На правах рукописи

Ибрагимов Данис Наилевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2017 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Сиротин Андрей Николаевич**

Официальные оппоненты: **Шматков Антон Михайлович**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем механики» им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)

Горшенин Андрей Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН)

Ведущая организация: ФГБУН «Институт программных систем» им. А.К. Айламазяна РАН»

Защита состоится «29» декабря 2017 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=85121.

Автореферат разослан «___» _____________ 2017 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук, доцент — Северина Наталья Сергеевна

Общая характеристика работы

Исторически развитие теории оптимального управления начиналось с изучения динамических систем с непрерывным временем. Данные задачи были тесно связаны с задачами вариационного исчисления, став их логическим продолжением. Первые публикации по этой тематике выполнили Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Шатровский Л.И., Брайсон А., Денхем В., Миеле А., Келли Г. Все последующие методы решения задач оптимального управления для систем с непрерывным временем базировались на принципе максимума Понтрягина Л.С., который определил необходимые условия оптимальности. На его основе были разработаны прямые методы, основанные на спуске в пространстве управлений, методы основанные на вариациях в пространстве состояний.

В монографии Моисеева Н.Н., посвященной численным методам оптимального управления, впервые предлагается иной подход, основанный на методах нелинейного программирования, который впоследствии был развит в работах Гноевского Л.С., Ермольева Ю.М., Гуленко В.П., Мельца И.О., Пропоя А.И., Пшеничного Б.Н., Евтушенко Ю.Г. Такой подход оказался эффективным по ряду причин: с его помощью удалось обосновать некоторые, предложенные ранее, эвристические алгоритмы, возникла возможность их обобщения; методы нелинейного программирования позволили решать сложные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Главным препятствием при построении соответствующих методов решения задач оптимального управления для систем с дискретным временем являлось их существенное отличие от непрерывных систем. В то время, как задача оптимального управления для непрерывного времени представляет собой задачу вариационного исчисления, в дискретном случае она является задачей нелинейного программирования большой размерности, что определяет принципиально иной набор средств её решения, необходимых и достаточных условий оптимальности (в частности теорема Куна-Таккера). Также траектория системы в дискретном случае представляет собой последовательность векторов состояния в отличие от непрерывного времени, где траектория является непрерывной функцией. Для линейных систем не всегда удается перейти к обратному времени в дискретном случае, что обусловлено возможной вырожденностью оператора системы управления, в непрерывном случае такой проблемы не возникает, так как фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику, является невырожденной в любой момент времени.

Таким образом, в непрерывном случае принцип максимума как основной инструмент решения задач оптимального управления получил широкое освещение и развитие в различных монографиях Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Евтушенко Ю.Г., Табака Д., Куо Б. и большом количестве статей, например, работы Анорова В.П., Бережинского Т.А., Волина Ю.М., Островского Г.М., Первозванского А.А., Розоноэра Л.И., Харатишвили Г.Л., Berkovitz L.D. При этом существуют различные подходы к доказательству принципа максимума, как к необходимым условиям оптимальности экстремали в задаче вариационного исчисления: на основе метода множителей Лагранжа, множеств управляемости, метода игольчатых вариаций, уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для дискретных же систем известен единственный подход к доказательству принципа максимума, который фактически является необходимым условием экстремума задачи нелинейного программирования, – на основе метода множителей Лагранжа. Основные результаты представлены в сравнительно небольшом числе монографий и публикаций следующих авторов: Болтянский В.Г., Габасов Р., Кириллова Ф.М., Пропой А.И., Цыпкин Я.З., Яковлев В.М., Fisher M.E., Gayek J.E., Katz S., Pearson J.D., Halkin H,, Holtzman J.M., Horn F., Jackson R., Chang S.S.L.

Принцип максимума в дискретном случае имеет ряд специфических особенностей, осложняющих его практическое применение: в отличие от непрерывного времени, гамильтониан на оптимальной траектории для автономных систем не является постоянным по времени и не равняется нулю для систем с нефиксированным временем, сопряженная система в общем случае строится в обратном времени (т.е. каждый k-й вектор состояния сопряженной системы определяется как функция от $(k+1)$-го вектора), переход к которому может быть затруднен в случае вырожденности оператора системы.

Также на данный момент известны современные исследования в разделе дискретного принципа максимума следующих авторов: Ait Rami M., Chen X., Zhou X. Y., Wang G., Yu Z., Wu Z., Lin X. Zhang W., Peng S., связанные с его применением для линейных стохастических систем.

Среди задач оптимального управления для дискретных систем выделяется задача быстродействия. Хотя для решения задач оптимального управления с критерием в виде сумм дискретный принцип максимума работает корректно, при решении задачи быстродействия возникают сложности: в методе множителей Лагранжа все множители одновременно могут обращаться в нуль, что приводит к нерегулярности экстремума. Функционал качества, который является временем работы системы, может принимать значения только из множества неотрицательных целых чисел, то есть фактически является дискретным, что приводит к отсутствию его непрерывности по управлению и, как следствие, отсутствию непрерывности функции Лагранжа. Оптимальное управление, в отличие от линейно-квадратичных задач оптимального управления, не единственно. Если начальное состояние системы является внутренней точкой множества 0-управляемости – множества тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в начало координат за фиксированное число шагов, то принцип максимума приобретает вырожденный характер, т.е. управление в этом случае оптимально в задаче быстродействия тогда и только тогда, когда все векторы сопряженной системы тождественно равны нулю. Как следствие, оказывается невозможным определить оптимальное управление из условия максимума гамильтониана, т.к. он постоянен на всём множестве допустимых значений управлений. Качественные исследования задачи быстродействия для дискретных систем были проведены в работах Морозова И.И., Desoer C.A., Lin W.S.

Метод динамического программирования Р. Беллмана позволяет решить задачу быстродействия для дискретных систем. Однако в силу сложности построения функции Беллмана, которая фактически является минимальным числом шагов, за которое возможно перевести систему в начало координат из текущего состояния посредством выбора допустимого управления (значение функции Беллмана можно вычислить путем последовательного построения множеств 0-управляемости до тех пор, пока текущее состояние системы не будет принадлежать очередному множеству), его применение сводится к направленному перебору возможных траекторий системы до тех пор, пока последующее состояние не будет принадлежать множеству 0-управляемости за число шагов на единицу меньшее. Решение на основе принципа максимума является более удобным с аналитической точки зрения.

В рамках работы изложен подход к решению задачи быстродействия для линейной дискретной системы на основе принципа максимума. Предложены условия, при которых он оказывается корректным. Полученные результаты обобщены на случай бесконечномерных систем. Доказательство принципа максимума при этом основывается на идее существования единственного разложения граничных точек алгебраической суммы строго выпуклых множеств. Характерной особенностью такого подхода является отсутствие его аналога для систем с непрерывным временем. Результаты работы имеют ряд принципиальных отличий от материалов Морозова И.И., Desoer C.A., Lin W.S. В работах данных авторов исследуются только системы с одномерным множеством допустимых значений управлений, в работах, посвященных дискретному принципу максимума, как правило множество допустимых значений управлений предполагается некоторого специального вида: многогранник или эллипсоид. В свою очередь в данной работе подход к решению задачи быстродействия сформулирован в виде принципа максимума для произвольного строго выпуклого множества допустимых значений управлений, фазовое пространство динамической системы предполагается произвольной размерности (в том числе бесконечной), что, насколько известно автору, не было опубликовано до сих пор ни в одной работе.

Для реализации численных процедур решения задачи быстродействия в конечномерном случае для произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений также рассмотрены алгоритмы полиэдральной аппроксимации множеств управляемости и достижимости. Существует большое число различных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных множеств, представленных, например, в работах McClure D. E., Vitale R. A., Gruber P. M., Schneider R., Muller J.S., Dudley R., Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh., Бронштейна Е.М., Иванова Л.Д. Схожие алгоритмы рассматривались в большом количестве статей, связанных с аппроксимацией множеств достижимости, среди которых стоит выделить работы Костоусовой Е.К., Куржанского А.Ф., Fisher M.E., Gayek J.E. Сравнительный анализ различных методов полиэдральной аппроксимации, их эффективности и свойств представлен в монографии Каменева Г.К. Однако их применение для решения задачи быстродействия для линейной дискретной системы неизвестно.

Объектом исследования являются линейные дискретные системы управления с ограниченным управлением. **Предметом исследования**

является оптимальное по быстродействию управление такими системами.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является исследование свойств и разработка методов и алгоритмов для решения задач быстродействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1) исследован класс математических моделей линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений;

2) формализован и исследован новый класс математических моделей линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество;

3) сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество;

4) сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений;

5) разработан численный метод решения задачи быстродействия для линейных дискретных автономных систем с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление;

6) разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы;

7) при помощи полученных результатов решен ряд модельных примеров и прикладных задач оптимального управления.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, теории оптимального управления, выпуклого анализа, функционального анализа, в частности: принцип максимума, методы теории линейных операторов. Для разработки комплекса программ, реализующего алгоритмы решения исследуемых задач, и для проведения вычислительных экспериментов используются компьютерные технологии.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по оптимальному управлению дискретными системами яляются новыми, в частности, сформулированы и доказаны условия оптимальности управления в виде принципа максимума в задаче быстродействия для автономных и неавтономных систем со строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, разработан алгоритм, позволяющий построить оптимальное управление в случае линейных ограничений, предложена модификация алгоритма на случай скалярного управления и произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании систем демпфирования, систем управления движением летательных аппаратов, они позволяют находить решения задач оптимального дискретного управления на основе научного подхода. также они могут быть использованы в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах: московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике» (Москва, 2013), 13-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014), 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014), XX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015), Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015), Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016), семинар в ИПМех РАН под руководством Черноусько Ф.Л. (Москва, 2017).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [1, 2], и 6 из которых опубликованы в тезисах докладов [6–11]. Разработан и зарегистрирован комплекс программ [12].

Личный вклад. Автором на основе класса множеств 0-управляемости построен алгоритм решения задачи 0-управляемости для линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление, а также алгоритм сведения к рассмотренному случаю случая произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений. В виде программного комплекса на языке C++ автором реализован разработанный алгоритм, проведены вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов. Совместно с Сиротиным А.Н. построен явный вид оптимального управления для случая скалярного управления, доказаны достаточные условия оптимальности управления для бесконечномерной системы со строго выпуклым множеством допустимых управлений, сформулированные в виде принципа максимума.

В рамках диссертационного исследования принято участие в проекте РФФИ №15-08-01902 «Методы синтеза переключаемых и дискретных систем управления подвижными объектами при ограниченных ресурсах» и в гос. задании №1.1191.201К «Конструктивные методы оценивания и управления непрерывно-дискретными гибридными системами в условиях неопределенности».

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 119 страниц, включая 6 рисунков, 5 таблиц и список литературы, содержащий 121 наименование.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель и задачи, решаемые в рамках достижения цели работы, обоснована научная новизна и практическая значимость работы, изложено содержание глав диссертации.

В первой главе производится постановка задачи быстродействия для линейных дискретных систем в общем случае. Также для бесконечномерных автономных систем со строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус является одномерным множеством, сформулированы условия оптимальности траектории и управления в форме принципа максимума.

Рассматривается линейная система управления с дискретным временем $(A, \mathcal{U})$ и бесконечномерным вектором состояния

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(k) \in \mathbb{L}$ – вектор состояния системы. Предполагается, что пространство $\mathbb{L}$ является нормированным. $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}$ – выпуклое и ограниченное множество допустимых значений управлений, $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – линейный и обратимый оператор.

Допустимым процессом $\{u(k), x(k)\}_{k=0}^{N}$ системы $(A, \mathcal{U})$ для $N \in \mathbb{N}$ называется процесс, полученный согласно рекуррентным соотношениям (1.1) и удовлетворяющий условию $x(N) = 0$. Для системы (1.1) решается задача быстродействия: для некоторого заданного $x(0) = x_0$ требуется построить допустимый процесс, для которого величина $N_{min} \in \mathbb{N}$, соотвутствующая условию $x(N_{min}) = 0$, минимальна среди всех допустимых процессов. Т.е. необходимо построить набор допустимых управлений $u^*(0), \ldots, u^*(N_{min} - 1) \in \mathcal{U}$, переводящих систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов N_{min}. Такой набор управлений называется оптимальным в задаче быстродействия, а полученная совокупность состояний $\{x^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы $(A, \mathcal{U})$ на основе выбора на каждом шаге $k = \overline{0, N_{min}}$ в качестве управляющего воздействия оптимального управления – оптимальной траекторией.

Опредено семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество начальных состояний системы (1.1), для которых существует допустимый процесс, переводящий систему в начало координат за N шагов

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(N) = \{x_0 \in \mathbb{L}\colon \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U}\colon x(N) = 0\},\ N \in \mathbb{N}, \\ &\mathcal{X}(0) = \{0\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

При помощи класса множеств 0-управляемости можно вычислить оптимальное значение критерия качества в задаче быстродействия:

$$N_{min} = \min\{N \in \mathbb{N}\colon x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.$$

А также сформулировать критерий оптимальности траектории и управления в следующем виде: набор управлений $u^*(0),\ldots,u^*(N_{min}-1)$ и траектория $\{x^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы (1.1) оптимальны в задаче быстродействия в том и только в том случае, если для всех $k=\overline{1,N_{min}}$ верно включение $x^*(k)\in\mathcal{X}(N_{min}-k)$. Данное условие позволяет построить метод решения задачи быстродействия, основанный на свойствах класса множеств 0-управляемости.

Лемма 1.1. *Пусть семейство множеств* $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется соотношениями* (1.2). *Тогда справедливо представление*

$$\mathcal{X}(N)=\sum_{k=1}^{N}(-A^{-k}\mathcal{U}).$$

Лемма 1.1 позволяет для описания класса множеств 0-управляемости ограничиться только двумя операциями: алгебраической суммой множеств и линейным преобразованием множеств. Для дальнейшего решения задачи быстродействия вводятся дополнительные ограничения на класс множеств допустимых значений управлений $\mathcal{U}$.

Функционал $p\in\mathbb{L}^*\setminus\{0\}$ называется опорным к множеству $\mathcal{U}$ в точке $u\in\partial\mathcal{U}$, если

$$\mathcal{U}\subset\{x\in\mathbb{L}\colon (p,x)\leqslant(p,u)\}.$$

Нормальным конусом $\mathcal{N}(u,\mathcal{U})\subset\mathbb{L}^*$ множества $\mathcal{U}$ в точке $u\in\partial\mathcal{U}$ называется множество, состоящее из всех функционалов, опорных к множеству $\mathcal{U}$ в точке u, т.е.

$$\mathcal{N}(u,\mathcal{U})=\{p\in\mathbb{L}^*\setminus\{0\}\colon s(p,\mathcal{U})\leqslant(p,u)\}.$$

Далее везде в первой главе предполагается, что $\mathcal{U}\in\mathbb{U}_1$, где

$$\mathbb{U}_1=\{\mathcal{U}\subset\mathbb{L}\colon \forall u^1,u^2\in\mathcal{U},\ \lambda\in(0;1)\ \ \lambda u^1+(1-\lambda)u^2\in\operatorname{int}\mathcal{U};$$
$$\forall u\in\partial\mathcal{U}\ \ \dim\mathcal{N}(u,\mathcal{U})=1,\ \mathcal{U}\text{ – слабо компактно}\}.$$

Свойства класса $\mathbb{U}_1$ сформулированы в виде следующих лемм.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathcal{U}\in\mathbb{U}_1$, $u^1,u^2\in\partial\mathcal{U}$, $u^1\neq u^2$. *Тогда*

$$\mathcal{N}(u^1,\mathcal{U})\cap\mathcal{N}(u^2,\mathcal{U})=\emptyset.$$

Лемма 1.3. *Пусть* $A\colon\mathbb{L}\to\mathbb{L}$ *– линейный ограниченный и обратимый оператор*, $\mathcal{U},\mathcal{X}\in\mathbb{U}_1$. *Тогда*

$$i)\ A\,\partial\mathcal{U}=\partial(A\,\mathcal{U}),\qquad iii)\ A\,\mathcal{U}\in\mathbb{U}_1,$$
$$ii)\ \mathcal{N}(Au,A\,\mathcal{U})=(A^{-1})^*\,\mathcal{N}(u,\mathcal{U}),\qquad iv)\ \mathcal{X}+\mathcal{U}\in\mathbb{U}_1.$$

Леммы 1.2 и 1.3 гарантируют, что класс $\mathbb{U}_1$ замкнут относительно линейных преообразований и операции сложения множеств, а каждая граничная точка множества из этого класса однозначно определяется посредством опорного функционала.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathcal{Y}=\mathcal{X}+\mathcal{U}$. *Тогда*

i) каждый вектор $y^*\in\partial\mathcal{Y}$ *представим единственным образом* $y^*=x^*+u^*$, *где* $x^*\in\partial\mathcal{X}$, $u^*\in\partial\mathcal{U}$;

ii) для любого вектора $x^*\in\partial\mathcal{X}$ *существует единственный* $u^*\in\partial\mathcal{U}$ *такой, что* $y^*=x^*+u^*\in\partial\mathcal{Y}$.

iii) $\mathcal{N}(x^*,\mathcal{X})=\mathcal{N}(u^*,\mathcal{U})=\mathcal{N}(y^*,\mathcal{Y})$.

На основе доказанных лемм в виде принципа максимума удается сформулировать критерий оптимальности траектории и управления для случая, когда $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$.

Теорема 1.1 (Принцип максимума). *Пусть* $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}^*$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathcal{U}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\psi(k+1) = (A^{-1})^*\psi(k),\ \psi(0) = \psi_0,$$
$$u^*(k) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}((A^{-1})^*\psi(k), u),\ k = \overline{0, N_{min}-1}.$$

Тогда набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *оптимален в задаче быстродействия для системы* (1.1) *тогда и только тогда, когда* $\psi_0 \in -\mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}))$.

Оптимальная траектория единственна и удовлетворяет условию

$$x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min}-k).$$

Отдельно рассматривается случай, когда начальное состояние является внутренней точкой множества 0-управляемости:

$$x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min}-1). \tag{1.3}$$

Утверждения аналогичные теореме 1.1 для (1.3) не могут быть получены в силу того, что для внутренних точек не определено понятия нормального конуса. Тем не менее условие теоремы 1.1 можно расширить для произвольных $x_0 \in \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min}-1)$, хотя это не дает конструктивной информации для вычисления управления.

Теорема 1.2. *Пусть* $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}^*$, $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathcal{U}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\psi(k+1) = (A^{-1})^*\psi(k),\ \psi(0) = \psi_0,$$
$$u(k) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}((A^{-1})^*\psi(k), u),\ k = \overline{0, N_{min}-1}.$$

Тогда набор управлений $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *оптимален в задаче быстродействия для системы* (1.1) *в случае* (1.3) *тогда и только тогда, когда* $\psi_0 = 0$.

Теорема 1.2 демонстрирует трудность применения такого подхода, как принцип максимума, для решения задачи быстродействия в общем случае. Поскольку согласно теореме 1.2 в случае (1.3) все состояния сопряженной системы равны нулю, то условие

$$u(k) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}((A^{-1})^*\psi(k), u)$$

оказывается эквивалентным условию $u(k) \in \mathcal{U}$. Что делает его неконструктивным, хотя и формально корректным.

Для случая (1.3) разрабатывается другой метод решения задачи быстродействия, основанный на идее построения вспомогательной системы управления, для которой оказывается применима теорема 1.1.

Обозначим $\alpha = \mu(x_0, \mathcal{X}(N_{min}))$, где $\mu(x, \mathcal{X})$ – функционал Минковского. Рассмотрим систему управления $(A, \alpha\mathcal{U})$, для которой аналогичным образом построим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_\alpha(N)\}_{N=0}^{\infty}$.

Теорема 1.3. *Пусть траектория* $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ *системы* $(A, \mathcal{U}_\alpha)$ *определяется соотношениями*

$$
\begin{aligned}
&x'(k+1) = Ax'(k) + u'(k),\ k = \overline{0, N_{min}-1},\ x'(0) = x_0,\\
&u'(k) = \alpha \arg\max_{u \in \mathcal{U}}((A^{-1})^*\psi(k), u),\\
&-\psi(k) \in \mathcal{N}(x'(k), \mathcal{X}_\alpha(N_{min}-k)),\ k = \overline{0, N_{min}-1}.
\end{aligned}
$$

Тогда траектория $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ *и управление* $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *системы* (1.1) *оптимальны в задаче быстродействия.*

Также доказано, что в случае (1.3) оптимальное управление неединственно.

Лемма 1.5. *Пусть точка* $x'(0) = x_0$ *из условия* (1.3)*, набор управлений* $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *определен согласно теореме 1.3.*

Тогда найдется набор оптимальных управлений $\{u''(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *такой, что при некотором* $k \in \{0, \ldots, N_{min}-1\}$ *выполнено условие* $u''(k) \neq u'(k)$.

Во второй главе предложено обобщение результатов, сформулированных в первой главе, на случай неавтономных систем. Также производится расширения класса множеств допустимых значений управлений: удается отказаться от требования единичной размерности нормального конуса в каждой граничной точке, ограничившись только строгой выпуклостью множества. Тем не менее пространство состояний системы предполагается конечномерным: $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$.

Рассматривается нестационарная линейная система управления с дискретным временем $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\
&x(0) = x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность множеств допустимых значений управлений, $\mathcal{A} = \{A(k)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность матриц системы. Предполагается, что для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрица $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является невырожденной, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}(k)$, $\mathcal{U}(k)$ – строго выпуклое компактное множество.

Существенным отличием системы (2.1) от (1.1) является изменение понятия класса множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N,k)\}_{N,k=0}^\infty$, где $\mathcal{X}(N,k)$ представляет собой множество состояний системы (2.1), для которых существует набор допустимых значений управлений, переводящих систему, начиная с шага $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в начало координат за N шагов:

$$
\mathcal{X}(N,k) = \begin{cases} \{x(k) \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(k) \in \mathcal{U}(k), \ldots,\\ \quad u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1) \colon x(N+k) = 0\},\ N \in \mathbb{N},\\ \{0\}, N = 0. \end{cases} \tag{2.2}
$$

Аналогичным образом удается сформулировать аналитическое описание (2.2).

Лемма 2.1. *Пусть система множеств* $\{\mathcal{X}(N,k)\}_{N,k=0}^\infty$ *удовлетворяет условию* (2.2)*. Тогда для любых* $N \in \mathbb{N}$*,* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедливо представление*

$$
\mathcal{X}(N,k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(-A^{-1}(k) \cdot \ldots \cdot A^{-1}(i+k)\right) \mathcal{U}(k+i).
$$

Для решения задачи быстродействия для системы (2.1) исследованы свойства класса $\mathbb{U}_2$, которому принадлежат элементы последовательности $\mathcal{U}$:

$$\mathbb{U}_2 = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \colon \forall x^1, x^2 \in \mathcal{X},\ \lambda \in (0;1)\ \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \operatorname{int}\mathcal{X},\ \mathcal{X} \text{ – компакт}\},$$

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_2$, $x^1, x^2 \in \partial\mathcal{X}$, $x^1 \neq x^2$. *Тогда*

$$\mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}) = \emptyset.$$

Лемма 2.3. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *– невырожденная матрица,* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$. *Тогда*

i) $A\,\partial\mathcal{X}_1 = \partial(A\,\mathcal{X}_1)$, *iii)* $A\,\mathcal{X}_1 \in \mathbb{U}_2$,

ii) $\mathcal{N}(Ax, A\,\mathcal{X}_1) = (A^{-1})^T\,\mathcal{N}(x, \mathcal{X}_1)$, *iv)* $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$.

Леммы 2.2 и 2.3 гарантируют, что класс $\mathbb{U}_2$ сохраняет основные свойства класса $\mathbb{U}_1$ такие, как замкнутость относительно операций сложения множеств и линейных невырожденных преобразований и однозначность определения граничной точки множества по элементу её нормального конуса. Также доказано свойство аналогичное лемме 1.4.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$, $y^* \in \partial\mathcal{Y}$. *Тогда*

i) каждый вектор $y^* \in \partial\mathcal{Y}$ *представим единственным образом* $y^* = x^{1*} + x^{2*}$, *где* $x^{1*} \in \partial\mathcal{X}_1$, $x^{2*} \in \partial\mathcal{X}_2$;

ii) для любого вектора $x^{1*} \in \partial\mathcal{X}_1$ *существует единственный* $x^{2*} \in \partial\mathcal{X}_2$ *такой, что* $y^* = x^{1*} + x^{2*} \in \partial\mathcal{Y}$.

iii) $\mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}) = \mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2)$.

На основе леммы 2.4 для случая, когда $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$, удается сформулировать критерий оптимальности траектории и управления в задаче быстродействия для системы (2.1) в виде принципа максимума.

Теорема 2.1 (Принцип максимума). *Пусть* $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\psi(k+1) = (A^{-1})^T\psi(k),\ \psi(0) = \psi_0,$$
$$u^*(k) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}(k)}((A^{-1})^T\psi(k), u),\ k = \overline{0, N_{min}-1}.$$

Тогда набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *оптимален в задаче быстродействия для системы* (2.1) *тогда и только тогда, когда* $\psi_0 \in -\mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0))$.

Оптимальная траектория единственна и удовлетворяет условию

$$x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k).$$

Для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой множества 0-управляемости:

$$x_0 \in \operatorname{int}\mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min}-1), \tag{2.3}$$

также, как и в случае (1.3), принцип максимума приобретает вырожденный характер. Однако доказано, что оптимальное управление может быть построено методом аналогичным методу, описанному в теореме 1.3: задача быстродействия решается для вспомогательной системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U}_\alpha)$, где $\mathcal{U}_\alpha = \{\alpha\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha = \mu(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0))$. В этом случае система $(\mathcal{A}, \mathcal{U}_\alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, что позволяет решить для нее задачу быстродействия посредством принципа максимума.

Отдельно рассмотрен частный случай системы (2.1), когда для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n \colon (u, H(k)u) \leqslant 1\}$, где $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица. То есть $\mathcal{U}$ представляет собой последовательность тел в $\mathbb{R}^n$, ограниченных эллипсоидами. В этом случае в рамках теоремы 2.1 удается составить систему уравнений для вычисления ψ_0 и в явном виде представить оптимальное управление. Обозначим

$$\tilde{H}(k) = (A(k-1) \cdot \ldots \cdot A(0))^T H(k)(A(k-1) \cdot \ldots \cdot A(0)).$$

Лемма 2.5. *Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено: $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n \colon (u, H(k)u) \leqslant 1\}$, $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица, $x_0 \in \partial \mathcal{X}(N_{min}, 0)$. Тогда начальное условие сопряженной системы ψ_0 может быть найдено из условия*

$$\begin{cases} -x_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_{min}} \frac{\tilde{H}^{-1}(k)\psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k)\psi_0)}}, \\ (\psi_0, \psi_0) = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4) имеет единственное решение.

Лемма 2.6. *Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено: $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n \colon (u, H(k)u) \leqslant 1\}$, $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица, $x_0 \in \partial \mathcal{X}(N_{min}, 0)$, ψ_0 удовлетворяет (2.4), набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ – оптимален в задаче быстродействия системой (2.1). Тогда*

$$u^*(k) = \frac{A(k) \cdot \ldots \cdot A(0)\tilde{H}^{-1}(k+1)\psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k+1)\psi_0)}}.$$

При помощи методов, разработанных во второй главе, решена задача оптимальной по быстродействию коррекции орбиты спутника. На основе диффереciальных уравнений, описывающих движение спутника по круговой орбите, разработана дискретная модель системы управления положением спутника. Предполагается, что коррекция движения осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы исполняются без ошибок через равные промежутки времени. Требуется за минимальное число корректирующих импульсов вернуть спутник на исходную круговую траекторию, с которой по каким-либо причинам он сошел.

Доказано, что построенная модель удовлетворяет конечно-разностным соотношениям (2.1), последовательность множеств допустимых значений управлений лежит в классе $\mathbb{U}_2$. На основе теоремы 2.1 для заданных начальных значений радиальной и трансверсальной составляющих скорости и расстояния от спутника до начала координат вычислено оптимальное по быстродействию управление и построена оптимальная траектория.

Третья глава диссертационной работы посвящена построению и обоснованию алгоритма, позволяющего решить задачу быстродействия посредством численных процедур. Принцип максимума, разработанный в первой главе, является аналитическим инструментом решения задачи быстродействия. Но даже для случая $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$ далеко не для каждого множества из класса $\mathbb{U}_1$ оптимальное по быстродействию управление может быть получено численно согласно теореме 1.1. Данный факт делает актуальным поиск иных методов решения исходной задачи, которые опирались бы на конкретные численные методы и, как следствие, могли бы быть реализованы в виде комплекса программ.

Везде далее в третьей главе предполагается, что пространство вектора состояния системы (1.1) является конечномерным: $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$. Множество допустимых значений управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченным полиэдром. То есть существуют $p^1, \ldots, p^L \in \mathbb{R}^n$ и $a_1, \ldots, a_L \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\mathcal{U} = \bigcap_{l=1}^{L} \{u \in \mathbb{R}^n \colon (u, p^l) \leqslant a_l\}. \tag{3.1}$$

Тогда в силу леммы 1.1 и свойств класса выпуклых многогранников, каждое множество 0-управляемости также является выпуклым многогранником. При этом множество вершин $\operatorname{Ext} \mathcal{X}(N)$ для любого $N \in \mathbb{N}$ может быть вычислено посредством следующих известных утверждений и, например, алгоритма быстрой оболочки, разработанного в работах *Barber C.B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H.*, который позволяет определить множество крайних точек выпуклой оболочки заданного конечного множества.

Лемма 3.1 (*Рокафеллар Р.*, 1973). *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – многогранники,*

$$\mathcal{X} = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\}, \ \mathcal{Y} = \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^L\}.$$

Тогда алгебраическая сумма Минковского $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ тоже является многогранником, причем

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \operatorname{conv}\{x^i + y^j, \ i = \overline{1, M}, \ j = \overline{1, L}\}.$$

Лемма 3.2 (*Рокафеллар Р.*, 1973). *Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица. Тогда*

$$\operatorname{Ext}(A\mathcal{X}) = A(\operatorname{Ext} \mathcal{X}).$$

Для вычисления минимального числа шагов в задаче быстродействия и проверки принадлежности произвольной точки некоторому многограннику используется следующий критерий.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{X} = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $x \in \mathcal{X}$ в том и только в том случае, когда $\mu(x, \mathcal{X}) \leqslant 1$.*

При этом в силу ограничений (3.1) и определения функционала Минковского его значение может быть вычислено в ходе решения следующей ЗЛП:

$$\begin{gathered} \alpha \to \min_{\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathbb{R}}, \\ x = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{M} \lambda_i = \alpha, \qquad \lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, M}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для построения оптимального управления в случае (3.1) используется отображение $S_N \colon \mathcal{X}(N+1) \to \mathcal{U}$, где

$$S_N(x) = \arg\min_{u \in \mathcal{U}} \mu(x + u, \mathcal{X}(N)).$$

С учетом (3.2) и (3.1) значение $S_N(x)$ может быть вычислено, как решение ЗЛП:

$$\alpha \to \min_{\alpha,\lambda_1,\lambda_M,u},$$
$$x+u=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x^i, \qquad \sum_{i=1}^{M}\lambda_i \leqslant \alpha,$$
$$0\leqslant \lambda_i,\ i=\overline{1,M}, \qquad (u,p^l)\leqslant a_l,\ l=\overline{1,L},$$

где $\operatorname{Ext}\mathcal{X}(N)=\{x^1,\ldots,x^M\}$.

Теорема 3.1 (Достаточные условия оптимальности). *Пусть траектория системы* (1.1) $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ *определяется соотношениями*

$$x^*(k+1)=Ax^*(k)+S_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)),\ k=\overline{0,N_{min}-1},$$
$$x^*(0)=x_0.$$

Тогда

i) $x^*(N_{min})=0$,

ii) оптимальное управление на k-м шаге имеет вид

$$u^*(k)=S_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)).$$

Сформулированные утверждения позволяют построить алгоритм вычисления оптимального управления в задаче быстродействия для системы (1.1) в случае (3.1).

Алгоритм 3.1.

Этап 0.

0.1. Проверить равенство $x_0=0$. Если оно выполнено, то завершить алгоритм. Иначе перейти к этапу 1.

Этап 1.

1.1. Положить N равным 1.

1.2. Построить верхнюю оценку множества крайних точек $\mathcal{X}(N)$ согласно леммам 3.1 и 3.2.

1.3. Исключить из полученной в шаге 1.2 оценки некрайние точки согласно алгоритму быстрой оболочки.

1.4. Согласно лемме 3.3 проверить выполнение условия $x_0\in\mathcal{X}(N)$, решив ЗЛП (3.2).

1.5. Если включение выполнено, то положить значение N_{min} равным N и перейти к этапу 2. Иначе увеличить значение N на единицу и перейти к шагу 1.2.

Этап 2.

2.1. Положить k равным 0.

2.2. Вычислить значение оптимального управления на k-м шаге $u^*(k)$ согласно теореме 3.1.

2.3. Вычислить значение вектора состояния на последующем шаге $x^*(k+1)$ согласно рекуррентным соотношениям (1.1).

2.4. Увеличить значение k на 1.

2.5. Если выполнено равенство $k=N_{min}$, то завершить алгоритм. Иначе перейти к шагу 2.2.

Для случая, когда множество $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ не удовлетворяет условиям (3.1) разработан метод сведения исходной задачи к случаю линейных ограничений. Данный подход основан на идее проведения полиэдральной аппроксимации выпуклого компактного множества допустимых значений управлений $\mathcal{U}$ системы (1.1). Т.е. строится последовательность многогранников $\{\hat{\mathcal{U}}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к $\mathcal{U}$. Каждый элемент последовательности является множеством вложенным в $\mathcal{U}$, то есть состоит только из допустимых значений управления.

А следовательно, для каждого номера $N \in \mathbb{N}$ управление, которое является оптимальным по быстродействию для системы

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k),$$
$$x(0) = x_0,\ u(k) \in \hat{\mathcal{U}}_N,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

также является допустимым для системы (1.1), переводящим её в начало координат.

Для исследования вопросов сходимости рассматриваемые множества считаются точками метрического пространства $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, где

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \colon \mathcal{X} \text{ - компакт}\}, \quad \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max\{\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|\}.$$

При построении вспомогательной системы был выбран метод полиэдральной аппроксимации, рассмотренный в работе *Самсонова С. Л.* Данный метод обладает сравнительной простотой реализации, достаточной эффективностью и свойством сходимости в метрике Хаусдорфа. Идея метода основывается на построении равномерной сетки на n-мерном кубе и продолжении её на выпуклое множество.

Через $\mathcal{K} = [-1; 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ обозначен n-мерный куб с центром в начале координат и длиной ребра равной 2:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \leqslant 1\}.$$

На $\partial\mathcal{K}$ строится равномерная сетка:

$$\mathcal{K}_N = \{x \in \partial\mathcal{K} \colon x_i = \frac{j}{N},\ j = \overline{-N, N},\ i = \overline{1, n}\}. \tag{3.3}$$

Аппроксимация производится посредством отображений $\alpha(x, \mathcal{X})$ и $T_{\mathcal{X}}(x)$.

$$\alpha(x, \mathcal{X}) = \max\{\alpha > 0 \colon \alpha x \in \mathcal{X}\},$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – некоторый выпуклый компакт такой, что $0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$.

$$T_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$. Тогда*

$$T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \to \infty} \partial\mathcal{X}, \qquad \operatorname{conv} T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \to \infty} \mathcal{X}.$$

Множество $\operatorname{conv} T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N)$ в условиях теоремы 3.2 является многогранником. То есть используя вместо $\mathcal{U}$ в системе (1.1) его полиэдральную аппроксимацию $\operatorname{conv} T_{\mathcal{U}}(\mathcal{K}_N)$, удается свести исходную задачу быстродействия к случаю (3.1) и использовать для построения управления алгоритм 3.1.

Разработанные в третьей главе методы использованы для решения задачи демпфирования. Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, приводящие к потере его устойчивости и, в конечном счете, к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе текущих изменений, т.е. задача управления сооружением по принципу обратной связи. На сегодняшний день наиболее активно применяется способ организации такого управления на основе динамического гашения колебаний с использованием дополнительных материальных тел. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствии с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж.

В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, рассматривается одномерная цепочка упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Разработана дискретная математическая модель системы гашения колебаний. Для неё на основе методов полиэдральной аппроксимации построена вспомогательная система, удовлетворяющая условию (3.1). Для заданных начальных условий при помощи алгоритма 3.1 вычислено оптимальное управление и траектория в задаче быстродействия.

В **четвертой главе** для решения задачи быстродействия для системы (1.1) в случае (3.1) разработан комплекс программ. Возможность создания такого комплекса для произвольной системы управления базируется на том факте, что оптимальное управление, сконструированное в теореме 3.1, может быть вычислено в результате решения задачи линейного программирования. Также процедура построения множеств 0-управляемости в силу леммы 1.1 является рекуррентным процессом, основанным на леммах 3.1, 3.2 и алгоритме быстрой оболочки.

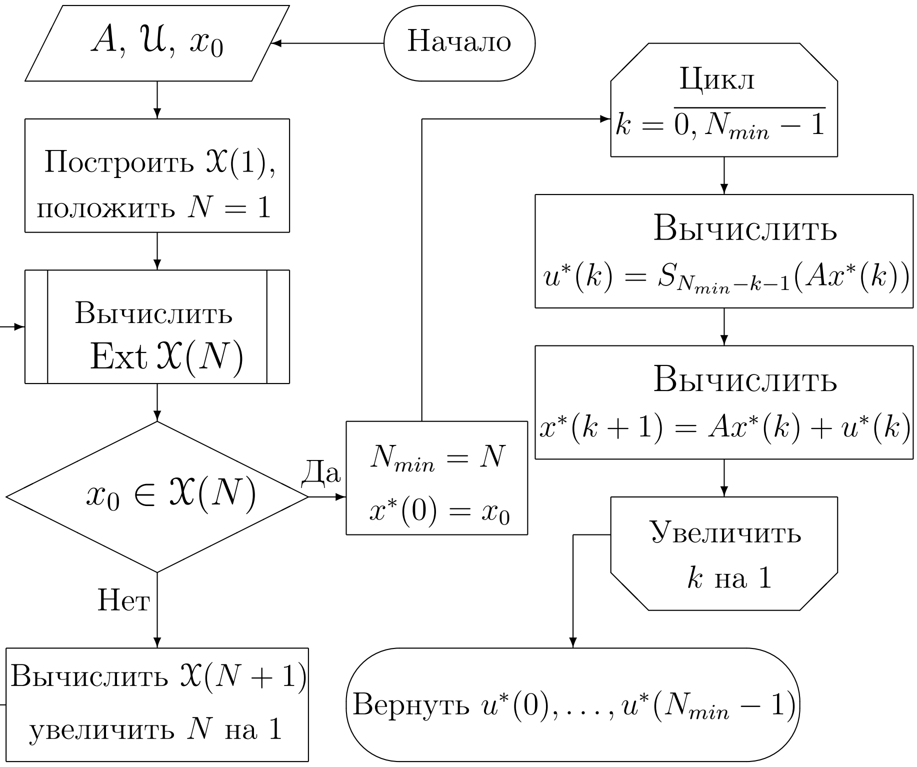

Рис. 1. Алгоритм вычисления оптимального управления

Для реализации программного комплекса был выбран язык C++. Этот выбор обусловлен тем, что язык C++, обладая большим числом библиотек, поддерживающих те или иные алгоритмы, также способен обеспечить мультиплатформенность программного обеспечения. Широкое распространение языка C++ гарантирует легкость коррекции исходного кода с целью модификации его под нужды пользователя.

Программа реализует процедуру вычисления оптимального управления согласно алгоритму 3.1. В качестве входных данных программа получает матрицу системы A, множество допустимых значений управлений $\mathcal{U}$, заданное в виде множества своих вершин, и начальное состояние x_0. Сначала программа строит последовательность множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ до тех пор, пока не будет выполнено включение $x_0 \in \mathcal{X}(N_{min})$. При этом посредством алгоритма быстрой оболочки на каждом шаге $N = \overline{1, N_{min}}$ определяется точное множество вершин $\mathcal{X}(N)$. Затем согласно теореме 3.1 на каждом шаге $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ рассчитывается оптимальное управление. Набор оптимальных управлений является результатом работы программы. На рисунке 1 изображена блок-схема основной программы.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод из программного пакета GNU Linear Programming Kit. Для построения множества вершин $\mathcal{X}(N)$ применяется алгоритм Qhull (быстрой оболочки), который используется для решения аналогичных задач в таких средах, как GNU Octave и MATLAB.

Посредством разработанного программного комплекса решается задача наискорейшей ликвидации углового отклонения тела, подвешенного на струне и способного совершать вращательные движения. Предполагается, что тело подвержено вязкому трению воздуха, моменту, связанному с упругостью струны. Управление осуществляется при помощи двух противоположно направленных вентиляторных двигателей ограниченной мощности. Динамика системы описывается через следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 1 & 1,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,24 \end{pmatrix} v(k), \\ &x(0) = x_0,\ v(k) \in [-1;1],\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\alpha(k)$ и $\omega(k)$ – угловое отклонение угловая скорость тела соответственно в k-й момент времени. Для начального состояния $x(0) = (0,1;\ 0)^T$ произведены численные расчеты и построены множества 0-управляемости. Результаты представлены в таблице 1 и на рисунках 2 и 3.

Таблица 1. Оптимальное управление и траектория системы (4.1)

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(k)$	0.1	0.1	0.09	0.06	0.03	0.01	0
$\omega(k)$	0	-0.11	-0,29	-0.27	-0.21	-0.12	0
$u^*(k)$	-0.89	-0.76	0.81	1.0	0.99	0.9	

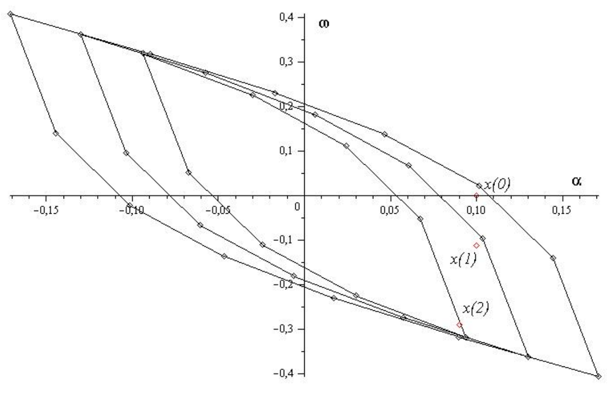

Рис. 2. Множества 0-управляемости для $N = \overline{4, 6}$

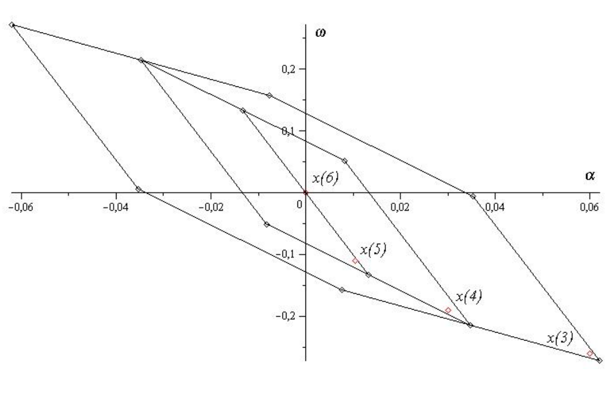

Рис. 3. Множества 0-управляемости для $N = \overline{0, 3}$

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Исследован класс математических моделей линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений [5, 8–11].

2. Формализован и исследован новый класс математических моделей линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество [2, 8–11].

3. Сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество [2, 8, 11].

4. Сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений [5, 9, 10].

5. Разработан численный метод решения задачи быстродействия для линейных дискретных автономных систем с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление, предложена модификация метода для случая выпуклых ограничений на управление [1, 3, 4, 6, 7].

6. Разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы [1, 3, 6, 7, 12].

7. Решены задачи оптимальной по быстродействию коррекции орбиты спутника, наискорейшей ликвидации углового отклонения, тела подвешенного на струне, демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности [1, 5–8, 11].

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 2 и 4 паспорта специальности 05.13.18 и пунктам 4 и 5 паспорта специальности 05.13.01.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и Телемеханика. 2015. №9. С.3-30.
2. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // Автоматика и Телемеханика. 2017. №10. С.3-32.
3. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. №83.
4. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Труды МАИ.

2016, №87.

5. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Труды МАИ. 2017. №94.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию ограниченное управление угловым движением аэростата на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике» 16-18 апреля 2013 г., Москва. – М.:МАИ, 2013. С.281-282.
7. *Ибрагимов Д.Н.* Явный вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия для линейной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов 13-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 17-21 ноября 2014 г., Москва. – М.:МАИ, 2014. С.620-622.
8. *Ибрагимов Д.Н.* Принцип максимума в задаче быстродействия линейной дискретной системой с ограниченным управлением на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов 14-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 16-20 ноября 2015 г., Москва. – М.:МАИ, 2015. – С.410-411.
9. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию позиционное управление линейной дискретной системой с ограниченным множеством допустимых управлений // Сборник тезисов докладов международной конференции по математической теории управления и механике, 3-7 июля 2015 г., Суздаль. – М.:МИАН, 2015. С.63-65.
10. *Ибрагимов Д.Н.* Явный вид оптимального управления в задаче быстродействия линейной дискретной системой с ограниченным множеством допустимых управлений // Сборник тезисов докладов XX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 28 июня-5 июля 2015 г., Евпатория. – М.:МАИ, 2015. С.148-151.
11. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О решении задачи быстродействия линейной бесконечномерной дискретной системой с ограниченным управлением // Сборник тезисов докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8-12 июля 2016 г., Суздаль. – М.:МИАН, 2016. С.75-76.

Программы для ЭВМ

12. *Ибрагимов Д.Н.* Программа вычисления оптимального по быстродействию управления для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017660770 от 26 сентября 2017 г.