УДК 519.676

О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами»

Хатунцева О.Н.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва,

ул. Ленина, 4А, Королев, Московская область, 141070, Россия

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Аннотация

Рассмотрены вопросы, связанные с возможной неединственностью плотности вероятности реализации случайной величины в стохастических процессах. Показано, что метод описания стохастических процессов для систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, позволяет находить различные плотности вероятности стохастического процесса, которые в определенном диапазоне случайных величин сами могут реализовываться случайным образом.

С помощью анализа размерности фазового пространства удается определить устойчивые и неустойчивые ветви решения для плотности вероятности. На основе Центральной Предельно Теоремы Линдеберга делается заключение о механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами».

Ключевые слова: стохастические процессы, скрытая марковская модель, разрывные функции, плотность вероятности.

1. Введение

В самых различных областях науки и техники зачастую приходится иметь дело не с детерминированными, а со стохастическими процессами и системами [1-10], и, несмотря на довольно пристальное внимание к ним со стороны ученых, полного понимания в вопросах их описания до сих пор не существует.

В середине 30-х годов прошлого века создатель «шкалы землетрясений» Чарльз Рихтер высказал предположение, что распределения с «тяжелыми» степенными хвостами ответственны за катастрофы. В дальнейшем это предположение находило подтверждение не только в природных явлениях, но и в техногенных, связанных с отказами в сложных технических устройствах и системах [11]. Анализ таких распределений позволяет вовремя предсказать и предотвратить возможные отказы в работе двигательных установок, обнаружить появления флаттера крыльев самолета, появление аномалий в работе электрических систем.

Однако вопрос о математических аспектах описания и обоснования возникновения распределений, отличных от нормальных – гауссовских и, в частности, распределений с «тяжелыми» степенными хвостами до сих пор остается открытым. Данная работа посвящена рассмотрению этой проблемы.

Для того чтобы понять возможный характер реализованных распределений зададимся вопросом о «поведении» плотности вероятности случайной величины.

Стационарная плотность вероятности однозначно определяет распределение случайной величины при реализации ее на промежутке времени, в котором происходит достаточно много ее реализаций. В результате, основные моменты, характеризующие такой процесс: среднее, дисперсия и так далее, являются определенными и, соответственно, могут быть предсказаны на любом достаточно большом интервале времени.

В случае стационарной плотности вероятности реализации стоимости ценных бумаг, игра на бирже была бы просто не возможна в связи с высокой предсказуемостью результата «в среднем». При стационарном распределении можно было бы с очень высокой точностью предсказывать реализации и других стохастических процессов, таких как метеорологические, гидродинамические и так далее.

Однако большинство стохастических процессов являются в достаточной мере непредсказуемыми. Отсутствие определенности в них связано не только с вероятностным распределением возможных реализаций исследуемого процесса, но и с возможным нестационарным характером поведения плотности вероятности.

При исследовании таких систем часто подразумевают, что нахождение закона, согласно которому происходит эволюция плотности вероятности, позволит полностью решить задачу описания стохастического процесса. Однако если предположить, что для нахождения эволюционного закона для плотности вероятности необходимо решить какую-то более общую нелинейную задачу, то такое решение не обязано быть единственным. В случае неединственности решения такой задачи, различные плотности вероятности реализации случайной величины сами могут реализовываться случайным образом. В этом случае неопределенность исследуемого процесса существенно повышается. Возможно, рассмотрение такого аспекта позволит объяснить некоторые особенности стохастических систем, в которых практически невозможно подобрать единственный закон, позволяющий достаточно полно «в среднем» описать их эволюцию.

Вопрос о том, по каким законам возникают и реализуются плотности вероятности в стохастических процессах, остается до сих пор открытым, несмотря на довольно пристальное внимание к нему со стороны ученых. В качестве основных направлений исследований этого вопроса можно выделить следующие: во-первых, это исследование динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями, решения которых имеют хаотический характер (см., например, [12]); во-вторых, описание стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений [13]. Остановимся кратко на каждом из них.

Хаотический характер решений автономных дифференциальных уравнений, возникает из-за чрезвычайной высокой чувствительности решений к начальным данным, в результате чего, незначительное отклонение при задании траекторий в начальный момент времени, может привести к их расхождению в будущем, порождая, тем самым вычислительный хаос. Тем не менее, такой процесс необходимо отделять от истинно стохастических процессов, поскольку на математическом уровне строгости автономные дифференциальные уравнения подчиняются теореме о единственности. Проблема состоит в том, что такие уравнения не имеют аналитических решений, а вычислительные методы, всегда привносят неопределенность из-за конечности шага по времени. Причем происходит это не только при задании начальных условий, а на каждом шаге вычислений, что может явиться источником возникновения в фазовом пространстве странного аттрактора [14].

Широко известными способами для описания таких хаотических систем являются методы, использующие операторный подход, например, операторы Купмана - фон Неймана, или операторы Перрона-Фробениуса. Эти подходы, вместо рассмотрения эволюции во времени единственного решения, рассматривают эволюцию «трубки», состоящей из различных траекторий, стартующих в один момент времени. В конечном счете, операторные методы сводятся к уравнению Лиувилля и задают единственное решение для нестационарной плотности вероятности.

Методы описания стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений можно, в свою очередь, условно разделить на два класса:

- во-первых, это соотношения в форме уравнений Ланжевена, которые состоят из обычного детерминированного дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей случайный процесс [15]: $dx/dt = f(x) + \sum_{m=1}^{n} g^m(x)\eta_m(t)$, где f, g - произвольные функции, η_m - случайные функции от времени;

- во-вторых, это уравнения Ито [16]. Их форма напоминает уравнения Ланжевена, но записанных с использованием стохастических дифференциалов:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\delta W, \qquad (1.1)$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ - коэффициенты сноса и волатильности; δW - бесконечно малый винеровский “шум”.

В стандартном винеровском процессе $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$, где $\varepsilon \sim N(0,1)$ - гауссова переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. В зависимости от способа задания коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x,t)$ в уравнении (1.1) выделяют такие процессы, как броуновское и логарифмическое блуждание, процесс Орнштейна-Уленбека и другие [17].

Такой подход, в отличие от методов исследования динамических систем, описываемых автономными уравнениями, предполагает задание неизменной во времени стохастической модели, накладываемой на детерминированное поведение системы. Этот подход основан на том, что «стохастика» процесса подбирается так, чтобы вычислительный эксперимент наиболее полно отражал эмпирический характер поведения системы. Общего метода по определению уравнения, которым должен описываться стохастический процесс не существует. Как правило, при описании реальных стохастических процессов не удается подобрать коэффициенты в стохастических уравнениях, которые бы удовлетворительно описывали процесс на довольно длительном промежутке времени. Выбор довольно простого вида стохастических дифференциальных уравнений обусловлен большой вычислительной сложностью численного интегрирования уравнений, содержащих случайные функции. В связи с этим возникает еще один аспект моделирования случайных процессов - практически невозможно сопрягать стохастические дифференциальные уравнения с обыкновенными детерминированными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, например, уравнениями Навье-Стокса. В этом случае, вычислительные сложности, связанные с интегрированием каждого вида этих уравнений, многократно возрастают. Кроме того, возникает взаимное влияние стохастических возмущений от искусственно задаваемых случайных процессов и вычислительных (модельных и сеточных) стохастических артефактов. Все это затрудняет использование стохастических дифференциальных уравнений при описании стохастических процессов и, что особенно важно, не позволяет в полной мере понять природу «стохастичности» исследуемых процессов.

От уравнений Ланжевена и Ито можно перейти к уравнениям типа Фоккера-Планка, но лишь в случае, когда характерное время корреляции случайной “силы” много меньше времени релаксации стохастической системы за счет диссипативной “силы” [13]. Таким требованиям удовлетворяют истинно марковские (без скрытых параметров [18]) процессы. В этом случае при усреднении случайных величин можно ограничиться рассмотрением двух первых моментов, что и приведет к ограничению членов уравнения в частных производных только диссипативным и диффузионным членами. Однако задавая такие жесткие требования к стохастической системе, мы, тем самым, упускаем очень важные аспекты этого процесса, о чем свидетельствует эмпирические данные, показывающие сильную ограниченность применения описания реальных стохастических процессов с использованием уравнений типа Фоккера-Планка.

В любом случае, независимо от того используются ли стохастические дифференциальные уравнения или уравнения типа Фоккера-Планка для описания стохастических процессов, они также, как и операторные методы не позволяют получить в качестве решения неединственную плотность вероятности реализации стохастической переменной.

Таким образом, причины отсутствия возможной неединственности плотности вероятности в рассмотренных случаях разные: в одних, «принудительное» задание стохастического процесса, наиболее «близкого» к эмпирическим данным на некотором временном интервале; в других, задание «закона», соответствующего дифференциальным уравнениям, описывающим динамический процесс. Однако, конечный результат одинаков – эти методы описывают эволюцию во времени нестационарной плотности вероятности, являющейся единственным решением задачи в заданной постановке.

Для того чтобы понять, как формируются (возможно неединственным образом) и эволюционируют плотности вероятности случайных стохастических процессов, необходимо выйти за рамки принятых подходов.

В отличие от подхода, принятого при описании хаотических динамических систем, мы не будем предполагать детерминированность (в математическом смысле) процесса - будем считать, что стохастичность процесса проявляется в том, что реализация значения исследуемой величины происходит случайным образом в соответствии с плотностью (или плотностями) вероятности в заданный момент времени. А, в отличие от метода описания процессов с помощью стохастических уравнений, закон изменения плотности вероятности не будем считать наперед заданным и неизменным: изменение функции плотности (или плотностей) вероятности будет зависеть от того, какие значения случайной величины реализовались.

Итак, в данной работе будет построен метод описания стохастических процессов в расширенном фазовом пространстве систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности реализации, причем такое изменение не обязано быть малой величиной. При описании такой системы особое место занимает временн***о***й интервал ее рассмотрения. От этого интервала, в первую очередь, зависит задание начальных условий задачи в виде известного реализованного распределения значений исследуемой случайной величины на заданном временном интервале. В качестве решения задачи определяются плотности вероятности исследуемого процесса в заданный момент времени, при этом показывается, что такое решение может быть неединственным в определенном диапазоне возможной реализации случайной величины. В этом случае реализация самой плотности вероятности, в соответствии с которой и реализуются случайные величины, будет также происходить случайным образом.

В соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдеберга (условия, которой считаем выполненными), распределение реализованных исследуемых величин (при неединственной плотности вероятности и большом числе реализаций) будет стремиться к нормальному (гауссовскому) распределению.

С помощью анализа размерности фазового пространства определяются устойчивые и неустойчивые ветви решения для плотности вероятности в тех областях реализации случайной величины, где решение единственно.

2. Построение математической модели для описания стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

Рассмотрим стохастический процесс, описываемый реализуемыми в фиксируемые моменты времени t_i $(i = 0,1,2,...,k-1,k)$ значениями $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i)$. Причем множество реализованных значений $\tilde{Q}(\tilde{q}) = \{\tilde{q}\}$ является подмножеством множества $Q(q) = \{q\}$ всех возможных значений q: $\tilde{Q}(\tilde{q}) \subset Q(q)$. Реализация значения $\tilde{q}_i$ в момент времени t_i происходит случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\varphi_i(q)$.

Будем считать, что также как и для марковских процессов, состояние исследуемого процесса будет определяться только предыдущим моментом времени, однако при этом не будет исключаться возможность влияния скрытых параметров (факторов). То есть, исследуемый процесс будем считать скрытой марковской моделью [18-19]. Скрытым фактором в случае рассмотрения стохастической системы, не имеющей выделенных состояний равновесия, будем считать ее свойство изменять функцию плотности вероятности реализации случайной величины вслед за реализацией одного из возможных значений, если это значение отлично от среднего. В случае, реализации значения, равного среднему, плотность вероятности в такой системе не изменяется.

Такая постановка задачи, в некотором смысле, близка к идеологии мартингалов – случайных процессов, в котором наилучшим (в смысле среднеквадратичного) предсказанием будущего является его настоящее состояние. И в рассматриваемом случае, и в случае мартингалов (а так же суб- и супермартингалов) система должна иметь внутренние механизмы, способные влиять на динамику стохастического процесса в ответ на реализацию случайных значений. Однако в отличие от принятой идеологии описания мартингалов, будем исходить не от определения статистики распределения, а попытаемся исследовать процесс на более глубоком уровне - на уровне описания динамики плотности вероятности случайной величины.

Остановимся на построении математической модели такой системы. Построим расширенное пространство переменных $(t,q;\varphi)$, в котором плоскость исследуемого процесса (t,q) является проекцией пространства $(t,q;\varphi)$ (см. рис.1). Будем искать в пространстве $(t,q;\varphi)$ такие зависимости $\varphi=\varphi(t,q)=\varphi(\tilde{q}(t),q)$, которые связывают между собой значения реализованных величин $\tilde{q}$ в различные моменты времени.

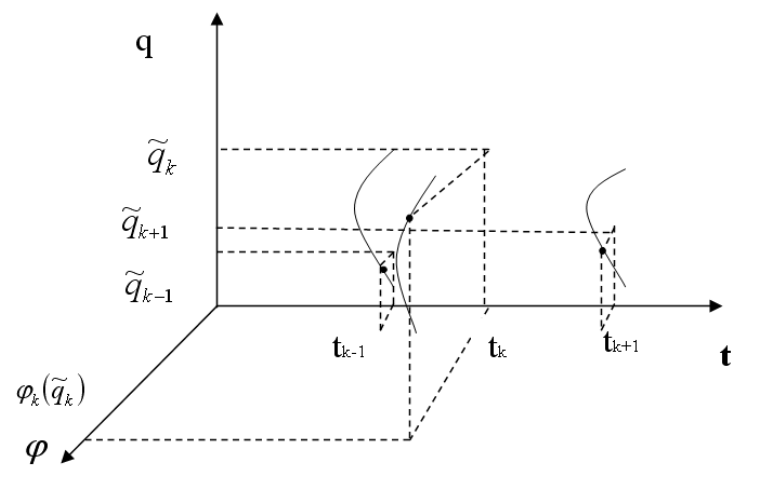

Рис.1

В расширенном пространстве $(t, q; \varphi)$ ведется поиск зависимостей $\varphi = \varphi(t, q)$, определяющих плотности вероятности реализации случайной величины в различные моменты времени.

Предположим, что в каждый фиксируемый момент времени t_i, существует нормированная функция $\varphi(t_i, q) = \varphi_i(q)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q) dq = 1$, которая описывает плотность вероятности реализации значения $\tilde{q}_i$. В точке t_i реализованное значение $\tilde{q}_i$ представ***и***мо в виде:

$$\tilde{q}_i = \langle q \rangle_i + (\Delta q)_i, \tag{2.1}$$

где $(\Delta q)_i$ ($\Delta q \in C^1(R)$) - отличие реализованного в момент времени t_i, значения $\tilde{q}_i$ от среднего значения возможных реализаций величин q:

$$\langle q \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi_i(q) dq. \tag{2.2}$$

Поскольку рассматриваются стохастические системы марковского типа, не имеющие выделенных состояний равновесия, то предполагается, что в них в каждый фиксированный момент времени система “знает” только о реализованном в предыдущий момент времени значении (например, при анализе фондового рынка - о стоимости ценных бумаг) и не “подозревает” о существовании ни каких других “реперных точек”. В связи с этим, будем рассматривать такие процессы, в которых реализация на текущем шаге значения $\tilde{q}$, отличного от среднего ($\tilde{q} \neq \langle q \rangle$), ведет на следующем шаге к изменению функции $\varphi(q)$, и следующая реализация происходит случайным образом в соответствии с новой плотностью вероятности. Если же, на текущем шаге, реализуется значение $\tilde{q}$, в точности равное среднему: $\tilde{q} = \langle q \rangle$, то при переходе к следующему шагу функция $\varphi(q)$ не изменяется и реализация значения $\tilde{q}$ на следующем шаге происходит с вероятностью, определяемой плотностью вероятности, полученной на текущем шаге.

Для таких систем найдем зависимость, связывающую плотность вероятности $\varphi_k(q)$, реализуемую в момент времени t_k, с реализованными в момент времени t_{k-1} значением $\tilde{q}_{k-1}$ и плотностью вероятности $\varphi_{k-1}(q)$. Описывая исследуемый процесс в пространстве $(t, q; \varphi)$, заменим в выражениях (2.1)-(2.2) значения, реализуемые в фиксированные моменты времени t_i, значениями, реализуемыми в любой произвольный момент времени t: $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i) \to \tilde{q}(t)$, $(\Delta q)_i = (\Delta q)(t_i) \to (\Delta q)(t)$, $\varphi_i(q) = \varphi(t_i, q) \to \varphi(t, q)$. При этом считаем, что нормировка функции $\varphi(t, q)$ остается постоянной во времени.

Исходя из выражений (2.1)-(2.2), запишем: $\tilde{q} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(t, q)dq + (\Delta q)(t)$.

Продифференцируем обе части полученного выражения по времени:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(t, q)dq + \frac{d(\Delta q)}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\frac{d\varphi(t, q)}{dt}dq + \frac{d(\Delta q)}{dt}.$$

Используя свойство постоянства нормировки функции $\varphi(t, q)$: $\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q)dq = 0$, вычтем из правой части полученного соотношения нулевой член: $\kappa\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q)dq = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \kappa\frac{d\varphi(t, q)}{dt}dq$, где $\kappa = const$, и перепишем выражение в виде:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q-\kappa)\frac{d\varphi(t,q)}{dt}dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}.$$

Поскольку не будут рассматриваться никакие другие механизмы изменения функции φ от времени, кроме вышеописанного – при реализации текущего значения $\tilde{q}$, то выражение для производной функции φ по времени будет иметь вид:

$$\frac{d\varphi(t,q)}{dt} = \frac{d\varphi(\tilde{q}(t),q)}{dt} = \frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}}\frac{d\tilde{q}}{dt}.$$

Используя его, мы исключаем возможность, например, самопроизвольного изменения функции φ. При этом, выражение для производной $d\tilde{q}/dt$, приобретает вид:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q-\kappa)\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}}\frac{d\tilde{q}(t)}{dt}dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим проекцию описываемого процесса из пространства $(t,q;\varphi)$ на плоскость (t,q). Поскольку рассматриваемый процесс на данном масштабе рассмотрения зависит только от предыдущего момента времени, то до момента времени t_{k-1}, отстоящего на шаг от исследуемого момента времени t_k, реализованные значения $\tilde{q}$ нас интересовать не будут. Необходимо заметить, что введение на этом этапе двух моментов времени t_{k-1} и t_k, не означает обратного перехода от непрерывного к дискретному рассмотрении. Момент времени t_k будет использован только для удобства обозначения текущего момента и в дальнейшем будет заменен на $\boldsymbol{t}$, а использование момента времени t_{k-1} аналогично заданию начального условия задачи. Никакие другие моменты в непрерывной постановке задачи использоваться не будут.

Доопределяя величину $\tilde{q}_{k-1}$, как постоянное значение, на интервал $t < t_k$, и доопределяя значение $\tilde{q}_k$, которое должно реализоваться в момент времени t_k, на интервал $t \geq t_k$, запишем функцию $\tilde{q}(t)$ на плоскости (t,q) в виде разрывной функции:

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & если \quad t < t_k \\ \tilde{q}_k, & если \quad t \geq t_k \end{cases}.$$

Введем дополнительную функцию H, которая будет принимать значение равное нулю везде до точки разрыва и равное единице везде после точки разрыва. Такая функция может иметь вид:

$$H = \frac{\tilde{q}(t) - \tilde{q}_{k-1}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = U_{-}(t - t_{k-1}) = \begin{cases} 0, & при \quad t < t_k \\ 1, & при \quad t \geq t_k \end{cases}, \text{ где. } \tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & если \quad t < t_k \\ \tilde{q}_k, & если \quad t \geq t_k \end{cases}. \qquad (2.4)$$

Производная функции H по t будет равна $dH/dt = dH/d(t - t_k) = \delta(t - t_k)$, где δ - дельта-функция. В линейном приближении изменения функции $\varphi(t,q)$ в окрестности точки t_k, можно записать:

$$\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t\right)_{t=t_k} \cdot (t - t_k) = \left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k} \cdot (q - \tilde{q}_k).$$

Если в точке $q = \tilde{q}_k$ выполняется соотношение: $\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k} = 0$, то будет равна нулю и производная $\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t\right)_{t=t_k}$, то есть в следующий момент времени t_{k+1} плотность вероятности не изменится, и реализация следующего значения $\tilde{q}$ на плоскости (t,q) произойдет случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\varphi_{k+1}(q)=\varphi_k(q)$. Если же $\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}\neq 0$, то $\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}\neq 0$ и

$t-t_k=\dfrac{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}(q-\tilde{q}_k)$, поэтому,

$$\frac{dH}{dt}=\delta(t-t_k)=\delta\left(\frac{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}(q-\tilde{q}_k)\right)=\left|\frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta(q-\tilde{q}_k). \tag{2.5}$$

Чтобы придерживаться “единообразия” описания изменения функции $\varphi(t,q)$, можно, не теряя общности, не рассматривать те моменты времени t_j, когда равны нулю производные $\left(d\varphi_j(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_j}$, $\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_j}/\partial t\right)_{t=t_j}$, а рассматривать следующие за ними моменты времени t_{j+1}. Как будет показано ниже, полученные итерационные выражения для функции $\varphi(t,q)$, в линейной постановке задачи, не будут зависеть от шага времени Δt, и поэтому, такие временные переходы не являются запрещенными.

Используя зависимости (2.4)-(2.5), а так же выбирая в качестве константы κ значение $\kappa=\langle q\rangle_k$, перепишем выражение (2.3) в виде:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt}=\frac{d(\Delta q)}{dt}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial H}\frac{dH}{dt}dq=$$

$$=\frac{d(\Delta q)}{dt}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}}(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\left|\frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta(q-\tilde{q}_k)dq=$$

$$=\frac{d(\Delta q)}{dt}+\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\left|\frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\left(\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}.$$

Значение константы $\kappa=\langle q\rangle_k$, выбиралось из соображения, чтобы в том случае, если $\tilde{q}_k=\langle q\rangle_k$, изменение $\tilde{q}$ в следующий момент времени не зависело бы от изменения функции φ, то есть выполнялось бы соотношение: $d\tilde{q}/dt = d(\Delta q)/dt$.

Осредняя левую и правую часть полученного выражения по плотности вероятности $\varphi_k(q)dq$, получим соотношение:

$$\left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle + \left(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k\right)\left(\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}\right)\left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}, \text{ где } \langle\cdot\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot\, \varphi_k(q)dq. \quad (2.6)$$

Обратимся к левой части выражения (2.6). Используя выражения (2.4)-(2.5), получим:

$$\left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{q}}{dt} \varphi_k(q)dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q)dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}\right)\left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k)\varphi_k(q)dq =$$

$$= \left(\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}\right)\left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=q_k}} \right| \varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}.$$

Значение $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ в правой части выражения (2.6) можно так же найти, используя выражения (2.4)-(2.5). Для этого заметим, что в случае рассмотрения любой неизменной во времени функции $\varphi(q)$, имеют место соотношения:

$$\langle \Delta q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q)dq = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi(q)dq = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q)dq = 0.$$

Поэтому ненулевое значение величины $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ на интервале $t_{k-1} \le t \le t_k$, может быть обусловлено только изменением функции $\varphi(t,q)$ во времени. Следовательно, среднее значение производной $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$, можно записать в виде:

$$\left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi_k(q) dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial \varphi(t,q)} \frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{1}{\partial \varphi(t,q)/\partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{1}{\partial \varphi(t,q)/\partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t \right)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq =$$

$$= \left(\Delta\left(\frac{1}{\partial \varphi(t,q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t \right)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} .$$

Учитывая, что на рассматриваемом интервале времени $t_{k-1} \le t \le t_k$, можно записать

$$\left(\Delta\left(\frac{1}{\partial \varphi(t,q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} = \frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} ,$$

подставим полученные выражения в уравнение (2.6). В результате получим зависимость:

$$\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} = \left(\frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_{k-1}}} \right) \varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} + \left(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k \right) \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} .$$

В случае линейного приближения изменения функции на интервале времени $t_{k-1} \le t \le t_k$ производная $(\partial \varphi(\tilde{q},q)/\partial \tilde{q})_{q=\tilde{q}_k}$ может быть записана в виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} .$$

Тогда полученное выражение принимает вид:

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left(\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} \right) \left(\left(\frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}} \right). \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7), связывающее реализованное в момент времени t_k значение $\tilde{q}_k$

со значением $\tilde{q}_{k-1}$, реализованным в момент времени t_{k-1}, а также с плотностью вероятности распределения и ее производной на текущем шаге, с плотностью вероятности распределения и ее производной на предыдущем шаге (все в точке $\tilde{q}_k$), является инвариантным относительно изменения временных масштабов рассмотрения исследуемых систем. В самом деле, при выводе соотношения (2.7) выбирался произвольный шаг по времени Δt, однако его величина не вошла в окончательное выражение.

Тем не менее, масштаб времени Δt опосредованно через значение функции $\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$ и значение производной $\left(d\varphi_{k-1}(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}$ влияет на значения прогнозируемых в следующий момент времени величин $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q\rangle_k$. Действительно, зафиксировав реализованное на текущем k-ом шаге значение $\tilde{q}_k$ и взяв в качестве предыдущего, $(k-1)$-го шага точку, отстоящую от точки k не на расстояние Δt, а на расстояние $n\Delta t$, где n - любое положительное число, мы получим другие эмпирические значения $\tilde{q}_{k-1}$, $\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$ и $\left(d\varphi_{k-1}(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}$, а следовательно (в соответствие с уравнением (2.7)), и другие значения функции $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, ее производной $\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и величины $\langle q\rangle_k$ на текущем k-ом шаге. Полученные таким образом новые значения $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q\rangle_k$ будут являться характеристиками нового (большего, если $n>1$, и меньшего, если $n<1$) временного масштаба рассмотрения системы. Однако такое влияние масштаба времени Δt не носит регулярного характера на величины прогнозируемых параметров – их одинаковые значения могут быть получены на разных временных масштабах рассмотрения. Отсутствие параметра Δt в уравнении (2.7) ведет к тому, что при таком подходе отпадает необходимость специально вводить случайный процесс, описывающий вероятностные по времени скачки изменения системы, как это делают, например, при описании пуассоновских процессов [16].

Значение $\tilde{q}_k$ в соотношении (2.7) напрямую не зависит от величины $\tilde{q}_{k-1}$, то есть на плоскости (t,q) значения $\tilde{q}_i$ ведут себя как случайные величины. Учитывая, что $\langle q\rangle_k$ и $\langle q\rangle_{k-1}$ - являются константами, характеризующие распределения φ_k и φ_{k-1}, уравнение (2.7) можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}}\right)\left(\left(\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)}{d\left(q-\langle q\rangle_k\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}}-\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{d\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right)+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}}\right).$$

Поскольку $\tilde{q}_k=q\big|_{q=\tilde{q}_k}$, то во всех выражениях для производных $\left(d\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)/d\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)\right)_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(d\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)/d\left(q-\langle q\rangle_k\right)\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и для функций $\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\Big|_{q=\tilde{q}_k}$, входящих в полученное соотношение, переменную q можно заменить новой переменной $\tilde{q}_k$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{d\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)/d\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}-\frac{1}{d\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)/d\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)}\right)+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}\right).$$

Обозначив $\tilde{q}_k-\langle q\rangle_i \coloneqq p_i$ (где $i=k-1,k$), запишем:

$$\frac{p_k-\left(\tilde{q}_{k-1}-\langle q\rangle_k\right)}{\varphi_k(p_k)}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\varphi_k(p_k)}\right)\left(\left(\frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k}-\frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}}\right)+\frac{p_k}{\varphi_k(p_k)}\right). \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8), связывающее в двух точках t_{k-1} и t_k значения p_{k-1} и p_k (которые представляют собой отклонения величины $\tilde{q}_k$ от средних значений $\langle q \rangle$ в этих точках), а также плотности вероятности реализации этих значений, можно (также как и уравнение (2.7)) считать основным уравнением задачи определения динамики стохастического процесса для систем, не имеющих выделенного состояния равновесия. Оба этих уравнения необратимы по времени.

Уравнение (2.8) допускает аналитическое нахождения асимптот решения в двух предельных случаях. Во-первых, в случае мартингалов, когда реализованное значение на предыдущем шаге становится средним значением на шаге текущем: $\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$. Во-вторых, в случае больших значений производных:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} >> 1 \text{ (или } \frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{p_k - \left(\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k\right)} >> 1\text{)},$$

когда небольшое изменение реализованного значения $\tilde{q}$ приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

3. Метод описания стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Уравнение (2.8), можно переписать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})} = \frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)}. \tag{3.1}$$

В данной работе рассмотрим только второй предельный случай, в котором уравнение (2.8) (или (3.1)) имеет асимптоты аналитического решения. А именно, когда небольшие изменения реализованного значения исследуемого стохастического процесса на предыдущем шаге приводят к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности на шаге текущем:

$$\frac{\varphi_k(p_k)-\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}=\frac{\varphi_k(p_k)\big|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}-\varphi_{k-1}(p_{k-1})\big|_{p_{k-1}=\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}}}{p_k-\left(\tilde{q}_{k-1}-\langle q\rangle_k\right)}>>1.$$

К такому же предельному случаю можно перейти, если не рассматривать фиксированные моменты времени, а выбирать каждый раз в качестве t_{k-1} такие временные шаги, на которых уже реализовались интересующие нас (или близкие к ним) значения стохастического процесса $\tilde{q}_{k-1}$: $\tilde{q}_{k-1}\approx\tilde{q}_k$ и при этом $\varphi_k(p_k)\big|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}\neq\varphi_{k-1}(p_{k-1})\big|_{p_{k-1}=\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}}$. Эта процедура не является запрещенной, в связи с инвариантностью шага по времени (см. главу 1). В любом из этих случаев можно пренебречь членом, стоящим в левой части уравнения (3.1) и перейти к соотношению:

$$p_k=\varphi_k(p_k)\left(\frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}-\frac{1}{d\varphi_k/dp_k}\right). \tag{3.2}$$

Для упрощения записи индексы k в выражении (3.2) можно опустить. Подразумевая в дальнейшем, что аргументы и функции без индекса относятся к текущему моменту времени, перепишем соотношение (3.2) в виде:

$$\frac{1}{d\varphi/dp}=\frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}-\frac{p}{\varphi},\quad \text{где } p=\tilde{q}-\langle q\rangle,\quad p_{k-1}=\tilde{q}-\langle q\rangle_{k-1}. \tag{3.3}$$

Зафиксируем значение $\tilde{q}$, которое может реализоваться на текущем шаге, плотность вероятности реализации которого, мы хотим найти. Изменяемыми величинами будут плотность вероятности реализации величины $\tilde{q}$ на текущем шаге

– функция $\varphi(p)=\varphi(q)\big|_{q=\tilde{q}}$, среднее значение $\langle q\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(q)dq$ и переменная $p=\tilde{q}-\langle q\rangle$. Значения функции $\varphi_{k-1}(p_{k-1})=\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}}$ и ее производной $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}=\left(d\varphi_{k-1}(q)/dq\right)\big|_{q=\tilde{q}}$ на предыдущем $(k-1)$-м шаге, в этом случае, являются константами (как уже реализованные величины). Тогда соотношение (3.3) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Его решениями, в случае $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\neq 0$ и $\varphi(p)\neq 0$, являются либо функции вида: $\varphi(p)=2\left|d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\cdot p\right|$, либо

$$\varphi(p)=p\,d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\pm\sqrt{p^2\left(d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\right)^2+\alpha}\,, \qquad (3.4)$$

где $\alpha\neq 0$ - константа при фиксированном значении $\tilde{q}$. В общем случае: $\alpha=\alpha(\tilde{q})$.

В выражении (3.4) в качестве плотности вероятности принимаются только действительные положительные значения. При больших значениях p функция $\varphi(p)$ имеет две асимптоты, одна из которых растет пропорционально первой степени p, а другая - наоборот, спадает $\sim p^{-1}$:

$$\varphi(p)\big|_{p\to\infty}=\begin{cases}2\left|d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\cdot p\right| \\ \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\alpha}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}\cdot\dfrac{1}{p}\right|\end{cases}. \qquad (3.5)$$

Проблема конечной нормировки негауссовских функций, типа выражений (3.4)-(3.5), в практических задачах может быть разрешена благодаря ограниченности диапазона области определения значений переменных q или p, по которым эти функции интегрируются. За пределами таких диапазонов значения функций считаются нулевыми. Если рассматривать конкретные физические системы, то ограничения на диапазоны значений переменных q или p часто накладываются естественным образом. Например, если $\varphi(p)$ - вероятность реализации возможных значений стоимости акций на торгах какого-то предприятия в рассматриваемый момент времени, то можно смело отбросить слишком большие и слишком малые значения величин p, а не считать вероятность их реализации малой, но конечной величиной. То же самое можно сказать в случае, когда функция $\varphi(p)$ описывает вероятность реализации пульсаций скорости или энергии в потоке жидкости. Ограничения этих величин будут определяться, как максимум, величиной полной кинетической энергии рассматриваемой системы. Хотя реальный диапазон значений будет еще уже. В случае неограниченного диапазона величин q или p (например, при рассмотрении в качестве этих переменных пространственных координат), для значений этих переменных, превышающих некоторые критические значения, могут реализовываться только решения, описываемые вторым выражением соотношения (3.5), то есть функцией типа $\varphi(p) \underset{p\to\infty}{\sim} const/p$. Конечная нормировка таких функций может быть разрешена методом ренормгрупп.

Будем предполагать выполнение условия Линдеберга. Рассмотрим распределение реализованных величин p в промежутке времени от $t-\Delta t$ до t, где интервал Δt такой, что в течение этого времени происходит n ($n \to \infty$) реализаций значения p, причем эти реализации происходят в соответствии с различными плотностями вероятности, являющиеся решениями уравнения (3.3), и при этом, ни одна из реализаций не является доминирующей (вклад каждого слагаемого в среднее арифметическое этих величин можно считать пренебрежимо малым по сравнению с итоговой суммой). Тогда, в соответствии с Центральной Предельной

Теоремой Линдеберга, функция распределения величин p на этом интервале будет стремиться к нормальному (гауссовскому) распределению для "умеренных" значений p. Для больших значений p функция распределения, так же как и плотность вероятности будет $\sim 1/p$. То есть рассматриваемый стохастический процесс со скрытыми параметрами имеет степенной (с "тяжелыми хвостами") характер распределения.

Таким образом, появление гауссовских распределений с «тяжелыми» степенными хвостами можно считать следствием возникновения в системе скрытых факторов, влияющих на динамику плотности вероятности, когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности реализации. Что подтверждает возможность прогноза природных и техногенных катастроф на основе анализа распределений исследуемых случайных величин на предмет их отклонения от нормального (гауссовского) закона распределения. В гидродинамике такое отклонение указывает на появление когерентных структур и возможности перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения.

Параметр α, входящий в выражение (3.4) и являющийся характеристикой рассматриваемой стохастической системы, может быть определен на основе анализа решений уравнения (3.3) на предыдущих, уже реализованных, временных шагах. Однако, такой метод определения возможных реализаций плотности вероятности довольно сложный, поэтому откажемся от прямого использования формулы (3.4) и решения $\varphi(p) = 2\left| d\varphi_{k-1} / dp_{k-1} \cdot p \right|$, и построим замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий исследуемого процесса в фазовом стохастическом пространстве, непосредственно из уравнения (3.3).

Вновь считая фиксированными значения $\tilde{q}$, а, следовательно, и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$, проведем следующие операции. Введя обозначение:

$$d\varphi/dp = \chi \tag{3.6}$$

и, продифференцировав выражение (3.3) по величине p, получим:

$$\frac{\varphi^2}{\chi^3}\frac{d\chi}{dp} = \frac{\varphi}{\chi} - p\,.$$

Обозначим:

$$\frac{\varphi^2}{\chi^3}\frac{d\chi}{dp} = \eta\,, \tag{3.7}$$

тогда

$$d\chi/dp = \eta\chi^3/\varphi^2\,. \tag{3.8}$$

Продифференцировав величину η по p и учитывая (3.3), (3.6), (3.7), получим выражение:

$$d\eta/dp = -\eta\chi/\varphi\,. \tag{3.9}$$

Выражения (3.6), (3.8) и (3.9) задают замкнутую автономную систему уравнений:

$$\begin{cases} d\eta/dp = -\eta\chi/\varphi \\ d\chi/dp = \eta\chi^3/\varphi^2 \\ d\varphi/dp = \chi \end{cases}. \tag{3.10}$$

Сделав замену переменных: $\varphi = e^s$, получим: $\chi e^{-s} = \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dp} = \mu$ (где $s = \ln\varphi$ - параметр, среднее отрицательное значение от которого, является энтропией рассматриваемой системы S: $S=-\int\varphi(p)\ln\varphi(p)dp=-\int s(p)\varphi(p)dp$ [20]). От системы уравнений (3.10) можно перейти к новой системе уравнений:

$$\begin{cases} d\eta/dp=-\eta\mu \\ d\mu/dp=\eta\mu^3-\mu^2 \\ ds/dp=\mu \end{cases}. \qquad (3.11)$$

Систему уравнений (3.11) можно, в частности, использовать для учета стохастических возмущений при описании турбулентного режима течения жидкости. В работах [9-10] был предложен метод учета дополнительных случайных степеней свободы в уравнениях Навье-Стокса с помощью расширения фазового пространства переменных. В качестве дополнительной выступала переменная, характеризующая плотность вероятности реализации случайной величины, например, пульсации скорости. С помощью этого метода в работах [9-10] была решена задача Хагена-Пуазейля течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения. При решении этой задачи было показано, что дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения, но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной. Это обстоятельство позволило найти решение задачи, не используя замыкающую модель для стохастических процессов. В результате было найдено не только решение, соответствующее ламинарному, но и решение соответствующее турбулентному режиму течения, аналитически определено значение постоянной Кармана, а также найдено критическое число Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. В тех гидродинамических задачах, где зависимость от дополнительной переменной имеет существенное значение, необходимо использовать замыкающую модель стохастических процессов, в качестве которой может выступать система уравнений (3.11). Более подробно этот вопрос в данной работе рассматриваться не будет.

Вернемся к исследованию системы (3.11). Видно, что первые два уравнения являются взаимосвязанными и не зависят от третьего. Поэтому в том случае, если интересуют только изменения параметров η и μ (то есть комплексы, в которые входят производные первой и второй степени функции φ, а также сама эта функция), достаточно первых двух уравнений системы, а именно,

$$\begin{cases} d\eta/dp = -\eta\mu \\ d\mu/dp = \eta\mu^3 - \mu^2 \end{cases}. \tag{3.12}$$

Система уравнений (3.12) описывает эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве $(\eta, \mu; p)$. Интересно исследовать размерность подобия [21]: $D = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}$ (где $N(\varepsilon)$ – минимальное число элементов, с характерным размером ε, необходимых для покрытия множества), для пространства, занимаемого траекториями в фазовом стохастическом пространстве $(\eta, \mu; p)$, являющихся решениями уравнений системы (3.12). Рассмотрим размерность подобия этого пространства в виде:

$$D_{\eta\mu} = -\frac{\ln(\eta\mu/(\eta_0\mu_0))}{\ln(p/p_0)} \approx -\frac{\partial(\ln(\eta\mu/(\eta_0\mu_0)))}{\partial(\ln(p/p_0))} = -\frac{\partial(\ln(\eta/\eta_0))}{\partial(\ln(p/p_0))} - \frac{\partial(\ln(\mu/\mu_0))}{\partial(\ln(p/p_0))}. \tag{3.13}$$

При выводе выражения (3.13) применено правило Лопиталя для случаев, когда $p \to p_0$. Таким образом, $D_{\eta\mu}$ является локальной размерностью подобия пространства $(\eta, \mu; p)$ в окрестности точки $p = p_0$. Однако значение p_0 выбирается произвольно. Следовательно, процедуру вычисления $D_{\eta\mu}$ можно выполнить в окрестности любой заданной точки p.

Систему уравнений (3.12) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\ln(\eta/\eta_0))}{\partial(\ln(p/p_0))} = -p\mu \\ \dfrac{\partial(\ln(\mu/\mu_0))}{\partial(\ln(p/p_0))} = p\mu(\eta\mu - 1) \end{cases}.$$

Подставив полученные уравнения в выражение (3.13), находим: $D_{\eta\mu} \approx p\mu(2-\eta\mu)$. Эту зависимость можно представить как выражение, записанное через функцию $\varphi(p)$ и ее первую и вторую производные:

$$D_{\eta\mu} \approx 2\frac{p}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{p}{\partial\varphi/\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}. \tag{3.14}$$

В случае $D_{\eta\mu} = 0$, можно говорить о достижении минимального значения размерности в фазовом стохастическом пространстве $(\eta,\mu;p)$, что может свидетельствовать о минимальной степени стохастичности в описываемом процессе. Приравнивая выражение (3.14) нулю, получаем два решения: $p = 0$ и $\varphi = const/(p+b) \underset{p>>b}{\approx} cons/p$, где b - произвольная константа. Первое решение $p = 0$, соответствует случаю достижения локального минимума стохастичности процесса в точках равновесия $\tilde{q} = \langle q \rangle$ для любых функций $\varphi(p)$. Второе решение $\varphi = const/(p+b)$ соответствует случаю достижения минимума стохастичности процесса, описываемого этой функцией, для любых значений переменной p ($p \neq -b$). И в этом смысле функции вида $\varphi = const/(p+b)$ можно считать устойчивыми решениями данной системы уравнений. В этой связи интересно отметить следующие интересные аналогии. Если в качестве переменной p брать частоту f, то можно вспомнить, что асимптоты решения, пропорциональные величине $1/f$, являются наиболее устойчивыми нестационарными решениями соответствующими хорошо изученным состояниям, называемыми фликкер шумами. Фликкер шумы инвариантны относительно изменения масштаба. Они возникают в различных физических системах: астрофизике, микроэлектронике, экономике, акустике и пр. Решения, пропорциональные величинам $1/r$, также очень устойчивы. Примером таких решений могут служить электрические и гравитационные потенциалы. Для функций вида: $\varphi(p) = p\,\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1} \pm \sqrt{p^2(\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1})^2 + \alpha}$ (см. (3.4)), в случае если $\alpha \neq 0$, размерность подобия $D_{\eta\mu}$ нигде не равна нулю, кроме точек равновесия $p = 0$ (или $\tilde{q} = \langle q \rangle$). Однако, поскольку при $p \to \infty$ одна из асимптот пропорциональна функции $const/p$, то в этом случае $D_{\eta\mu} \underset{p\to\infty}{\to} 0$. И, следовательно, именно эту асимптоту можно считать устойчивым решением уравнения (3.2) для случаев больших значений p.

Рассматриваемые процессы описываются только двумя стохастическими переменными η и μ, поэтому размерность $D_{\eta\mu}$ не должна быть больше двух. Причем значение $D_{\eta\mu} = 2$ должно достигаться в случае максимальной стохастичности процесса. Приравнивая выражение (3.14) двум и решая это уравнение, находим, что $D_{\eta\mu} = 2$ для любых значений $p \neq 0$, если. Для функций вида: $\varphi(p) = p\,\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1} \pm \sqrt{p^2(\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1})^2 + \alpha}$, при $p \to \infty$ $\varphi = const \cdot p$ одна из асимптот, совпадает с функцией $\varphi = const \cdot p$. Этот случай можно считать наиболее стохастичным и, в этом смысле, наименее устойчивым режимом рассматриваемого процесса. Физической аналогией для него, может быть сильное взаимодействие в кварк-глюонной плазме – явление конфайнмента.

Выводы:

Расширение пространства переменных и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности, позволило получить соотношение, связывающее плотности вероятности реализации отклонений случайной величины от средних значений в двух временных точках.

Показано, что в определенном интервале значений случайной величины такое решение не единственно.

В связи с этим, на основе Центральной Предельной Теоремы Линдеберга удается сделать вывод, что появление гауссовских распределений с «тяжелыми» степенными хвостами можно считать следствием возникновения в системе скрытых факторов, влияющих на динамику плотности вероятности, когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности реализации. Что подтверждает возможность прогноза природных и техногенных катастроф на основе анализа распределений исследуемых случайных величин на предмет их отклонения от нормального (гауссовского) закона распределения. В гидродинамике такое отклонение указывает на появление когерентных структур и возможности перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения.

В предельном случае описания стохастических систем: когда небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности реализации случайной величины, построена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий исследуемого процесса в фазовом стохастическом пространстве.

Проведен анализ размерности фазового стохастического пространства, на основе которого найдены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

Библиографический список

1. Тузикова Е.С. Отраслевые особенности построения прогноза динамики котировок фондового рынка на примере аэрокосмической отрасли // Труды МАИ. 2012. № 52. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29584

2. Семаков С.Л., Семаков И.С. Простейшая прогнозная модель временного ряда и ее реакция на линейное и параболическое входные воздействия // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93446

3. Кузнецов В.С., Шевченко И.В., Волков А.С., Солодков А.В. Генерация ансамблей кодов Голда для систем прямого расширения спектра // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=85813

4. Михайлов В.Ю., Витомский Е.В. Модели для оценки эффективности варианта устройства быстрого поиска по задержке ансамблей кодовых последовательностей // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=90426

5. Криворучко Д.Д., Скрылев А.В., Скороход Е.П. Определение концентрации возбужденных состояний и вероятностей радиационных переходов XeI плазмы

холловских двигателей // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=76859

6. Якимов В.Л., Панкратов А.В. Алгоритм формирования диагностических признаков бортовых динамических систем на основе показателя Херста // Труды МАИ. 2015. № 83. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62242

7. Маслов Г.А., Лапушкин В.Н. Метод статистической обработки случайного вибрационного процесса при экспериментальной отработке летательных аппаратов // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=56918

8. Васильева О.А. Исследование некоторых вероятностных характеристик решения задачи Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53684

9. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93311

10. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=96567

11. Bak P. How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality, New York, Springer-Verlag, 1996, 212 p.

12. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. - М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.

13. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. - М.: Мир, 1984. - 448 с.
14. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Журнал естественных и технических наук. 2017. № 11 (113). С. 255 - 258.
15. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение // Успехи физических наук. 1994. Т. 164. № 8. С. 811 - 844.
16. Ito K Stochastic Differential Equations // Memoirs of the American Mathematical Society, 1951, vol. 4, pp. 1-51, available at: http://dx.doi.org/10.1090/memo/0004
17. Анищенко В.С., Вадисова Т.Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статическое описание колебательных систем. - М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2005. - 156 с.
18. Rabiner L.A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // IEEE Proceedings, 1989, vol. 77, no. 2, pp. 257 – 286.
19. Момзикова М.П., Великодная О.И., Пинский М.Я., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л., Фильченков А.А. Оценка вероятности наблюдаемой последовательности в бинарных линейных по структуре скрытых марковских моделях с помощью апостериорного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2010. №. 2. С. 122 – 142.
20. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.Х. Физическая кинетика. - М.: Наука, 2002. - 536 с.
21. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991. - 260 с.