10)$$

где $\mathbf{J}_\gamma = (J_{\gamma 1} \quad J_{\gamma 2} \quad J_{\gamma 3})^T$ - токи в якорных обмотках двигателей.

Из (3) и (7) получаем:

$$\mathbf{M}_k - \mathbf{M}_f = \frac{(\mathbf{A}\dot{\mathbf{W}} + \omega\mathbf{B}\mathbf{W})r^2}{9} + \mathbf{I}_w \dot{\mathbf{W}} = \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}, \quad (11)$$

где $\mathbf{A}_1 = \frac{1}{9}r^2\mathbf{A} + \mathbf{I}_w$; $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{9}r^2\omega\mathbf{B}$.

Формулы (10) и (11) дают:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{A}_2 \left[i\mu c_m \mathbf{J}_я - (i\mu M_{c,\delta} + M_{c,n} + M_f) \right] - \mathbf{B}_2 \mathbf{W}, \quad (12)$$

где $\mathbf{A}_2 = \left[\mathbf{A}_1 + i^2\mu(J_\delta + J_p) \right]^{-1}$; $\mathbf{B}_2 = \left[\mathbf{A}_1 + i^2\mu(J_\delta + J_p) \right]^{-1} \left[\mathbf{B}_1 + (i^2\mu k_{\text{вт.}\delta} + k_{\text{вт.н}}) \right]$.

Перепишем матричное уравнение (12) в скалярном виде:

$$\dot{\omega}_j = M_{Tj} - M_{cj}^\Sigma - (B_2^{j1}\omega_1 + B_2^{j2}\omega_2 + B_2^{j3}\omega_3); \quad j = \overline{1..3}, \quad (13)$$

где $M_{Tj} = i\mu c_m (A_2^{j1}J_{я1} + A_2^{j2}J_{я2} + A_2^{j3}J_{я3})$;
 $M_{cj}^\Sigma = A_2^{j1}M_{c1} + A_2^{j2}M_{c2} + A_2^{j3}M_{c3}$;
 $M_{cj} = i\mu M_{c,\delta_j} + M_{c,n_j} + M_{f_j}$.

Из формулы (13) видно, что на динамику каждого колеса влияют не только его «собственные» факторы (угловая скорость, развиваемый момент двигателя, момент сухого трения, момент вязкого трения, момент сопротивления качению), но и факторы, входящие в описание движения других колес. Это объясняется тем, что поскольку оси трех колес тележки жестко связаны друг с другом через платформу, движение каждого колеса оказывает влияние на движения остальных.

Поступательные ускорения тележки в земной СК:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Xg} &= \frac{F_x \cos\psi + F_z \sin\psi}{M}; \\ \dot{V}_{Zg} &= \frac{-F_x \sin\psi + F_z \cos\psi}{M}; \\ \dot{V}_{Yg} &= \frac{N_1 + N_2 + N_3}{M - 3m}, \end{aligned}$$

где F_x, F_z – проекции суммарной силы на оси опорно-связанной СК $OXYZ$.

$$\begin{aligned} F_x &= -F_2 \cos\frac{\pi}{3} + F_3 \cos\frac{\pi}{3}; \\ F_z &= -F_1 + F_2 \sin\frac{\pi}{3} + F_3 \sin\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Координаты тележки в Земной СК $OX_g Y_g Z_g$ вычисляются по формулам:

$$\dot{X}_g = V_{Xg}; \quad \dot{Y}_g = V_{Yg}; \quad \dot{Z}_g = V_{Zg}.$$

Рассмотрим пространственное движение подпружиненной платформы тележки. На рис. 5. показана принципиальная схема тележки. Амортизатор состоит из пружины с жесткостью k и демпфирующего устройства с коэффициентом демпфирования b .

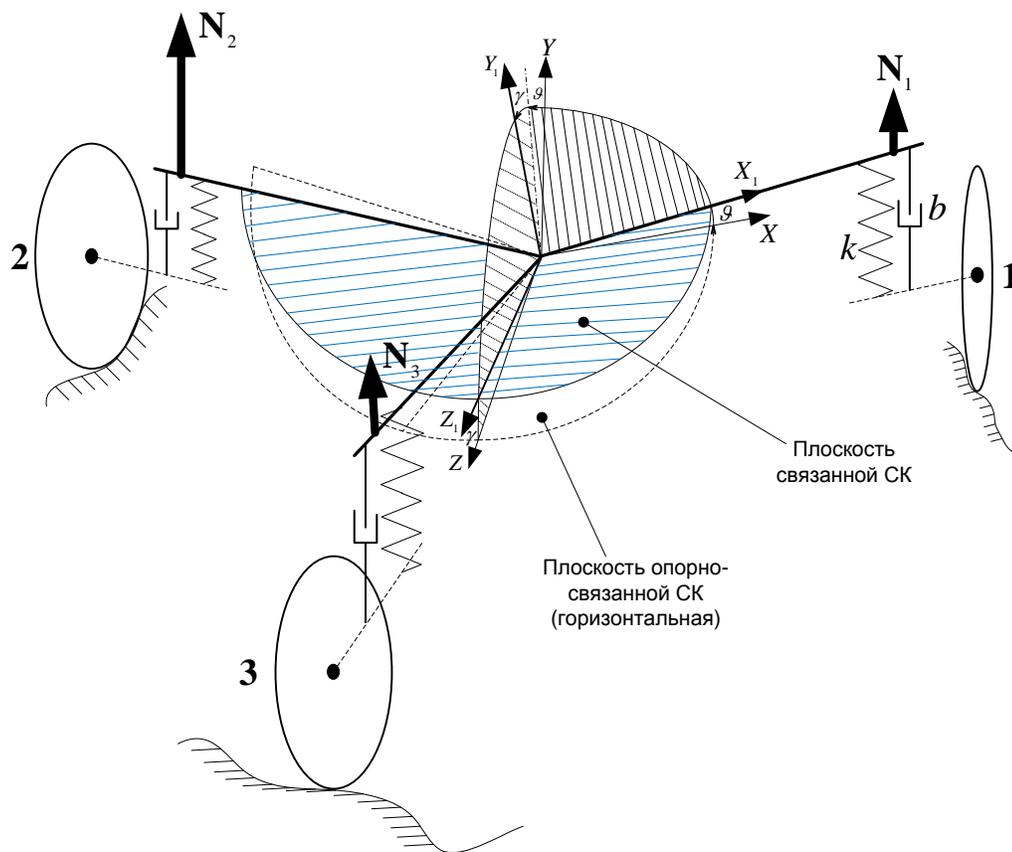


Рис. 5. Принципиальная схема тележки:

N_1, N_2, N_3 - сила реакции трех амортизаторов; k - коэффициент жесткости пружины; b - демпфирующий коэффициент

Силы реакции амортизаторов, действующие на платформу тележки:

$$N_i = -kh_i - bh_i; \quad i = \overline{1..3},$$

где h_i - изменение длины пружины амортизатора; k - коэффициент жесткости пружины; b - демпфирующий коэффициент.

Движение вершины пружины состоит из поступательного переносного движения с центром масс платформы и вращений вокруг ее осей (рис. 6).

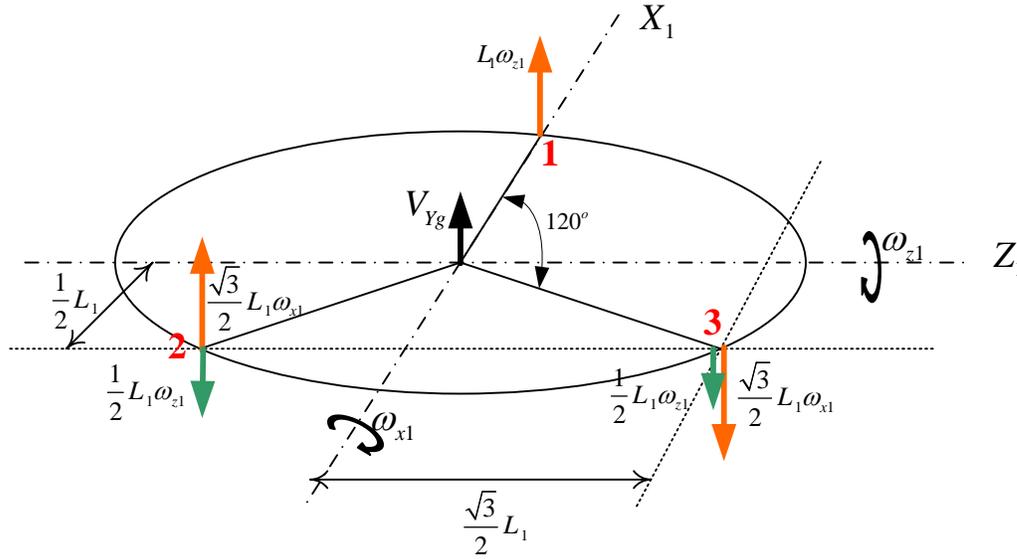


Рис. 6. Схема распределения скоростей

Из схемы видно:

$$\dot{h}_1 = V_{Yg} + L_1 \omega_{z1} - \dot{h}_{r1}; \quad \dot{h}_2 = V_{Yg} + \frac{\sqrt{3}}{2} L_1 \omega_{x1} - \frac{1}{2} L_1 \omega_{z1} - \dot{h}_{r2}; \quad \dot{h}_3 = V_{Yg} - \frac{\sqrt{3}}{2} L_1 \omega_{x1} - \frac{1}{2} L_1 \omega_{z1} - \dot{h}_{r3}.$$

Платформа тележки, в отличие от колес, совершает пространственное движение. На нее, кроме силы тяжести, действуют три силы реакции амортизаторов и три силы тяги со стороны колес. Поэтому удобнее найти моменты, действующие на платформу тележки в опорной СК $OXYZ$ (т.к. все силы находятся в плоскостях этой СК, что позволяет легко найти их проекции на оси данной СК). После этого используем матрицу перехода для вычисления этих моментов в СК $OX_1Y_1Z_1$.

$$\begin{cases} M_x = F_{T1}(Y_g - h_{r1} - r) - F_{T2}(Y_g - h_{r2} - r) \cos \frac{\pi}{3} - F_{T3}(Y_g - h_{r3} - r) \cos \frac{\pi}{3} + (N_2 - N_3) L_1 \sin \frac{\pi}{3}; \\ M_y = (F_{T1} + F_{T2} + F_{T3}) L_1; \\ M_z = -F_{T2}(Y_g - h_{r2} - r) \sin \frac{\pi}{3} + F_{T3}(Y_g - h_{r3} - r) \sin \frac{\pi}{3} + \left(N_1 - (N_2 + N_3) \cos \frac{\pi}{3} \right) L_1, \end{cases}$$

где Y_g – высота центра масс платформы тележки; F_{Ti} – силы тяги.

Силы тяги равны по величине силам, действующим на колеса от платформы:

$$F_{Ti} = (F_i - m r \dot{\omega}_i) \cos \alpha_i \approx F_i - m r \dot{\omega}_i; \quad i = \overline{1..3},$$

где ω_i - угловые скорости колес.

Моменты сил, действующие на платформу тележки относительно осей связанной СК:

$$\begin{cases} M_{x1} = M_x \cos \vartheta + M_y \sin \vartheta; \\ M_{y1} = -M_x \cos \gamma \sin \vartheta + M_y \cos \gamma \cos \vartheta + M_z \sin \gamma; \\ M_{z1} = M_x \sin \gamma \sin \vartheta - M_y \sin \gamma \cos \vartheta + M_z \cos \gamma. \end{cases}$$

Угловые ускорения платформы в связанной СК:

$$\dot{\omega}_{x1} = \frac{(I_Y - I_Z)I_Y \omega_{y1} \omega_{z1} + I_Y M_{x1}}{I_X I_Y}; \quad \dot{\omega}_{y1} = \frac{(I_Z - I_X)I_X \omega_{x1} \omega_{z1} + I_X M_{y1}}{I_X I_Y}; \quad \dot{\omega}_{z1} = \frac{(I_X - I_Y)\omega_{x1} \omega_{y1} + M_{z1}}{I_Z},$$

где I_X, I_Y, I_Z - моменты инерции платформы.

Дифференциальные уравнения для параметров ориентации, т.е. углов Эйлера:

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma}{\cos \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \omega_{y1} \sin \gamma + \omega_{z1} \cos \gamma; \quad \dot{\gamma} = \omega_{x1} - (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta.$$

Итоговая математическая модель движения тележки изображена на рис. 7.

II. Алгоритм управления движением тележки с использованием ПИД регулятора

Из решения задачи оптимального управления [10] определены, по некоторому критерию, требуемые траектории движения $X_{зад.}(t)$ и вектор оптимального управления $U_{зад.}(t)$ (программные движение и управление). Поскольку требуется реализация полученного программного управления, то для их стабилизации на интервале управления вводится ПИД регулятор, обеспечивающий точность требуемых траекторий при их возможных отклонениях (в соответствии с принципом обратной связи).

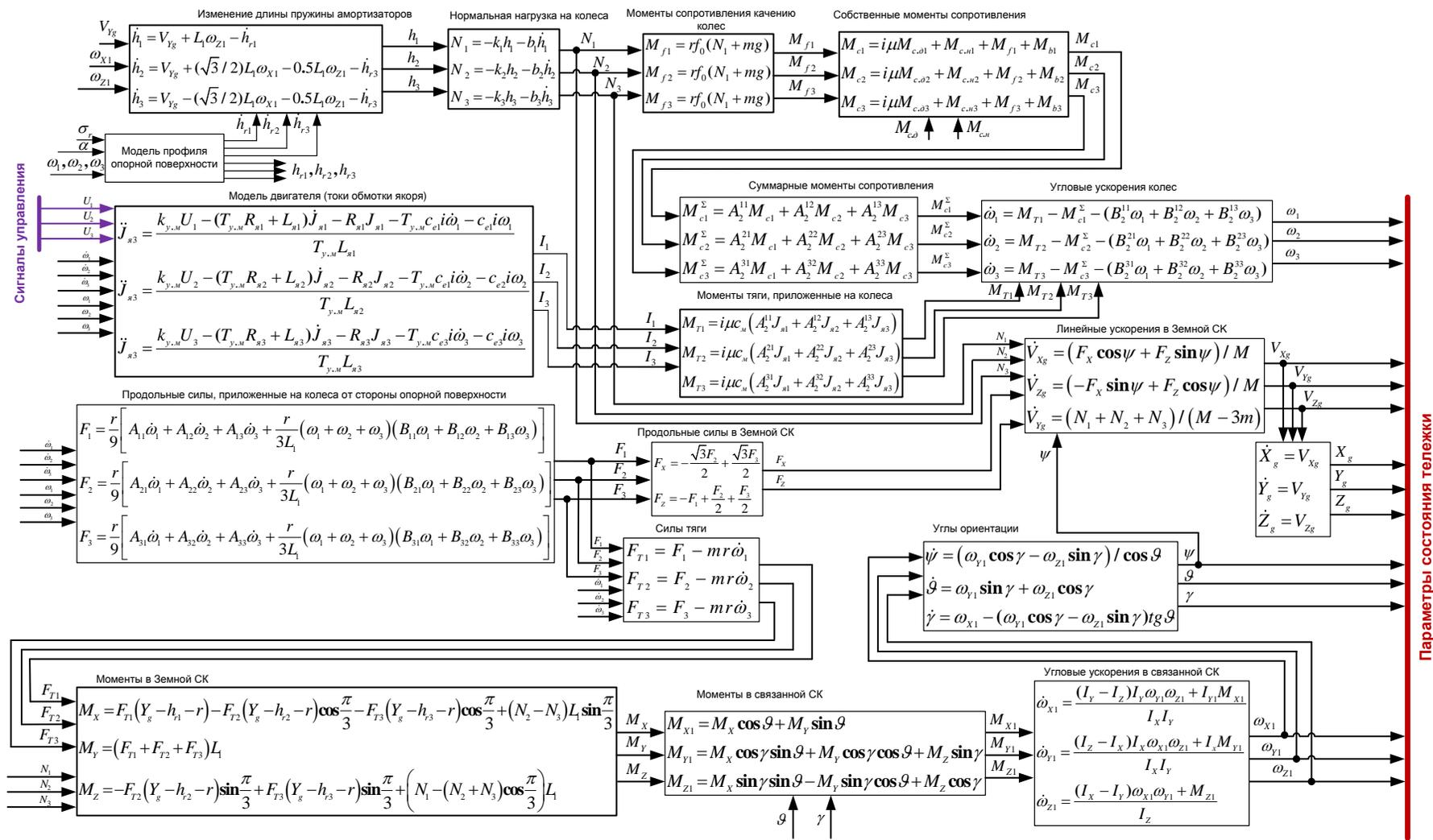


Рис. 7. Математическая модель движения тележки:

U_1, U_2, U_3 - входные напряжения усилителей мощности, т.е. U в (1)

Алгоритм ПИД регулятора построен на основе анализа решения уравнений (1) и (12):

$$\Delta U_1 = H_{11}\Delta U_{V_{xg}} + H_{12}\Delta U_{V_{zg}} + H_{13}\Delta U_{\omega};$$

$$\Delta U_2 = H_{21}\Delta U_{V_{xg}} + H_{22}\Delta U_{V_{zg}} + H_{23}\Delta U_{\omega};$$

$$\Delta U_3 = H_{31}\Delta U_{V_{xg}} + H_{32}\Delta U_{V_{zg}} + H_{33}\Delta U_{\omega},$$

причем:
$$\mathbf{H} = \frac{i\mu c_m k_{y..m}}{r} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_{OW} \mathbf{C}_{EO} \left[\mathbf{R}_я \mathbf{E} + i^2 \mu c_m T_{y..m} c_e \mathbf{A}_2 + (T_{y..m} \mathbf{R}_я + L_я) \mathbf{B}_2 \right]$$
 соответствует

варианту стационарного решения уравнений (1) и (12);

$$\Delta U_{V_{xg}} = k_{\dot{v}_x} (\dot{V}_{Xg} - \dot{V}_{Xg_{зад}}) + k_{v_x} (V_{Xg} - V_{Xg_{зад}}) + k_x (X_g - X_{g_{зад}});$$

$$\Delta U_{V_{zg}} = k_{\dot{v}_z} (\dot{V}_{Zg} - \dot{V}_{Zg_{зад}}) + k_{v_z} (V_{Zg} - V_{Zg_{зад}}) + k_z (Z_g - Z_{g_{зад}});$$

$$\Delta U_{\omega} = k_{\dot{\omega}} (\dot{\omega} - \dot{\omega}_{зад}) + k_{\omega} (\omega - \omega_{зад}) + k_{\psi} (\psi - \psi_{зад}),$$

где \mathbf{E} - единичная матрица; $k_{\dot{v}_x}, k_{v_x}, k_x, k_{\dot{v}_z}, k_{v_z}, k_z, k_{\dot{\omega}}, k_{\omega}, k_{\psi}$ - коэффициенты; $X_{g_{зад}}, Z_{g_{зад}}, \psi_{зад}$ - требуемые координаты тележки на оси OX_g, OZ_g и угол курса; $V_{Xg_{зад}}, V_{Zg_{зад}}, \omega_{зад}$ - требуемые проекции вектора линейной скорости на оси OX_g, OZ_g и угловая скорость курса; $\dot{V}_{Xg_{зад}}, \dot{V}_{Zg_{зад}}, \dot{\omega}_{зад}$ - производные от $V_{Xg_{зад}}, V_{Zg_{зад}}, \omega_{зад}$.

Управления на колеса формируются следующим образом:

$$U_i^{k+1} = U_i^k + \Delta U_i^{k+1}; i = \overline{1..3}.$$

II. Математическое моделирование движения тележки

При моделировании движения тележки используем следующие параметры двигателей и тележки:

- Двигатели: $T_{y..m} = 0.05$ с, $k_{y..m} = 10$, $L_я = 23$ мГн, $R_я = 1.91$ Ом, $P_{ном.} = 11.3$ кВт, $U_{ном.} = 420$ В, $\omega_{ном.} = 1280$ обр./мин., $KПД = 79\%$, $J_{\delta} = 0.09$ кг.м², $J_p = 0.01$ кг.м², $m_{\delta} = 115$ кг, $M_{c.\delta} = 0.05886$ Н.м, $k_{вт.\delta} = 0.03$, $i = 30$, $\mu = 92\%$;

- Параметры тележки: $M = 1845$ кг, $L_1 = 0.5$ м, $L_2 = 0.8$ м, $I_x = 1000$ кг.м², $I_y = 1500$ кг.м², $I_z = 1200$ кг.м², $k = 25000$ Н/м, $b = 3500$ Н.с/м;

- Колеса: $m = 25$ кг, $r = 0.25$ м, $I_w = 3$ кг.м², $M_{c.н} = 0.05886$ Н.м, $k_{вт.н} = 0.05$.

Общая схема моделирования движения тележки показана на рис. 8.

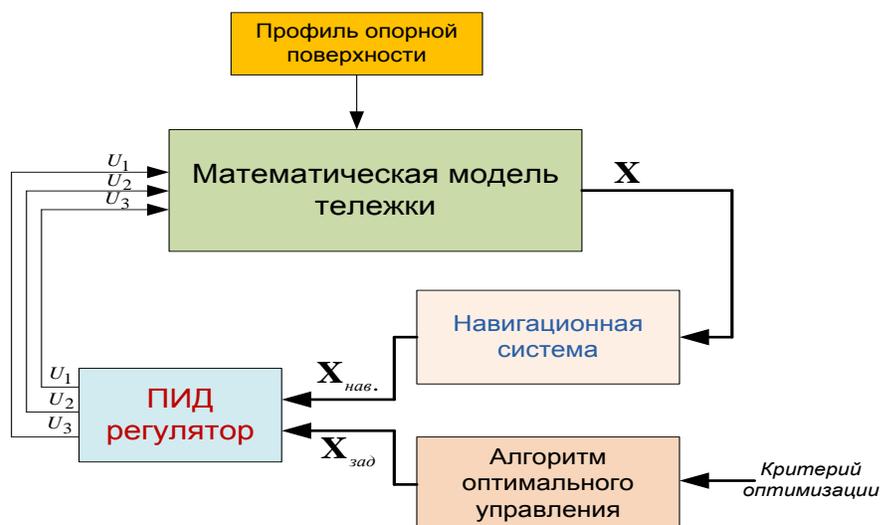


Рис. 8. ПИД регулятор в комплексе моделирования движения тележки:

\mathbf{X} - вектор фактического состояния тележки; $\mathbf{X}_{нав.}$ - вектор состояния тележки, полученного от навигационной системы; $\mathbf{X}_{зад}$ - вектор требуемого состояния тележки

Для проведения математического моделирования замкнутой системы, показанной на рис. 8, в данной статье используется навигационная система, датчики которой имеют характеристики, указанные в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики датчиков навигационной системы.

Параметры Оси	Датчик линейных ускорений			Датчик угловых скоростей			
	Смещение нуля $10^{-3}g$	Погрешность масштабного коэффициента %	Неортогональность датчиков в рад	Постоянная составляющая смещения нуля град/ч	Коэффициент линейной составляющей смещения нуля (град/ч)/с	Погрешность масштабного коэффициента %	Неортогональность датчиков в рад
Ox	1	1	0.0001	1	0.1	1	0.0001
Oy	1	1	0.0001	1	0.1	1	0.0001
Oz	1	1	0.0001	1	0.1	1	0.0001

Алгоритм и подробное описание используемой навигационной системы изложено в [11].

1. Влияние неровности опорной поверхности на движение тележки

В данной работе использована модель профиля асфальтобетонной опорной поверхности, описана в [8]. На рис. 9 показан результат моделирования движения тележки по ровной и неровной поверхности ($\sigma_r = 1$ см, $\varepsilon = 0.14$), причем кривые с плюсом «+» соответствуют движению по ровной поверхности.

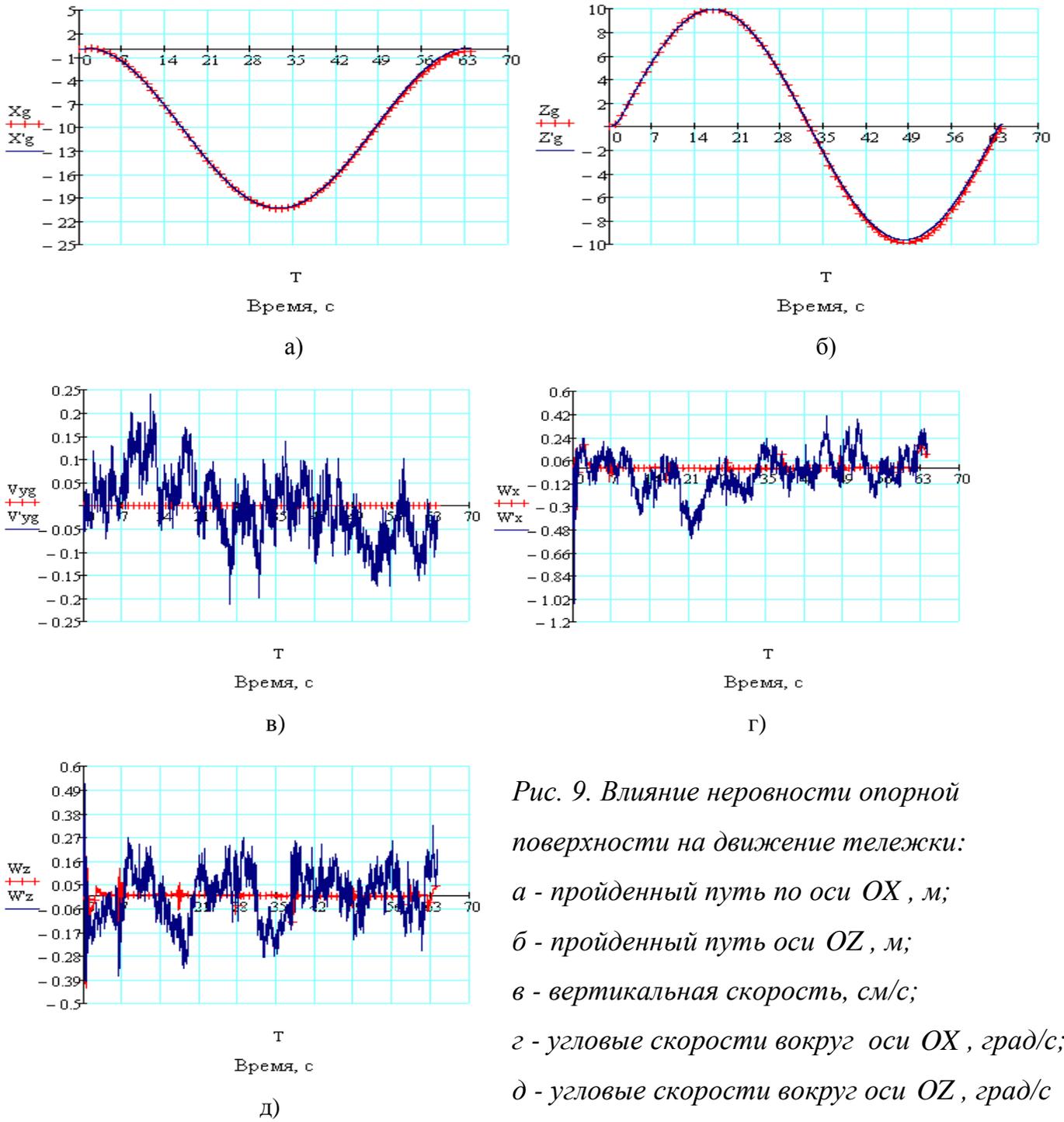


Рис. 9. Влияние неровности опорной поверхности на движение тележки:
 а - пройденный путь по оси OX, м;
 б - пройденный путь оси OZ, м;
 в - вертикальная скорость, см/с;
 г - угловые скорости вокруг оси OX, град/с;
 д - угловые скорости вокруг оси OZ, град/с

Видно из рис. 9, что неровность поверхности слабо влияет на плоское движение тележки (рис. 9, а, б), но достаточно сильно на пространственное движение платформы тележки (рис. 9, в, г, д). На рис. 10 показана зависимость уровня возмущенного пространственного движения платформы тележки, обусловленного неровностью поверхности, от дисперсии профиля поверхности σ_r . Естественно, чем больше σ_r , тем сильнее возмущенное движение платформы тележки.

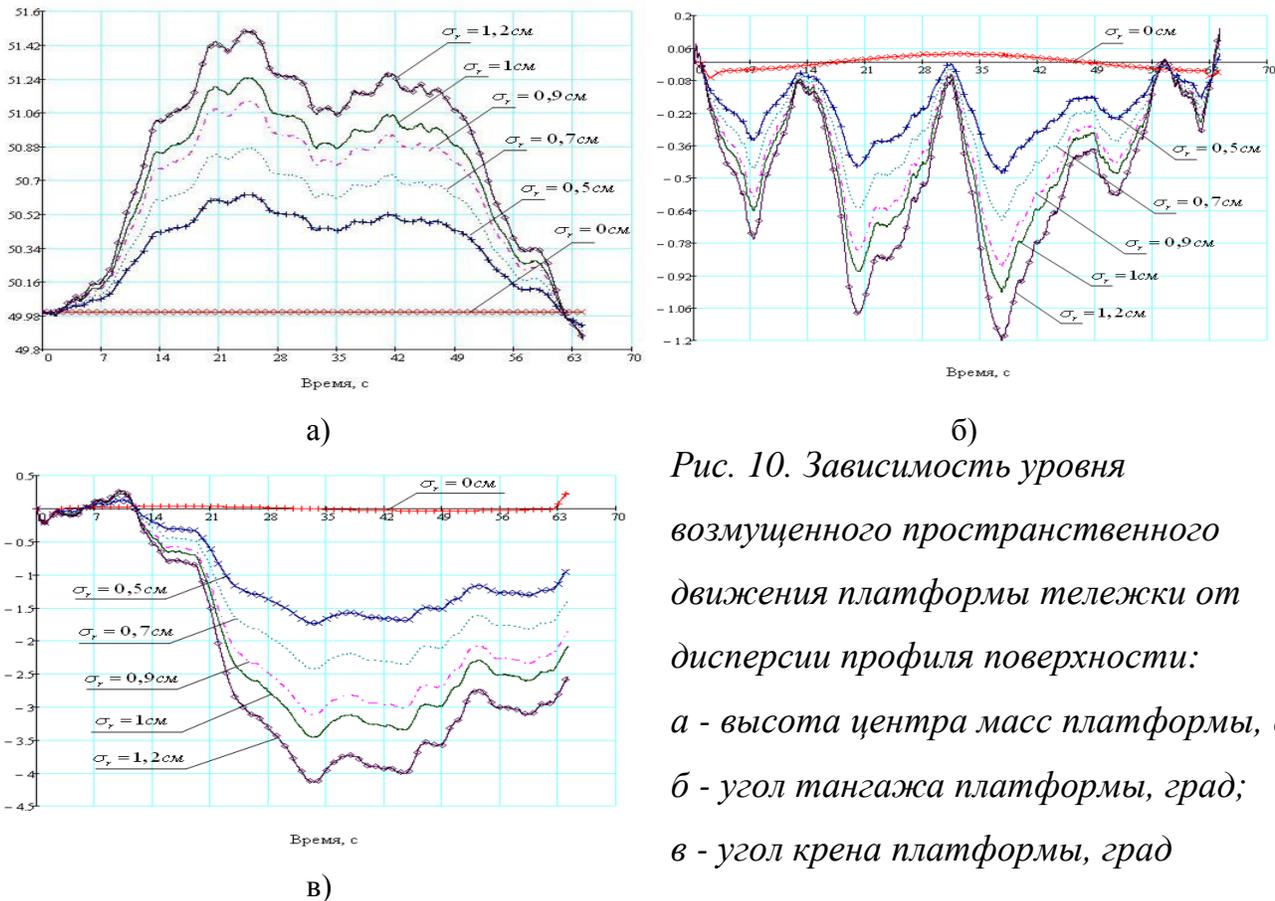


Рис. 10. Зависимость уровня возмущенного пространственного движения платформы тележки от дисперсии профиля поверхности:
 а - высота центра масс платформы, см;
 б - угол тангажа платформы, град;
 в - угол крена платформы, град

2. Примеры моделирования движения тележки с ПИД регулятором

Рассмотрим примеры, демонстрирующие особенность маневра тележки с тремя «омни» колесами. Параметры профиля опорной поверхности: $\sigma_r = 0.5$ см, $\varepsilon = 0.14$.

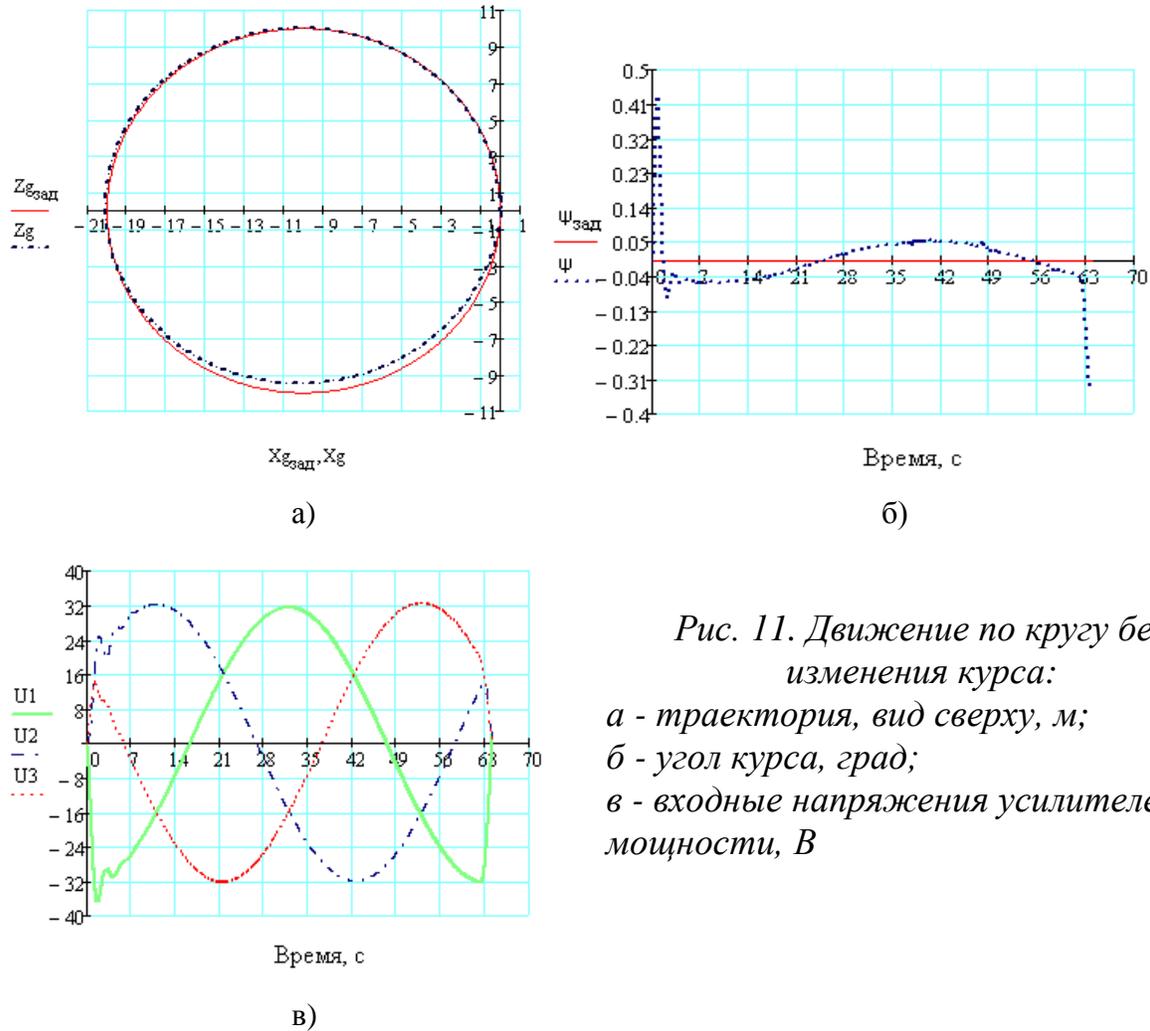
2.1. Движение по кругу без изменения курса

В данном режиме тележка движется по окружности радиуса 10м без вращения вокруг своей вертикальной оси, т.е. без изменения угла курса $\psi(t) = 0$. Начальное состояние тележки:

$V_0 = 0, X_{g_0} = 0, Z_{g_0} = 0, \psi_0 = 0, \omega_0 = 0$. Коэффициенты, используемые в алгоритме ПИД

регулятора: $k_{vx} = 0.01, k_{vy} = 0.03, k_x = 0.05; k_{vz} = 0.01, k_{vy} = 0.06, k_z = 0.05;$
 $k_{vx} = 0.03, k_{vy} = 0.7, k_x = 7.$

Результат моделирования показан на рис. 11.



*Рис. 11. Движение по кругу без изменения курса:
 а - траектория, вид сверху, м;
 б - угол курса, град;
 в - входные напряжения усилителей мощности, В*

Результата моделирования показывает, что ошибка управления по оси OX равна 0.2м, по оси OZ - 0.15м, по курсу - 0.31°. Эта ошибка обусловлена в основном погрешностью навигационной системы [11].

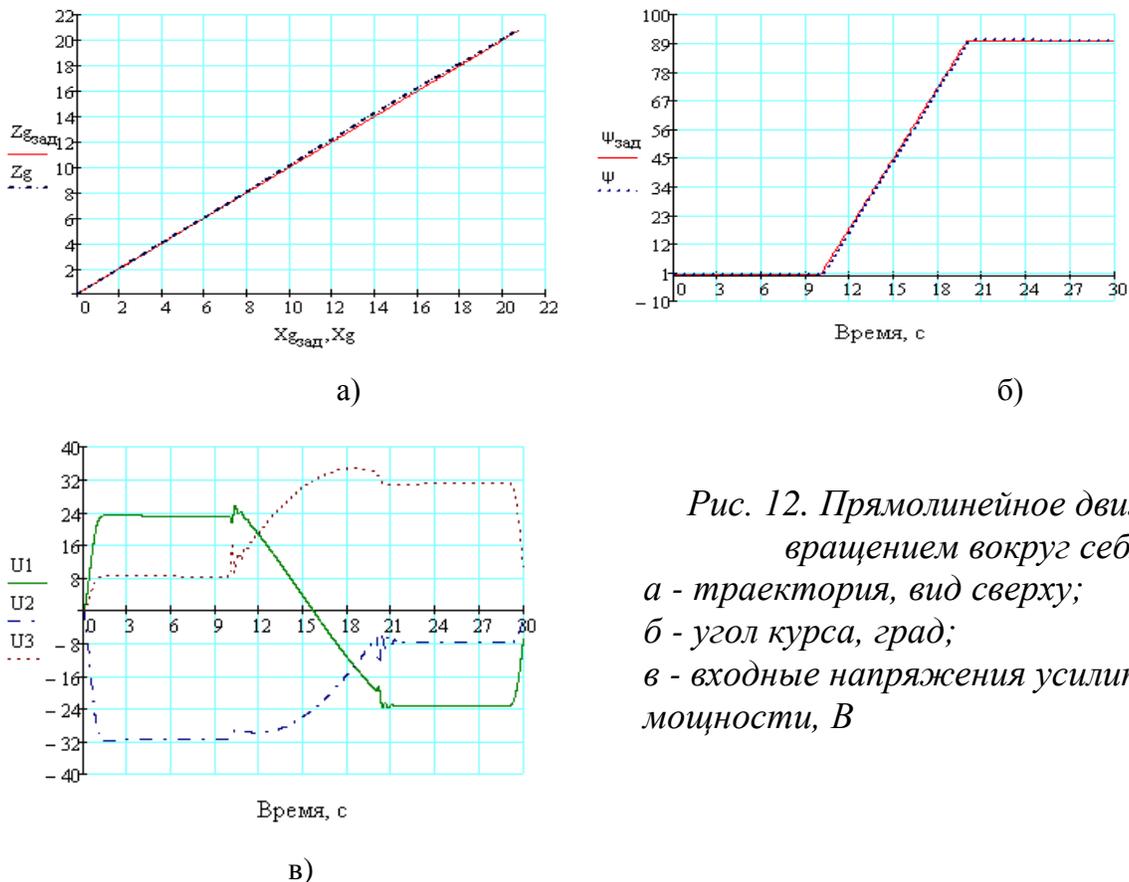
2.2. Прямолинейное движение тележки с вращением вокруг своей оси

В этом режиме, в первые 10с тележка движется с углом рыскания равным 45° (т.е. $V_{xg} = V_{zg} = V / \sqrt{2}$) без вращения, т.е. с нулевым углом курса $\psi = 0$. Потом в следующие 10с она вращается вокруг своей вертикальной оси для того, чтобы угол курса был равен 90°, при этом угол рыскания сохраняется как раньше (45°). В последние 10с угол курса сохраняется (90°). Модуль

линейной скорости тележка V увеличивается от нуля до 1м/с в первую секунду, а в последнюю секунду уменьшается до нуля. Начальное состояние тележки: $V_0 = 0$, $X_{g0} = 0$, $Z_{g0} = 0$, $\psi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$. Коэффициенты, используемые в алгоритме ПИД регулятора:

$$k_{vx} = 0.01, k_{vx} = 0.06, k_x = 0.05; k_{vz} = 0.01, k_{vz} = 0.06, k_z = 0.05; k_{\psi} = 0.03, k_{\psi} = 0.06, k_x = 0.5.$$

Результат моделирования показан на рис. 12.



*Рис. 12. Прямолинейное движение с вращением вокруг себя:
а - траектория, вид сверху;
б - угол курса, град;
в - входные напряжения усилителей мощности, В*

Результата моделирования показывает, что ошибка управления по оси OX равна 0.1м, по оси OZ - 0.1м, по курсу - 1° . Ошибка управления здесь, аналогично в п.2.1, также обусловлена, в основном, погрешностью навигационной системы [11].

Таким образом, построена математическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами, описывающую не только плоское движение тележки, но и пространственное движение ее платформы. Рассмотрены также разные режимы движения тележки, характеризующиеся особенностями маневра тележки с колесами типа «омни». Данная математическая модель позволяет в дальнейшем развитии исследовать точности движения тележки с измерительно-вычислительным комплексом на основе инерциальной системы измерения, размещенной на ее платформе.

Библиографический список

1. Andrew D. Park, "Omni-directional munitions handling vehicle"; U.S. Patent. #6668950, May 9, 2002.
2. Watanabe K., Shiraishi Y., Tzafestas S.G., Tang J., Fukuda T. Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots // J. Intelligent and Robotic Systems. 1998. V. 22. № 3-4. P. 315-330.
3. Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms, Jorge Angeles, Springer, New York, NY, 1997. ISBN 0-387-94540-7.
4. L. Wilson, C. Williams, J. Yance, J. Lew, R. L. Williams II P. Gallina, Design and Modeling of a Redundant Omni-directional RoboCup Goalie, The RoboCup 2001 International Symposium, Seattle.
5. J. Wu, R.L. Williams II, and J.Y. Lew, 2006, Velocity and Acceleration Cones for Kinematic and Dynamic Constraints on Omni-Directional Mobile Robots, ASME Transactions on Dynamic Systems, Measurement, and Control, 128(4): 788-799.
6. Peter Amico, "Omnidirectional self-propelled vehicle for ground handling of equipment". U.S. Patent. #5701966, Dec. 30, 1997.
7. Бурдаков С.Ф. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов: Учеб. Пособие для студ. Вузов, обучающихся по спец. «Робототехнические системы». – М.: Высш. шк., 1986. – 264 с.: ил.
8. Гришкевич А.М. Автомобиль. Теория: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 208 с.: ил.
9. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1971, 328 стр.
10. Костюков В.М. Вычисление оптимального управления самолетом градиентным методом // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, №8, 2000г.
11. Костюков В. М., Нгуен Н. Компьютерное исследование точности движения тяжелого беспилотного самолета с измерительно-вычислительным комплексом (ИВК) на основе бароинерциальной системы // Вестник МАИ, т. 19, №2, с.146-155, 2012г.

Сведения об авторе:

Нгуен Ньы Ман, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел.: +7926-467-32-60, e-mail: ngnhuman@mail.ru