

## **Метод полных дифференциалов для численного решения гиперболических систем уравнений**

С.А. Попов

*Приводится описание нового обобщенного метода решения вполне гиперболических систем дифференциальных уравнений, характеристическая форма которых может являться многочленом более чем четвертой степени, все коэффициенты которого отличны от нуля. В основу метода положена аппроксимация соотношений между полными производными макроскопических переменных. Рассмотрено применение этого метода к уравнениям Г.Грэда. Приведены результаты проверки достоверности разработанного метода.*

Существенный прогресс в области новых компьютерных технологий стимулирует внедрение в современные математические пакеты САЕ (Computer Aided Engineering) систем более совершенных и общих физико-математических моделей. В таких областях как теория упругости, аэрогидромеханика, электродинамика и т.п. эти модели основаны на системах дифференциальных уравнений в частных производных. Как правило, более глубокие модели приводят к более сложным системам уравнений. Иногда приходится сталкиваться с ситуациями, когда для таких уравнений просто не существует методов численного решения. Примером такой ситуации в аэрогидромеханике могут служить 13-моментные уравнения Г.Грэда [1]. Ибо применение центрально-разностных аппроксимаций производных, входящих в эту систему [2], сопровождается нежелательными численными осцилляциями решения, что во многих случаях приводит к численной неустойчивости. Применение же противоточных аппроксимаций просто не может быть реализовано на основе существующих, на настоящий момент, хорошо известных методов решения [3] в силу ряда причин, которые мы обсудим в этой статье.

Переход от систем дифференциальных уравнений к их разностному аналогу может быть условно разбит на три основных этапа. На первом этапе исходные уравнения заменяются эквивалентными уравнениями, записанными в другой форме. Рассмотрим для примера уравнения газовой динамики. В методе характеристик переходят к соотношениям совместности, записанным вдоль характеристик [4]. В  $\lambda$ -схемах используются соотношения вдоль бихарактеристик, при этом также вместо исходных переменных используют так называемые бихарактеристические переменные [5, 6]. В методе расщепления матричных коэффициентов [7] элементы матриц коэффициентов представляются в виде функций собственных чисел этих матриц. В современных методах высоких порядков [3] используют либо представление векторов потоков в виде функций собственных чисел матриц коэффициентов [8], либо приближенные решения задачи Римана о

распаде разрыва [9, 10, 11]. По причине того, что на этом этапе приходится делать большое количество аналитических выкладок и преобразований, его будет логично назвать аналитическим.

На втором этапе осуществляется непосредственный переход от дифференциальных уравнений к их разностным аналогам. Это может быть сделано как на основе метода конечных разностей, так и на основе метода конечных элементов. Как в первом, так и во втором случае возможно использование законов сохранения, записанных в интегральной форме, т.е. применение метода конечных объемов [12]. Встречаются и такие случаи, когда аналитический и разностный этапы построения разностных схем тесно связаны друг с другом. Примером могут служить так называемые сеточно-характеристические методы [13]. После применения любого из перечисленных методов перехода к конечным разностям получают системы нелинейных или в лучшем случае линейных алгебраических уравнений. Этот этап построения разностных схем можно назвать разностным.

Наконец, на третьем этапе, к полученным системам уравнений для их решения применяют различные методы алгебры. Так, например, линейные системы алгебраических уравнений решают с помощью методов: исключения Гаусса (крайне редко), простой или скользящей итераций, трех или пятиточечной скалярных прогонок, векторной или матричной прогонки. Этот этап назовем алгебраическим.

Остановимся более подробно на первом этапе построения разностных схем. В общем виде нами будет сформулирован метод решения систем гиперболических уравнений, позволяющий строить противоточные разностные схемы даже в тех случаях, когда характеристическая форма является полиномом более чем четвертой степени, все коэффициенты которого отличны от нуля.

### **Описание метода**

Наш метод основан на линейном преобразовании систем уравнений в частных производных к соотношениям между полными производными (дифференциалами) от искомых переменных, т.е. фактически к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (далее - ОДУ). Основной особенностью последних является то, что дифференциалы записаны вдоль различных пространственных направлений. Отсюда проистекает возможное название этого метода: метод полных дифференциалов (далее - TD – Total Differential метод). После того, как система уравнений представлена в таком виде, полные производные, входящие в нее, аппроксимируются разностными аналогами либо на основе метода конечных разностей (далее - МКР), либо на основе применения следящего интерполяционного многочлена, второй способ часто называют методом конечных элементов (МКЭ). Далее к системам разностных уравнений применимо обратное преобразование, существенно упрощающее их вид. В этой статье мы ограничимся использованием МКР, другой подход к построению разностных аппроксимаций, основанный на МКЭ, изложен в работе [14].

Будем рассматривать систему квазилинейных уравнений, записанную в компактной матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{Q}}{\partial y} + C \frac{\partial \vec{Q}}{\partial z} = \vec{H}, \quad (1)$$

в которой  $\vec{Q} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)^T$  - вектор независимых переменных., а  $\vec{H}$  - вектор правых частей этого уравнения,  $A, B, C$  - матрицы коэффициентов системы. Пусть  $Q = Q(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  - характеристическая форма этой системы и характеристическое уравнение  $Q = 0$  имеет  $n$  действительных различных корней  $\varphi_n$  при произвольных значениях  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ .

Умножим эту систему слева на некоторую матрицу  $\Omega$ , определитель которой отличен от нуля  $\det(\Omega) \neq 0$ , удовлетворяющую двум естественным требованиям:

- Невырожденная матрица  $\Omega$  должна состоять из элементов с постоянными знаками, а умножение на неё системы (1) приводить к физически согласованным уравнениям. Физическая согласованность означает, что все слагаемые, входящие в каждое уравнение имеют одну размерность, а пространственные направления  $x, y$  или  $\xi, \eta$  равноправны;
- Если в каком-либо уравнении эквивалентной системы ОДУ имеют место пространственные производные от компоненты  $q_i$  вектора  $\vec{Q}$ , то в этом же уравнении должна содержаться и частная производная по времени от этой компоненты. Обратное не обязательно.

Поскольку система уравнений записана в примитивных переменных, все преобразования совершаются, по сути, над матрицами коэффициентов. Отсюда следует возможность прямого получения матриц такого вида, который бы учитывал все характерные направления, присущие эквивалентным системам ОДУ. После чего в рамках МКР можно все производные, входящие в систему, заменить их разностными аналогами. При этом корректный учет направления аппроксимации может быть обеспечен применением следующего правила: конечные разности берутся навстречу характерным направлениям.

Для построения разностных схем с разностями навстречу этим направлениям расцепим матрицы коэффициентов  $\tilde{A} = \Omega A$ ,  $\tilde{B} = \Omega B$  и  $\tilde{C} = \Omega C$  на матрицы  $\tilde{A}^+$ ,  $\tilde{B}^+$ ,  $\tilde{C}^+$ , состоящие только из положительных коэффициентов при пространственных производных и на матрицы  $\tilde{A}^-$ ,  $\tilde{B}^-$ ,  $\tilde{C}^-$ , состоящие только из отрицательных коэффициентов. Это расщепление может быть сделано как явным образом, с учётом знаков элементов  $\omega_{ij}$  матрицы  $\Omega$ , так и при использовании общего приема:

$$\tilde{a}_{ij}^+ = \frac{\tilde{a}_{ij} + \text{sign}(\omega_{ij})|\tilde{a}_{ij}|}{2}; \quad \tilde{a}_{ij}^- = \frac{\tilde{a}_{ij} - \text{sign}(\omega_{ij})|\tilde{a}_{ij}|}{2}, \quad (2)$$

здесь малыми буквами  $\tilde{a}_{ij}$  обозначены элементы матрицы  $\tilde{A}$ . Поступая аналогично с элементами матриц  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$ , получим:

$$\tilde{A} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^-; \tilde{B} = \tilde{B}^+ + \tilde{B}^-; \tilde{C} = \tilde{C}^+ + \tilde{C}^-.$$

Умножим расщепленные матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  на матрицу  $\Omega^{-1}$ , в результате получим расщепленные матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$A = A^+ + A^-; B = B^+ + B^-; C = C^+ + C^-, \quad (3)$$

после этого заменим производные их односторонними разностными аналогами. Такие разности отслеживают направления полных производных, входящих в эквивалентные системы ОДУ. Для матрицы  $A^+$  берутся левые разности для частной производной по  $x$  от вектора  $\bar{Q}$ , для матрицы  $A^-$  - правые разности, для других матриц аналогично.

Система уравнений (1), согласно сделанным предположениям относительно корней характеристического уравнения, является по определению вполне гиперболической. Однако в ряде случаев с помощью простого приема описанный метод применим и к системам, не имеющим строго определенного типа. Такое расширение применимости этого метода будет показано на примере уравнений аэрогидромеханики.

### Применение TD метода к уравнениям Навье-Стокса

Из второго требования к преобразованию  $\Omega$  вытекает невозможность применения этого метода к уравнениям Н-С, записанным в общей форме (1). Однако имеется возможность разделения этих уравнений на две части: конвективную и диссипативную с последующей раздельной аппроксимацией каждой части. Использование такого приема имеет свои положительные моменты. Хорошо известно, что в модели Н-С нарушен принцип физической причинности [15], при этом на уровне разностных уравнений этот принцип будет восстановлен.

Рассмотрим уравнения Н-С в нормированном виде и обобщенных криволинейных координатах  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , для простоты ограничившись плоским 2D случаем:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \eta} = \bar{H}. \quad (4)$$

Здесь вектор независимых переменных и матрицы коэффициентов выглядят как:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} U & \rho \xi_x & \rho \xi_y & 0 \\ 0 & U & 0 & \frac{\xi_x}{\rho} \\ 0 & 0 & U & \frac{\xi_y}{\rho} \\ 0 & \gamma p \xi_x & \gamma p \xi_y & U \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} V & \rho \eta_x & \rho \eta_y & 0 \\ 0 & V & 0 & \frac{\eta_x}{\rho} \\ 0 & 0 & V & \frac{\eta_y}{\rho} \\ 0 & \gamma p \eta_x & \gamma p \eta_y & V \end{bmatrix}, \quad (5)$$

здесь  $U$  и  $V$  - проекции вектора скорости на нормали к кривым  $\xi = const$  и  $\eta = const$ ,  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  - метрические коэффициенты, а вектор правых частей системы равен:

$$\bar{H} = \frac{M}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \xi_x \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \eta} \right\} \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \xi_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \eta} \right\} \\ (\gamma - 1) \left\{ \tau_{xx} (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + \tau_{yy} (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) + \tau_{xy} (\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta + \xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) \right\} \\ - \frac{1}{\text{Pr}} (\xi_x q_\xi + \eta_x q_\eta + \xi_y q_\xi + \eta_y q_\eta) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В последнем равенстве  $M$  - число Маха,  $\text{Re}$  - число Рейнольдса и  $\text{Pr}$  - число Прандтля.

Преобразование  $\Omega$  для системы (4, 5, 6) не является единственным и может, например, иметь вид:

$$\Omega = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Описанное правило расщепления элементов матриц коэффициентов (2) может быть реализовано явным образом с учетом знаков элементов матрицы  $\Omega$  и общих множителей, стоящих при полных производных. Матрицы коэффициентов  $\tilde{A} = \Omega A$ ,  $\tilde{B} = \Omega B$  эквивалентной системы уравнений выглядят следующим образом:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c^2 U & 0 & 0 & \frac{U + c(\xi_x - \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & U + c\xi_x & -(U - c\xi_y) & \frac{U - c(\xi_x - \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & -(U - c\xi_x) & U + c\xi_y & \frac{U - c(\xi_x + \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & U - c\xi_x & U - c\xi_y & -\frac{U - c(\xi_x + \xi_y)}{\rho c} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} c^2 V & 0 & 0 & \frac{V + c(\eta_x - \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & V + c\eta_x & -(V - c\eta_y) & \frac{V - c(\eta_x - \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & -(V - c\eta_x) & V + c\eta_y & \frac{V - c(\eta_x + \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & V - c\eta_x & V - c\eta_y & -\frac{V - c(\eta_x + \eta_y)}{\rho c} \end{bmatrix};$$

Сопоставляя их с матрицей  $\Omega$ , представим эти матрицы в виде функций некоторых величин  $\lambda_{ij}$ , определяемых непосредственно на этом этапе:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c^2 U & 0 & 0 & \frac{-U}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{a22} & -\lambda_{a23} & \frac{\lambda_{a24}}{\rho c} \\ 0 & -\lambda_{a32} & \lambda_{a33} & \frac{\lambda_{a34}}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{a42} & \lambda_{a43} & -\frac{\lambda_{a44}}{\rho c} \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} c^2 V & 0 & 0 & \frac{-V}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{b22} & -\lambda_{b23} & \frac{\lambda_{b24}}{\rho c} \\ 0 & -\lambda_{b32} & \lambda_{b33} & \frac{\lambda_{b34}}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{b42} & \lambda_{b43} & -\frac{\lambda_{b44}}{\rho c} \end{bmatrix}.$$

Расположение знаков у элементов матриц  $\Omega$  и  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  совпадает, чем обеспечивается учет описанного правила аппроксимации производных. Тогда применение обратного преобразования  $\Omega^{-1}$  позволяет, и исходные матрицы коэффициентов  $A = \Omega^{-1}\tilde{A}$  и  $B = \Omega^{-1}\tilde{B}$  записать в виде функций величин  $\lambda_{ij}$

$$A(\lambda_{a_{ij}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2U & \frac{\rho}{c}(\lambda_{a22} - \lambda_{a32}) & \frac{\rho}{c}(\lambda_{a33} - \lambda_{a23}) & 0 \\ 0 & \lambda_{a22} + \lambda_{a42} & 0 & \frac{\lambda_{a24} - \lambda_{a44}}{\rho c} \\ 0 & 0 & \lambda_{a33} + \lambda_{a43} & \frac{\lambda_{a34} - \lambda_{a44}}{\rho c} \\ 0 & \rho c(\lambda_{a22} - \lambda_{a32}) & \rho c(\lambda_{a33} - \lambda_{a23}) & \lambda_{a24} + \lambda_{a34} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$B(\lambda_{b_{ij}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2V & \frac{\rho}{c}(\lambda_{b_{22}} - \lambda_{b_{32}}) & \frac{\rho}{c}(\lambda_{b_{33}} - \lambda_{b_{23}}) & 0 \\ 0 & \lambda_{b_{22}} + \lambda_{b_{42}} & 0 & \frac{\lambda_{b_{24}} - \lambda_{b_{44}}}{\rho c} \\ 0 & 0 & \lambda_{b_{33}} + \lambda_{b_{43}} & \frac{\lambda_{b_{34}} - \lambda_{b_{44}}}{\rho c} \\ 0 & \rho c(\lambda_{b_{22}} - \lambda_{b_{32}}) & \rho c(\lambda_{b_{33}} - \lambda_{b_{23}}) & \lambda_{b_{24}} + \lambda_{b_{34}} \end{bmatrix}.$$

В данном случае общее правило (2) реализуется следующим образом:

$$\lambda_{a_{ij}}^+ = \frac{\lambda_{a_{ij}} + |\lambda_{a_{ij}}|}{2}; \quad \lambda_{a_{ij}}^- = \frac{\lambda_{a_{ij}} - |\lambda_{a_{ij}}|}{2}, \quad (9)$$

в результате чего получаем окончательное расщепление матриц  $A$  и  $B$

$$A = A^+ + A^-; \quad B = B^+ + B^-.$$

Здесь  $A^+ = A(\lambda_{a_{ij}}^+)$ ,  $A^- = A(\lambda_{a_{ij}}^-)$ , аналогично имеем и для  $B$ .

Далее покажем, каким образом этот метод связан с методом расщепления матричных коэффициентов. В основе последнего лежит следующая запись уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + X \Lambda_A X^{-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + Y \Lambda_B Y^{-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \eta} = \bar{H}; \quad (10)$$

и расщепление собственных чисел матриц коэффициентов  $\Lambda_A = \Lambda_A^+ + \Lambda_A^-$ . Здесь  $\Lambda_A$  и  $\Lambda_B$  - диагональные матрицы, состоящие из собственных значений матриц  $A$ ,  $B$  соответственно:

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{a_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & & 0 \\ 0 & 0 & U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U - c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} \lambda_{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{b_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & & 0 \\ 0 & 0 & V + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V - c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \end{bmatrix}.$$

Столбцы матриц  $X$  и  $Y$  образованы линейно независимыми правыми собственными векторами матриц коэффициентов:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\rho}{c} & \frac{\rho}{c} \\ \bar{\xi}_y & -\bar{\xi}_y & \bar{\xi}_x & -\bar{\xi}_x \\ -\bar{\xi}_x & \bar{\xi}_x & \bar{\xi}_y & -\bar{\xi}_y \\ 0 & 0 & \rho c & \rho c \end{bmatrix}; \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\rho}{c} & \frac{\rho}{c} \\ \bar{\eta}_y & -\bar{\eta}_y & \bar{\eta}_x & -\bar{\eta}_x \\ -\bar{\eta}_x & \bar{\eta}_x & \bar{\eta}_y & -\bar{\eta}_y \\ 0 & 0 & \rho c & \rho c \end{bmatrix}.$$

Строки обратных к ним матриц  $X^{-1}$  и  $Y^{-1}$  образованы линейно независимыми левыми собственными векторами матриц  $A, B$ :

$$X^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\xi}_y & -\bar{\xi}_x & -\frac{1}{c^2} \\ 1 & -\bar{\xi}_y & \bar{\xi}_x & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \bar{\xi}_x & \bar{\xi}_y & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -\bar{\xi}_x & -\bar{\xi}_y & \frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}; Y^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\eta}_y & -\bar{\eta}_x & -\frac{1}{c^2} \\ 1 & -\bar{\eta}_y & \bar{\eta}_x & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \bar{\eta}_x & \bar{\eta}_y & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -\bar{\eta}_x & -\bar{\eta}_y & \frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\xi}_x = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}$ ,  $\bar{\eta}_x = \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}$  - нормированные метрические коэффициенты, аналогично для  $\bar{\xi}_y$ ,

и  $\bar{\eta}_y$ . При этом, например, матрицы  $A^+ = \chi \Lambda_A^+ \chi^{-1}$  и  $A^- = \chi \Lambda_A^- \chi^{-1}$  отождествляются с только положительными  $\Lambda_A^+$  и только отрицательными  $\Lambda_A^-$  собственными значениями, соответственно, для матрицы  $B$  аналогично. В результате перемножения матриц получим следующее:

$$\chi \Lambda_A \chi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} & \frac{\rho}{c} \bar{\xi}_x (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \frac{\rho}{c} \bar{\xi}_y (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_y^2 (\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2}) + \bar{\xi}_x^2 (\lambda_{a_3} + \lambda_{a_4}) & 0 & \frac{\bar{\xi}_x}{\rho c} (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_x^2 (\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2}) + \bar{\xi}_y^2 (\lambda_{a_3} + \lambda_{a_4}) & \frac{\bar{\xi}_y}{\rho c} (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) \\ 0 & \rho c \bar{\xi}_x (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \rho c \bar{\xi}_y (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \lambda_{a_3} + \lambda_{a_4} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$Y \Lambda_B Y^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{b_1} + \lambda_{b_2} & \frac{\rho}{c} \bar{\eta}_x (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \frac{\rho}{c} \bar{\eta}_y (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_y^2 (\lambda_{b_1} + \lambda_{b_2}) + \bar{\eta}_x^2 (\lambda_{b_3} + \lambda_{b_4}) & 0 & \frac{\bar{\eta}_x}{\rho c} (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) \\ 0 & 0 & \bar{\eta}_x^2 (\lambda_{b_1} + \lambda_{b_2}) + \bar{\eta}_y^2 (\lambda_{b_3} + \lambda_{b_4}) & \frac{\bar{\eta}_y}{\rho c} (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) \\ 0 & \rho c \bar{\eta}_x (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \rho c \bar{\eta}_y (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \lambda_{b_3} + \lambda_{b_4} \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя выражения (8) и (12) видим, что в декартовой системе координат они полностью совпадают. Этот результат и был получен в работе [14]. Но в обобщенных координатах имеется ряд отличий. Ограничимся только этим сравнением. Связь TD метода с сеточно-характеристическими методами [13] и так называемыми  $\lambda$  - схемами подробно обсуждалась также в работе [14]. Связь с методом характеристик в случае 1D тривиальна, поскольку система уравнений (4) умноженная на матрицу  $\Omega$  просто вырождается в соотношения совместности вдоль характеристик [4]. В остальных же случаях имеем аналог соотношений совместности записанных вдоль различных пространственных направлений.



В обоих из рассмотренных методов разностная аппроксимация системы уравнений (4) выглядит одинаковым образом

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A^+ \Delta_{\xi}^- \bar{Q} + A^- \Delta_{\xi}^+ \bar{Q} + B^+ \Delta_{\eta}^- \bar{Q} + B^- \Delta_{\eta}^+ \bar{Q} = \bar{H}, \quad (13)$$

где  $\Delta^{\pm}$  - операторы разностного дифференцирования, которые в общем виде могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}^- q &= d(1)q_{i+1} + d(2)q_i + d(3)q_{i-1} + d(4)q_{i-2}; \\ \Delta_{\xi}^+ q &= -d(1)q_{i-1} - d(2)q_i - d(3)q_{i+1} - d(4)q_{i+2}, \end{aligned} \quad (14)$$

аналогично для разностных производных по  $\eta$ . Коэффициенты  $d(i)$  задаются в зависимости от порядка аппроксимации, см. приведенную таблицу.

Порядок аппроксимации	$d(1)$	$d(2)$ $d(3)$	$d(4)$	
$O(\Delta_{\xi})$	0	1	-1	0
$O(\Delta_{\xi}^2)$	0	3/2	-2	1/2
$O(\Delta_{\xi}^3)$	1/3	1/2	-1	1/6

Производные, входящие в диссипативную часть уравнений (4) аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности:

$$\delta_{\xi} q = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2}. \quad (15)$$

Причем, вначале вычисляются компоненты тензора напряжений  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  и вектора теплового потока  $q_x, q_y$ , а затем производные от них.

Описанная разностная схема пригодна для расчета стационарных и нестационарных потоков вплоть до трансзвуковых режимов течения вязкого газа. Следуя работе [14] этот метод легко модифицировать и на случай течений с наличием в потоке ударных волн. С другой стороны и в основе разработанного ТД-метода и в основе метода расщепления матричных коэффициентов лежат подобные расщепления элементов матриц коэффициентов. Поэтому расщепление (8) также может быть использовано при построении современных методов высоких порядков для задач аэрогидродинамики [3].

В заключение этого раздела ответим на естественный вопрос, какой же метод из двух рассмотренных является наиболее общим? Предположим, что мы столкнулись с ситуацией, когда система уравнений является вполне гиперболической, а число уравнений в ней больше 4-х. В этом случае характеристическая форма уже не содержит кратных множителей и является алгебраическим многочленом более чем четвертой степени, все коэффициенты которого не равны нулю. В 1830г. французский математик Эварист Галуа [16] получает строгое доказательство того факта, что все уравнения-многочлены выше 4-ой степени не разрешимы в радикалах. Это означает, что до корней этих уравнений нет никакой возможности добраться с помощью арифметических

действий и извлечения корня. Очевидно, что именно в этой ситуации метод TD является единственно приемлемым, ибо в нем нет необходимости определения собственных чисел матриц коэффициентов. Следовательно, он же является и самым общим методом, пригодным для построения противоточных разностных схем для систем гиперболических уравнений любой степени сложности. Система уравнений Эйлера слишком проста и имеет кратные корни, а вот для системы уравнений Грэда даже в случае 2D аналитическое решение задачи о нахождении собственных чисел не является возможным. Еще сложнее представляется ситуация с 20-и моментным приближением или последующими уравнениями моментной теории. И здесь TD метод вполне применим. Большой объем вычислений упрощается при использовании систем аналитического вывода типа Maple V, избавляя разработчика от глубокой рутины.

### Применение TD метода к усеченным уравнениям Г.Грэда

Вместо полной 2D системы уравнений Грэда ограничимся их упрощенным вариантом, называемым далее усеченной формой этих уравнений. Для газодинамических параметров и компонентов тензора напряжений возьмем полные уравнения из системы Грэда, а компоненты теплового потока свяжем с градиентом температуры посредством закона Фурье. Для метода такое отграничение не является существенным, но при этом для усеченных уравнений есть возможность продемонстрировать связь разработанного метода с уже существующим, что и будет сделано в этом разделе. Иногда, для краткости, слово усеченные будем опускать, тем более что в случае дозвуковых потоков газа при условии адиабатической стенки такое упрощение может оказаться весьма несущественным.

Как и в случае уравнений Н-С запишем уравнения Грэда в нормированном виде и обобщенных криволинейных координатах (4). Только в этом случае векторы независимых переменных и правых частей системы, а также матрицы коэффициентов будут выглядеть следующим образом:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \\ p_{xx} \\ p_{xy} \\ p_{yy} \end{bmatrix}; \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{M}{\text{Re Pr}} \left( \xi_x \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial q_y}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \right) \\ -\frac{2}{5} \frac{M}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{4}{3} \left( \xi_x \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial q_x}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left( \xi_y \frac{\partial q_y}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{6}{Kn} B_1^{(2)} \rho p_{xx} \\ -\frac{2}{5} \frac{M}{\text{Re Pr}} \left( \xi_y \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial q_x}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial q_y}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \right) - \frac{6}{Kn} B_1^{(2)} \rho p_{xy} \\ -\frac{2}{5} \frac{M}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{4}{3} \left( \xi_y \frac{\partial q_y}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left( \xi_x \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial q_x}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{6}{Kn} B_1^{(2)} \rho p_{yy} \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$A = \begin{bmatrix}
U & \xi_x \rho & \xi_y \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & U & 0 & \frac{\xi_x}{\rho} & \frac{\xi_x}{\rho} & \frac{\xi_y}{\rho} & 0 \\
0 & 0 & U & \frac{\xi_y}{\rho} & 0 & \frac{\xi_x}{\rho} & \frac{\xi_y}{\rho} \\
0 & \frac{5}{3} \xi_x p + \frac{2}{3} (\xi_x p_{xx} + \xi_y p_{xy}) & \frac{5}{3} \xi_y p + \frac{2}{3} (\xi_x p_{xy} + \xi_y p_{yy}) & U & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{4}{3} (\xi_x p + \xi_y p_{xy}) + \frac{7}{3} \xi_x p_{xx} & \xi_y p_{xx} - \frac{2}{3} [\xi_y (p + p_{yy}) + \xi_x p_{xy}] & 0 & U & 0 & 0 \\
0 & \xi_y (p + p_{yy}) + 2 \xi_x p_{xy} & \xi_x (p + p_{xx}) + 2 \xi_y p_{xy} & 0 & 0 & U & 0 \\
0 & \xi_x p_{yy} - \frac{2}{3} [\xi_x (p + p_{xx}) + \xi_y p_{xy}] & \frac{4}{3} (\xi_y p + \xi_x p_{xy}) + \frac{7}{3} \xi_y p_{yy} & 0 & 0 & 0 & U
\end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix}
V & \eta_x \rho & \eta_y \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & V & 0 & \frac{\eta_x}{\rho} & \frac{\eta_x}{\rho} & \frac{\eta_y}{\rho} & 0 \\
0 & 0 & V & \frac{\eta_y}{\rho} & 0 & \frac{\eta_x}{\rho} & \frac{\eta_y}{\rho} \\
0 & \frac{5}{3} \eta_x p + \frac{2}{3} (\eta_x p_{xx} + \eta_y p_{xy}) & \frac{5}{3} \eta_y p + \frac{2}{3} (\eta_x p_{xy} + \eta_y p_{yy}) & V & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{4}{3} (\eta_x p + \eta_y p_{xy}) + \frac{7}{3} \eta_x p_{xx} & \eta_y p_{xx} - \frac{2}{3} [\eta_y (p + p_{yy}) + \eta_x p_{xy}] & 0 & V & 0 & 0 \\
0 & \eta_y (p + p_{yy}) + 2 \eta_x p_{xy} & \eta_x (p + p_{xx}) + 2 \eta_y p_{xy} & 0 & 0 & V & 0 \\
0 & \eta_x p_{yy} - \frac{2}{3} [\eta_x (p + p_{xx}) + \eta_y p_{xy}] & \frac{4}{3} (\eta_y p + \eta_x p_{xy}) + \frac{7}{3} \eta_y p_{yy} & 0 & 0 & 0 & V
\end{bmatrix}.$$

Как и в случае уравнений Н-С умножим систему (4) слева на некоторую невырожденную матрицу  $\Omega$

$$\Omega = \begin{bmatrix}
c_0^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\
0 & -1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\
0 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\
0 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\
0 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\
0 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c}
\end{bmatrix}. \quad (17)$$

Как видно структура этой матрицы достаточно проста, а ее элементы не изменяют знака в поле течения. Здесь  $c_0^2 = \frac{p - p_{xx} - p_{yy}}{\rho}$ ,  $c^2 = \frac{p}{\rho}$  - некоторые аналоги скорости звука. Обратная матрица  $\Omega^{-1}$  и в этом случае легко находится с помощью системы Maple V. А вот матрицы  $\tilde{A} = \Omega A$ ,  $\tilde{B} = \Omega B$  лучше сразу же представить в наиболее общем виде

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c_0^2 U & 0 & 0 & -U & U & 0 & U \\ 0 & \frac{\lambda_{a22}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a23}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a24}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a25}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a34}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a27}}{\rho c} \\ 0 & \frac{\lambda_{a32}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a33}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a34}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a35}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a24}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a37}}{\rho c} \\ 0 & \frac{\lambda_{a42}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a43}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a44}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a35}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a27}}{\rho c} \\ 0 & \frac{\lambda_{a52}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a53}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a25}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a27}}{\rho c} \\ 0 & \frac{\lambda_{a62}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a63}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a35}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a44}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a27}}{\rho c} \\ 0 & \frac{\lambda_{a72}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a73}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a35}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a54}}{\rho c} & \frac{\lambda_{a37}}{\rho c} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

то же самое будем иметь и для другой матрицы. Расположение знаков у элементов матриц  $\Omega$  и  $\tilde{A}$  снова совпадает. Это совсем не случайно, ибо общие знаки должны выноситься из полных дифференциалов в их общих связях. А вот вид элементов  $\lambda_{a_{ij}}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{a_{22}} &= \rho U c - \frac{\xi_x [7(p + p_{xx}) + 6p_{xy} + 3p_{yy}] + \xi_y [3(p + p_{yy}) + 4p_{xy}]}{3}, \\ \lambda_{a_{32}} &= \rho U c + \frac{\xi_x [7(p + p_{xx}) + 6p_{xy} + 3p_{yy}] + \xi_y [3(p + p_{yy}) + 4p_{xy}]}{3}, \\ \lambda_{a_{42}} &= \rho U c + [\xi_x (-p + p_{xx} + 2p_{xy} + p_{yy}) + \xi_y (p + p_{yy})] \\ \lambda_{a_{52}} &= \rho U c - \frac{\xi_x [p + 7p_{xx} - 6p_{xy} - 3p_{yy}] + \xi_y [-3(p + p_{yy}) + 4p_{xy}]}{3}, \\ \lambda_{a_{62}} &= \rho U c + \frac{\xi_x [7(p + p_{xx}) - 6p_{xy} + 3p_{yy}] + \xi_y [-3(p + p_{yy}) + 4p_{xy}]}{3}, \\ \lambda_{a_{72}} &= \rho U c + \frac{\xi_x [11(p + p_{xx}) + 6p_{xy} - 3p_{yy}] + \xi_y [3(p + p_{yy}) + 8p_{xy}]}{3}, \end{aligned} \quad (19)$$



$$\begin{aligned}
a_{24} &= \frac{\lambda a_{34} - 3\lambda a_{24} - \lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8\rho c}; & a_{25} &= \frac{\lambda a_{35} - \lambda a_{25}}{2\rho c}; & a_{26} &= \frac{\lambda a_{24} - 3\lambda a_{34} - \lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8\rho c}; & a_{27} &= 0; \\
a_{34} &= \frac{\lambda a_{24} - 3\lambda a_{34} - \lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8\rho c}; & a_{35} &= 0; & a_{36} &= \frac{\lambda a_{34} - 3\lambda a_{24} - \lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8\rho c}; & a_{37} &= \frac{\lambda a_{27} - \lambda a_{37}}{2\rho c}; \\
a_{44} &= \frac{\lambda a_{24} + \lambda a_{34} + 3\lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8}; & a_{45} &= 0; & a_{46} &= 0; & a_{47} &= 0; \\
a_{54} &= 0; & a_{45} &= 0; & a_{46} &= 0; & a_{57} &= 0; \\
a_{64} &= 0; & a_{55} &= \frac{\lambda a_{25} + \lambda a_{35}}{2}; & a_{56} &= \frac{\lambda a_{24} + \lambda a_{34} + 3\lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8}; & a_{67} &= 0; \\
a_{74} &= 0; & a_{65} &= 0; & a_{56} &= \frac{\lambda a_{24} + \lambda a_{34} + 3\lambda a_{44} + 3\lambda a_{54}}{8}; & a_{77} &= \frac{\lambda a_{27} + \lambda a_{37}}{2}. \\
a_{74} &= 0; & a_{75} &= 0; & a_{66} &= 0; & & \\
a_{74} &= 0; & & & a_{76} &= 0; & & 
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно записать формулы для определения элементов матрицы  $B$ . Аппроксимация производных вводится аналогично тому, как это делалось для уравнений Н-С, см. выражения (13, 14). Аппроксимация производных в компонентах вектора теплового потока осуществляется центральными разностями (15). Дальнейшее развитие схемы для уравнений Грэда пока не рассматривалось.

Теперь интересно сравнить полученные выражения с методом SCM, что же даст он, применим ли этот метод к уравнениям Грэда? Оказывается, что для усеченных уравнений Грэда, задача на собственные значения для матриц  $A$ ,  $B$  еще разрешима. Ограничимся также случаем декартовых координат  $x, y$ . Например, собственные числа матрицы  $A$  имеют такой вид:

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + \sqrt{\frac{3(p + p_{xx})}{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u - \sqrt{\frac{3(p + p_{xx})}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u + \sqrt{\frac{p + p_{xx}}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u - \sqrt{\frac{p + p_{xx}}{\rho}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно наличие кратных корней. Матрицы  $X$ , столбцы которых образованы линейно независимыми правыми собственными векторами, и обратные к ним матрицы  $X^{-1}$ , в отличие от таких же матриц уравнений Эйлера, знакопеременны в поле потока. Это значит, что в свою очередь и элементы результирующих матриц  $A(\lambda_i) = X \Lambda_A X^{-1}$  также знакопеременны в потоке, например, элементы

$$a_{32} = -\frac{p_{xy}}{2P_{xx}}(-\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7); \quad a_{62} = \frac{\rho p_{xy}}{2P_{xx}}[c_1(\lambda_4 - \lambda_5) - c_2(\lambda_6 - \lambda_7)];$$

$$a_{43} = \frac{p_{xy}}{3c_2} (\lambda_6 - \lambda_7); \quad a_{34} = \frac{c_1 p_{xy}}{6} \frac{c_2 (\lambda_4 - \lambda_5) - c_1 (\lambda_6 - \lambda_7)}{c_2 P_{xx} (p + p_{xx})},$$

здесь  $c_1 = \sqrt{\frac{3(p + p_{xx})}{\rho}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{p + p_{xx}}{\rho}}$ . Отсюда видно, что даже в случае усеченных уравнений в потоке не исключена возможность возникновения таких ситуаций, когда напряжение  $P_{xy}$  сменит знак, а при этом противоточная разность изменится на обратную, после чего разностная схема станет локально неустойчивой.

Производная по времени в уравнениях (4) аппроксимируется односторонней разностью первого порядка аппроксимации. Шаг по времени при этом для всей разностной схемы в целом выбирается в согласии с критерием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви и его аналога для диссипативной части уравнений.

По всей области расчета находятся максимальные величины характерных скоростей

$$CU_{\max} = \max_{ij} \left( |U| + c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \right); \quad CV_{\max} = \max_{ij} \left( |V| + c \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \right);$$

аналогично для скорости диссипации

$$DU_{\max} = \max_{ij} \left( \alpha \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{\rho} \right); \quad DV_{\max} = \max_{ij} \left( \alpha \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{\rho} \right), \quad \text{где } \alpha = \frac{2}{3} \mu \frac{M}{\text{Re}}.$$

После чего находится максимально возможная величина характерной скорости

$$C_{\max} = 2 \max(CU_{\max}, CV_{\max}, DU_{\max}, DV_{\max})$$

и допустимый шаг интегрирования по времени

$$dt = \frac{C}{C_{\max}}, \quad \text{где } C - \text{число Куранта.} \quad (21)$$

Иначе обстоит дело с аппроксимацией производной по времени в уравнениях Грэда. Законы сохранения аппроксимируются подобно уравнениям Н-С, а аппроксимация уравнений для компонент тензора напряжений строится на основе аналитического интеграла простого линейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + A_{ij} + v p_{ij} = 0. \quad (22)$$

В таком виде могут быть формально представлены выделенные нами уравнения. Считая  $A_{ij}$  и  $v$  известными функциями времени уравнение (22) легко интегрируется с помощью метода изменения произвольной постоянной. Его решение выглядит следующим образом:

$$p_{ij}(t) = e^{-\int_{t_0}^t v(t) dt} \left[ p_{ij}(t_0) - \int_{t_0}^t A_{ij}(t) e^{\int_{t_0}^t v(t) dt} dt \right]. \quad (23)$$

Записав разностный аналог уравнения (22), будем иметь:

Схема А	Схема В
---------	---------

$\frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t} = -A_{ij} - \nu p_{ij}^n$	$\frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t} = -A_{ij} - \nu p_{ij}^{n+1}$
$p_{ij}^{n+1} = (1 - \Delta t \nu) p_{ij}^n - \Delta t A_{ij}$	$p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta t \nu} (p_{ij}^n - \Delta t A_{ij})$

Параметр  $\nu$  пропорционален частоте межмолекулярных столкновений. На малом интервале времени  $\Delta t = t - t_0$  его можно полагать постоянной величиной. Если  $\nu \Delta t < 1$ , то экспоненты  $e^{\pm \nu \Delta t}$ , входящие в решение (23) могут быть разложены в ряд Тейлора. Пренебрегая малыми величинами второго и более высокого порядка малости, получим решение, совпадающее по виду со схемой А. В сплошной среде частота столкновений велика. Тогда если  $A_{ij} = const$ , то решение (23) совпадает со схемой В. Эта схема дает правильные предельные значения при  $\Delta t \rightarrow 0$ , а также в случае неограниченного возрастания частоты столкновения.

При построении схем высокого (до 3-го) порядка аппроксимации по времени законы сохранения могут быть записаны в следующей общей форме:

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t A(t) dt. \quad (24)$$

После чего можно воспользоваться идеями Рунге-Кутты или Адамса. Первое по многим причинам более предпочтительно. Несколько сложнее обстоит дело с компонентами тензора напряжений. Чтобы правильно учесть асимптотические свойства этих уравнений, следует поступить следующим образом

$$p_{ij}(t) = e^{-\nu \Delta t} \left[ p_{ij}(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{A_{ij}(t)}{\nu} de^{\nu(t-t_0)} \right]. \quad (25)$$

После этого экспоненциальное затухание можно приближенно заменить более слабым, например, гиперболическим  $e^{-\nu \Delta t} \sim \frac{1}{1 + \Delta t \nu}$ .

### Граничные условия

Условия выставляются на поверхности тела и на внешней границе расчетной области. На внешней границе области ставились условия невозмущенного потока.

Для уравнений Н-С на поверхности тела реализованы условия прилипания. Компоненты скорости на поверхности полагаются равными нулю  $u = v = 0$ . Давление определяется из правой части проекции уравнения изменения количества движения на направление нормали к телу

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \left\{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta \right\} + \frac{M}{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \eta_x + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \eta_y \right\}, \quad (30)$$

также из аппроксимации производной  $p_\eta$ . Температура из условия адиабатической стенки  $\bar{q}_w = 0$ . Наконец, плотность  $\rho$  определяется из уравнения состояния.



Для уравнений Грэда в настоящий момент реализованы также условия прилипания. Недостающие величины компонент тензора напряжений на поверхности тела определяются по закону Стокса.

### Проверка достоверности разработанного метода

Рассмотрим обтекание очень тонкой плоской пластины на основе решения уравнений Грэда и Н-С. Это течение было исследовано в гёттингенской диссертации Г. Блазиуса и является хорошо известным и достаточно простым примером применения уравнений пограничного слоя [17]. Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача содержит несколько “подводных камней”, которые не замедлят проявить себя, если не вспомнить ее классическую постановку. Длина пластины была принята бесконечной, а поскольку скорость стационарного течения должна быть постоянной, то давление  $P$  должно быть также постоянной величиной  $\frac{dp}{dx} = 0$  вдоль пластины. Но бесконечно протяженных пластин не бывает, у всех пластин есть начало и есть конец. Чтобы воспроизвести эти условия в численном методе, необходимо таким образом задать расчетную область, чтобы по возможности избежать влияния передней кромки пластины на профиль течения внутри пограничного слоя. Нужно сразу отметить, что устранить это влияние совсем нет никакой возможности. Область расчетов зададим, как показано на рис.4. Длина пластины, расположенной вдоль линии ВС, равна одной условной единице.

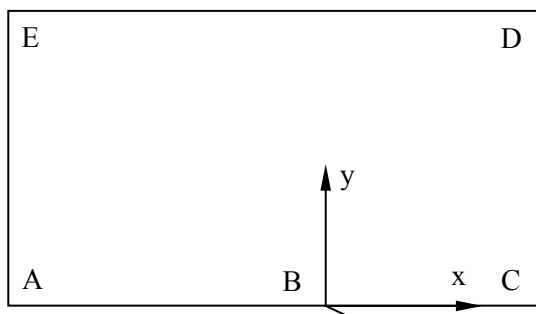


Рис.4.. Геометрия расчетной области

Помимо уже рассмотренных, в этой задаче задаются дополнительные граничные условия на

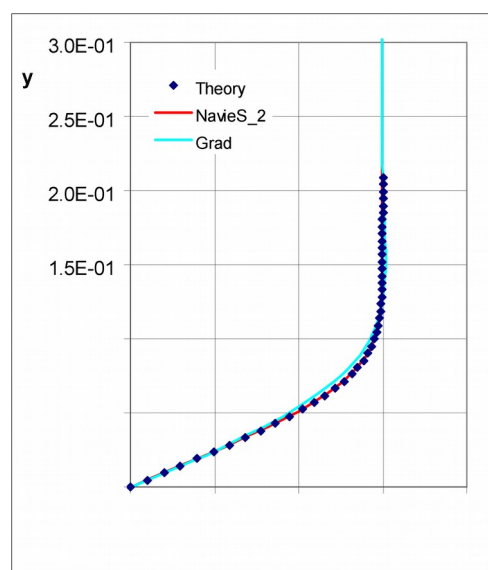
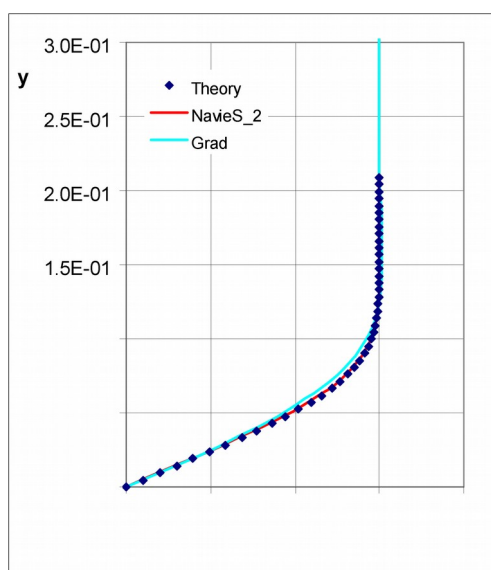
линиях АВ, CD и DE. На АВ ставятся условия симметрии на первую производную  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = 0$ , здесь

$\vec{f} = (\rho, u, p, p_{ij})$ , компонента  $v = 0$ , эти же условия задаются на линии DE. На AE задаются условия невозмущенного потока, но при этом приходится “смягчать” давление и напряжение

$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = 0$ , где  $\vec{f} = (p, p_{ij})$ . Наконец на CD ставятся полностью “мягкие” граничные условия

$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} = 0$ ,  $\bar{f} = (\rho, u, v, p, p_{ij})$ . На поверхности пластины задаются условия прилипания, либо неполные условия скольжения. Последние реализуются почти как и условия прилипания, только касательная составляющая скорости полагается отличной от нуля  $u_x = -\frac{\sqrt{2\pi RT}}{2} \frac{p_{xy}}{p} - \frac{Kn}{Pr} \frac{q_x}{5p}$ , см. [1].

Перейдем к результатам расчетов. На рис.5 и 6 приведены профили горизонтальной  $u(y)$  и вертикальной  $v(y)$  компонент вектора скорости, определенные из решений уравнений Навье - Стокса – сплошная кривая красного цвета и Грэда – сплошная бирюзовая кривая для двух описанных типов граничных условий. Синие ромбики соответствуют распределению скоростей по Блазиусу, решение построено на основе таблиц численного интегрирования уравнения для безразмерной функции тока, приведенных в [17]. Видно хорошее согласие между всеми приведенными результатами. Профили взяты на расстоянии 0.563 условных единиц от передней кромки пластины. Скорость скольжения имеет столь малое значение  $u_w \sim 0.002$ , что практически не заметна на рис.6, а влияние ее на профиль компонент вектора скорости ничтожно мало.



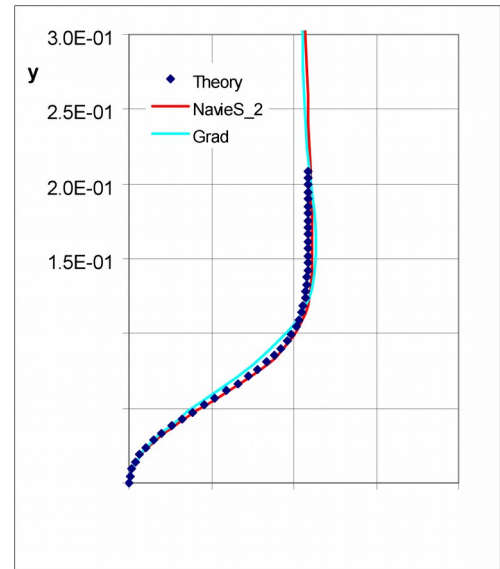
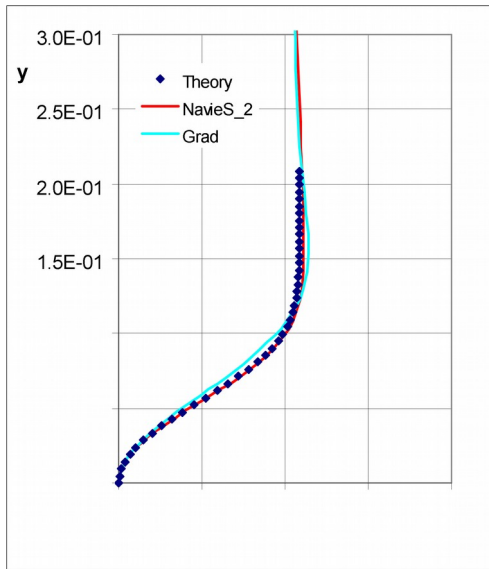
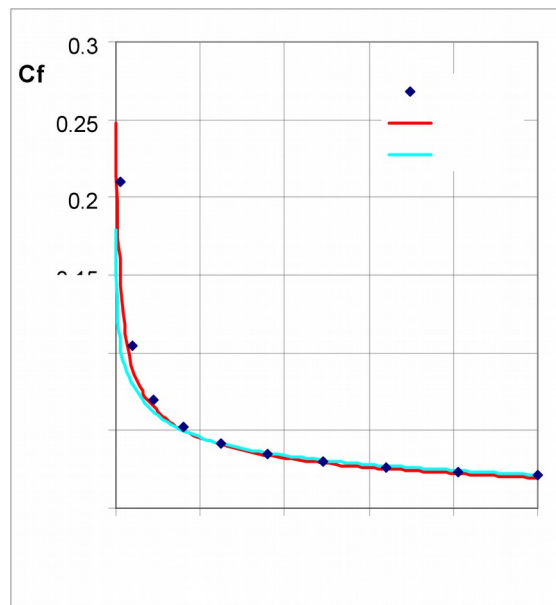
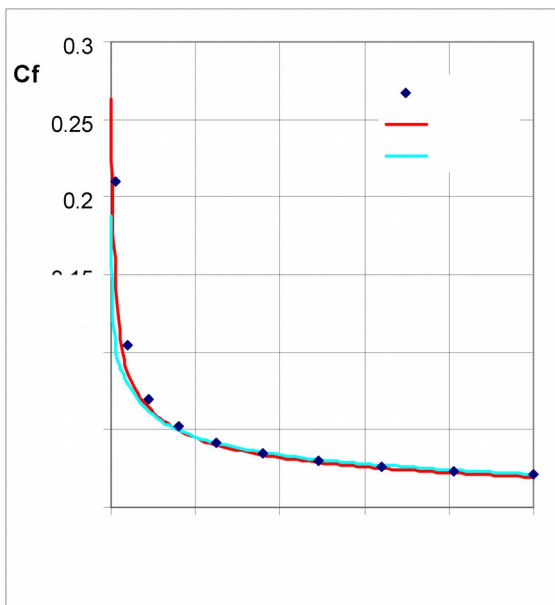


Рис.5. Профили скорости, условие прилипания      Рис.6. Профили скорости, условие скольжения  
 Полученное решение для распределения скоростей легко позволяет вычислить и сопротивление

трения. Согласно [17] местный коэффициент трения равен  $c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$ , где  $Re_x$  - число Рейнольдса, определенное по расстоянию  $x$  от передней кромки пластины. Из рис.7 и 8 также видно хорошее согласие расчетов по Навье - Стоксу и Грэду как между собой, так и с приведенным теоретическим решением. Как и следовало ожидать, в стационарных установившихся потоках Грэд дает близкие к Навье–Стоксу результаты, что, с другой стороны, подтверждает работоспособность как метода TD, так и программных модулей. Дополнительно было обнаружено, что увеличение порядка аппроксимации численного дифференцирования до 3-го делает решения, полученные на основе уравнений Грэда еще более монотонными и более близкими к решениям, полученным на основе уравнений Н-С. Таким образом, достоверность TD метода нашла свое подтверждение.



**Список литературы**

1. *Грэд Г.* О кинетической теории разреженных газов. – Механика, 1952, вып. N 4, С.71-97, вып. N 5, С.61-96.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608с.
3. *Пинчуков В.И., Шу Ч.-В.* Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. – Н., Изд-во СО РАН, 2000, 232с.
4. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Численные методы газовой динамики. – М.: Высшая школа, 1987, 232 с.
5. *Дадоне А., Моретти Дж.* Эффективный метод расчета трансзвукового обтекания профилей на основе уравнений Эйлера. Часть I Теория. Часть II Приложения. // Аэрокосмическая техника, 1989, №4. с.3-20.
6. *Наполитано М., Дадоне А.* Методы расчета трехмерных сжимаемых течений, основанные на неявной лямбда - схеме // Аэрокосмическая техника, 1986, №7, с.23-28.
7. *Chakravarthy S.R., Anderson D.A., Salas M.D.* The Split-Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gasdynamic Equations. – AIAA Paper 80-0268, Pasadena, California, 1980, 20 p.
8. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamic Equation with Application to Finite-Difference Methods // Journal of Computational Physics, 1981, V.40, №2, P.263-294.
9. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976, 400 с.
10. *Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З.* Неявная схема С.К.Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // ЖВМиМФ, 1987, т.27, №11, с.1725-1735.
11. *Roe P.L.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // Journal of Computational Physics, 1981, V.43, P.357-372.
12. *Chung T.J.* Computational Fluid Dynamics. – Cambridge University Press, 2002, 1012с.
13. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. - М.: Наука, 1988, 288 с.
14. *Попов С.А.* Моделирование течений сжимаемого газа на основе метода полных дифференциалов. – Математическое моделирование, 2005, том 17, N 3, С.99-119.

15. *Бондаренко Ю.А.* Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы. – РФЯЦ-ВНИИЭФб 88 – 2003, 53с.
  16. *Галуа Э.* Сочинения. Пер. – ГРОиТТЛ, Ленинград, 1936, 336 с.
  17. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974, 712 с.
- 

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*Попов Сергей Александрович, кафедра Аэродинамики ЛА Московского авиационного института (Государственного технического университета), ст. преподаватель.*

*E-mail: aerospacenet@mtu-net.ru*

#### ***The Total Differentials Method for Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations***

*S.A. Popov*

*The new fundamental method of solution of hyperbolic system of differential equations, the characteristic form of which can be a more than quartic polynomial with nonzero coefficients is presented. The method is based on the approximation of full derivatives relations of macroscopic variables. The method has been applied to H.Grad equations. The results of data validation are submitted.*