

На правах рукописи



НГУЕН ВАН ЛАМ

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА СРЕДЫ КОССЕРА СО
СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Официальные оппоненты: **Ерофеев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород.

Яковлев Дмитрий Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник АО «Военно-промышленная корпорация «Научно-производственное объединение машиностроения», г. Реутов.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Защита диссертации состоится «22» декабря 2021 г. в 13⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=160745

Автореферат разослан « ____ » октября 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В настоящее время развитие современной науки и техники требует точного знания процессов деформирования не только «традиционных» материалов, но и материалов с усложненной структурой, в том числе таких, для которых деформация среды описывается не только вектором перемещения, но также вектором поворота. Общая теория такой несимметричной теории упругости впервые была разработана братьями Коссера (Э. и Ф. Коссера).

Потребности практики требуют исследования нестационарных задач моментной теории упругости. Однако число таких публикаций ограничено.

Актуальность темы исследования. Во многих случаях возникает необходимость учета особенностей строения материалов элементов конструкций на кристаллическом уровне. Этому требованию отвечают модели моментных упругих сред, к которым, в том числе, относится и модель Коссера. Однако проблема нестационарной динамики тел из таких сред мало исследована. В имеющихся публикациях по этому вопросу, как правило, рассматриваются соответствующие упрощенные модели. Поэтому тема диссертации, в которой используется полная система уравнений, является актуальной.

Целью диссертационной работы являются постановка и построение аналитических решений задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных волн в среде Коссера со сферическими границами.

Методы исследования для постановки задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных задач используется модель Коссера. Для решения применяются разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также преобразование Лапласа по времени. Поскольку изображения являются сложными функциями, то для аналитического построения оригиналов используется метод малого параметра, которым является коэффициент связи полей перемещений и вращения.

Достоверность и обоснованность результатов научных положений и полученных результатов подтверждается использованием апробированной

модели сплошной среды, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов и сравнением с решениями для псевдоконтинуума Коссера и классической упругой среды.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Впервые даны постановка задач о распространении нестационарных осесимметричных и антисимметричных возмущений от сферической полости в среде Коссера.

2. Получено новое аналитическое решение задач о распространении нестационарных осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

3. Получено новое аналитическое решение задач о распространении антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

4. Разработан подход к решению систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, используемый для осесимметричной и антисимметричной задач.

5. Впервые дана оценка учета моментных характеристик при нестационарных осесимметричных возмущениях.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в разработке методов исследования нестационарной динамики среды Коссера со сферическими границами и элементов конструкций из материалов с микроструктурой, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, а также в возможности использования полученных решений в качестве тестовых с помощью различных пакетов программного обеспечения (Maple 17, Math type 6.9).

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в методиках инженерных расчетов типовых авиационных конструкций и их соединений, а также при проектировании и оценке прочности машиностроительных и строительных конструкций.

Апробация основных результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2019 – 2021 г.);

- Международная научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященная памяти и 95-летию со дня рождения Ф.М. Митенкова (Нижний Новгород, 2019 г.);

- Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 120-летию Х.М. Муштари, 110-летию К.З. Галимова, 110-летию Г.Г. Тумашева, 100-летию М.С. Корнишина, 90-летию И.Г. Терегулова (Казань, 2020 г.);

- XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» к 100-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича (Ростов-на-Дону, 2020 г.)

- XXIX Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках – 2020» (Пермь, 2020 г.);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, МГУ, 2021 г.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2019 - 2020 г.);

- XXII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2021 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 2-х статьях в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ (обе публикации входят в международные системы цитирования Web of Science и Scopus), и в 8-ми тезисах докладов.

Структура и объем диссертации. Объем работы 116 страниц и содержит 97 рисунков. Она состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения и списка литературы из 111 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована цель диссертационной работы, актуальность темы диссертации, изложены методы исследования, приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе приведен аналитический обзор публикаций, посвящённых рассматриваемой в диссертации проблеме. Из него следует, что, несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей упругих сред, нестационарные задачи для упругих моментных сред исследованы недостаточно. Здесь же приведены основные соотношения для упругой моментной среды, описываемой моделью Коссера. Из них получены уравнения осесимметричного и антисимметричного движения для среды Коссера в сферической системе координат r, ϑ, θ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$) с центром в точке O и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$.

1. Осесимметричное движение. Ему соответствуют следующие физические компоненты векторов перемещения и вращения:

$$\mathbf{u} = w(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + v(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi(r, \theta, t)\mathbf{e}_\vartheta, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(r, \theta, t)\mathbf{e}_\vartheta, \quad \varphi = \varphi(r, \theta, t).$$

Тогда уравнения движения приобретают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)D(\psi) + 2\alpha\omega, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}D(\omega) - 2\alpha v [D(\psi) + 2\omega], \\ D(\psi) &= \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Точки здесь и далее обозначают производные по времени.

При этом ненулевые компоненты u и w вектора перемещений связаны с потенциалами φ и ψ так:

$$\begin{aligned} u_r = w &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \psi \operatorname{ctg}\theta \right), \\ u_\theta = v &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \psi \right) - \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad u_\vartheta = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Деформации $\gamma_{\xi\zeta}$, $\chi_{\xi\zeta}$, где $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, \theta\}$, выражаются через перемещения следующим образом:

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \gamma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} (v \operatorname{ctg} \theta + w), \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \omega, \\
\gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \omega, \chi_{r\vartheta} = \frac{\partial \omega}{\partial r}, \chi_{\vartheta r} = -\frac{\omega}{r}, \chi_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \chi_{\vartheta\theta} = -\frac{\omega}{r} \operatorname{ctg} \theta, \\
\gamma_{r\vartheta} &= \gamma_{\vartheta r} = \gamma_{\theta\vartheta} = \gamma_{\vartheta\theta} = 0, \chi_{rr} = \chi_{\theta\theta} = \chi_{\vartheta\vartheta} = \chi_{r\theta} = \chi_{\theta r} \equiv 0, \\
\Gamma &= \gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\vartheta\vartheta}, \mathbf{X} = \chi_{rr} + \chi_{\theta\theta} + \chi_{\vartheta\vartheta} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Нетривиальные физические компоненты тензоров напряжений $\sigma_{\xi\zeta}$ и моментных напряжений $\mu_{\xi\zeta}$ ($\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, z\}$) определяются равенствами

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \gamma_{rr} + \kappa(\gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \sigma_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} + \kappa(\gamma_{rr} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \sigma_{\vartheta\vartheta} = \gamma_{\vartheta\vartheta} + \kappa(\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \\
\sigma_{r\theta} &= \gamma_1^{-2}(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}) + \alpha(\gamma_{r\theta} - \gamma_{\theta r}), \sigma_{\theta r} = \gamma_1^{-2}(\gamma_{\theta r} + \gamma_{r\theta}) + \alpha(\gamma_{\theta r} - \gamma_{r\theta}), \\
\mu_{r\vartheta} &= \chi_{r\vartheta} + \eta\chi_{\vartheta r}, \mu_{\vartheta r} = \chi_{\vartheta r} + \eta\chi_{r\vartheta}, \mu_{\theta\vartheta} = \chi_{\theta\vartheta} + \eta\chi_{\vartheta\theta}, \mu_{\vartheta\theta} = \chi_{\vartheta\theta} + \eta\chi_{\theta\vartheta}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Антисимметричное движение. Ему соответствуют следующие физические компоненты векторов перемещения и вращения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \boldsymbol{\omega} = \omega_r(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + \omega_\theta(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta, \\
\Psi &= \Psi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\vartheta, \Phi = \Phi(r, \theta, t).
\end{aligned}$$

При этом уравнения движения записываются так:

$$\begin{aligned}
\ddot{\Phi} &= \gamma_0^{-2} \Delta \Phi - 4\alpha v \Phi, \ddot{u} = \eta_{1\alpha}^+ D(u) - 2\alpha D(\Psi), \\
\ddot{\Psi} &= \gamma_2^{-2} D(\Psi) + 2\alpha v(u - 2\Psi).
\end{aligned} \tag{5}$$

При этом ненулевые координаты ω_r и ω_θ связаны с потенциалами Φ и Ψ так:

$$\omega_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi \sin \theta), \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Psi)}{\partial r}. \tag{6}$$

Для деформаций имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\vartheta} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \omega_\theta, \gamma_{\vartheta r} = -\frac{u}{r} - \omega_\theta, \gamma_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_r, \gamma_{\vartheta\theta} = \omega_r - \frac{u}{r} \operatorname{ctg} \theta, \\
\gamma_{rr} &= \gamma_{\theta\theta} = \gamma_{\vartheta\vartheta} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} = 0, \\
\chi_{rr} &= \frac{\partial \omega_r}{\partial r}, \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \omega_r \right), \chi_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} (\omega_r + \omega_\theta \operatorname{ctg} \theta), \\
\chi_{r\theta} &= \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r}, \chi_{\theta r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \omega_\theta \right), \chi_{r\vartheta} = \chi_{\vartheta r} = \chi_{\theta\vartheta} = \chi_{\vartheta\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

а напряжения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\vartheta} &= \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{r\vartheta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta r}, \quad \sigma_{\vartheta r} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta r} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{r\vartheta}, \\
\sigma_{\theta\vartheta} &= \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\theta\vartheta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\vartheta\theta}, \quad \sigma_{\vartheta\theta} = \eta_{1\alpha}^+ \gamma_{\vartheta\theta} + \eta_{1\alpha}^- \gamma_{\theta\vartheta}, \\
\mu_{rr} &= 2\eta_1 \chi_{rr} + \eta_2 X, \quad \mu_{\theta\theta} = \eta_1 \chi_{\theta\theta} + \eta_2 X, \\
\mu_{\vartheta\vartheta} &= \eta_1 \chi_{\vartheta\vartheta} + \eta_2 X, \quad \mu_{r\theta} = \chi_{r\theta} + \eta \chi_{\theta r}, \quad \mu_{\theta r} = \chi_{\theta r} + \eta \chi_{r\theta}.
\end{aligned} \tag{8}$$

В соотношениях (1) – (8) и далее использованы безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые здесь и далее опущены):

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{r}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad v' = \frac{v}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\Psi}{L^2}, \quad u' = \frac{u}{L}, \\
\Phi' &= \frac{\Phi}{L}, \quad \Psi' = \frac{\Psi}{L}, \quad \sigma'_{\xi\zeta} = \frac{\sigma_{\xi\zeta}}{\lambda + 2\mu}, \quad \chi'_{\xi\zeta} = L \chi_{\xi\zeta}, \quad \mu'_{\xi\zeta} = \frac{L \mu_{\xi\zeta}}{\gamma + \varepsilon}, \\
\{\xi, \zeta\} &= \{r, \theta, \vartheta\}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\rho c_1^2} = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \\
\gamma_3^2 &= \frac{c_1^2}{c_4^2}, \quad \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}, \\
\eta &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \quad 2\eta_1 + \eta_2 = \frac{c_4^2}{c_3^2} = \gamma_2^2 \gamma_0^{-2} = \gamma_2^2 \gamma_3^{-2}, \quad \eta_{1\alpha}^\pm = \gamma_1^{-2} \pm \alpha.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь t – время; L – некоторый характерный линейный размер; λ, μ – упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические параметры моментной среды; ρ – ее плотность; J – мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); c_1, c_2 и c_3 – скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

Во второй главе рассматривается распространение осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости единичного радиуса, что соответствует следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned}
\varphi|_{\tau=0} &= \psi|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0, \\
w|_{r=1} &= W_0(\theta, \tau), \quad v|_{r=1} = V_0(\theta, \tau), \quad \omega|_{r=1} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

К ним добавляются условия ограниченности решения.

Для решения потенциалы, перемещения и компоненты напряженного состояния представляем в виде рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ w \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi_n \\ w_n \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} \psi \\ v \\ \omega \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \Psi_n \\ v_n \\ \omega_n \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rm}(r, \tau) P_n(\cos \theta), \\ \begin{pmatrix} \sigma_{r\theta}(r, \theta, \tau) \\ \sigma_{\theta r}(r, \theta, \tau) \end{pmatrix} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_{r\theta n}(r, \tau) \\ \sigma_{\theta r n}(r, \tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \tau) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \theta, \tau) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta n}(r, \tau) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta n}(r, \tau) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta) + \frac{1-\kappa}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mu_{r\vartheta}(r, \theta, \tau) \\ \mu_{\vartheta r}(r, \theta, \tau) \end{pmatrix} &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_{r\vartheta n}(r, \tau) \\ \mu_{\vartheta r n}(r, \tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \begin{pmatrix} \mu_{\theta\vartheta}(r, \theta, \tau) \\ \mu_{\vartheta\theta}(r, \theta, \tau) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_{\theta\vartheta n}(r, \tau) \\ \mu_{\vartheta\theta n}(r, \tau) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta) + \frac{1+\eta}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).\end{aligned}\quad (13)$$

Коэффициенты этих рядов связаны между собой так:

$$w_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - N \frac{\psi_n}{r} \quad (n \geq 0), \quad v_n = \frac{\varphi_n - \psi_n}{r} - \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \quad (n \geq 1), \quad N = n(n+1); \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rm} &= \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2w_n - Nv_n], \quad \sigma_{\theta\theta n} = \kappa \frac{\partial w_n}{\partial r} + (\kappa+1) \frac{w_n}{r} - N \frac{v_n}{r}, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta n} &= \kappa \frac{\partial w_n}{\partial r} + (\kappa+1) \frac{w_n}{r} - n(n+1) \kappa \frac{v_n}{r}, \\ \sigma_{r\theta n} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial v_n}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{w_n - v_n}{r} - 2\alpha \omega_n,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta r n} &= (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial v_n}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{w_n - v_n}{r} + 2\alpha \omega_n, \quad \mu_{r\vartheta n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \omega_n, \\ \mu_{\vartheta r n} &= \eta \frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{\omega_n}{r}, \quad \mu_{\theta\vartheta n} = -N \frac{\omega_n}{r}, \quad \mu_{\vartheta\theta n} = -\eta N \frac{\omega_n}{r} = \eta \mu_{\theta\vartheta n}.\end{aligned}$$

При этом уравнения (1) и дополнительные условия (10) переходят в следующие равенства:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_n &= \Delta_n \varphi_n \quad (n \geq 0), \quad \gamma_1^2 \ddot{\psi}_n = (1 + \alpha \gamma_1^2) \Delta_n \psi_n + 2\alpha \gamma_1^2 \omega_n, \\ \gamma_2^2 \ddot{\omega}_n &= \Delta_n \omega_n - 2\alpha \nu \gamma_2^2 (\Delta_n \psi_n + 2\omega_n) \quad (n \geq 1), \quad \Delta_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{N}{r^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\varphi_n|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_n|_{\tau=0} &= 0 \quad (n \geq 0), \quad \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = \omega_n|_{\tau=0} = \dot{\omega}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1), \\ w_n|_{r=1} &= w_{0n}(\tau) \quad (n \geq 0), \quad v_n|_{r=1} = v_{0n}(\tau), \quad \omega_n|_{r=1} = 0 \quad (n \geq 1).\end{aligned}\quad (17)$$

К соотношениям (14), (15) – (17) применяем преобразование Лапласа по времени (s - параметр; индекс « L » обозначает трансформанту). В результате получаем уравнения относительно изображений:

$$s^2 \varphi_n^L = \Delta_n \varphi_n^L \quad (n \geq 0). \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 s^2 \psi_n^L &= (1 + \alpha \gamma_1^2) \Delta_n \psi_n^L + 2\alpha \gamma_1^2 \omega_n^L, \\ \gamma_2^2 s^2 \omega_n^L &= \Delta_n \omega_n^L - 2\alpha \delta \gamma_2^2 (\Delta_n \psi_n^L + 2\omega_n^L) \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (19)$$

и дополнительные соотношения

$$w_0^L = \frac{\partial \varphi_0^L}{\partial r}, \quad w_n^L = \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial r} - n(n+1) \frac{\psi_n^L}{r}, \quad v_n^L = \frac{\varphi_n^L - \psi_n^L}{r} - \frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} \quad (n \geq 1). \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rn}^L &= \frac{\partial w_n^L}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2w_n^L - n(n+1)v_n^L], \\ \sigma_{r\theta n}^L &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial v_n^L}{\partial r} + \frac{(\gamma_1^{-2} - \alpha)}{r} (w_n^L - v_n^L) - 2\alpha \omega_n^L, \\ \mu_{r\vartheta n}^L &= \frac{\partial \omega_n^L}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \omega_n^L, \quad \mu_{\theta\vartheta n}^L = -n(n+1) \frac{\omega_n^L}{r}. \end{aligned} \quad (21)$$

В остальных соотношениях в обозначениях коэффициентов рядов необходимо добавить верхний индекс « L ».

Показано, что общие решения уравнения (17) и системы (18) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n^L &= C_{n1}^{(0)}(s) Z_{1n}(rs) + C_{n2}^{(0)}(s) Z_{2n}(rs), \\ \begin{pmatrix} \psi_n^L \\ \omega_n^L \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^2 \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} \left[C_{n1}^{(k)}(s) Z_{1n}(\lambda_k r) + C_{n2}^{(k)}(s) Z_{2n}(\lambda_k r) \right], \\ Z_{1n}(z) &= z^{-1/2} K_{n+1/2}(z), \quad Z_{2n}(z) = z^{-1/2} I_{n+1/2}(z). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя; $C_{nl}^{(k)}$ - постоянные интегрирования; λ_k^2 и y_{jk} - собственные значения и компоненты собственных векторов задачи на собственные значения относительно оператора Δ_n для системы уравнений (19).

Далее, подставляя (22) в (20), (21), получаем следующие результаты:

$$w_n^L = s \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(rs) + N \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{ln}(\lambda_k r), X_{ln}(z) = Z_{ln}'(z),$$

$$v_n^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{l+2,n}(\lambda_k r) - s \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(rs), \quad (23)$$

$$\omega_n^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r), Y_{ln}(z) = -\frac{1}{z} Z_{ln}(z), Y_{l+2,n}(z) = -\frac{1}{z} [z Z_{ln}(z)]'.$$

$$\sigma_{rrn}^L = s^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) S_{rrln}^{(0)}(rs) + N \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) S_{rrln}^{(1)}(\lambda_k r),$$

$$\sigma_{r\theta n}^L = s^2 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) S_{r\theta ln}^{(0)}(rs) + \sum_{k,l=1}^2 \lambda_k [y_{1k} \lambda_k S_{r\theta ln}^{(k)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} Z_{ln}(\lambda_k r)] C_{nl}^{(k)}(s), \quad (24)$$

$$\mu_{r\theta n}^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) [X_{ln}(\lambda_k r) + \eta Y_{ln}(\lambda_k r)], \mu_{\theta\theta n}^L = N \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 C_{nl}^{(k)}(s) Y_{ln}(\lambda_k r).$$

где

$$S_{rrln}^{(0)}(z) = \left[b_n(z) - \kappa \frac{N}{z^2} \right] Z_{ln}(z) + 2(1 - \kappa) U_{ln}(z), \quad b_n(z) = 1 + \frac{N}{z^2},$$

$$S_{rrln}^{(1)}(z) = -\frac{1 - \kappa}{z} [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], \quad S_{r\theta ln}^{(0)}(z) = \frac{2\gamma_1^{-2}}{z} [X_{ln}(z) + Y_{ln}(z)], \quad (25)$$

$$S_{r\theta ln}^{(1)}(z) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \left[U_{l+2,n}(z) - \frac{1}{z} Y_{ln}(z) \right] + \frac{1}{z} (\gamma_1^{-2} - \alpha) [n(n+1)Y_{ln}(z) - Y_{l+2,n}(z)],$$

$$U_{ln}(z) = -\frac{1}{z} X_{ln}(z), \quad U_{l+2,n}(z) = -b_n(z) Z_{ln}(z) - U_{ln}(z).$$

Из условий ограниченности решения и свойств функций Бесселя вытекает, что нужно положить

$$C_{n2}^{(0)}(s) = C_{n2}^{(1)}(s) = C_{n2}^{(2)}(s) = 0. \quad (26)$$

Подставляя теперь $Z_{1n}(z)$ и $Z_{2n}(z)$ (22) в изображения граничных условий в (17), получаем алгебраические уравнения относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n \quad (n \geq 1),$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_{n1}^{(0)}(s) \\ C_{n1}^{(1)}(s) \\ C_{n1}^{(2)}(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} w_{0n}^L(s) \\ v_{0n}^L(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} sX_{1n}(s) & Ny_{11}\lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) & Ny_{12}\lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ -sY_{1n}(s) & y_{11}\lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) & y_{12}\lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{21}Z_{1n}(\lambda_1) & y_{22}Z_{1n}(\lambda_2) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Используя их решения, получаем изображения искомых функций:

$$\begin{aligned}
w_n^L(r, s) &= G_{wvn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{wvn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
v_n^L(r, s) &= G_{vvn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{vvn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\omega_n^L(r, s) &= G_{\omega vn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\omega vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s).
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rrn}^L &= G_{\sigma rrwn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\sigma rrwn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\sigma_{r\theta n}^L &= G_{\sigma r\theta wn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\mu_{r\vartheta n}^L &= G_{\mu r\vartheta wn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\mu r\vartheta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s), \\
\mu_{\theta\vartheta n}^L &= G_{\mu\theta\vartheta wn}^L(r, s)w_{0n}^L(s) + G_{\mu\theta\vartheta vn}^L(r, s)v_{0n}^L(s).
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $G_{wvn}^L(r, s), G_{vvn}^L(r, s), G_{\omega vn}^L(r, s) \dots$ - изображения поверхностных функций влияния, которые определяются так:

$$\begin{aligned}
D_n(s)G_{wvn}^L(r, s) &= sA_{n11}(s)X_{1n}(rs) + N \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k A_{n1,k+1}(s)Y_{1n}(\lambda_k r), \\
D_n(s)G_{vvn}^L(r, s) &= sA_{n21}(s)X_{1n}(rs) + N \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k A_{n2,k+1}(s)Y_{1n}(\lambda_k r), \\
D_n(s)G_{\omega vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k A_{n1,k+1}(s)Y_{3n}(\lambda_k r) - sA_{n11}(s)Y_{1n}(rs), \\
D_n(s)G_{\omega vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k A_{n2,k+1}(s)Y_{3n}(\lambda_k r) - sA_{n21}(s)Y_{1n}(rs), \\
D_n(s)G_{\omega vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k} A_{n1,k+1}(s)Z_{1n}(\lambda_k r), \quad D_n(s)G_{\omega vn}^L(r, s) = \sum_{k=1}^2 y_{2k} A_{n2,k+1}(s)Z_{1n}(\lambda_k r), \\
D_n(s) &= s \left[X_{1n}(s)A_{n11}(s) - Y_{1n}(s)A_{n21}(s) \right].
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
D_n(s)G_{\sigma rrwn}^L(r, s) &= s^2 S_{rr1n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 S_{rr1n}^{(1)}(\lambda_k r)A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma rrwn}^L(r, s) &= s^2 S_{rr1n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{1k} \lambda_k^2 S_{rr1n}^{(1)}(\lambda_k r)A_{n2,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma r\theta wn}^L(r, s) &= s^2 S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs)A_{n11}(s) + \sum_{k=1}^2 \left[y_{1k} \lambda_k^2 S_{r\theta 1n}^{(1)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} \lambda_k Z_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\sigma r\theta vn}^L(r, s) &= s^2 S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs)A_{n21}(s) + \sum_{k=1}^2 \left[y_{1k} \lambda_k^2 S_{r\theta 1n}^{(1)}(\lambda_k r) - 2\alpha y_{2k} \lambda_k Z_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n2,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu r\vartheta wn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 \left[X_{1n}(\lambda_k r) + \eta Y_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu r\vartheta vn}^L(r, s) &= \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 \left[X_{1n}(\lambda_k r) + \eta Y_{1n}(\lambda_k r) \right] A_{n2,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu\theta\vartheta wn}^L(r, s) &= n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1}(s), \\
D_n(s)G_{\mu\theta\vartheta vn}^L(r, s) &= n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k^2 Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1}(s).
\end{aligned} \tag{31}$$

В этих равенствах и далее $A_{nij}(s)$ - алгебраическое дополнение расположенного в i -й строке и j -м столбце элемента матрицы \mathbf{A}_n .

Для определения оригиналов функций влияния используем линейное приближение разложений по малому параметру α , характеризующему связь

полей перемещений и поворота. При этом величины $\lambda_{1,2}$ и компоненты собственных векторов записываются так:

$$\lambda_1 = \gamma_{1\alpha} s, \lambda_2 = \gamma_2 \left(s + \frac{2\alpha v}{s} \right), \gamma_{1\alpha} = \gamma_1 \sqrt{1 - \alpha \gamma_1^2}. \quad (32)$$

$$y_{22} = -y_{11} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 - \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4v) \alpha, y_{12} = 2\alpha \gamma_1^2, y_{21} = -2\alpha v \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2. \quad (33)$$

В результате с принятой точностью равенства (30) и (31) приводятся к следующему виду:

$$G_{\xi\zeta n}^L = \frac{F_{\xi\zeta n}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha} s)}, (\xi = w, v, \zeta = w, v), G_{\xi\omega n}^L = \frac{F_{\xi\omega n}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha} s) Z_{1n}(\gamma_2 s)}, (\xi = \omega, \zeta = w, v), \quad (34)$$

$$\Pi_n(x, y) = X_{1n}(x) Y_{3n}(y) + N Y_{1n}(x) Y_{1n}(y).$$

где

$$\begin{aligned} F_{wvn}(r, s) &= X_{1n}(rs) Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} s) + N Y_{1n}(s) Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} sr), \\ F_{wvn}(r, s) &= n(n+1) [X_{1n}(s) Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} rs) - Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) X_{1n}(rs)], \\ F_{vvn}(r, s) &= Y_{1n}(s) Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} rs) - Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} s) Y_{1n}(rs), k_\omega = \frac{2v\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \\ F_{vvn}(r, s) &= X_{1n}(s) Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} sr) + N Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) Y_{1n}(rs), \\ F_{\omega vn}(r, s) &= \alpha \gamma_2 k_\omega s^{-1} M_{\omega n}(r, s) Y_{1n}(s), F_{\omega vn}(r, s) = \alpha \gamma_2 k_\omega s^{-1} M_{\omega n}(r, s) X_{1n}(s), \\ M_{\omega n}(r, s) &= Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} rs) Z_{1n}(\gamma_2 s) - Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) Z_{1n}(\gamma_2 rs). \end{aligned} \quad (35)$$

$$G_{\sigma abc n}^L(r, s) = \frac{s F_{\sigma abc n}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha} s)} (abc = rrw, rrv, r\theta w, r\theta v), \quad (36)$$

$$G_{\mu abc n}^L(r, s) = \frac{s F_{\mu abc n}(r, s)}{\Pi_n(s, \gamma_{1\alpha} s) Z_{1n}(\gamma_2 s)} (abc = r\vartheta w, r\vartheta v, \theta\vartheta w, \theta\vartheta v),$$

где

$$\begin{aligned} F_{\sigma rrvn}(r, s) &= Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} s) S_{rr1n}^{(0)}(rs) + N \gamma_{1\alpha} Y_{1n}(s) S_{rr1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha} rs), \\ F_{\sigma rrvn} &= N [\gamma_{1\alpha} X_{1n}(s) S_{rr1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha} rs) - Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) S_{rr1n}^{(0)}(rs)], \\ F_{\sigma r\theta vn}(r, s) &= Y_{3n}(\gamma_{1\alpha} s) S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs) + \gamma_{1\alpha} Y_{1n}(s) S_{r\theta 1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha} rs), \\ F_{\sigma r\theta vn}(r, s) &= \gamma_{1\alpha} X_{1n}(s) S_{r\theta 1n}^{(1)}(\gamma_{1\alpha} rs) - n(n+1) Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) S_{r\theta 1n}^{(0)}(rs), \\ F_{\mu r\vartheta wn}(r, s) &= \alpha \gamma_2 k_\omega M_{r\vartheta n}(r, s) Y_{1n}(s), F_{\mu r\vartheta vn}(r, s) = \alpha \gamma_2 k_\omega M_{r\vartheta n}(r, s) X_{1n}(s), \\ F_{\mu \theta\vartheta wn}(r, s) &= \alpha \gamma_2 k_\omega M_{\theta\vartheta n}(r, s) Y_{1n}(s), F_{\mu \theta\vartheta vn}(r, s) = \alpha \gamma_2 k_\omega M_{\theta\vartheta n}(r, s) X_{1n}(s). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{r\vartheta n}(r, s) &= \gamma_{1\alpha} [X_{1n}(\gamma_{1\alpha} sr) Z_{1n}(\gamma_2 s) + \eta Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} sr) Z_{1n}(\gamma_2 s)] - \\ &\quad - \gamma_2^2 [X_{1n}(\gamma_2 sr) Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} s) + \eta Y_{1n}(\gamma_2 sr) Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} s)], \\ M_{\theta\vartheta n}(r, s) &= N [\gamma_{1\alpha}^2 Y_{1n}(\gamma_{1\alpha} sr) Z_{1n}(\gamma_2 s) - \gamma_2^2 Y_{1n}(\gamma_2 sr) Z_{1n}(\gamma_{1\alpha} s)]. \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом связи функций Бесселя полуцелого индекса с элементарными функциями равенства (34) и (36) преобразовываются так:

$$\begin{aligned}
G_{\xi\zeta n}^L &= \sum_{k=0}^1 H_{\xi\zeta n}^{(k)L}(r, s) e^{-\rho_k s}, \quad \rho_0 = r - 1, \quad \rho_1 = \gamma_{1\alpha}(r - 1), \\
H_{\xi\zeta n}^{(k)L}(r, s) &= \frac{F_{\xi\zeta n}^{(k)}(r, s)}{r^{n+2} P_n(s)} \quad (\xi = w, v), \quad H_{\omega\zeta n}^{(1)L}(r, s) = \frac{F_{\omega\zeta n}^{(1)}(r, s)}{r^{n+1} P_n(s)}, \\
H_{\xi\zeta n}^{(k)L}(r, s) &= \frac{F_{\xi\zeta n}^{(k)}(r, s)}{r^{n+3} P_n(s)} \quad (\xi = \sigma r r, \sigma \theta \theta, \sigma \vartheta \vartheta, \sigma r \theta, \sigma \theta r), \\
H_{\xi\zeta n}^{(k)L}(r, s) &= \frac{F_{\xi\zeta n}^{(k)}(r, s)}{r^{n+2} P_n(s)} \quad (\xi = \mu r \vartheta, \mu \vartheta r, \mu \theta \vartheta, \mu \vartheta \theta), \\
P_n(s) &= R_{n1}(s) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s) - N R_{n0}(s) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s).
\end{aligned} \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{wvn}^{(0)}(r, s) &= R_{n1}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{wvn}^{(1)}(r, s) = -N R_{n0}(s) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} rs), \\
F_{wvn}^{(0)}(r, s) &= N R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n1}(rs), \quad F_{wvn}^{(1)}(r, s) = -N R_{n1}(s) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} rs), \\
F_{vvn}^{(0)}(r, s) &= -R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(rs), \quad F_{vvn}^{(1)}(r, s) = R_{n0}(s) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} rs), \\
F_{vvn}^{(0)}(r, s) &= -N R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(rs), \quad F_{vvn}^{(1)}(r, s) = R_{n1}(s) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} rs), \\
F_{\omega vn}^{(0)}(r, s) &= -\alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n0}(s), \\
F_{\omega vn}^{(1)}(r, s) &= \alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(s), \\
F_{\omega vn}^{(0)}(r, s) &= -\alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n1}(s), \\
F_{\omega vn}^{(1)}(r, s) &= \alpha k_{\omega} \gamma_2 R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n1}(s), \\
F_{\sigma rrvn}^{(0)}(r, s) &= -Q_{n1}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{\sigma rrvn}^{(1)}(r, s) = N Q_{n2}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n0}(s), \\
F_{\sigma rrvn}^{(0)}(r, s) &= -N Q_{n1}(rs) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{\sigma rrvn}^{(1)}(r, s) = N Q_{n2}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n1}(s), \\
F_{\sigma r\theta vn}^{(0)}(r, s) &= Q_{n2}(rs) R_{n3}(\gamma_{1\alpha} s), \quad F_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r, s) = N Q_{n2}(rs) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s), \\
F_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r, s) &= Q_{n3\alpha}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n0}(s), \quad F_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r, s) = Q_{n3\alpha}(\gamma_{1\alpha} rs) R_{n1}(s).
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mu r\vartheta vn}^{(0)} &= \alpha \gamma_2^2 k_{\omega} M_{r\vartheta n}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(s), \\
F_{\mu r\vartheta vn}^{(1)} &= -\alpha \gamma_2 k_{\omega} \gamma_{1\alpha} M_{r\vartheta n}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(s), \\
F_{\mu r\vartheta vn}^{(0)} &= \alpha \gamma_2^2 k_{\omega} M_{r\vartheta n}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n1}(s), \\
F_{\mu r\vartheta vn}^{(1)} &= -\alpha \gamma_2 k_{\omega} \gamma_{1\alpha} M_{r\vartheta n}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n1}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(0)}(r, s) &= n(n+1) \alpha \gamma_2^2 k_{\omega} R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n0}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(1)}(r, s) &= -n(n+1) \alpha \gamma_2 k_{\omega} \gamma_{1\alpha} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(0)}(r, s) &= n(n+1) \alpha \gamma_2^2 k_{\omega} R_{n0}(\gamma_2 sr) R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s) R_{n1}(s), \\
F_{\mu\theta\vartheta vn}^{(1)}(r, s) &= -n(n+1) \alpha \gamma_2 k_{\omega} \gamma_{1\alpha} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} sr) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n1}(s).
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
Q_{n1}(z) &= R_{n2}(z) - 2\kappa R_{n1}(z) - n(n+1)\kappa R_{n0}(z), \quad Q_{n2}(z) = (1-\kappa)R_{n5}(z), \\
Q_{n3\alpha}(z) &= -\alpha z^2 R_{n0}(z) - Q_{n3}(z), \quad Q_{n3}(z) = \gamma_{1\alpha}^{-2} [R_{n2}(z) + (n+2)(n-1)R_{n0}(z)], \\
Q_{n4}(z) &= \kappa R_{n4}(z) - R_{n1}(z) - n(n+1)R_{n0}(z), \quad Q_{n5}(z) = \kappa z^2 R_{n0}(z) - (1-\kappa)R_{n1}(z), \\
M_{r9n}(z) &= R_{n1}(z) + \eta R_{n0}(z), \quad M_{9rn}(z) = \eta R_{n1}(z) + R_{n0}(z).
\end{aligned} \tag{42}$$

Оригиналы функций влияния в соответствии со свойствами преобразования находятся с помощью выделения в необходимых случаях целой части изображений и вычетов ($H(\tau)$ - единичная функция Хевисайда):

$$G_{\xi\zeta n}(r, \tau) = G_{\xi\zeta ns}(r, \tau) + \sum_{k=0}^1 H_{\xi\zeta nr}^{(k)}(r, \tau - \rho_k) H(\tau - \rho_k). \tag{43}$$

Здесь сингулярная часть $G_{\xi\zeta ns}$ отлична от нуля только в случае неправильных дробей $H_{\xi\zeta n}^{(k)L}(r, s)$ и является линейной комбинацией дельта-функции Дирака $\delta(\tau)$ и ее первой производной. Если же эти дроби правильные, то $H_{\xi\zeta nr}^{(k)} = H_{\xi\zeta n}^{(k)}$.

Окончательно из (28) и (29) с учетом (43) получаем (звездочка обозначает свертку):

$$\begin{aligned}
w_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} w_{0n}(\tau - r + 1) + G_{wvnr}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{vvn}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
v_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} v_{0n}[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{vvn}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{vvnr}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\omega_n(r, \tau) &= G_{\omega vn}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + G_{\omega vn}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\sigma_{rn} &= d_{\sigma rrvn}^{(0)}(r) \dot{w}_{0n}(\tau - r + 1) + G_{\sigma rrvn}(r, \tau) * \dot{w}_{0n}(\tau) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^1 d_{\sigma rrvn}^{(k)}(r) v_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)] + G_{\sigma rrvnr}(r, \tau) * v_{0n}(\tau), \\
\sigma_{r\theta n} &= \sum_{k=0}^1 d_{\sigma r\theta vn}^{(k)}(r) w_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)] + G_{\sigma r\theta vnr}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \\
&\quad + d_{\sigma r\theta vn}^{(1)}(r) \dot{v}_{0n}[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{\sigma r\theta vnr}(r, \tau) * \dot{v}_{0n}(\tau), \\
\mu_{r9n} &= \sum_{k=0}^1 d_{\mu r9vn}^{(k)}(r) w_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)] + G_{\mu r9vnr}(r, \tau) * w_{0n}(\tau) + \\
&\quad + G_{\mu r9vn}(r, s) * v_{0n}(\tau), \\
\mu_{\theta9n} &= G_{\mu\theta9vn}(r, s) * w_{0n}(\tau) + \sum_{k=0}^1 d_{\mu\theta9vn}^{(k)}(r) v_{0n}[\tau - \gamma_{k\alpha}(r-1)] + \\
&\quad + G_{\mu\theta9vnr}(r, \tau) * v_{0n}(\tau).
\end{aligned} \tag{45}$$

В диссертации приведены графики всех функций влияния при $n = 0,1$ для композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, а также кинематических параметров и напряжений для граничных условий, соответствующих поступательному перемещению вдоль оси $\theta = 0$ по закону τ_+ жестко сцепленного с полостью абсолютно твердого шара. На рис. 1 и 2 для примера представлены распределения нормальных перемещений по радиусу и по времени соответственно.

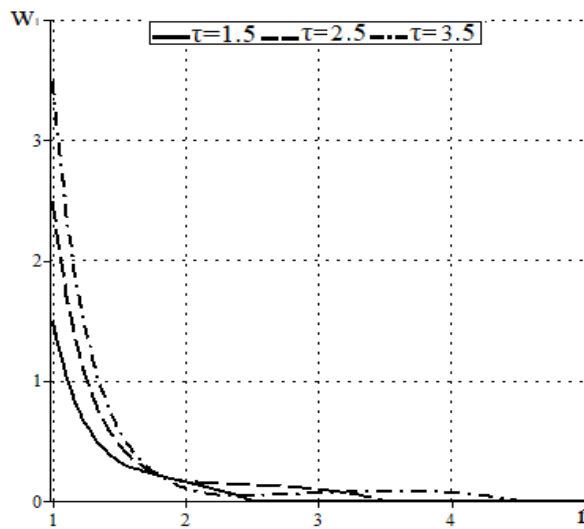


Рис. 1.

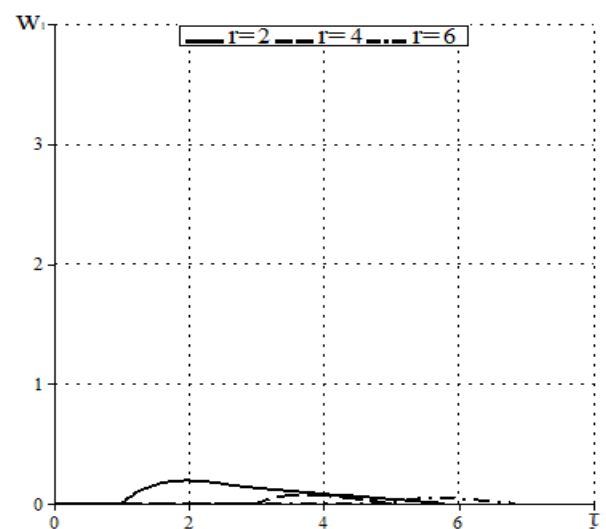


Рис. 2.

В этой же главе получена оценка учета моментных свойств среды на примере нестационарной осесимметричной задачи о распространении возмущений от сферической полости в среде Коссера. В линейном приближении по малому параметру найдена вносимая учетом моментных свойств среды поправка. Показано, что количественные отличия практически отсутствуют. В то же время качественно процессы в моментной и классической упругой среде существенно отличаются.

Показано, что вносимые учетом моментных свойств поправки по отношению к упругому решению для перемещений имеют порядок α . Для угла поворота они качественно более существенны. Это продемонстрировано на рис. 3 и 4, где приведены графики распределения по радиусу угла поворота $\omega_1(r, \tau)$ функции поправки $\omega_{1ce}(r, \tau)$, соответствующих указанному выше поступательному перемещению шара.

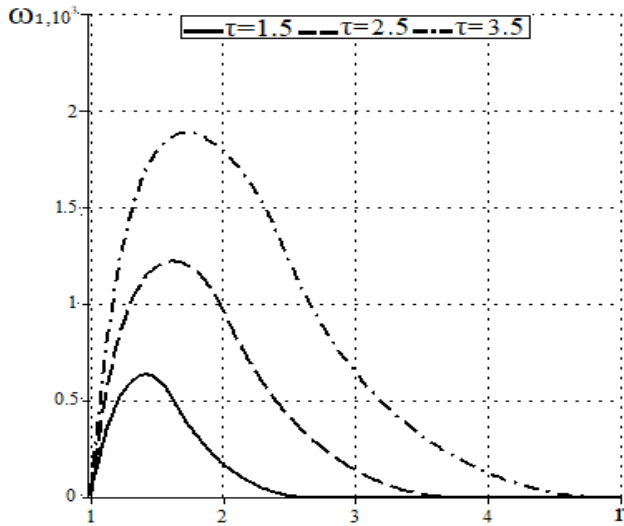


Рис.3

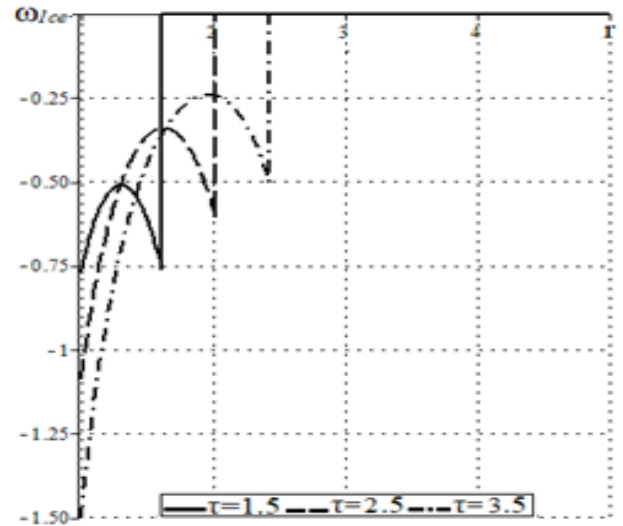


Рис. 4

Отсюда следует, что за исключением окрестности точки $r=1$ поправка имеет порядок 10^{-3} . При этом для выбранного закона движения имеются качественные отличия, а именно, $\omega_1(1, \tau) = 0$ и $\omega_{1ce}(1, \tau) \neq 0$, а также непрерывность функции $\omega_1(r, \tau)$ и наличие разрывов первого рода в графиках $\omega_{1ce}(r, \tau)$.

В третьей главе рассматривается распространение антисимметричных возмущений от сферической полости единичного радиуса, что соответствует следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Phi|_{\tau=0} = \dot{\Phi}|_{\tau=0} = 0, \quad u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \Psi|_{\tau=0} = \dot{\Psi}|_{\tau=0} = 0, \\ u|_{r=1} = U_0(\theta, \tau), \quad \omega_r|_{r=1} = \Omega_{r0}(\theta, \tau), \quad \omega_\theta|_{r=1} = \Omega_{\theta0}(\theta, \tau). \end{aligned} \quad (46)$$

К ним добавляются условия ограниченности решения.

Для решения координаты векторов перемещения, угла поворота и векторного потенциала, а также скалярный потенциал представляем в виде рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \omega_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi^n \\ \omega_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} u \\ \Psi \\ \omega_\theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ \Psi_n \\ \omega_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (47)$$

Изображения коэффициентов этих рядов по Лапласу связаны между собой так:

$$\omega_m^L = \frac{\partial \Phi_n^L}{\partial r} - n(n+1) \frac{\Psi_n^L}{r} \quad (n \geq 0), \quad \omega_{\theta n}^L = \frac{\Phi_n^L}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Psi_n^L)}{\partial r} \quad (n \geq 1). \quad (48)$$

Соответствующие уравнения движения, начальные граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} s^2 \Phi_n^L &= \gamma_0^{-2} \Delta_n \Phi_n^L - 4\alpha \nu \Phi_n^L \quad (n \geq 0), \\ s^2 u_n^L &= \eta_{1\alpha}^+ \Delta_n u_n^L - 2\alpha \Delta_n \Psi_n^L, \quad s^2 \Psi_n^L = 2\alpha \nu u_n^L + (\gamma_2^{-2} \Delta_n - 4\alpha \nu) \Psi_n^L \quad (n \geq 1), \\ \Phi_n \Big|_{\tau=0} &= \dot{\Phi}_n \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), \quad u_n \Big|_{\tau=0} = \dot{u}_n \Big|_{\tau=0} = \Psi_n \Big|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_n \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1), \\ \omega_m^L \Big|_{r=1} &= \omega_{r0n}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad u_n^L \Big|_{r=1} = u_{0n}^L(s), \quad \omega_{\theta n}^L \Big|_{r=1} = \omega_{\theta 0n}^L(s) \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (49)$$

Далее, действуем аналогично главе 2. А именно, сначала изображения решения этой задачи приводятся к подобной (28) форме:

$$\begin{aligned} \omega_m^L(r, s) &= G_{\omega r m}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) + G_{\omega r \theta n}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega r u n}^L(r, s) u_{0n}^L(s), \\ \omega_{\theta n}^L(r, s) &= G_{\omega \theta r n}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) + G_{\omega \theta \theta n}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega \theta u n}^L(r, s) u_{0n}^L(s), \\ u_n^L(r, s) &= G_{u \omega r n}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) + G_{u \omega \theta n}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{u u n}^L(r, s) u_{0n}^L(s). \end{aligned} \quad (50)$$

Затем в результате линеаризации по малому параметру α и использовании связи функций Бесселя с элементарными функциями изображения функций влияния записываются так:

$$\begin{aligned} G_{u u n}^L(r, s) &= H_{u u n}^L(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s} G_{\omega r u n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=0,2} H_{\omega r u n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \\ G_{\omega \theta u n}^L(r, s) &= \alpha \sum_{k=0,2} H_{\omega \theta u n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \quad G_{u \omega r n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=0,2} H_{u \omega r n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \\ G_{u \omega \theta n}^L(r, s) &= \alpha \sum_{k=0,2} H_{u \omega \theta n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}, \quad G_{\zeta n}^L(r, s) = G_{\zeta n}^{(0)L}(r, s) + 2\alpha \nu G_{\zeta n}^{(1)L}(r, s), \\ G_{\zeta n}^{(l)L}(r, s) &= \sum_{k=0,2} H_{\zeta n}^{(lk)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s} \quad (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta; l = 0, 1), \end{aligned} \quad (51)$$

где $H_{u \omega u n}^L, H_{\omega r u n}^{(1k)L}, H_{\omega \theta u n}^{(1k)L} \dots$ - рациональные функции параметра преобразования Лапласа.

Далее оригиналы изображений функций влияния в (51) записываются аналогично (43).

В результате из (50) получаем

$$\begin{aligned} \omega_m(r, \tau) &= \frac{1}{r} \omega_{r0n} \left[\tau - \gamma_0(r-1) \right] + G_{\omega r m r} \left(r, \tau \right) * \omega_{r0n} \left(\tau \right) + G_{\omega r \theta n} \left(r, \tau \right) * \omega_{\theta 0n} \left(\tau \right) + G_{\omega r u n} \left(r, \tau \right) * u_{0n} \left(\tau \right), \\ \omega_{\theta n}(r, \tau) &= \frac{1}{r} \omega_{\theta 0n} \left[\tau - \gamma_2(r-1) \right] + G_{\omega \theta r n} \left(r, \tau \right) * \omega_{r0n} \left(\tau \right) + G_{\omega \theta \theta n r} \left(r, \tau \right) * \omega_{\theta 0n} \left(\tau \right) + G_{\omega \theta u n} \left(r, \tau \right) * u_{0n} \left(\tau \right), \\ u_n(r, \tau) &= \frac{1}{r} u_{0n} \left[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1) \right] + G_{u \omega r n} \left(r, \tau \right) * \omega_{r0n} \left(\tau \right) + G_{u \omega \theta n} \left(r, \tau \right) * \omega_{\theta 0n} \left(\tau \right) + G_{u u n r} \left(r, \tau \right) * u_{0n} \left(\tau \right). \end{aligned}$$

В диссертации приведены графики всех функций влияния при $n = 0,1$ для композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, а также кинематических параметров и напряжений для граничных условий, соответствующих вращению вокруг по закону τ_+ жестко сцепленного с полостью единичного радиуса абсолютно твердого шара. На рис. 5 и 6 для примера представлены распределения координаты ω_r угла поворота по радиусу и по времени соответственно.

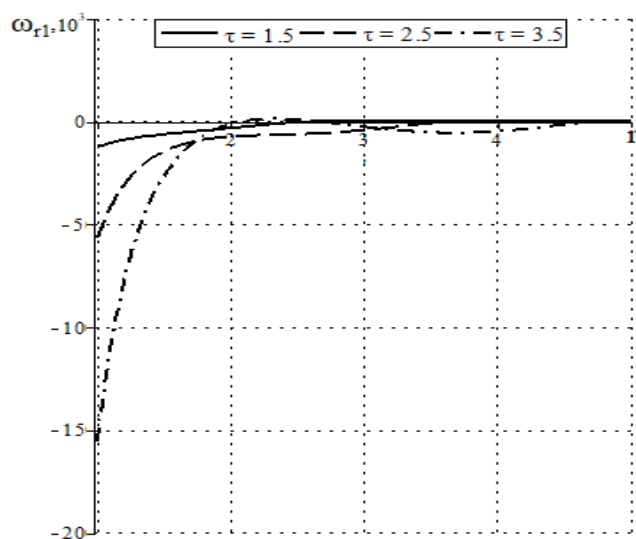


Рис. 5

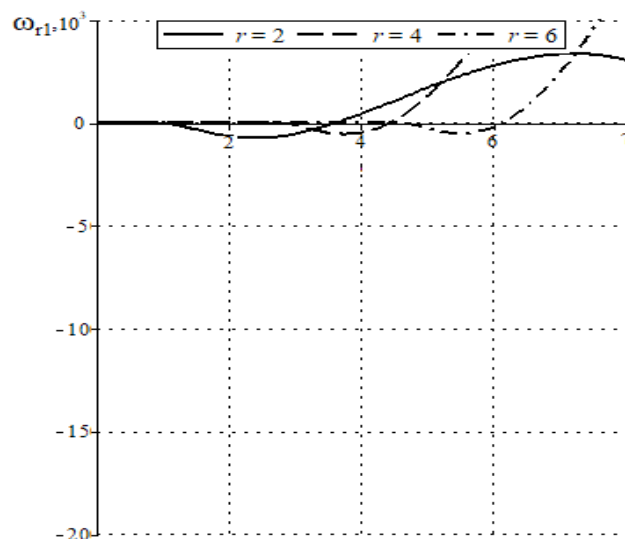


Рис. 6

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

1. Получено решение нестационарных задач о распространении осесимметричных возмущений от сферической полости в пространстве, занятом средой Коссера.

2. Проведено подробное исследование задач о распространении нестационарных антисимметричных возмущений от сферической полости в среде Коссера.

3. Показано, что в линейном приближении по малому параметру имеются два волновых фронта, соответствующие волне растяжения-сжатия и модифицированной с учетом свободного вращения волне сдвига.

4. Обоснован и реализован метод решения систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

5. Построена оценка учета моментных свойств среды при осесимметричных возмущениях.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.

1. *Lam V. Nguyen, Tarlakovskii D.V.* Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // *Advanced Structured Materials*, V. 122. *Nonlinear Wave Dynamics*. - Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 273 – 292.

2. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. –2020. –No 4. –С. 201–210. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.17 = *Tarlakovskii D.V., Lam Nguyen Van* Propagation of non-stationary antisymmetric kinematic perturbations from a spherical cavity in Cosserat medium. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 4, pp. 201-210. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.17.

Публикации в других изданиях

3. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера. Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО "ТРП", 2019. - С. 119-120.

4. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Нестационарная динамика среды Коссера со сферической полостью. Ломоносовские чтения. Научн. конф. Секция механики. 15–25 апреля 2019 г. Тез. докл. – М.: Изд-во МГУ, 2019. – С. 196-197.

5. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Действие нестационарных антисимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера. Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.). Т. 1. – Ростов-на-Дону; Таганрог: изд-во ЮФУ, 2020. – С. 243 – 246.

6. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Антисимметричные волны в упругом моментном пространстве со сферической полостью. Матер. Всерос. Науч.

Конфер. с междунар. участием. Актуальные проблемы механики сплошной среды — 2020., 28 сентября — 2 октября 2020 г., Казань. — Казань: Казанский ун-т; изд-во АН РТ, 2020. — С. 391 — 394.

7. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Нестационарные антисимметричные волны в упругом моментном пространстве со сферической полостью. Ломоносовские чтения. Научн. конф. Секция механики. Октябрь 2020 г. Тез. докл. — М.: Изд-во МГУ, 2020. — С. 166 - 167.

8. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Вращение недеформируемого шара в упругом моментном пространстве. Математическое моделирование в естественных науках. Тез. XXIX Всерос. школы-конф. — Пермь: ПНИПУ. — С. 77.

9. *Нгуен Ван Лам, Тарлаковский Д.В.* Влияние моментных свойств на динамику пространства Коссера со сферической полостью // Материалы XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. — М.: ООО "ТРП", 2021. — С. 69-70.

10. *Тарлаковский Д.В., Нгуен Ван Лам.* Распространение нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4–13 сентября 2021 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2021. — С. 290-291.