

УДК 531.561

## **Совершенствование канонической баллистической модели движения неуправляемой ракеты с целью учета движения её вокруг центра масс**

**Вытришко Ф.М., Гультяев Н.Н.\***

*Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,  
ул. Старых большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия*

*\*e-mail:mytant5@rambler.ru*

### **Аннотация**

Рассматривается направление совершенствования баллистических алгоритмов (БА) расчета конечной точки траектории полета неуправляемой авиационной ракеты (НАР). Показано, что одним из факторов, приводящих к снижению точности, является не вполне корректный учет в БА значения начального угла нутации НАР, возникающего при наличии углов атаки и скольжения авиационного комплекса (АК) в момент пуска.

Предложен алгоритм внесения поправок в расчет начальных условий движения НАР, дающий существенное снижение методических ошибок БА. С целью учета особенностей решаемой задачи выбрана специфическая совокупность систем координат, для которой дан вывод необходимых уравнений, если такие уравнения не содержатся в доступных первоисточниках.

Разработана методика расчета аппроксимационных поправок с помощью наземных стационарных электронных вычислительных машин, с целью их после-

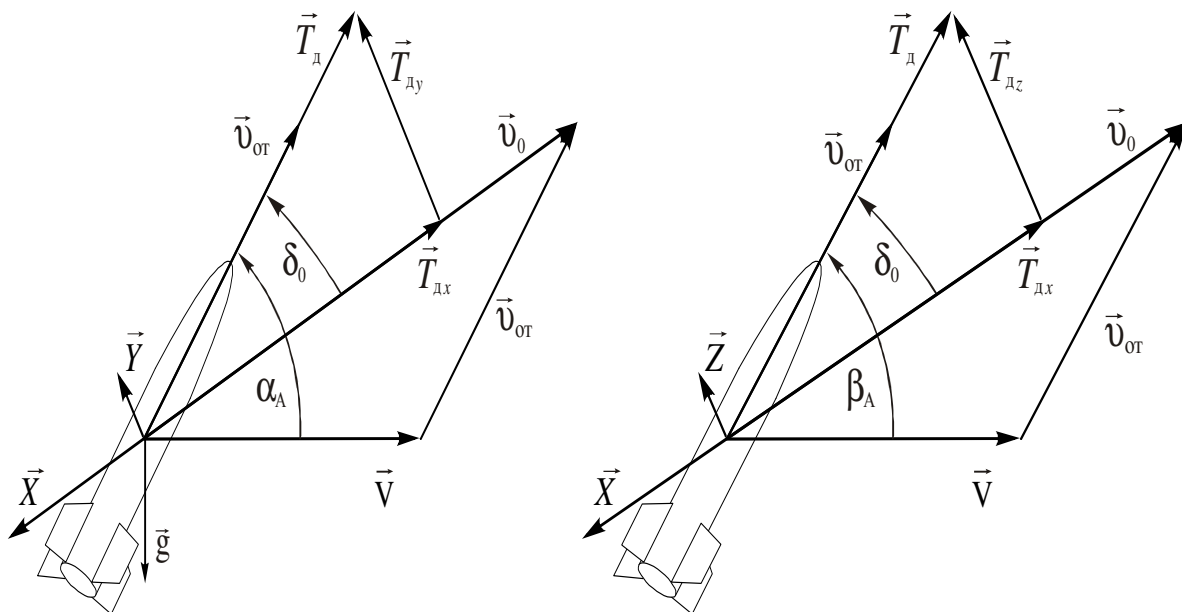
дующего переноса в баллистические архивы. В качестве примера выполнены расчеты для типовой НАР, которые показывают эффективность использования предложенной методики.

**Ключевые слова:**

баллистический алгоритм; неуправляемая авиационная ракета; начальный угол нутации.

**Постановка задачи исследования**

При пуске неуправляемых авиационных ракет (НАР) при больших значениях углов атаки ( $\alpha_A$ ) и скольжения ( $\beta_A$ ) авиационных комплексов (АК), ракета начинает движение с начальным углом нутации ( $\delta_0$ ) (рисунок 1). Величина угла  $\delta_0$  может быть значительной и определяется в первую очередь значениями углов атаки  $\alpha_A$ , скольжения  $\beta_A$  и воздушной скоростью АК  $V$ . В качестве примера на рисунке 2 показана зависимость угла  $\delta_0$  от угла атаки и скорости АК. Это приводит к тому, что действительная система сил не соответствует схемам сил, принятых в баллистических алгоритмах (БА) АК [1].



А

Б

Рисунок 1 – Схема действующих сил в вертикальной (А) и горизонтальной (Б) плоскости на НАР в момент пуска.

Во всех без исключения БА расчет траектории НАР производится в рамках решения основной задачи внешней баллистики (ОЗВБ). В ОЗВБ средство поражения считается материальной точкой [Ошибка! Источник ссылки не найден.], не имеющей углов ориентации в пространстве В силу этого принимают допущение о том, что тяга реактивного двигателя (РД)  $\vec{T}_d$  в каждый момент времени, в том числе и в начальный момент, совпадает с направлением вектора скорости ракеты. В момент

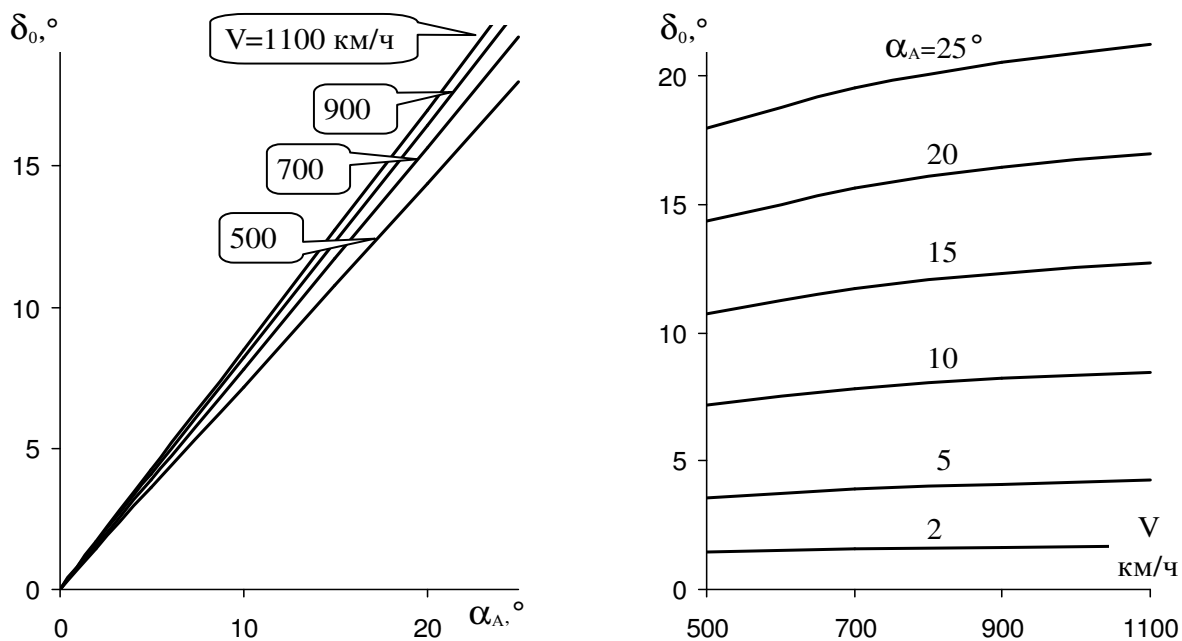


Рисунок 2 – Зависимость начального угла нутации НАР  $\delta_0$  от угла атаки и скорости АК.

пуска ракеты, это направление определяет скорость бросания  $\vec{v}_0 = \vec{V} + \vec{v}_{от}$ , которая складывается из воздушной скорости АК  $\vec{V}$  и скорости отделения НАР от АК (или дульной скорости)  $\vec{v}_{от}$ .

В случае наличия угла нутации  $\delta_0$  с направлением вектора скорости ракеты совпадает только одна составляющая тяги РД –  $T_{дх}$ , а другая составляющая  $T_{дy}$  перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}_0$ , складываясь с подъемной силой  $Y$ , приводит к отклонению траектории ракеты от заданного направления бросания. Поскольку на активном участке траектории тяга РД является определяющей силой, то данное обстоятельство приводит к значительным ошибкам при расчете траектории в рамках решения ОЗВБ – при положительных углах атаки наблюдается перелет (рисунок 4), а при отрицательных углах – недолет.

В рассматриваемой ситуации не имеет значение, чем вызван начальный

угол нутации – углом атаки АК или углом установки пускового устройства (ПУ)  $\alpha_s$  НАР (на рисунке 1 угол  $\alpha_s$  не показан), поскольку тот и другой в равной мере приводят к отклонению оси ракеты от направления скорости бросания.

Аналогичным образом состоит дело при наличии угла установки ПУ  $\beta_s$  в горизонтальной плоскости или угла скольжения АК  $\beta_A$  (на рисунке 1 угол  $\beta_s$  не показан). Здесь в расчет необходимо принимать не подъемную, а боковую силу  $Z$ . Наличие углов в горизонтальной плоскости будет приводить к боковому отклонению ракеты от линии прицеливания.

Следует заметить, что некоторое различие в картине движения НАР в вертикальной и горизонтальной плоскостях все же имеется и вызвано оно тем, что вектор скорости в процессе полета ракеты отклоняется к Земле еще и под действием силы тяжести. Статический аэродинамический момент хотя и доворачивает ракету к направлению скорости, но в силу динамического запаздывания остается некоторая постоянная составляющая угла атаки ракеты, что также приводит к изменению угла пикирования и, соответственно, к промаху.

На рисунке 3 показан характер изменения угла атаки типовой НАР [3] калибра 80 мм. при пуске в следующих условиях: высота  $H=200$  м, скорость АК  $V=360$  км/ч, угол пикирования  $\lambda_v=-10^\circ$  и угол атаки  $\alpha_A=10^\circ$  на первой секунде полета (без дульного участка). Изменение угла атаки за первый полупериод полета (0,1 секунды) приводит к заметному отклонению действительного угла пикирования НАР от расчетного до  $1,7^\circ$ . Дальнейшая стабилизация ракеты отно-

сительно вектора скорости не меняет положение угла пикирования – начальное отклонение сохраняется на уровне  $1,5^\circ$  до конца полета.

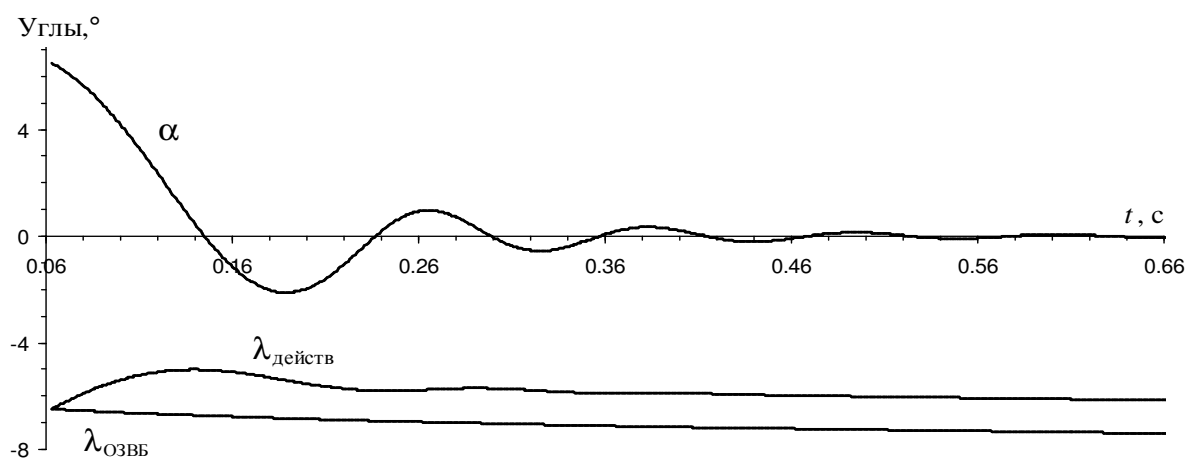


Рисунок 3 – Изменение углов атаки и пикирования НАР в полете.

Различия при этих условиях между действительной траекторией и траекторией, рассчитанной в рамках решения ОЗВБ без учета начального угла нутации, видны на рисунке 4. В данных условиях бросания перелет составил свыше 200 метров.

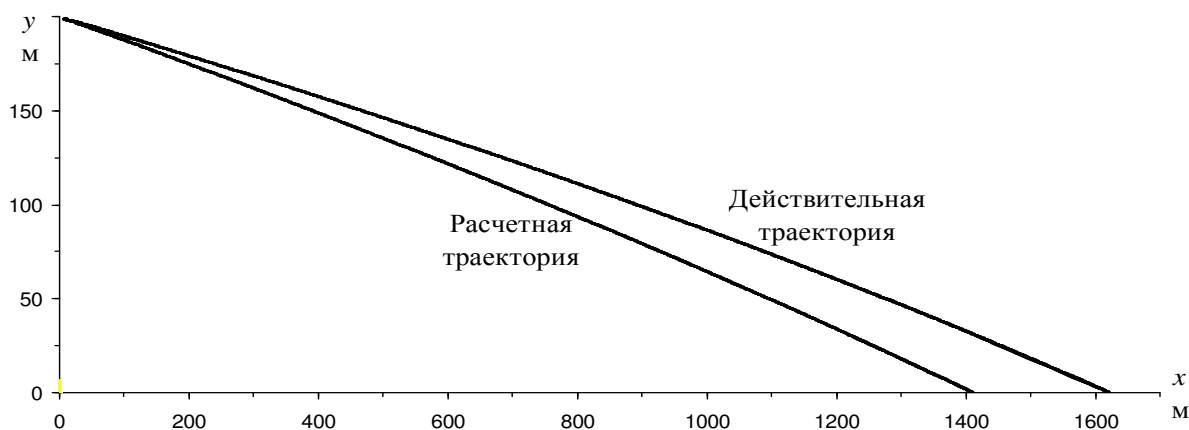


Рисунок 4 – Действительная и расчетная траектории НАР.

Таким образом, для повышения точности расчета конечной точки падения НАР необходимо совершенствовать математический аппарат БА АК, при

этом учитывая накладываемые вычислительные и временные ограничения [2].

## **1. Баллистические модели полета ракеты**

### **1.1. Поправки к углам установки оружия для учета начального угла нутации НАР**

Прямой учет рассматриваемого эффекта в БА АК путем решения баллистической задачи с помощью полной баллистической модели (ПБМ), содержащей, как известно, 12 весьма громоздких дифференциальных уравнений практически невозможен из-за высоких вычислительных затрат, несовместимых с возможностями современных БЦВС. В силу этого предлагается в БА, работающих на базе простой ОЗВБ, ввести некоторые поправки, учитывающие наличие начального угла нутации НАР. Поскольку математическая модель поправок не имеет строгого аналитического решения, то для нее целесообразно подобрать подходящее аппроксимационное выражение.

Выбор такой аппроксимационной модели основывается на эвристическом анализе зависимости промаха по дальности от различных первичных факторов – в первую очередь от угла атаки АК  $\alpha_A$ , угла установки оружия  $\alpha_s$  и скорости АК  $V$ . С этой целью с помощью ПБМ, включающей как уравнения движения центра масс ракеты, так и уравнения движения ракеты относительно центра масс, при различных значениях  $\alpha_A$  и  $V$  были рассчитаны координаты точки падения типовой ракеты калибра 80 мм [3]. Значения остальных условий бросания в этом анализе были приняты следующими: угол установки оружия  $\alpha_s = -2^\circ$ , высота пуска НАР  $H = 500$  м, высота цели над уровнем моря  $h_c = 0$ , угол пикиро-

вания АК  $\lambda_v = -10^\circ$ . Расчетные значения координат конечной точки траектории ракеты при тех же условиях пуска получены моделированием с использованием канонической баллистической модели (КБМ) в рамках решения ОЗВБ, что имитирует решение задачи баллистики в БА, не имеющем других методических ошибок.

Графическое представление полного углового промаха (рисунок 5) в картинной плоскости позволяет сделать предварительный вывод о предпочтительности внесения поправок в угол прицеливания – здесь поправки должны будут иметь достаточно простое выражение. Использование аппроксимации существенно осложняется зависимостью угла прицеливания от большого числа исходных данных. Решение задачи можно упростить алгоритмическим внесением поправок к физическим углам установки оружия на АК с помощью выражений:

$$\alpha_s^\Sigma = \alpha_s + f_\alpha[(\alpha_A + \alpha_s), V]; \quad \beta_s^\Sigma = \beta_s + f_\beta[(\beta_A + \beta_s), V],$$

где;  $\alpha_s^\Sigma, \beta_s^\Sigma$  – алгоритмические углы установки оружия с учетом поправок;

$\alpha_s, \beta_s$  – физические углы установки оружия на АК;

$f_\alpha[(\alpha_A + \alpha_s), V]; f_\beta[(\beta_A + \beta_s), V]$  – функции алгоритмических поправок к физическим углам установки оружия.

Функции алгоритмических поправок можно принять в виде двумерных полиномов:



$$f_{\alpha}[(\alpha_A + \alpha_s), V] = k_{\alpha 0}^V(V) + k_{\alpha 1}^V(V) \cdot (\alpha_A + \alpha_s) + k_{\alpha 2}^V(V) \cdot (\alpha_A + \alpha_s)^2;$$

$$f_{\beta}[(\beta_A + \beta_s), V] = k_{\beta 1}^V(V) \cdot (\beta_A + \beta_s) + k_{\beta 2}^V(V) \cdot (\beta_A + \beta_s)^2.$$

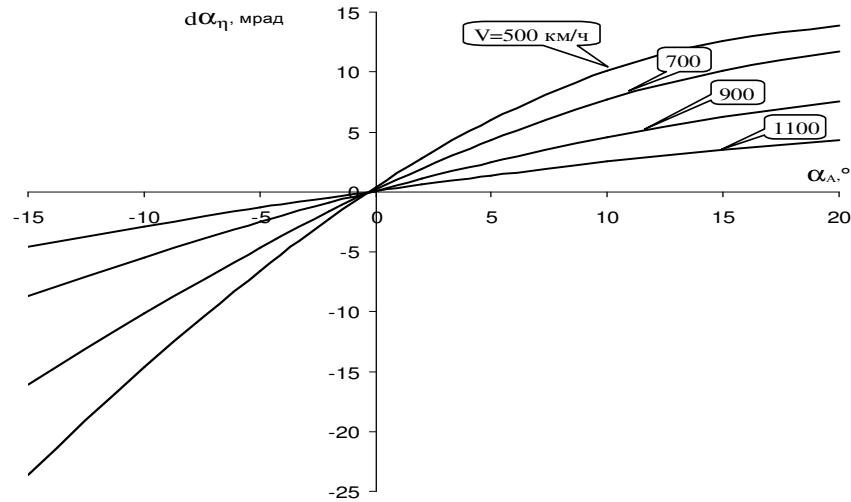


Рисунок 5 – Зависимость углового промаха НАР в картинной плоскости на уровне цели от угла атаки и скорости АК.

В свою очередь, для учета скорости АК коэффициенты  $k_{ij}^V$  примем также

в виде степенных полиномов:

$$k_{\alpha 0}^V(V) = k_{\alpha 0}^{V_0} + k_{\alpha 0}^{V_1} V + k_{\alpha 0}^{V_2} V^2;$$

$$k_{\alpha 1}^V(V) = k_{\alpha 1}^{V_0} + k_{\alpha 1}^{V_1} V + k_{\alpha 1}^{V_2} V^2;$$

$$k_{\alpha 2}^V(V) = k_{\alpha 2}^{V_0} + k_{\alpha 2}^{V_1} V + k_{\alpha 2}^{V_2} V^2;$$

$$k_{\beta 1}^V(V) = k_{\beta 1}^{V_0} + k_{\beta 1}^{V_1} V + k_{\beta 1}^{V_2} V^2;$$

$$k_{\beta 2}^V(V) = k_{\beta 2}^{V_0} + k_{\beta 2}^{V_1} V + k_{\beta 2}^{V_2} V^2.$$
(1)

Первоначальные значения коэффициентов аппроксимации  $k_{ij}^V$  могут быть определены методом наименьших квадратов (МНК) [4] по данным моделирования пусков НАР на ПБМ в различных условиях применения.

Алгоритм определения требуемых коэффициентов модели поправок состоит в следующем (рисунок 6). По заданному набору условий бросания  $Y_0$  из множества допустимых для данной НАР и данного АК с помощью ПБМ рас-

считывается соответствующее множество координат точек падения НАР  $Y_c$ . При этом используется полный набор БХ НАР  $V$ . Приняв в качестве исходных данных матрицу коэффициентов  $\tilde{k}_{ij}^v$ , с помощью КБМ решается ОЗВБ и получается первое приближение к множеству требуемых координат точек падения НАР  $Y_c$ . Затем организуется цикл уточнения матрицы коэффициентов  $\tilde{k}_{ij}^v$ , заканчивающийся при условии, что очередная итерация не дает улучшения квадратичного критерия:

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_{ci} - \tilde{Y}_{ci}(\tilde{k})]^2$$

где  $n$  – число расчетных условий бросания.

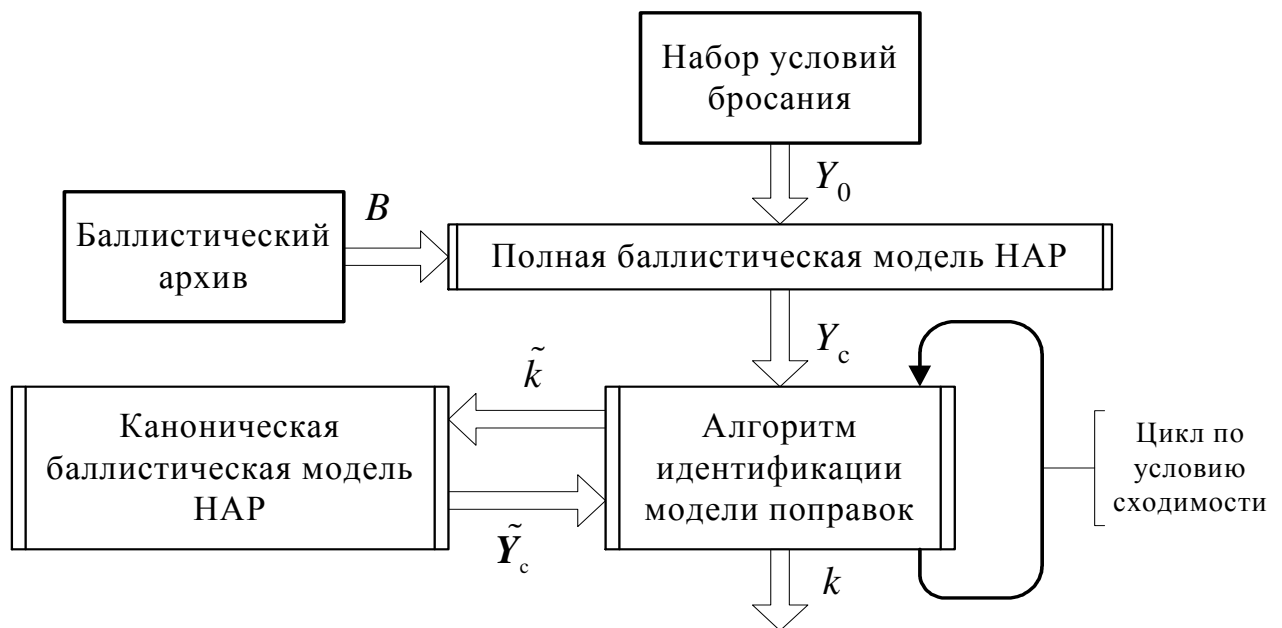


Рисунок 6 – Алгоритм идентификации модели поправок.

## 1.2. Каноническая баллистическая модель движения НАР

Примем за основу исходные векторные уравнения движения (динамические и кинематические) отдельно взятой ступени НАР в рамках решения ОЗВБ,

приведенные в [Ошибка! Источник ссылки не найден.], и несколько модифицируем их с целью возможности учета бокового движения ракеты:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{g_0}{V_\theta^2} \frac{m_0}{m} H(h) c_{x0}^N(M, t) v \vec{v} + \frac{T_d}{m} \frac{\vec{v}}{v} + \vec{g}, \quad \frac{dr}{dt} = \vec{w}, \quad (2)$$

где:  $V_\theta = \sqrt{\frac{2m_0 g_0}{S \rho_{N0} i}}$  – характеристическая скорость ступени;

$m_0$  – начальная масса баллистического участка;

$T_d$  – тяга РД;

$m = m_0 + \dot{m} \tau$  – текущее значение массы НАР на активном участке полета;

$|\dot{m}| = \frac{m_k - m_0}{t_k}$  – секундный массовый расход топлива;

$m_k = m_0 - m_T$  – конечная масса НАР по завершении работы РД;

$m_T$  – масса топлива РД;

$t_k$  – время работы РД;

$H(h) = \frac{\rho(h)}{\rho_0}$  – нормированная плотность воздуха;

$\rho_0$  – плотность воздуха у поверхности Земли;

$h$  – высота текущей точки траектории НАР, отсчитываемая от уровня моря (абсолютная барометрическая высота);

$i = \left[ \frac{c_{x0}(M)}{c_{x0}^N(M)} \right]_{cp}$  – коэффициент формы НАР, усредненный в стандартизованном диапазоне чисел  $M$ ;

ванном диапазоне чисел  $M$ ;

$$c_{x0}^N(M) = \frac{c_{x0}(M)}{c_{x0}(M = M^N)} - \text{нормированный коэффициент силы лобового со-}$$

противления НАР;

$M^N$  – нормировочное значение числа Маха.

При отсутствии данных об индивидуальной зависимости  $c_{x0}^N(M)$  НАР она представляется в виде:

$$c_{x0}^N(M) = i c_{x3}^N(M)$$

где  $c_{x3}^N(M)$  – нормированный закон сопротивления.

С целью унификации уравнения (2) по отношению к НАР и упрощения процедуры вычисления правых частей дифференциальных уравнений движения введем обобщенную функцию сопротивления:

$$E = c^* \frac{m_0}{m} H_N(h) c_{x0}^N(M) v + \frac{T_d}{m v}$$

где  $c^*$  – баллистический коэффициент НАР в начале активного участка.

Вектор путевой скорости ракеты представим в виде трех слагаемых – продольной скорости  $w_x$ , называемой иногда трансверсальной, вертикальной скорости  $w_y$ , называемой радиальной, и боковой скорости  $w_z$ :

$$\vec{w} = w_x \vec{x}_g^o + w_y \vec{y}_g^o + w_z \vec{z}_g^o$$

Воспользуемся методикой получения скалярной формы уравнений, изложенной в [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], и распространим ее на более общий случай движения НАР в двух плоскостях. Тогда в подвижном нормальном базисе искомые уравнения в форме Коши примут вид:

$$\frac{d w_x}{dt} = -E v_x - \frac{w_x w_y}{R_c + h} \qquad \frac{d x}{dt} = \frac{R_c}{R_c + h} w_x$$

$$\frac{d w_y}{dt} = -E v_y - g_0 \left( \frac{R_3}{R_3 + h} \right)^2 + \frac{w_x^2 + w_z^2}{R_3 + h} \qquad \frac{d y}{dt} = w_y$$

$$\frac{d w_z}{dt} = -E v_z - \frac{w_z w_y}{R_3 + h} \qquad \frac{d z}{dt} = \frac{R_3}{R_3 + h} w_z$$

где  $R_3$  – радиус Земли.

### 1.3. Полная баллистическая модель движения НАР

ПБМ движения НАР имеет расширенную по сравнению с КБМ систему сил. Принимая систему внешних сил, состоящей из полной аэродинамической силы, силы тяжести и тяги РД, примем исходные векторные уравнения движения центра масс ракеты в виде:

$$m \frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{R} + m \vec{g} + \vec{T}_d; \quad \frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{v} + \vec{U} \qquad (3)$$

где  $\vec{U}$  – скорость ветра.

Здесь отличие от уравнений (2) состоит только в главном векторе аэродинамической силы  $\vec{R}$ . С учетом того, что все НАР имеют аэродинамическую осевую симметрию, для вектора  $\vec{R}$  примем траекторный базис:

$$\left\| \vec{R} \right\|_v = \left\| -X; Y; -Z \right\|$$

где  $X = c_x \cdot q \cdot S$  – сила лобового сопротивления;

$Y = c_y \cdot q \cdot S$  – подъемная сила;

$Z = c_z \cdot q \cdot S$  – боковая сила;

$c_x, c_y, c_z$  – аэродинамические коэффициенты (АДК). Поскольку их зави-

симось от углов атаки и скольжения имеет периодический характер, примем нелинейную тригонометрическую модель АДК;

$c_x(M) = c_{x0}(M) + c_x^{\delta^2}(M) \sin^2 \delta$  – коэффициент силы лобового сопротивления;

$c_y(M) = c_y^{\alpha}(M) \sin(2\alpha)$  – коэффициент подъемной силы;

$c_z(M) = c_z^{\delta}(M) \sin(2\beta)$  – коэффициент боковой силы.

Следуя методике получения скалярной формы уравнений, изложенной в [Ошибка! Источник ссылки не найден.], приведем динамическое векторное уравнение (3) к траекторному базису, и получим систему уравнений в форме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= (-X + R_M^{\delta} \sin \beta \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - mg \sin \lambda + T_d \cos \beta \cos \alpha) \frac{1}{m} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= (Y + R_M^{\delta} \sin \beta (\cos \alpha + \sin^2 \alpha) - mg \cos \lambda + T_d \sin \alpha) \frac{1}{m\nu} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= (Z - R_M^{\delta} \sin \alpha \cos \beta + T_d \sin \beta \cos \alpha) \frac{1}{m\nu \cos \lambda} \end{aligned} \quad (4)$$

Для кинематических уравнений движения центра масс ракеты в рамках ПБМ наиболее простая форма представления получается в стартовом базисе:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \nu \cos \varphi \cos \lambda + U_x; \\ \frac{dy}{dt} &= \nu \sin \lambda; \\ \frac{dz}{dt} &= -\nu \sin \varphi \cos \lambda + U_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) составляют систему уравнений движения центра масс НАР.

Движение тела относительно центра масс определяется системой моментов внешних сил, действующих на тело, его инерционными характеристиками и начальными условиями движения и описывается векторным динамическим уравнением:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (6)$$

где  $\vec{K}$  — кинетический момент тела;

$\vec{M}_i$  — момент  $i$ -й внешней силы относительно центра масс.

Наиболее простое выражение для кинетического момента  $\vec{K}$  получается в таком базисе, оси которого являются главными центральными осями инерции ракеты. Этому требованию удовлетворяют, например, связанный или же аксиальный базисы. Поскольку речь идет о НАР с осевой симметрией, то примем далее в качестве основного аксиальный базис (условно – базис «а»), дающий возможность несколько упростить скалярные уравнения. Аксиальный базис представим как разновидность связанного базиса, исключив из него вращение относительно продольной оси, то есть без угла крена. Для ракет эта скорость может иметь, разумеется, весьма значительную величину, но наличие осевой симметрии НАР позволяет учесть это вращение отдельно от системы дифференциальных уравнений сравнительно простым алгебраическим уравнением. Тогда:

$$\vec{K} = I_x \omega_{xa} \vec{x}_a^o + I_y \omega_{ya} \vec{y}_a^o + I_z \omega_{za} \vec{z}_a^o,$$

где  $I_x, I_y, I_z$  — главные центральные моменты инерции ракеты;

$\omega_{xa}, \omega_{ya}, \omega_{za}$  – проекции вектора  $\vec{\omega}$  абсолютной угловой скорости ракеты на оси аксиального базиса.

Дифференцируя выражение для  $\vec{K}$ , учтем, что моменты инерции НАР являются переменными, а из-за вращения её переменными оказываются и орты  $\vec{x}_a^o, \vec{y}_a^o, \vec{z}_a^o$ . В этом случае

$$\dot{\vec{K}} = \dot{I}_x \omega_{xa} \vec{x}_a^o + I_x \dot{\omega}_{xa} \vec{x}_a^o + I_x \omega_{xa} \dot{\vec{x}}_a^o + \dot{I}_y \omega_{ya} \vec{y}_a^o + I_y \dot{\omega}_{ya} \vec{y}_a^o + I_y \omega_{ya} \dot{\vec{y}}_a^o + \dot{I}_z \omega_{za} \vec{z}_a^o + I_z \dot{\omega}_{za} \vec{z}_a^o + I_z \omega_{za} \dot{\vec{z}}_a^o \quad (7)$$

Производные ортов аксиального базиса представляются выражениями:

$$\frac{d\vec{x}_a^o}{dt} = \vec{\omega}^a \times \vec{x}_a^o = \begin{vmatrix} \vec{x}_a^o & \vec{y}_a^o & \vec{z}_a^o \\ \omega_{xa}^a & \omega_{ya}^a & \omega_{za}^a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_{za}^a \vec{y}_a^o - \omega_{ya}^a \vec{z}_a^o; \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{y}_a^o}{dt} = \vec{\omega}^a \times \vec{y}_a^o = \begin{vmatrix} \vec{x}_a^o & \vec{y}_a^o & \vec{z}_a^o \\ \omega_{xa}^a & \omega_{ya}^a & \omega_{za}^a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_{za}^a \vec{x}_a^o + \omega_{xa}^a \vec{z}_a^o; \quad (9)$$

$$\frac{d\vec{z}_a^o}{dt} = \vec{\omega}^a \times \vec{z}_a^o = \begin{vmatrix} \vec{x}_a^o & \vec{y}_a^o & \vec{z}_a^o \\ \omega_{xa}^a & \omega_{ya}^a & \omega_{za}^a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_{ya}^a \vec{x}_a^o - \omega_{xa}^a \vec{y}_a^o, \quad (10)$$

где  $\omega_{xa}^a, \omega_{ya}^a, \omega_{za}^a$  — проекции вектора  $\vec{\omega}^a$  угловой скорости вращения аксиального базиса на оси того же аксиального базиса.

Поскольку полная угловая скорость НАР с учетом собственного вращения с угловой скоростью  $\vec{\dot{\gamma}}$  равна

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\phi}} + \vec{\dot{\lambda}} + \vec{\dot{\beta}} + \vec{\dot{\alpha}} + \vec{\dot{\gamma}}, \quad (11)$$

где  $\vec{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma} \vec{x}_a^o$  – скорость вращения ракеты относительно продольной оси, а



угловая скорость аксиального базиса  $\vec{\omega}^a$

$$\vec{\omega}^a = \vec{\dot{\phi}} + \vec{\dot{\lambda}} + \vec{\dot{\beta}} + \vec{\dot{\alpha}}, \quad (12)$$

то, как следует из (11) и (12), имеют место равенства:

$$\omega_{xa} = \omega_{xa}^a + \dot{\gamma}; \quad \omega_{ya} = \omega_{ya}^a; \quad \omega_{za} = \omega_{za}^a.$$

Таким образом, вместо (8 – 10) имеем:

$$\frac{d\vec{x}_a^o}{dt} = \omega_{za} \vec{y}_a^o - \omega_{ya} \vec{z}_a^o; \quad \frac{d\vec{y}_a^o}{dt} = -\omega_{za} \vec{x}_a^o + \omega_{xa} \vec{z}_a^o; \quad \frac{d\vec{z}_a^o}{dt} = \omega_{ya} \vec{x}_a^o - \omega_{xa} \vec{y}_a^o.$$

Подставив полученные выражения в (7), получим:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{K}} = & \dot{I}_x \omega_{xa} \vec{x}_a^o + I_x \dot{\omega}_{xa} \vec{x}_a^o + I_x \omega_{xa} \omega_{za} \vec{y}_a^o - I_x \omega_{xa} \omega_{ya} \vec{z}_a^o + \\ & + \dot{I}_y \omega_{ya} \vec{y}_a^o + I_y \dot{\omega}_{ya} \vec{y}_a^o - I_y \omega_{ya} \omega_z \vec{x}_a^o + I_y \omega_{ya} \omega_{xa}^a \vec{z}_a^o + \\ & + \dot{I}_z \omega_{za} \vec{z}_a^o + I_z \dot{\omega}_{za} \vec{z}_a^o + I_z \omega_{za} \omega_y \vec{x}_a^o - I_z \omega_{za} \omega_{xa}^a \vec{y}_a^o \end{aligned} \quad (13)$$

Скорость изменения моментов инерции НАР при работающем РД представляет собой сложную зависимость, для которой нет точных данных, поэтому при малой продолжительности работы РД (от 0,5 до 3 сек) делаем допущение, что она линейна. Тогда:

$$\dot{m} = \frac{m_{\kappa}^{\text{CT}} - m_0^{\text{CT}}}{t_{\kappa}^{\text{CT}} - t_0^{\text{CT}}}; \quad \dot{I}_x = \frac{I_{x\kappa}^{\text{CT}} - I_{x0}^{\text{CT}}}{t_{\kappa}^{\text{CT}} - t_0^{\text{CT}}}; \quad \dot{I}_y = \frac{I_{y\kappa}^{\text{CT}} - I_{y0}^{\text{CT}}}{t_{\kappa}^{\text{CT}} - t_0^{\text{CT}}}; \quad \dot{I}_z = \frac{I_{z\kappa}^{\text{CT}} - I_{z0}^{\text{CT}}}{t_{\kappa}^{\text{CT}} - t_0^{\text{CT}}}; \quad (14)$$

$$m = m_0^{\text{CT}} + \dot{m}(t - t_0^{\text{CT}}); \quad I_x = I_{x0}^{\text{CT}} + \dot{I}_x \cdot (t - t_0^{\text{CT}}); \quad I_y = I_{y0}^{\text{CT}} + \dot{I}_y \cdot (t - t_0^{\text{CT}}); \quad I_z = I_{z0}^{\text{CT}} + \dot{I}_z \cdot (t - t_0^{\text{CT}}) \quad (15)$$

где  $m_0^{\text{CT}}, m_{\kappa}^{\text{CT}}, I_{x0}^{\text{CT}}, I_{x\kappa}^{\text{CT}}, I_{y0}^{\text{CT}}, I_{y\kappa}^{\text{CT}}, I_{z0}^{\text{CT}}, I_{z\kappa}^{\text{CT}}$  – инерционные параметры ступени в моменты начала и конца работы двигателя:  $t_0^{\text{CT}}$  и  $t_{\kappa}^{\text{CT}}$ .

Аэродинамическая осевая симметрия НАР позволяет принять аксиальный базис и для главного вектора момента полной аэродинамической силы. Перио-

дическую зависимость АДК от углов нутации, атаки и скольжения учтем с помощью тригонометрических функций этих углов. При этом можно приближенно принять коэффициенты демпфирования по скоростям изменения углов атаки и скольжения, для которых, как правило, нет достоверных данных, равными коэффициентам демпфирования по угловым скоростям вращения ракеты:

$$\left\| \vec{M} \right\|_a = \left\| \begin{array}{c} m_x^{\omega_x^*} \frac{\rho v}{2} S l^2 \omega_{xa} \\ M_z^{\delta} \sin \beta + M_z^{\omega_z} (\omega_{ya} + \dot{\beta}) \\ M_z^{\delta} \sin \alpha + M_z^{\omega_z} (\omega_{za} + \dot{\alpha}) \end{array} \right\|, \quad (16)$$

где  $M_z^{\delta} = m_z^{\delta} \frac{\rho v^2}{2} S l$  – производная статического момента по углу нутации;

$M_z^{\omega_z} = m_z^{\omega_z^*} \frac{\rho v}{2} S l^2$  – производная демпфирующего момента по угловой

скорости;

$l$  – характерный размер ракеты (длина).

Ракета, как правило, имеет оперение, каждое перо которого установлено под небольшим углом  $\delta^{\text{оп}}$  к продольной оси, что обеспечивает создание необходимого крутящего момента относительно оси  $X_a$  с коэффициентом момента

$$m_x^{\text{оп}} = n^{\text{оп}} m_x^{\delta^{\text{оп}}} \alpha^{\text{оп}} :$$

$$\vec{M}_x^{\text{оп}} = m_x^{\text{оп}} \frac{\rho v}{2} S l^2 \bar{x}_a^{\circ} \quad (17)$$

где  $n^{\text{оп}}$  - число перьев стабилизатора.

Поскольку в рассматриваемой задаче информация о вращении ракеты имеет весьма существенное значение, то примем меры для более точного, чем

это обычно делается, расчета крутящего момента. Из-за того, что каждое перо (рисунок 7) имеет при вращении ракеты окружную скорость  $v_{\text{окр}}^{\text{оп}}$ , угол атаки пера  $\alpha^{\text{оп}}$  в полете оказывается несколько меньше угла его установки  $\delta^{\text{оп}}$ :

$$\alpha^{\text{оп}} \approx \delta^{\text{оп}} - \frac{v_{\text{окр}}^{\text{оп}}}{v}, \quad (18)$$

где  $v_{\text{окр}}^{\text{оп}} = \omega_x b_z^{\text{оп}}$  – окружная скорость пера;

$b_z^{\text{оп}}$  – расстояние от центра давления пера до продольной оси ракеты.

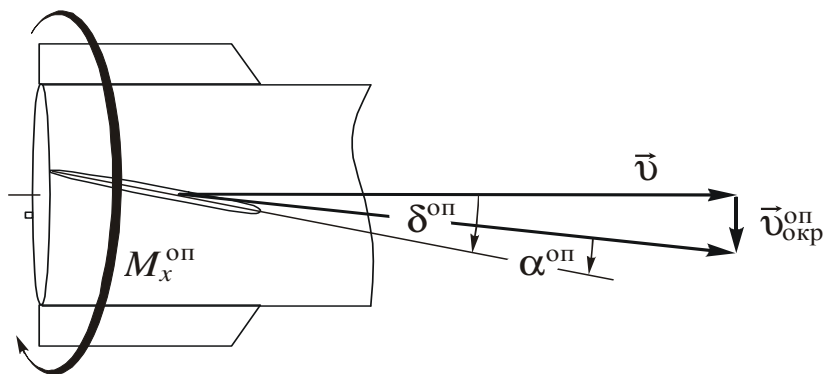


Рисунок 7. Схема формирования угла атаки оперения

По мере увеличения скорости вращения  $\omega_{x1}$  угол атаки пера уменьшается и крутящий момент падает, а демпфирующий момент растет. Наконец наступает момент времени, когда крутящий момент компенсируется демпфирующим, что соответствует установившейся скорости вращения ракеты.

Сопла РД могут устанавливаться под углом относительно продольной оси, в данном случае принимаем допущение, что сопла РД НАР углов установки не имеют. В случае для ракет с другим сопловым аппаратом всегда можно учесть дополнительным слагаемым. Момент тяги двигателя  $\vec{M}_T$  включает только демпфирующие составляющие и выражается вектором-строкой вида

[Ошибка! Источник ссылки не найден.]:

$$\left\| \vec{M}_T \right\|_a = \left\| \dot{m} b_{sz}^2 \omega_{xa}; \dot{m} b_{sx}^2 \omega_{ya}; \dot{m} b_{sx}^2 \omega_{za} \right\|. \quad (19)$$

Примем для динамических уравнений движения ракеты относительно центра масс в качестве основного аксиальный базис и спроецируем на его оси исходное уравнение (6) с учетом (13 — 19). Затем разрешим полученные скалярные уравнения относительно производных от угловых скоростей ракеты:

$$\frac{d\omega_{xa}}{dt} = \frac{1}{I_x} \left[ (I_y - I_z) \omega_{ya} \omega_{za} + m_x^{\text{оп}} \frac{\rho v}{2} S l^2 \alpha^{\text{оп}} + \left( m_x^{\omega_x} \frac{\rho v}{2} S l^2 + \dot{m} b_{sz}^2 - \dot{I}_x \right) \omega_{xa} \right] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{ya}}{dt} = \frac{1}{I_y} \left[ (I_z \omega_{xa}^a - I_x \omega_{xa}) \omega_{za} + M_z^\delta \sin \beta + M_M^\delta \sin \alpha + \right. \\ \left. + M_z^{\omega_z} (\omega_{ya} + \dot{\beta}) + (\dot{m} b_{sz}^2 - \dot{I}_y) \omega_{ya} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{za}}{dt} = \frac{1}{I_z} \left[ (I_x \omega_{xa} - I_y \omega_{xa}^a) \omega_{ya} + M_z^\delta \sin \alpha + M_M^\delta \sin \beta + \right. \\ \left. + M_z^{\omega_z} (\omega_{za} + \dot{\alpha}) + (\dot{m} b_{sz}^2 - \dot{I}_z) \omega_{za} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Систему (20 – 22) составляют динамические уравнения движения относительно центра масс на активном участке движения ракеты. При расчете пассивного участка в них следует положить нулю слагаемые вида  $|\dot{m}|b^2$  и  $\dot{I}$ .

Полученная система, интегралами которой являются угловые скорости  $\omega_{xa}$ ,  $\omega_{ya}$ ,  $\omega_{za}$ , еще не замыкает полной системы уравнений, так как остается открытой, по крайней мере, задача расчета углов  $\alpha$ ,  $\beta$ . Для них составим кинематические уравнения движения ракеты относительно центра масс. Выразим составляющие угловых скоростей в "своих" базисах:

$$\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi} \vec{y}_g^0; \quad \vec{\dot{\lambda}} = \dot{\lambda} \vec{z}_v^0; \quad \vec{\dot{\beta}} = \dot{\beta} \vec{y}_v^0; \quad \vec{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} \vec{z}_a^0. \quad (23)$$

Для приведения всех слагаемых к одному аксиальному базису потребуются матрицы  $A_g^a$  и  $A_v^a$ . Матрица  $A_g^a$  получается в соответствии с теоремой умножения матриц:  $A_g^a = A_g^{ck} \cdot A_{ck}^a$ , откуда:

$$A_g^a = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda\cos\beta\cos\alpha - & -\cos\varphi\cos\lambda\cos\beta\sin\alpha - & \cos\varphi\cos\lambda\sin\beta + \\ -\cos\varphi\sin\lambda\sin\alpha - & -\cos\varphi\sin\lambda\cos\alpha + & +\sin\varphi\cos\beta \\ -\sin\varphi\sin\beta\cos\alpha & +\sin\varphi\sin\beta\sin\alpha & \\ \sin\lambda\cos\beta\cos\alpha + & -\sin\lambda\cos\beta\sin\alpha + & \sin\lambda\sin\beta \\ +\cos\lambda\sin\alpha & +\cos\lambda\cos\alpha & \\ -\sin\varphi\cos\lambda\cos\beta\cos\alpha + & \sin\varphi\cos\lambda\cos\beta\sin\alpha + & -\sin\varphi\cos\lambda\sin\beta + \\ +\sin\varphi\sin\lambda\sin\alpha - & +\sin\varphi\sin\lambda\cos\alpha + & +\cos\varphi\cos\beta \\ -\cos\varphi\sin\beta\cos\alpha & +\cos\varphi\sin\beta\sin\alpha & \end{pmatrix}.$$

Из матричной формулы преобразования векторов

$$\|\vec{\phi}\|_a = \|\vec{\phi}\|_g \cdot A_g^a = \|0; \dot{\phi}; 0\|_g \cdot A_g^a, \text{ получим:}$$

$$\|\vec{\phi}\|_a = \begin{pmatrix} \dot{\phi}(\sin\lambda\cos\beta\cos\alpha + \cos\lambda\sin\alpha) \\ \dot{\phi}(-\sin\lambda\cos\beta\sin\alpha + \cos\lambda\cos\alpha) \\ \dot{\phi}\sin\lambda\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Приведя к аксиальному базису остальные векторы из перечня (23), будем иметь:

$$\|\vec{\lambda}\|_a = \|\vec{\lambda}\|_v \cdot A_v^a = \|0; 0; \dot{\lambda}\| \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha & -\cos\beta\sin\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\lambda}\sin\beta\cos\alpha \\ \dot{\lambda}\sin\beta\sin\alpha \\ \dot{\lambda}\cos\beta \end{pmatrix};$$

$$\|\vec{\beta}\|_a = \|\vec{\beta}\|_v \cdot A_v^a = \|0; \dot{\beta}; 0\| \cdot A_v^a = \|\dot{\beta}\sin\alpha \quad \dot{\beta}\cos\alpha \quad 0\|; \|\vec{\alpha}\|_a = \|0; 0; \dot{\alpha}\|; \|\vec{\gamma}\|_a = \|\dot{\gamma}; 0; 0\|.$$

Так как проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций векторов на ту же ось, то можем записать

$$\omega_{xa} = \dot{\phi}(\sin\lambda\cos\beta\cos\alpha + \cos\lambda\sin\alpha) - \dot{\lambda}\sin\beta\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma};$$

$$\omega_{ya} = \dot{\phi}(-\sin \lambda \cos \beta \sin \alpha + \cos \lambda \cos \alpha) + \dot{\lambda} \sin \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha ;$$

$$\omega_{za} = \dot{\phi} \sin \lambda \sin \beta + \dot{\lambda} \cos \beta + \dot{\alpha}.$$

Для приведения полученной системы к форме Коши разрешим систему относительно величин  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\gamma}$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = [\omega_{ya} + \dot{\phi}(\sin \lambda \cos \beta \sin \alpha - \cos \lambda \cos \alpha) - \dot{\lambda} \sin \beta \sin \alpha] \frac{1}{\cos \alpha} ; \quad (24)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_{za} - \dot{\phi} \sin \lambda \sin \beta - \dot{\lambda} \cos \beta ; \quad (25)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{xa} - \dot{\phi}(\sin \lambda \cos \beta \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha) + \dot{\lambda} \sin \beta \cos \alpha - \dot{\beta} \sin \alpha . \quad (26)$$

Получена система 6-ти кинематических дифференциальных уравнений движения ракеты относительно центра масс. Ее интегрирование дает значения искомых углов  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ . Так как по постановке задачи определять угол крена не требуется, то можно исключить уравнение (26) из полной системы и сократить её до 11-ти дифференциальных уравнений.

Чтобы обеспечить решение уравнений требуется дополнительное алгебраическое соотношение для  $\omega_{xa}^a$ :

$$\omega_{xa}^a = \dot{\phi}(\sin \lambda \cos \beta \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha) - \dot{\lambda} \sin \beta \cos \alpha + \dot{\beta} \sin \alpha .$$

Численное интегрирование уравнений движения ракеты требует знания начальных условий ее движения, как для полной, так и КБМ. Значение начального угла нутации ракеты  $\delta_0$  при известных углах  $\alpha_A$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_A$  и  $\beta_s$  можно рассчитать следующим образом.

Искомое значение начального угла нутации  $\delta_0$  связано с начальными углами атаки и скольжения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  соотношением:

$$\delta_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \quad (27)$$

Поскольку в момент выхода ракеты из канала ПУ ее продольная ось совпадает с осью  $X_s$  ствольного базиса, то значения углов  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  могут быть определены из равенства матриц перехода от скоростного базиса к ствольному по схеме  $\varphi_0 \rightarrow \lambda_0 \rightarrow \vartheta_A \rightarrow \gamma_A \rightarrow \beta_s \rightarrow \alpha_s$  с одной стороны и по схеме  $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$  с другой.

Матрица второго перехода имеет вид:

$$A_v^1 = \begin{vmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (28)$$

Матрица  $A_g^s(\varphi_0, \lambda_0, \vartheta_A, \gamma_A, \beta_s, \alpha_s)$  многошагового перехода по теореме умножения матриц равна  $A_g^v(\varphi_0, \lambda_0)^T \cdot A_g^s(\vartheta_A, \gamma_A, \beta_s, \alpha_s)$ .

Необходимые для вычисления углов  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  элементы  $(a_{21})_v^s = \sin \alpha$  и  $(a_{13})_v^s = \sin \beta$  матрицы (28) приравняем соответствующим элементам матрицы  $A_g^s(\varphi_0, \lambda_0, \vartheta_A, \gamma_A, \beta_s, \alpha_s)$ . В свою очередь, последние равны произведению второй строки матрицы  $A_g^v(\varphi_0, \lambda_0)^T$  и первого столбца матрицы  $A_g^s(\vartheta_A, \gamma_A, \beta_s, \alpha_s)$  и произведению первой строки матрицы  $A_g^v(\varphi_0, \lambda_0)^T$  и третьего столбца матрицы  $A_g^s(\vartheta_A, \gamma_A, \beta_s, \alpha_s)$ . После выполнения данной процедуры, то есть после умножения матриц будем иметь:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & \arcsin[-\cos \varphi_0 \sin \lambda_0 (\cos \vartheta_A \cos \beta_s \cos \alpha_s - \sin \vartheta_A \cos \gamma_A \sin \alpha_s - \\ & - \sin \vartheta_A \sin \gamma_A \sin \beta_s \cos \alpha_s) + \quad ; \\ & + \cos \lambda_0 (\sin \vartheta_A \cos \beta_s \cos \alpha_s + \cos \vartheta_A \cos \gamma_A \sin \alpha_s + \cos \vartheta_A \sin \gamma_A \sin \beta_s \cos \alpha_s) + \\ & + \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 (\sin \gamma_A \sin \alpha_s - \cos \gamma_A \sin \beta_s \cos \alpha_s)]; \end{aligned}$$

$$\beta_0 = \arcsin[\cos\varphi_0 \cos\lambda_0 (\cos\vartheta_A \sin\beta_s + \sin\vartheta_A \sin\gamma_A \cos\beta_s) + \sin\lambda_0 (\sin\vartheta_A \sin\beta_s - \cos\vartheta_A \sin\gamma_A \cos\beta_s) - \sin\varphi_0 \cos\lambda_0 \cos\gamma_A \cos\beta_s]$$

Далее, воспользовавшись соотношением (27), вычисляем искомое значение начального угла нутации  $\delta_0$ .

## 2. Результаты расчетов

Расчеты, выполненные таким образом для типовой НАР калибра 80 мм, дали следующий вид матрицы коэффициентов аппроксимации (1):

$$k_{ij}^y = \begin{pmatrix} -0.1157 & 0.913e-3 & -3.71e-5 \\ 1.188 & 3.401e-3 & -4.65e-7 \\ 2.739 & -7.239e-3 & 2.534e-6 \\ -0.9813 & 0.106e-4 & -4.483e-6 \\ 2.749 & -1.2066 & 1.178e-5 \end{pmatrix}.$$

При использовании полученной модели поправок, максимальные ошибки на уровне точки прицеливания в тех же условиях стрельбы, при которых построены графики ошибок без поправок (рисунок 5), не превосходят 15 м, что соответствует максимальным угловым ошибкам менее 2 мрад (рисунок 8). Нерегулярный характер изменения ошибок в зависимости от углов атаки и скорости АК обусловлен тем, что поправки являются аппроксимационными, подобраны МНК так, чтобы ошибки расчета были минимальны в среднем во всем диапазоне условий применения.



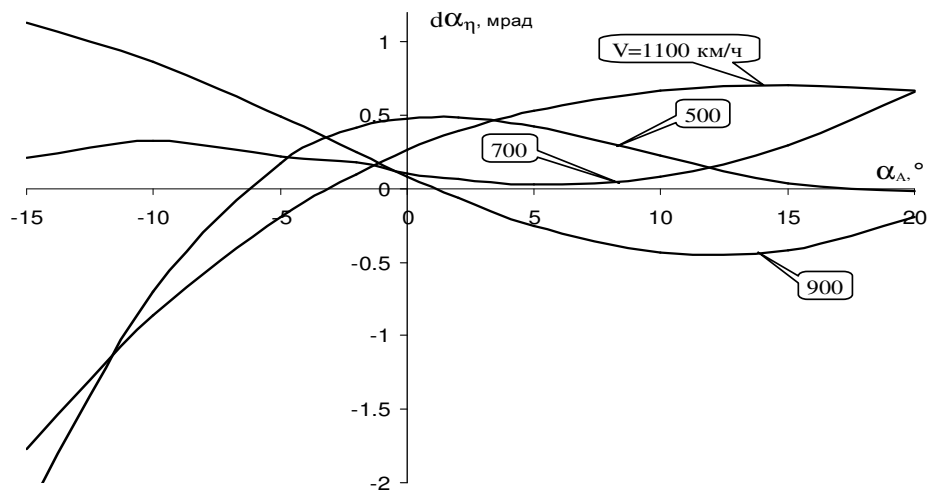


Рисунок 8 – Зависимость продольного углового промаха НАР в картинной плоскости на уровне прицеливания от угла атаки и скорости АК при внесении поправок.

Для получения полной картины было промоделировано значительное число пусков с различными условиями бросания, взятыми в заданном диапазоне условий бросания. Расчеты показали, что при прочих равных условиях высота сама по себе мало влияет на точностные характеристики, что объясняется малым диапазоном изменения плотности и температуры воздуха при тех перепадах высот, которые характерны для применения НАР калибра 80 мм [3]. В силу этого при указанном моделировании высота пуска была взята постоянным значением 500 м, а высота цели над уровнем моря  $h_c=0$ . Таким образом, введение угловых поправок дает уменьшение методических ошибок расчета примерно в 15 и более раз и может быть рекомендовано для реализации в БА.

Приведенные в качестве примера результаты расчета относятся только к конкретной НАР и для определенного диапазона применения. Для других НАР и других условий применения следует получить свои данные, которые могут храниться в баллистическом архиве и выбираться из него в соответствии со

складывающимися конкретными условиями.

## **ВЫВОДЫ**

1. Наличие углов атаки и скольжения АК и установочных углов ПУ в момент пуска НАР, является одним из существенных факторов снижения точности расчета траектории в БА, основанном на решении ОЗВБ.
2. Предложенный алгоритм внесения поправок в модуль расчета начальных условий движения НАР требует минимальной доработки рабочих формул БА и дает в среднем снижение более чем на порядок методических ошибок вычисления конечных координат падения ракеты, обусловленных некорректным учетом начального угла нутации НАР.
3. Разработанная методика расчета численных значений поправок не требует больших вычислительных ресурсов и может быть реализована на персональной электронной вычислительной машине общего назначения.

### **Библиографический список.**

1. Под редакцией Конуркина В.А. Комплексы авиационного вооружения. –М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 2005.-947с.
2. Постников А.Г. Внешняя баллистика неуправляемых авиационных снарядов. –М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 2003.-396с.
3. Постников А.Г., Чуйко В.С. Методы решения прикладных задачи внешней баллистики. –М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1979. –162с.
4. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. Пособие для ВУЗов. – 2-е издание, исп. – М.: «Наука», 1987. –270с.
5. Под редакцией Саркисяна Р.С. Авиационные неуправляемые средства поражения. –М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1980. –368с.