

## АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА ПОГРУЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ С ФИКТИВНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

Владимир Владимирович ВИННИКОВ родился в 1979 г. в городе Кишиневе. Доцент МАИ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области математического моделирования, численных методов вычислительной аэрогидродинамики. Автор 16 научных работ. E-mail: vvinnikov@list.ru

Vladimir V. VINNIKOV, PhD., was born in 1979 in Kishinev. He is an Assistant Professor at the MAI. His research interests are in mathematical modeling, numerical methods, computational aerohydrodynamics. He has published 16 technical papers. E-mail: vvinnikov@list.ru

*Работа посвящена вопросам алгоритмического описания и программной реализации неявного метода погруженной границы с фиктивными ячейками, используемого для решения на прямоугольных сетках уравнений теплопереноса и аэрогидродинамики в сложных геометрических областях с криволинейными границами. Подробное описание алгоритма приводится на примере решения уравнения Лапласа в области с криволинейной границей.*

*This paper considers aspects of algorithmic description and program implementation of implicit ghost-cell immersed boundary method for solving heat transfer and aerohydrodynamic equations in complex geometrical domains with curvilinear boundaries on rectangular grids. Detailed description for solving Laplace equation in domain with curvilinear boundary is provided.*

**Ключевые слова:** численное моделирование, метод погруженной границы, криволинейная граница, сложные геометрические области.

**Key words:** numerical simulation, immersed boundary method, curvilinear boundary, complex geometries.

### Введение

Численные методы с дискретизацией на прямоугольных сетках, позволяющие рассчитывать течения для сложных геометрических областей, получили широкое распространение в задачах теплопереноса и аэрогидродинамики. Использование структурированных прямоугольных сеток привлекательно из-за легкости их построения и адаптации к геометрическим особенностям расчетной области, а также простоты построения дискретных схем. Это обеспечивает высокую универсальность данного семейства методов и сохраняет максимальное единообразие и эффективное взаимное согласование используемых алгоритмов при решении широкого класса задач. Такие факторы особенно актуальны при численном моделировании сложных явлений, состоящих из разнородных физических процессов.

В методах, использующих прямоугольные сетки, основное внимание уделяется аппроксимации краевых условий на криволинейных границах, не совпадающих с сеточными линиями. При дискретизации краевых условий используется представление искомой сеточной функции многомерным полиномом невысокой степени. Распространенным

является использование билинейной и биквадратичной аппроксимаций. В работах [1–3] приведены результаты расчетов на прямоугольных сетках, не уступающие по точности решениям на адаптивных структурированных и неструктурированных сетках.

Метод погруженной границы с фиктивными ячейками может использоваться как в явной [4], так и в неявной [5] формулировке. В последнем случае для решения итоговой СЛАУ с разреженной матрицей ленточной структуры удобно использовать методы семейства сопряженных градиентов, например метод стабилизированных бисопряженных градиентов BiCGStab (BiConjugate Gradient Stabilized) [6, 7] с предобуславливанием для ускорения сходимости итераций.

### Математическая модель

Приведем описание неявного метода погруженной границы на примере модельной двумерной стационарной задачи теплопроводности в области с криволинейными границами. В отсутствие источников тепла задача описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Расчётная область представляет собой кольцо с внутренним радиусом  $r$  и внешним радиусом  $R$  (рис. 1). Центры окружностей совпадают и расположены в начале координат. На каждом из гладких участков границы в общем виде задаются краевые условия третьего рода:

$$\alpha\theta + \beta \frac{\partial\theta}{\partial n} = \gamma. \quad (2)$$

Расчетная область помещается в прямоугольник и покрывается равномерной ортогональной сеткой (рис. 2). При этом криволинейная граница исходной области не совпадает с сеточными линиями.

Пусть дискретизация уравнения Лапласа осуществляется неявной схемой с использованием стан-

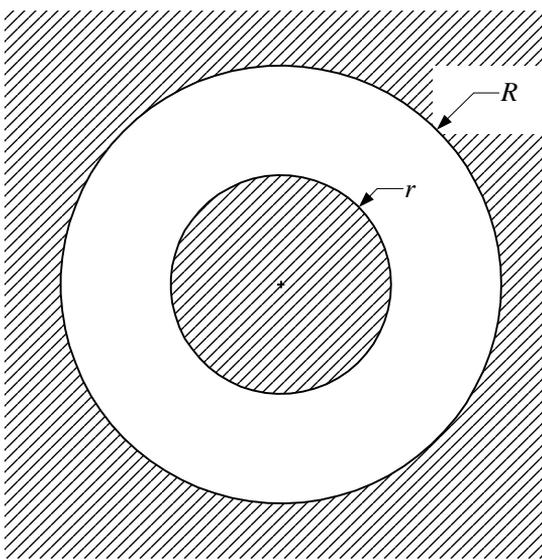


Рис. 1. Расчетная область с криволинейными границами

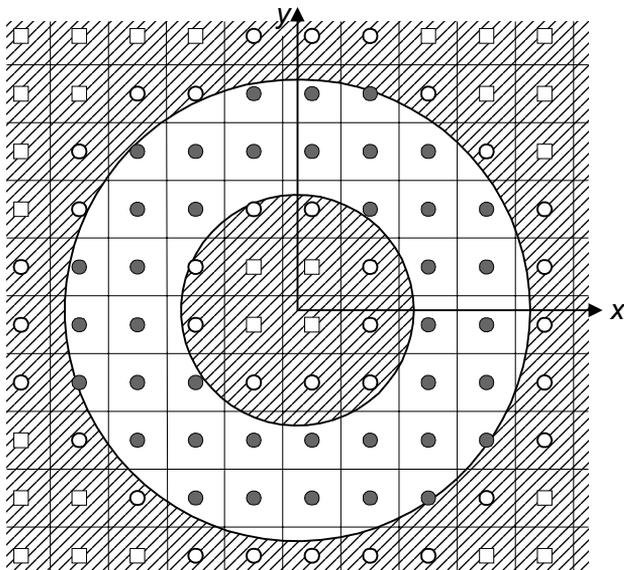


Рис. 2. Покрывание расчетной области равномерной декартовой сеткой

дартного пятиточечного шаблона. Уравнение (1) после дискретизации на равномерной сетке с шагами по пространству  $h_x, h_y$  примет вид

$$\frac{\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{h_x^2} + \frac{\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{h_y^2} = 0. \quad (3)$$

Итоговая система замыкается линейными уравнениями, аппроксимирующими краевые условия на криволинейных границах расчетной области. Эти уравнения связывают значения искомой сеточной функции  $\theta_1, \theta_2$  в двух приграничных узлах  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  и одним фиктивным узлом  $(x_G, y_G)$  таким

образом, чтобы в точке  $(x_0, y_0)$  на границе (рис. 3) выполнялось краевое условие (2). Для построения линейных уравнений применяется процедура билинейной интерполяции

$$\left[ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \right]^T \mathbf{B}^{-1} \Theta = \delta, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_G \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Использование неявной схемы [5] является предпочтительным в силу безусловной невырожденности матрицы  $\mathbf{B}$ , по сравнению с явной схемой аппроксимации краевых условий, использованной в работе [4].

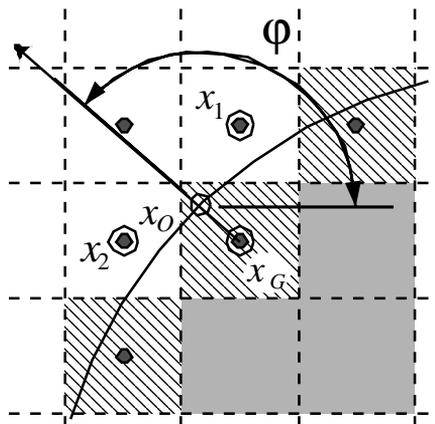


Рис. 3. Пример аппроксимации краевого условия (2) в точке  $(x_0, y_0)$  по значениям функции  $\theta$  в фиктивном и приграничных узлах

**Алгоритмическое описание метода**

Для использования метода погруженной границы необходимо вначале задать геометрические свойства границы расчётной области. Это осуществляется вспомогательными функциями, определяющими относительное расположение произвольно заданной точки относительно криволинейной границы и возвращающими координаты точки на границе  $(x_0, y_0)$ , ближайшей к заданной, а также угол нормали к границе в этой точке  $\varphi$ .

Используемые вспомогательные функции имеют вид:

1) *Boundary*  $(x, y)$  — проверка на расположение точки  $(x, y)$  внутри расчётной области. Функция возвращает:

— неотрицательную величину, если точка  $(x, y)$  расположена внутри расчётной области, в частности является регулярным узлом сетки;

— отрицательную величину, если точка  $(x, y)$  находится за криволинейной границей расчётной области, в частности является фиктивным узлом.

Для задачи с кольцом в центре  $(0; 0)$  и радиусами  $r$  и  $R$  функцию можно определить как

$$\text{Boundary}(x, y) = [R^2 - (x^2 + y^2)] \cdot [(x^2 + y^2) - r^2];$$

2) *GetAngle*  $(x, y, \sin\_ \varphi, \cos\_ \varphi)$  — получение координат точки  $(x_0, y_0)$ , лежащей на границе, ближайшей к заданной точке  $(x, y)$ , и угла нормали к границе  $\varphi$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Функция возвращает угол нормали, синус угла, косинус угла, координаты точки на границе. Вид функции для кольца определяется выражениями:

$$\begin{aligned} r_{XY} &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin\_ \varphi &= \begin{cases} \frac{y}{r_{XY}}, r_{XY} \leq r; \\ \frac{-y}{r_{XY}}, r_{XY} \geq R; \end{cases} \quad \cos\_ \varphi = \begin{cases} \frac{x}{r_{XY}}, r_{XY} \leq r; \\ \frac{-x}{r_{XY}}, r_{XY} \geq R; \end{cases} \\ (x_0, y_0) &= \begin{cases} \left( \frac{x \cdot r}{r_{XY}}, \frac{y \cdot r}{r_{XY}} \right), r_{XY} \leq r; \\ \left( \frac{x \cdot R}{r_{XY}}, \frac{y \cdot R}{r_{XY}} \right), r_{XY} \geq R. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть исходная расчётная область с криволинейными границами полностью помещена в прямоугольник, на котором введена равномерная сетка с шагами  $h_x$  и  $h_y$ . В случае кольца сетка будет квадратной с шагом  $h_x = h_y$ . Для двумерного случая алгоритм метода погруженной границы примет следующий вид.

Перечисление индексов всех узлов сетки производится в двойном цикле

$$i = 0, 1, \dots, N - 1; j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Если  $\text{Boundary}(x_i, y_j) \geq 0$ , то узел  $(x_i, y_j)$  является регулярным и в результирующую СЛАУ добавляется уравнение конечно-разностной схемы с центральным узлом  $(x_i, y_j)$ , которое для уравнения Лапласа имеет дискретный вид:

$$a_{I5, J2} \theta_{J2} + a_{I5, J4} \theta_{J4} + a_{I5, J5} \theta_{J5} + a_{I5, J6} \theta_{J6} + a_{I5, J8} \theta_{J8} = 0,$$

где

$$a_{I5, J2} = a_{I5, J8} = \frac{1}{h_y^2}; \quad a_{I5, J4} = a_{I5, J6} = \frac{1}{h_x^2};$$

$$a_{I5, J5} = -2 \left( \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_x^2} \right)$$

(значения индексов  $(I, J)$  см. ниже в таблице).

Иначе узел  $(x_i, y_j)$  лежит вне исходной расчётной области.

Узел является фиктивным, если хотя бы один из узлов  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$ ,  $(x_i, y_{j+1})$  является регулярным узлом.

Если узел фиктивный, то применяется функция

$$\text{GetAngle}(x_i, y_j, \sin\_ \varphi, \cos\_ \varphi).$$

Пара регулярных узлов, прилежащих к фиктивному, выбирается в зависимости от угла нормали  $\varphi$ . Положение узла обозначается индексом  $q$  и задаётся таблицей.

Пример зависимости индексов  $q$  для выбираемой пары регулярных узлов от угла нормали  $\varphi$  приведен на рис. 4.

Встречаются также случаи, когда необходимо выполнить измельчение сетки, поскольку радиус кривизны границы слишком мал по сравнению с размерами ячейки (рис. 5).

Далее выпишем уравнение, аппроксимирующее краевое условие  $\alpha\theta + \beta(\partial\theta/\partial n) = \gamma$  относительно искомых величин  $\theta$ .

Уравнение для центрального узла  $(x_i, y_j)$  с порядковым номером  $(i + j \cdot N)$  в СЛАУ с 9-диагональной матрицей получит вид

$$a_{Iq1, Jq1} \theta_{Jq1} + a_{Iq2, Jq2} \theta_{Jq2} + a_{IqG, JqG} \theta_{JqG} = \gamma.$$

$(x_{i-1}, y_{j+1}), q=7$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i-1) + (j+1) \cdot N$	$(x_i, y_{j+1}), q=8$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = i + (j+1) \cdot N$	$(x_{i+1}, y_{j+1}), q=9$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i+1) + (j+1) \cdot N$
$(x_{i-1}, y_j), q=4$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i-1) + j \cdot N$	$q=5$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = i + j \cdot N$	$(x_{i+1}, y_j), q=6$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i+1) + j \cdot N$
$(x_{i-1}, y_{j-1}), q=1$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i-1) + (j-1) \cdot N$	$(x_i, y_{j-1}), q=2$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = i + (j-1) \cdot N$	$(x_{i+1}, y_{j-1}), q=3$ $I_q = i + j \cdot N$ $J_q = (i+1) + (j-1) \cdot N$

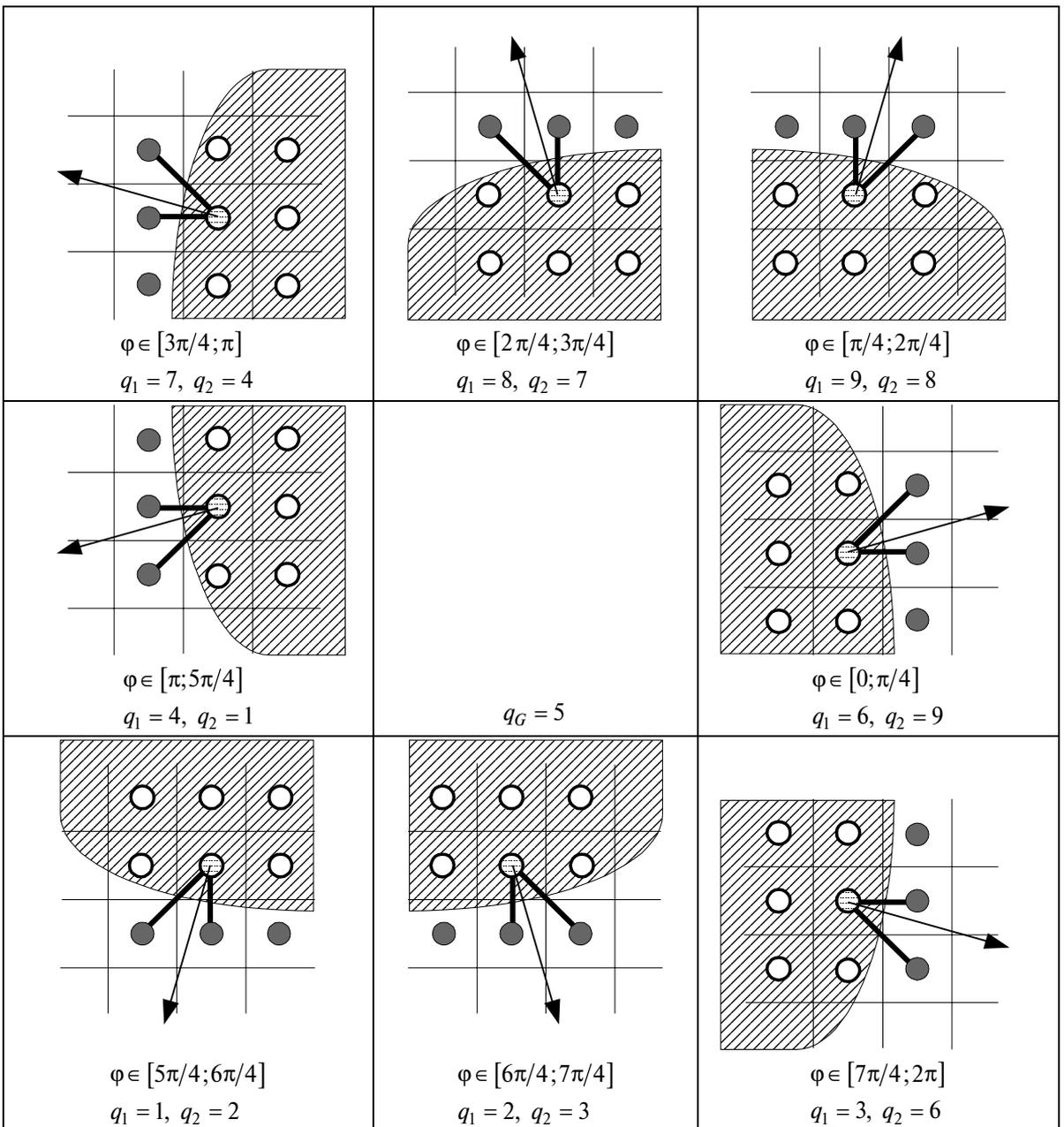


Рис. 4. Варианты расположения регулярных узлов относительно фиктивного в зависимости от угла нормали к границе

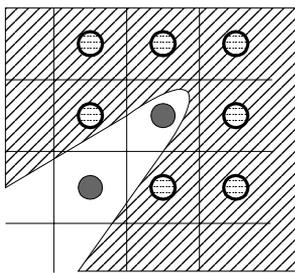


Рис. 5. Пример варианта, требующего измельчения сетки

Коэффициенты  $a_{i,j}$  равны

$$\begin{pmatrix} a_{Iq1,Jq1} \\ a_{Iq2,Jq2} \\ a_{IqG,JqG} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha X_O + \beta \cos \varphi \\ \alpha Y_O + \beta \sin \varphi \end{pmatrix}^T \mathbf{B}^{-1};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & x_{q1} & y_{q1} \\ 1 & x_{q2} & y_{q2} \\ 1 & x_i & y_i \end{pmatrix}.$$

Если узел лежит вне исходной расчётной области и не является фиктивным, то уравнение примет тривиальный вид:  $U_{JqG} = 0$ .

Завершение перечисления индексов  $(i, j)$ .

Результирующая СЛАУ решается одним из методов бисопряженных градиентов. Алгоритмы приводятся по работам [6, 7].

Метод бисопряженных градиентов для заданной системы  $Ax = b$ :

1. Выбрать вектор начального приближения  $x_0$ .
2. Вычислить вектор невязки  $r_0 = b - Ax_0$ .
3. Выбрать вектор  $r_0^*$ , неортогональный вектору  $r_0$ :  $(r_0^*, r_0) \neq 0$ .
4. Задать векторы  $p_0, p_0^*$ :  $p_0 = r_0, p_0^* = r_0^*$ .
5. Итерационный процесс  $j = 0, 1, \dots$
6. Вычисление скаляра  $\alpha_j = (r_j, r_j^*) / (Ap_j, p_j^*)$ .
7. Уточнение приближенного решения  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$ .
8. Невязка для уточненного решения  $r_{j+1} = r_j - \alpha_j Ap_j$ .
9. Вычисление вектора  $r_{j+1}^* = r_j^* - \alpha_j A^T p_j^*$ .
10. Вычисление скаляра  $\beta_j = (r_{j+1}, r_{j+1}^*) / (r_j, r_j^*)$ .
11. Вычисление уточненного градиента  $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$ .
12. Вычисление уточненного градиента  $p_{j+1}^* = r_{j+1}^* + \beta_j p_j^*$ .

13. Выполнять пункты 5—12 до достижения сходимости.

Метод стабилизированных бисопряженных градиентов для заданной системы  $Ax = b$ :

1. Выбрать вектор начального приближения  $x_0$ .
2. Вычислить вектор невязки  $r_0 = b - Ax_0$ .
3. Выбрать произвольный вектор  $r_0^*$ .
4. Задать вектор  $p_0$ :  $p_0 = r_0$ .
5. Итерационный процесс  $j = 0, 1, \dots$
6. Вычисление скаляра  $\alpha_j = (r_j, r_0^*) / (Ap_j, r_0^*)$ .
7. Вычисление вектора  $s_j = r_j - \alpha_j Ap_j$ .
8. Вычисление скаляра  $\omega_j = (As_j, s_j) / (As_j, As_j)$ .
9. Уточнение приближенного решения  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$ .
10. Невязка для уточненного решения  $r_{j+1} = s_j - \omega_j As_j$ .
11. Вычисление скаляра  $\beta_j = [(r_{j+1}, r_0^*) / (r_j, r_0^*)] \times [\alpha_j / \omega_j]$ .
12. Вычисление уточненного градиента

$$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j Ap_j).$$

13. Выполнять пункты 5—12 до достижения сходимости.

Метод стабилизированных бисопряженных градиентов с преобуславливающей матрицей К для заданной системы  $K^{-1}Ax = K^{-1}b$ :

1. Выбрать вектор начального приближения  $x_0$ .
2. Вычислить вектор невязки  $r_0 = b - Ax_0$ .
3. Выбрать произвольный вектор  $r_0^*$ , например  $r_0^* = r_0$ .
4. Задать вектор  $p_0$ :  $p_0 = r_0$ .
5. Итерационный процесс  $j = 0, 1, \dots$
6. Если  $(r_j, r_0^*) = 0$ , то сброс метода.
7. Найти  $p^*$ , решив СЛАУ  $Kp^* = p_j$ .
8. Вычисление скаляра  $\alpha_j = (r_j, r_0^*) / (Ap^*, r_0^*)$ .
9. Вычисление вектора  $s_j = r_j - \alpha_j Ap^*$ .
10. Если  $\|s_j\|$  мало, то  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p^*$  и завершение процесса 5—16.
11. Найти  $z$ , решив СЛАУ  $Kz = s_j$ .
12. Вычисление скаляра  $\omega_j = (Az, s_j) / (Az, Az)$ .
13. Уточнение приближенного решения  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p^* + \omega_j z$ .
14. Невязка для уточненного решения  $r_{j+1} = s_j - \omega_j Az$ .

15. Вычисление скаляра

$$\beta_j = [(r_{j+1}, r_0^*) / (r_j, r_0^*)] \times [\alpha_j / \omega_j].$$

16. Вычисление уточненного градиента

$$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j A p^*).$$

17. Выполнять пункты 5—16 до достижения сходимости.

### Программная реализация

Приведем описание формата хранения матрицы результирующей СЛАУ. Матрица  $A$  имеет ленточную структуру из пяти ненулевых диагоналей для внутренних узлов и девяти диагоналей для фиктивных узлов. Главная диагональ определяется коэффициентами при переменных с индексами  $(I5, J5)$ , наддиагональ и поддиагональ — коэффициентами с индексами  $(I5, J4)$  и  $(I5, J6)$  соответственно. Нижний пакет трех диагоналей сформирован из коэффициентов с индексами  $(I5, J1)$ ,  $(I5, J2)$ ,  $(I5, J3)$ . Верхний пакет из трех диагоналей задается индексами  $(I5, J7)$ ,  $(I5, J8)$ ,  $(I5, J9)$ .

Программная реализация матрицы  $A$  представляет собой двумерный массив размерами  $N \cdot M \times 10$ . Первый индекс этого массива обозначает номер уравнения  $I5$ , второй индекс обозначает номер диагонали. Нумерация диагоналей проводится слева направо, начиная с нуля. Элемент  $(I5, J_q)$  лежит на  $q-1$  диагонали на позиции  $I5$ , т. е.

$$A[I5][q-1] = a_{I5, J_q}.$$

Если для заданных  $(i, j)$  индекс  $J_q$  меньше нуля, то соответствующий элемент  $A[I5][q-1]$  задается равным нулю. В массиве также хранится вектор-столбец правой части системы уравнений. Правой частью уравнения  $I5$  соответствует  $A[I5][9] = a_{I5, J_q}$ .

### Выводы

В настоящей работе предложено алгоритмическое описание неявного метода погруженной границы с фиктивными ячейками на примере решения уравнения Лапласа в расчётной области с криволинейными границами. Приведены варианты алгоритма метода бисопряженных градиентов для решения результирующей СЛАУ с разреженной ленточной матрицей. Представлен экономичный способ хранения матрицы СЛАУ и адресации к её элементам в двумерном массиве.

Модификации предложенного метода погруженной границы были успешно использованы автором в различных задачах, таких, как: расчёт несжимаемых вязких течений в областях сложной

геометрической формы [5], моделирование сжимаемых невязких течений в областях с криволинейными и подвижными границами [8], в том числе гетерогенных течений [9], а также моделирование теплообмена с подвижным криволинейным фронтом фазового перехода [10].

*Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки российских учёных МК-115.2009.8) и РФФИ (проект № 09-08-00542-а)*

### Библиографический список

1. Koh E.P.C., Tsai H.M., Liu F. Euler Solution Using Cartesian Grid with a Gridless Least-Squares Boundary Treatment // AIAA journal, 2005, Vol. 43, № 2, P. 246-255.
2. Luo H., Baum J.D., Lohner R. A hybrid Cartesian grid and gridless method for compressible flows // Journal of Computational Physics, 2006, Vol. 214, № 2, P. 618-632.
3. Colella P., Graves D.T., Keen B.J., Modiano D. A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws // Lawrence Berkeley National Laboratory. 2004, Paper LBNL-56420.
4. Tseng Y.H., Ferziger J.H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry // J. Comp. Phys. 2003. N 192. P. 593-623.
5. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Применение декартовых сеток для решения уравнений Навье—Стокса в областях с криволинейными границами // Математическое моделирование. 2005. Т.17. №8. С 15-30.
6. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company. Boston, 1996.
7. Van der Vorst H.A. Krylov subspace iteration. // Computing in Science & Engineering. 2000, V. 2. N 1, P. 32-37.
8. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Метод погруженной границы для расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел на прямоугольных сетках // Электронный журнал «Труды МАИ». (2007). № 27 (апрель).
9. Винников В.В., Ревизников Д.Л., Способин А.В. Численное моделирование теплоэрозийного разрушения тел в сверхзвуковом запыленном потоке // Вестник МАИ. 2008. Т. 15. №5. С. 101-108.
10. Винников В.В., Поликша И.В., Ревизников Д.Л. Применение метода погруженной границы к решению задач теплообмена с подвижным фронтом фазового перехода // Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену. 2006. Т.7. С. 183-186.

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 18.11.2009