

Труды МАИ. 2023. № 130  
Trudy MAI, 2023, no. 130

Научная статья  
УДК 629.78  
DOI: [10.34759/trd-2023-130-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-16)

## МЕТОДЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ПСЕВДОФАЗОВЫХ НЕОДНОЗНАЧНОСТЕЙ ГЛОНАСС

**Антон Александрович Бабурин**

АО «Российские космические системы»,  
Москва, Россия

[contact@spacecorp.ru](mailto:contact@spacecorp.ru)

*Аннотация.* Рассмотрены методы целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС, необходимые в задачах высокоточных абсолютных и относительных местоопределений по измерениям сигналов ГЛОНАСС с разрешением целочисленной неоднозначности. Учёт целочисленных свойств псевдофазовых неоднозначностей позволяет существенно уменьшить время сходимости решения до сантиметрового уровня точности. В связи с частотным разделением спутниковых сигналов, используемых в ГЛОНАСС, при решении задач высокоточного местоопределения возникают две проблемы: различие кодовых аппаратных задержек приёмника в измерениях псевдодальностей разных спутников ГЛОНАСС и различие длин волн несущей частоты сигналов различных спутников ГЛОНАСС. Эти особенности не позволяют целочисленно оценить псевдофазовые неоднозначности ГЛОНАСС. Поэтому известные методы,

разработанные для систем с кодовым разделением, например, GPS, не могут использоваться для ГЛОНАСС. Настоящая статья посвящена решению второй обозначенной проблемы. Предлагается два метода – строго и нестрого целочисленной оценки, основанные на решении недоопределённой системы линейных уравнений с помощью теории S-преобразования. Строго целочисленный метод основан на применении целочисленного унимодулярного преобразования к системе линейных уравнений перед её решением и не требует наличия в зоне видимости приёмника спутников ГЛОНАСС с соседними литерами. Нестрого целочисленный метод более прост в применении, но целочисленные оценки можно получить только при соблюдении некоторых условий. Проанализированы условия, при которых при нестройной оценке отклонением от целых чисел можно пренебречь. Как строгий, так и нестрогий методы не требуют непосредственного привлечения измерений псевдодальностей в обработку псевдофаз. Для математической модели псевдофазовых измерений используется линейная аппроксимация фазо-частотной характеристики приёмника (принимается линейная зависимость фазовых задержек в приёмнике от частоты). Рассмотрение ведётся на примере обработки первых разностей измерений реальных навигационных приёмников сети IGS, что подтверждает корректность предложенных методов и адекватность используемых математических моделей реальным измерениям.

**Ключевые слова:** ГЛОНАСС, целочисленное разрешение неоднозначности, псевдофазовые измерения

*Для цитирования:* Бабурин А.А. Методы целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-16)

Original article

## **INTEGER GLONASS PHASE AMBIGUITY ESTIMATION METHODS**

**Anton A. Baburin**

JSC “Russian Space Systems”,

Moscow, Russia

[contact@spacecorp.ru](mailto:contact@spacecorp.ru)

**Abstract.** The article considers integer estimator methods for GLONASS phase ambiguities necessary in the problems of high accuracy absolute and relative positioning for GLONASS signals measurement with integer ambiguity resolution. Accounting for the integer properties of pseudo-phase ambiguities allows significant reduction in solution convergence time up to the centimeter accuracy level. With a view to frequency division of satellites signals, adopted for GLONASS signals, two problems arise while solving the problems high-precise positioning. They are the difference in the hardware delays of the receiver while measuring pseudo-distances of various GLONASS satellites, and the difference between wavelengths of the signals carrier frequency of various GLONASS satellites. These specifics do not allow integer estimation of the GLONASS pseudo-phase ambiguities. Thus, the known methods developed for the systems with code division, such as GPS, cannot be employed for GLONASS. The presented article deals with the second said problem. Two methods of strict and non-strict integer estimation based on solution of the uncertain system

of the linear equations by the S-transform theory are being suggested. The strict integer method is based on integer unimodular transform to the system of linear equations prior to its solution, and does not require the presence of GLONASS satellites with neighboring characters in the visibility zone of the receiver. The non-strict method is simpler in application, but integer estimations may be obtained only observing certain conditions. Conditions at which the difference from the integers may be neglected with the non-strict estimation were analyzed. Both strict and non-strict methods do not require engaging direct measurements of pseudo-distances and pseudo-phases processing. Linear approximation of the receiver phase-frequency characteristic is being used for the pseudo-phase measurements model (linear dependence of the phase delays on the frequency in the receiver is being accepted). The analysis is being conducted on the example of the first differences of real navigation receivers of the IGS network processing, which confirms correctness of the suggested methods and adequacy of the mathematical models being used to the real measurements.

**Keywords:** GLONASS, integer ambiguity resolution, carrier phase measurements

**For citation:** Baburin A.A. Integer GLONASS phase ambiguity estimation methods. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-16)

## Введение

Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) позволяют определять положение потребителя с метровой точностью. Для повышения точности местоопределения используют дифференциальные системы навигации – локальные

или широкозонные, например, российская Система дифференциальной коррекции и мониторинга (СДКМ), европейская European Geostationary Navigation Service (EGNOS) и другие, которые обеспечивают точность местоопределения до полуметра. Для дальнейшего повышения точности необходимо использовать так называемые псевдофазовые измерения (измерения по фазе несущей частоты), которые обладают достаточно высокой точностью (на уровне сантиметров и даже миллиметров). Особенностью таких измерений является их целочисленная неоднозначность – они включают неизвестное целое число длин волн несущей частоты, что осложняет процесс их обработки. Наличие в математических моделях таких измерений неизвестного параметра псевдофазовой неоднозначности требует включения его в список оцениваемых переменных, что приводит к увеличению времени сходимости решения к сантиметровому уровню точности. Ускорение времени сходимости возможно за счёт учёта целочисленных свойств параметров псевдофазовой неоднозначности и применения алгоритмов её разрешения [1] (в англоязычной литературе эти алгоритмы известны под названием LAMBDA-метод [2]). Для ГНСС с кодовым разделением (GPS, GALILEO, BEIDOU), где сигналы всех спутников в одном диапазоне излучаются на одинаковой несущей частоте, методы целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей известны [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Кроме того, алгоритмы разрешения неоднозначности применяются и в задаче сличения шкал времени по сигналам GPS [9]. Однако в системах с частотным разделением (ГЛОНАСС) сигналы спутников имеют различную несущую частоту, что не позволяет применять известные методы для целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС.

Известен подход к целочисленной оценке псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС, который требует наличия в зоне видимости приёмника спутников ГЛОНАСС с соседними частотными каналами (литерами) [10]. В настоящей статье предлагается более общий подход, который не требует никаких ограничений на видимое созвездие спутников ГЛОНАСС, образования вторых разностей измерений, а также не использует однозначные кодовые измерения (измерения псевдодальности) для целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей. Также описан более простой, но менее строгий подход, при котором неоднозначности оцениваются не строго целочисленно, но при определённых условиях отличием от целых чисел можно пренебречь.

В настоящей статье рассматриваются только алгебраические подходы к целочисленной оценке псевдофазовых неоднозначностей. Для того, чтобы вынести за рамки данной работы вопросы оценки тропосферной, ионосферной задержек сигналов, а также оценку смещений показаний спутниковых часов, рассматриваются разности измерений навигационных приёмников, расположенных на достаточно близком расстоянии, чтобы атмосферные задержки в измерениях таких приёмников и ошибки определения координат спутников можно было считать одинаковыми. Координаты приёмников также полагаются известными с достаточной точностью.

Таким образом, ставится задача целочисленной оценки разностей псевдофазовых неоднозначностей по первым разностям измерений двух близко расположенных приёмников.

## Математическая постановка задачи

Введём в рассмотрение математическую модель псевдофазовых измерений  $L_p^j$ , м, выполненных  $p$ -м приёмником по  $j$ -му спутнику с учётом линейной аппроксимации фазо-частотной характеристики (ФЧХ) приёмника [1, 11, 12] (обозначение диапазона частот для простоты опущено):

$$L_p^j = R_p^j + T_{trop,p}^j - T_{ion,p}^j + T_p + \lambda^j \varphi_{0,p} + c \dot{\varphi}_p - t^j - \lambda^j \psi^j - \lambda^j N_p^j + \varepsilon_p^j, \quad (1)$$

где  $R_p^j$  – расстояние между положениями фазовых центров антенн приёмника в момент измерения и спутника в момент предшествования (момент времени, предшествующий моменту измерения на время распространения сигнала от спутника к приёмнику), м;  $T_{trop,p}^j$  – задержка сигнала в тропосфере, м;  $T_{ion,p}^j$  – задержка сигнала в ионосфере, м;  $T_p$  – смещение показаний часов приёмника в момент измерения, относительно показаний часов системы ГЛОНАСС, м;  $\lambda^j$  – длина волны  $j$ -го спутника, м;  $\varphi_{0,p}$  – фазовая задержка в аппаратуре приёмника, цикл ( $|\varphi_{0,p}| < 0,5$  цикла);  $c = 299792548$  – скорость света, м/с;  $\dot{\varphi}_p$  – наклон ФЧХ приёмника, 1/с;  $t^j$  – смещение показаний часов спутника в момент предшествования, м;  $\psi^j$  – фазовая задержка в аппаратуре спутника, м;  $N_p^j \in \mathbb{Z}$  – псевдофазовая целочисленная неоднозначность, цикл;  $\varepsilon_p^j$  – случайная ошибка измерений, м.

В математической модели (1) в явном виде не показаны систематические смещения, связанные со смещениями и вариациями фазовых центров антенн спутников и приёмника, влиянием океанических и твердотельных приливов в Земле, релятивистских и гравитационных задержек, wind-up эффекта. Вычислению этих

поправок посвящена обширная литература [13, 14, 15]. Далее при образовании разностей измерений приёмников эти ошибки будут компенсироваться.

Для пары приёмников  $p$  и  $q$  можно записать математическую модель разности их псевдофазовых измерений. Полагаем, что приёмники расположены на достаточно близком расстоянии, чтобы можно было считать атмосферные задержки одинаковыми  $T_{trop,p}^j = T_{trop,q}^j$ ,  $T_{ion,p}^j = T_{ion,q}^j$  для любого спутника  $j$ . В таком случае эти задержки, а также неизвестные, связанные со спутниками и одинаковые для приёмников сокращаются и получается уравнение:

$$L^j = R^j + T + \lambda^j \varphi_0 + c\dot{\varphi} - \lambda^j N^j + \varepsilon^j, \quad (2)$$

где  $L^j = L_p^j - L_q^j$  – разность измерений приёмников, м;  $R^j = R_p^j - R_q^j$  – разность расстояний до спутников от приёмников, м;  $T = T_p - T_q$  – разность смещений показаний часов приёмников относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС, м;  $\varphi_0 = \varphi_{0,p} - \varphi_{0,q}$  – разность фазовых задержек в аппаратуре приёмников, цикл ( $|\varphi_0| < 0,5$  цикла);  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_q$  – разность наклонов ФЧХ приёмников, 1/с;  $N^j = N_p^j - N_q^j$ ,  $N^j \in \mathbb{Z}$  – целочисленная разность псевдофазовых неоднозначностей, цикл;  $\varepsilon^j = \varepsilon_p^j - \varepsilon_q^j$  – случайная ошибка разности измерений, м. Величины  $R^j$  можно положить известными и перенести их в левую часть уравнения (2). Объединяя в одну переменную слагаемые  $T$  и  $c\dot{\varphi}$ , а также  $N^j$  и  $\varphi_0$  и пренебрегая случайными ошибками измерений, при наличии в зоне видимости приёмника  $J$  видимых спутников можно записать систему линейных уравнений:

$$dL^j = T_L - \lambda^j \tilde{N}^j, \quad j = \overline{1, J} \quad (3)$$



где  $dL^j = L^j - R^j$  – невязка разности псевдофазовых измерений, м;  $T_L = T + c\phi$  – смещение показаний «фазовых часов» приёмника, м;  $\tilde{N}^j = N^j - \phi_0$ ,  $\tilde{N}^j \in \mathbb{R}$  – новый, действительный параметр псевдофазовой неоднозначности, цикл (однако все целочисленные неоднозначности  $N^j$  получили одинаковое действительное смещение  $\phi_0$ , что будет в дальнейшем использовано).

Система (3) состоит из  $J$  уравнений и  $J+1$  переменных (одно смещение показаний фазовых часов  $T_L$  и  $J$  неоднозначностей  $\tilde{N}^j$ ). Очевидно, система неопределённая, поэтому имеет бесконечное множество решений. В ГНСС с кодовым разделением, где длины волн  $\lambda^j$  не зависят от номера спутника  $j$ , известны подходы, при которых недоопределённость системы уравнений преодолевается образованием вторых разностей измерений или привлечением в обработку псевдофаз однозначных измерений псевдодальностей [1]. При таком преобразовании из математической модели устраняется смещение показаний фазовых часов  $T_L$  и фазовые задержки  $\phi_0$ , одинаковые для всех уравнений, а параметры псевдофазовых неоднозначностей (точнее их вторые разности) можно целочисленно оценить. В случае ГЛОНАСС, когда длины волн  $\lambda^j$  зависят от номера спутника, при таком преобразовании целочисленность оценок неоднозначностей не сохраняется. Кроме того, в измерениях псевдодальностей ГЛОНАСС присутствуют кодовые задержки, различные для измерений сигналов разных спутников, что также препятствует целочисленной оценке неоднозначностей [10].

Для целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей  $\tilde{N}^j$  без образования вторых разностей измерений и привлечения измерений псевдодальностей предлагается из бесконечного множества решений недоопределённой системы уравнений (3) искать такое, которое сохраняет целочисленные свойства оценок переменных  $\tilde{N}^j$ . Найти такое решение недоопределённой системы уравнений можно с помощью теории S-преобразования [16, 17, 18], которая оперирует понятиями линейной алгебры и теории векторных пространств.

Для удобства представим недоопределённую систему уравнений (3) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}_{J \times 1} = \mathbf{H}_{J \times (J+1)} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{Y}_{J \times 1} = [dL^1 \ \dots \ dL^J]^T$  – вектор невязок измерений;

$$\mathbf{H}_{J \times (J+1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda^1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -\lambda^J \end{bmatrix} \text{ – матрица коэффициентов системы уравнений;}$$

$$\mathbf{x}_{(J+1) \times 1} = [T_L \ \tilde{N}^1 \ \dots \ \tilde{N}^J]^T \text{ – вектор исходных переменных.}$$

Множество решений системы (4)  $\hat{\mathbf{x}}_{(J+1) \times 1}$  (общее решение) можно выразить

формулой:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(J+1) \times 1} = \mathbf{x}_0_{(J+1) \times 1} + c_1 \mathbf{K}_{(J+1) \times 1} \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}_0_{(J+1) \times 1}$  – частное решение системы (4),  $c_1$  – произвольный действительный

параметр,  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  – базисный вектор ядра (нуль-пространства) матрицы  $\mathbf{H}_{J \times (J+1)}$  :

$$\mathbf{K}_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\lambda^1 \\ \vdots \\ 1/\lambda^J \end{bmatrix}. \quad (6)$$

С учётом того, что длину волны сигнала  $j$ -го спутника ГЛОНАСС, согласно [Интерфейсному контрольному документу ГЛОНАСС](#) можно выразить следующим образом через номер спутниковой литеры:

$$\lambda^j = \frac{c}{f^j} = \frac{c}{\Delta f(2848 + lit^j)}, \quad (7)$$

где  $\Delta f = 562,5$  кГц для диапазона L1 и  $\Delta f = 437,5$  кГц для диапазона L2, а  $lit^j \in [-7; 6]$  – номер литеры спутника ГЛОНАСС, выражение (6) можно переписать в более простом и удобном виде:

$$\mathbf{K}_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} c/\Delta f \\ g^1 \\ \vdots \\ g^J \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $g^j = 2848 + lit^j$ ,  $g^j \in [2841; 2854]$ .

Согласно теории S-преобразования, выбор одного решения из множества  $\hat{\mathbf{x}}_{(J+1) \times 1}$  (5) можно задать с помощью принадлежности этого решения выбранному векторному S-пространству, которое является подпространством размерности  $J$  пространства, образованного исходными переменными  $\mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$ . Такое решение будет соответствовать некоторой линейной комбинации исходных переменных  $\mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$ , определяемой выбранным S-пространством. S-пространство задаётся набором своих

базисных векторов  $\mathbf{S}_{(J+1) \times J}$  или набором базисных векторов  $\mathbf{S}^\perp$ -пространства  $\mathbf{S}^\perp_{(J+1) \times 1}$  (которое является ортогональным дополнением  $\mathbf{S}$ -пространства). Из литературы [6, 17, 18] известен наиболее простой и удобный способ задания  $\mathbf{S}$ -пространства:

$$\mathbf{S}^\perp_{(J+1) \times 1} = \mathbf{1}^{1+r}_{(J+1) \times 1}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{1}^{1+r}_{(J+1) \times 1}$  – вектор-столбец, состоящий из нулей и единицы на месте  $1+r$  (этот элемент вектора соответствует  $1+r$ -й переменной или неоднозначности  $\tilde{N}^r$   $r$ -го спутника, будем далее эту переменную называть «опорной для  $\mathbf{S}$ -преобразования», а соответствующий спутник – «опорным»). Добавляя уравнение  $\mathbf{S}$ -пространства в нормальном виде  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^\perp \end{pmatrix}_{1 \times (J+1)}^T \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$  к недоопределённой системе (4), получаем совместную определённую систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{J \times 1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{J \times (J+1)} \\ \left( \mathbf{S}^\perp \right)_{1 \times (J+1)}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}. \quad (10)$$

В результате решения системы (10) можно получить единственную оценку  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{S}}_{(J+1) \times 1}$ . Эта оценка будет представлять собой оценку линейной комбинации исходных

переменных, которая определяется матрицей проекции  $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}_{(J+1) \times (J+1)}$  [16, 17]:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{S}}_{(J+1) \times (J+1)} = \mathbf{E}_{(J+1) \times (J+1)} - \mathbf{K}_{(J+1) \times 1} \left( \begin{pmatrix} \left( \mathbf{S}^\perp \right)_{1 \times (J+1)}^T & \mathbf{K}_{(J+1) \times 1} \end{pmatrix} \right)^{-1} \left( \mathbf{S}^\perp \right)_{1 \times (J+1)}^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{S}}_{(J+1) \times 1} = \mathbf{P}_{\mathbf{S}}_{(J+1) \times (J+1)} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}.$$

Так как уравнение S-пространства  $0 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^\perp \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}_{1 \times (J+1)}^T \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$  при задании  $\mathbf{S}_{(J+1) \times 1}^\perp$  в виде (9)

фактически превращается в уравнение  $0 = \tilde{N}^r$ , переменную  $\tilde{N}^r$  и соответствующий столбец матрицы  $\mathbf{H}_{J \times (J+1)}$  можно отбросить из системы уравнений (10).

Из описанного способа решения системы уравнений следуют два метода оценки псевдофазовых неоднозначностей – нестрогий, когда в результате преобразования  $\mathbf{P}_S_{(J+1) \times (J+1)}$  (11) оцениваемые комбинации неоднозначностей вектора

$\mathbf{x}_S_{(J+1) \times 1}$  получаются не строго целочисленными, однако отличием от целых чисел при

определённых условиях можно пренебречь и строго целочисленный, когда оцениваются строго целочисленные линейные комбинации неоднозначностей.

### **Метод нестрогой целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей**

Этот метод состоит в прямом решении системы (10) и оценке условий, при которых получаемые оцениваемые комбинации неоднозначностей можно считать целочисленными. Для этого необходимо вычислить аналитические выражения оцениваемого вектора  $\mathbf{x}_S_{(J+1) \times 1}$  (11). Прямые вычисления по формулам (11) при задании

$\mathbf{S}_{(J+1) \times 1}^\perp$  в виде (9) дают результат:

$$\mathbf{x}_S_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} T_L - \frac{c}{\Delta f \cdot g^r} \tilde{N}^r \\ \tilde{N}^1 - \frac{g^1}{g^r} \tilde{N}^r \\ \vdots \\ \tilde{N}^J - \frac{g^J}{g^r} \tilde{N}^r \end{bmatrix}, \quad (12)$$

что с учётом выражения  $\tilde{N}^j = N^j - \varphi_0$ , введённого в (3),  $\mathbf{x}_S$  (12) можно переписать:

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} T_L - \frac{c}{\Delta f g^r} (N^r - \varphi_0) \\ N^1 - \varphi_0 - \frac{g^1}{g^r} (N^r - \varphi_0) \\ \vdots \\ N^J - \varphi_0 - \frac{g^J}{g^r} (N^r - \varphi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L - \frac{c}{\Delta f g^r} (N^r - \varphi_0) \\ N^1 - N^r - \frac{\Delta g^{1-r}}{g^r} N^r - \varphi_0 \left(1 - \frac{g^1}{g^r}\right) \\ \vdots \\ N^J - N^r - \frac{\Delta g^{J-r}}{g^r} N^r - \varphi_0 \left(1 - \frac{g^J}{g^r}\right) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $\Delta g^{j-r} = g^j - g^r = lit^j - lit^r$ ,  $\Delta g^{j-r} \in [-13; 13]$ . Принимая во внимание то, что

$|\varphi_0| < 0,5$ , а  $\left|1 - \frac{g^j}{g^r}\right| < 4,6 \times 10^{-3}$ , слагаемыми  $-\varphi_0 \left(1 - \frac{g^j}{g^r}\right)$  можно пренебречь.

Слагаемые  $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N^r$  можно оценить следующим образом: для наихудшего случая,

когда  $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} = \frac{13}{2841} \approx 4,6 \times 10^{-3}$  при условии  $N^r < 21$ ,  $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N^r < 0,1$ . Для другого

случая распределения литер (величины коэффициента  $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r}$ ) условие будет более

«мягким». Поэтому, при выполнении этого условия ( $N^r < 21$ ) отличие оценок

неоднозначностей  $\mathbf{x}_S$  (11) от целых числе будет пренебрежимо мало (менее 0,1

цикла). Обычно в навигационном приёмнике выполняется «выравнивание»

псевдофазовых измерений с измерениями псевдодалности, что ведёт к уменьшению

величины исходных псевдофазовых неоднозначностей, хотя результат такого

выравнивания зависит от ионосферной задержки измерений и наличия в измерениях

псевдодалности аппаратурных задержек. Результаты обработки реальных

измерений, представленные на рис. 1, показывают, что в проведённом эксперименте это условие выполнялось.

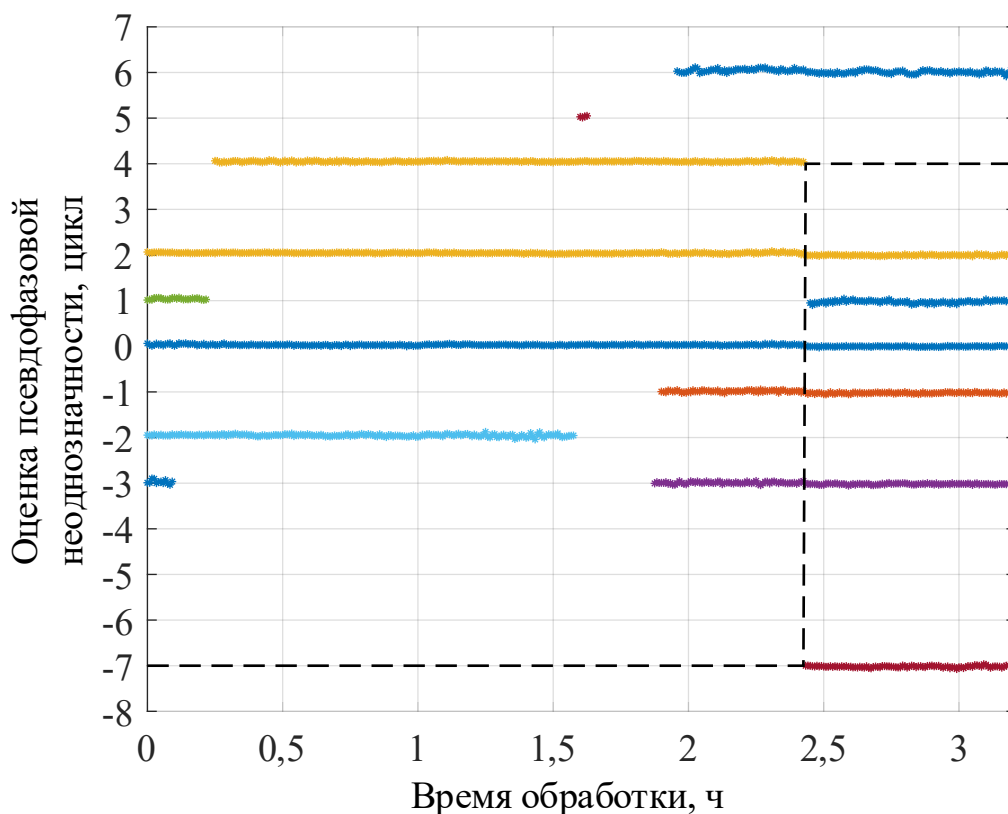


Рисунок 1 – Нестрого целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей в диапазоне L2 для станций IGS WTZ3, WTZZ.

На рис. 1 приведён пример результатов обработки реальных измерений, сделанных приёмниками станций сети IGS (International GNSS Service – международная ГНСС служба) WTZ3, WTZZ 13.08.2021, расположенных на расстоянии  $\approx 67,1$  м друг от друга. На каждую эпоху (с частотой 30 с) методом наименьших квадратов вычислялось решение системы (10). На рисунке изображён график зависимости от времени нестрогих целочисленных оценок псевдофазовых неоднозначностей. Величины оценок неоднозначностей для более удобного восприятия были смещены на целое число циклов таким образом, чтобы их величина

соответствовала номеру спутниковой литеры. Чёрной пунктирной линией показана неоднозначность опорного спутника (который сменился в процессе обработки). Из рисунка видно, что несмотря на нестрогость метода, оценки действительно соответствуют целым числам. Отклонение от целых не превышает в среднем 0,1 цикла. На рис. 2 оценки неоднозначностей для литер 0 и 2 изображены в более крупном масштабе, где становится видно, что в нестрогих оценках действительно присутствует небольшая систематическая ошибка, которая меняется при смене опорного спутника.

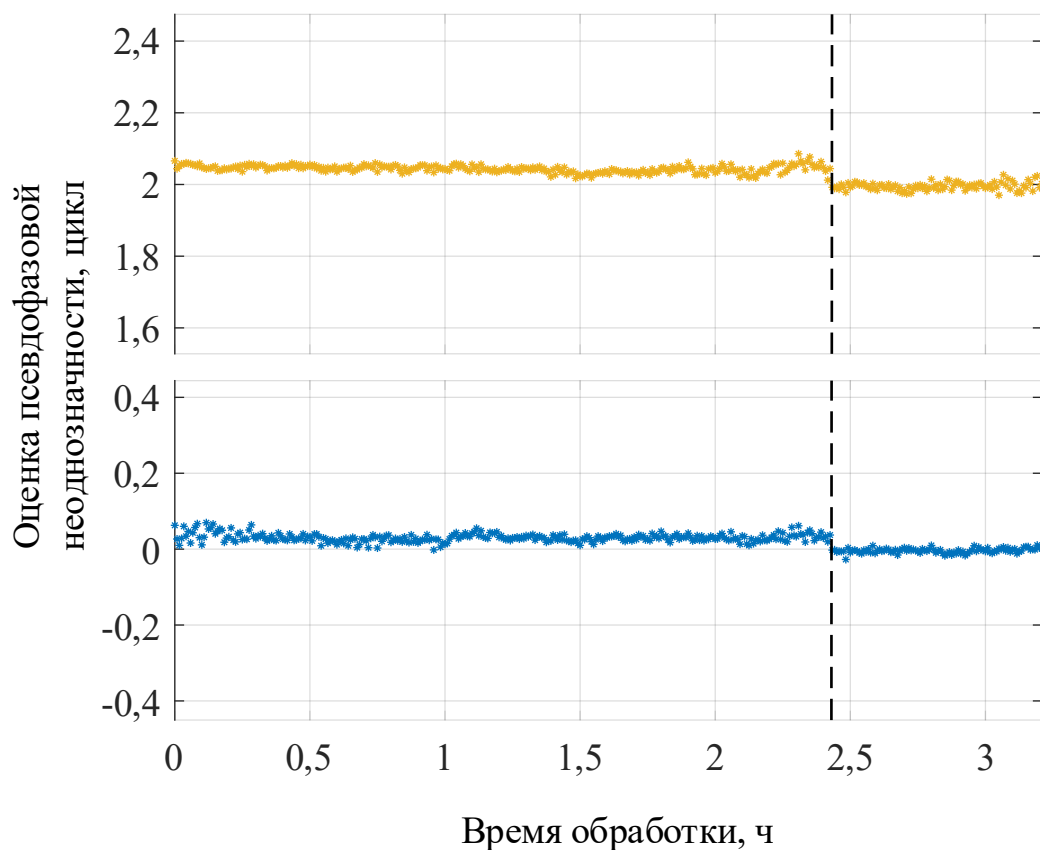


Рисунок 2 – Нестрогие целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей в диапазоне L2 для станций IGS WTZ3, WTZZ в более крупном масштабе для литер 0 и 2. Демонстрация наличия систематической ошибки.



В работах [19, 20] такой способ нестрого целочисленной оценки использовался в задаче высокоточных абсолютных местоопределений. Результаты свидетельствуют о том, что в проведённых экспериментах выдвинутые условия, также выполняются, то есть систематической ошибкой можно пренебречь ввиду её малости.

Однако можно предложить и более сложный метод, при котором псевдофазовые неоднозначности оцениваются строго целочисленно и не требуется выполнение каких-либо условий.

### Метод строго целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей

Идея метода состоит в том, чтобы перед решением преобразовать систему уравнений (4) таким образом, чтобы в результате проекции на  $S$ -пространство оцениваемые комбинации неоднозначностей, входящие в вектор  $\mathbf{x}_S$  (11), были бы строго целочисленными. Суть такого преобразования состоит в представлении векторов и матриц  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{K}$  в другом базисе (записать вектора в другой системе координат), обозначим его  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_B &= \mathbf{H} \mathbf{B}, \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}, \\ \mathbf{K}_B &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{H}_B$ ,  $\mathbf{x}_B$ ,  $\mathbf{K}_B$  – соответствующие вектора, записанные в базисе  $\mathbf{B}$ .

Для того, чтобы определить преобразование  $\mathbf{B}$ , необходимо обратиться к выражению для оцениваемого вектора  $\mathbf{x}_S$  (12). Для того, чтобы оцениваемые

комбинации неоднозначностей были целыми, необходимо, чтобы после преобразования  $\mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}$  преобразованные величины  $\tilde{N}^1, \dots, \tilde{N}^J$  и все коэффициенты  $\frac{g^1}{g^r}, \dots, \frac{g^J}{g^r}$  тоже были целыми. Выполнение первого условия можно достичь путём образования разностей между неоднозначностями  $\tilde{N}^1, \dots, \tilde{N}^J$  вектора  $\mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$  и одной из неоднозначностей (обозначим её  $k$ )  $\tilde{N}^k$ . Второе условие будет выполняться, если после преобразования вектора ядра  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  преобразованная величина  $g^r$  будет кратна всем остальным  $g^1, \dots, g^J$  (в частном случае, если  $|g^r| = 1$ ).

Выполнение первого условия может обеспечить преобразование вида:

$$\mathbf{B}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda^k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

которое представляет собой единичную матрицу, элементы  $k + 1$ -го столбца которой равны  $-1$ , за исключением диагонального элемента, равного  $1$  и  $1$ -го элемента, равного

$-\lambda^k$ . Отметим, что  $\det \left( \mathbf{B}_k^{-1} \right) = 1$ . В результате преобразования  $\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$

действительные неоднозначности  $\tilde{N}^1, \dots, \tilde{N}^J$  преобразуются в целочисленные неоднозначности (за исключением  $k$ -й)  $(N^1 - N^k), \dots, \tilde{N}^k, \dots, (N^J - N^k)$  за счёт того,

что их действительное смещение  $\varphi_0$  было одинаковым. При этом вектор ядра  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  преобразуется в такой, что вместо величин  $g^1, \dots, g^J$  (за исключением  $k$ -й) появляются  $\Delta g^{1-k}, \dots, g^k, \dots, \Delta g^{J-k}$ .

Если в результате преобразования  $\mathbf{B}_k^{-1}_{(J+1) \times (J+1)}$  (15) среди преобразованных чисел  $\Delta g^{1-k}, \dots, g^k, \dots, \Delta g^{J-k}$  есть равное по модулю 1, преобразование на этом можно завершить (это возможно в случае, если среди видимых спутников имелся такой, литера которого была соседней, то есть отличалась на 1 от литеры выбранного  $k$ -го спутника). Однако такая ситуация в общем случае не гарантирована, поэтому необходимо дальнейшее преобразование с целью преобразования вектора ядра  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  к виду, при котором в нём будет присутствовать элемент, равный по модулю 1 (на месте, соответствующем одной из неоднозначностей. Это преобразование зависит от литер видимого созвездия спутников, поэтому трудно найти его общий аналитический вид. Тем не менее, можно дать общие рекомендации и найти такое преобразование для конкретного примера видимого созвездия ГЛОНАСС. Добиться поставленной цели можно с помощью последовательных преобразований вида:

$$\left( \mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1} \right)_{(J+1) \times (J+1)} = p+1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ \cdots & & & & & 1 & \cdots & & & & m \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

суть которых состоит в прибавлении к  $p+1$ -му элементу вектора ядра  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  (соответствующему  $p$ -й неоднозначности и  $\Delta g^p$ ) его  $q+1$ -го элемента (соответствующего  $q$ -й неоднозначности и  $\Delta g^q$ ) с целым коэффициентом  $m \in \mathbb{Z}$  (большинство нулевых элементов матрицы  $\left(\mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1}\right)_{(J+1) \times (J+1)}$  (16) не показаны). Снова

заметим, что  $\det \left( \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1}\right)_{(J+1) \times (J+1)} \right) = 1$ . При этом необходимо, чтобы  $q \neq k$ , так как в

противном случае нарушится целочисленность преобразованных разностей неоднозначностей  $(N^1 - N^k), \dots, \tilde{N}^k, \dots, (N^J - N^k)$ . В общем случае может потребоваться  $N$  таких преобразований. Таким образом, общее преобразование

$\mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}^{-1} &= \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1}\right)_{(J+1) \times (J+1)} \cdots \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1}\right)_{(J+1) \times (J+1)} \mathbf{B}_k^{-1}, \\ \mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)} &= \mathbf{B}_k \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}\right)_{(J+1) \times (J+1)} \cdots \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}\right)_{(J+1) \times (J+1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

После выполнения этих преобразований вектор  $\mathbf{x}_B_{(J+1) \times 1}$  (14) оказывается

состоящим из целочисленных комбинаций неоднозначностей (кроме  $k$ -й), а в векторе ядра  $\mathbf{K}_B_{(J+1) \times 1}$  (14) оказывается один элемент, равный по модулю единице. Так как

$\det \left( \left(\mathbf{b}_{p+m \times q}^{-1}\right)_{(J+1) \times (J+1)} \right) = 1$  и  $\det \left( \mathbf{B}_k^{-1} \right)_{(J+1) \times (J+1)} = 1$ , преобразование  $\mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}$  (и  $\mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}^{-1}$ ) является для

псевдофазовых неоднозначностей  $\tilde{N}^1, \dots, \tilde{N}^J$  целочисленным унимодулярным преобразованием. Выбирая далее переменную, соответствующую положению  $\pm 1$  в

векторе  $\mathbf{K}_B$ , опорной для S-преобразования, можно получить целочисленные

$${}_{(J+1) \times 1}$$

оценки комбинаций неоднозначностей, что и является целью задачи.

Проведём рассмотрение такого преобразования на примере, когда в зоне видимости приёмника находятся спутники ГЛОНАСС с литерами -7, 0, 2, обозначенные номерами 1, 2, 3, а также любые другие, обозначенные номерами 4, ..., J (этот пример соответствует сценарию наблюдения из предыдущего примера обработки реальных измерений станций IGS WTZ3 и WTZZ). В таком случае вектор ядра и вектор исходных переменных имеют вид:

$$\mathbf{K}_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} c/\Delta f \\ 2848 - 7 \\ 2848 + 0 \\ 2848 + 2 \\ \vdots \\ g^J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} T_L \\ \tilde{N}^1 \\ \tilde{N}^2 \\ \tilde{N}^3 \\ \vdots \\ \tilde{N}^J \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Первым этапом преобразования будет  $\mathbf{B}_3^{-1}$  (нулевые элементы матрицы не

$${}_{(J+1) \times (J+1)}$$

показаны):

$$\mathbf{B}_3^{-1}{}_{(J+1) \times (J+1)} = \begin{bmatrix} 1 & & & -\lambda^3 & & & \\ & 1 & & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & -1 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} c/\Delta f - \lambda^3 g^3 \\ \Delta g^{1-3} \\ \Delta g^{2-3} \\ g^3 \\ \vdots \\ \Delta g^{J-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \\ 2848 + 2 \\ \vdots \\ lit^J - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} T_L - \lambda^3 \tilde{N}^3 \\ N^1 - N^3 \\ N^2 - N^3 \\ \tilde{N}^3 \\ \vdots \\ N^J - N^3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Как видно из выражения для  $\mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{K}$  (20), в преобразованном векторе ядра

в общем случае отсутствуют элементы, равные по модулю 1. Необходимо дальнейшее преобразование, например, вычесть из 2 строки (соответствующей первой неоднозначности), третью строку (соответствующую второй неоднозначности), умноженную на 4  $\mathbf{b}_{1-4 \times 2}^{-1}$  :

$$\mathbf{b}_{1-4 \times 2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & -4 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_{1-4 \times 2}^{-1} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta g^{1-3} - 4\Delta g^{2-3} \\ \Delta g^{2-3} \\ g^3 \\ \vdots \\ \Delta g^{J-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2848 + 2 \\ \vdots \\ lit^J - 2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{b}_{1-4 \times 2}^{-1} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} T_L - \lambda^3 \tilde{N}^3 \\ N^1 - N^3 - 4(N^2 - N^3) \\ N^2 - N^3 \\ \tilde{N}^3 \\ \vdots \\ N^J - N^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L - \lambda^3 \tilde{N}^3 \\ N^1 - 4N^2 + 3N^3 \\ N^2 - N^3 \\ \tilde{N}^3 \\ \vdots \\ N^J - N^3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Как видно из (22), в результате преобразования  $\mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}^{-1} = \mathbf{b}_{1-4 \times 2}^{-1} \mathbf{B}_3^{-1}$  вектор

исходных переменных  $\mathbf{x}_{(J+1) \times 1}$  преобразован к виду, при котором все (кроме одной  $k$ -й

$\tilde{N}^3$ ) неоднозначности преобразованы в целочисленные комбинации

неоднозначностей, а вектор ядра  $\mathbf{K}_{(J+1) \times 1}$  преобразован к виду, при котором один из его

элементов равен по модулю 1. При этом недоопределённая система уравнений (4),

точнее матрица коэффициентов этой системы  $\mathbf{H}_{J \times (J+1)}$  тоже преобразована к виду  $\mathbf{H}_{J \times (J+1)}$

в соответствии с (14).

Выбирая переменную, соответствующую положению -1 в векторе ядра  $\mathbf{K}_B$  в

качестве опорной для S-преобразования, то есть задавая  $\mathbf{S}_{(J+1) \times 1}^\perp = \mathbf{1}_{(J+1) \times 1}^{1+1} = \mathbf{1}_{(J+1) \times 1}^2$ , можно

получить искомое решение системы и аналитическое выражение для матрицы

проекции и оцениваемого вектора (11):

$$\mathbf{P}_{BS} = \mathbf{E}_{(J+1) \times (J+1)} - \mathbf{K}_B \left( \begin{bmatrix} (\mathbf{S}^\perp)^T & \mathbf{K}_B \end{bmatrix}_{1 \times (J+1)} \right)^{-1} (\mathbf{S}^\perp)^T_{1 \times (J+1)}, \quad (24)$$

$$\mathbf{x}_{BS} = \mathbf{P}_{BS} \mathbf{B}_{(J+1) \times (J+1)}^{-1} \mathbf{x}_{(J+1) \times 1}.$$

$$\mathbf{x}_{BS}^{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} T_L - \lambda^3 \tilde{N}^3 \\ 0 \\ N^2 - N^3 - \frac{\Delta g^{2-3}}{\Delta g^{1-3} - 4\Delta g^{2-3}} (N^1 - 4N^2 + 3N^3) \\ \tilde{N}^3 - \frac{g^3}{\Delta g^{1-3} - 4\Delta g^{2-3}} (N^1 - 4N^2 + 3N^3) \\ \vdots \\ N^J - N^3 - \frac{\Delta g^{J-3}}{\Delta g^{1-3} - 4\Delta g^{2-3}} (N^1 - 4N^2 + 3N^3) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{x}_{BS}^{(J+1) \times 1} = \begin{bmatrix} T_L - \lambda^3 \tilde{N}^3 \\ 0 \\ N^2 - N^3 - 2(N^1 - 4N^2 + 3N^3) \\ \tilde{N}^3 + 2850(N^1 - 4N^2 + 3N^3) \\ \vdots \\ N^J - N^3 + \Delta g^{J-3} (N^1 - 4N^2 + 3N^3) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

На рис. 3 изображены результаты оценки псевдофазовых неоднозначностей по строго целочисленным методу, полученные в результате обработки тех же реальных измерений, что и в предыдущем примере (станций IGS WTZ3 и WTZZ).



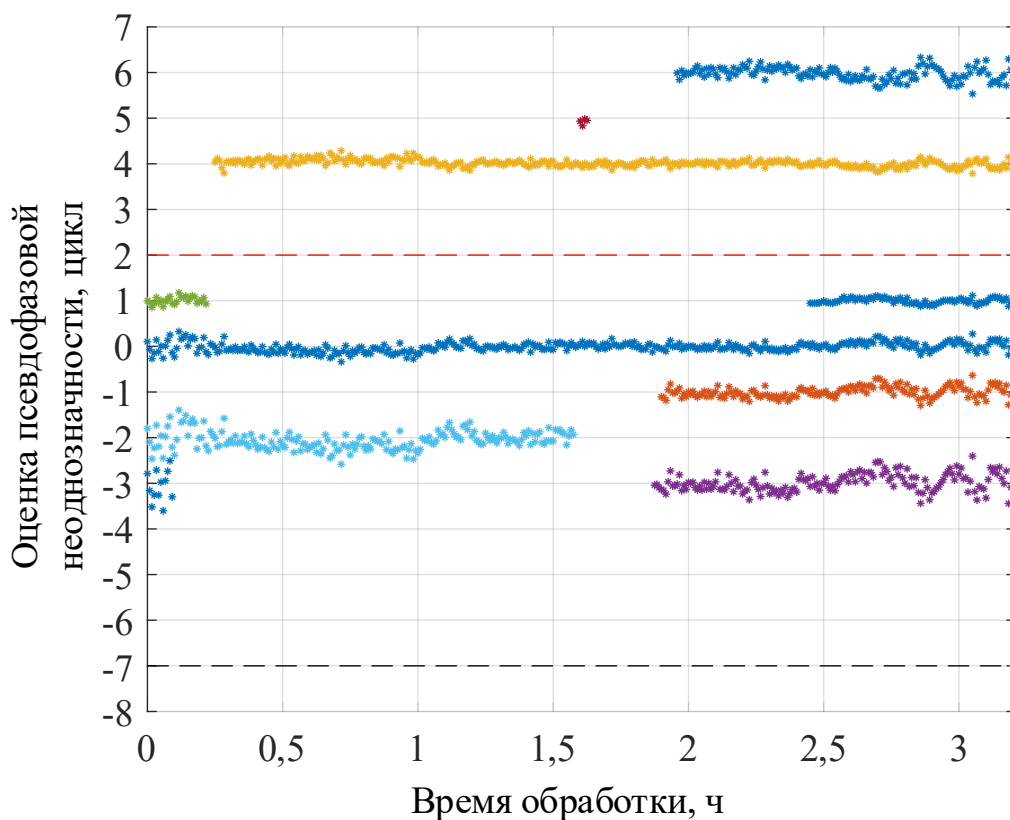


Рисунок 3 – Строго целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей в диапазоне L2 для станций IGS WTZ3, WTZZ.

Аналогично предыдущему эксперименту на каждую эпоху методом наименьших квадратов вычислялось решение преобразованной с помощью (14) системы линейных уравнений, графики зависимости оценок неоднозначностей от времени приведены на рис. 3. Как и на рис. 1, величины оценок неоднозначностей были смещены на целое число циклов таким образом, чтобы их величина соответствовала номеру спутниковой литеры. Чёрной пунктирной линией показана литера опорного спутника, а красной пунктирной линией обозначена литера 2-го ( $k$ -го) спутника, неоднозначность которого оценивалась как действительное число (на рисунке оценка не показана). Следует отметить, что строго целочисленные оценки на рис. 3 соответствуют целым числам (как и на рис. 1). Однако в отличие от рис. 1 отличие оценок от целых чисел имеет в основном случайный характер и существенно

большую величину – до 0,5 циклов. Вероятно, это связано с тем, что определённость преобразованной матрицы системы линейных уравнений при строго целочисленном методе хуже, чем при нестрого целочисленном, поэтому случайные ошибки измерений оказывают более сильное влияние на строго целочисленные оценки.

### **Заключение**

Рассмотрены два метода оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС – строго и нестрого целочисленный, основанные на поиске решения недоопределённой системы линейных уравнений с помощью теории S-преобразования.

Нестрого целочисленный метод более прост, однако для того, чтобы систематической ошибкой такой нестрого целочисленной оценки можно было пренебречь (чтобы нестрого целочисленная оценка отличалась от целого числа менее чем на 0,1 цикла) необходимо выполнение условия – исходная величина псевдофазовой неоднозначности опорного спутника не должна превышать (в худшем случае распределения литер видимых спутников) значения 21 цикл, что не всегда возможно обеспечить и самое главное – невозможно заранее проверить. При этом оцениваются  $J - 1$  неоднозначностей.

Строго целочисленный метод более сложен, однако отсутствуют какие-либо ограничения по его использованию. Он основан на применении целочисленного унимодулярного преобразования к псевдофазовым неоднозначностям перед решением системы уравнений. Величина случайной ошибки для строгого метода оказалась больше, так как определённость матрицы системы линейных уравнений у

него хуже. Так же при строгом подходе целочисленно оцениваются не все оцениваемые неоднозначности, а  $J - 2$ .

Работоспособность предложенных методов была продемонстрирована на примере обработки измерений реальных приёмников, входящих в сеть IGS, что подтверждает корректность сделанных в статье предложений и адекватность используемых математических моделей реальным (физическим) измерениям навигационных приёмников. Результат относится к обработке первых разностей измерений приёмников, однако предложенные методы можно применять и к задаче высокоточных абсолютных местоопределений с целочисленным разрешением псевдофазовой неоднозначности.

### **Список источников**

1. Поваляев А.А. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. – М.: Радиотехника, 2008. – 328 с.
2. Teunissen P.J.G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: A method for fast GPS integer ambiguity estimation // Journal of Geodesy, 1995, no. 70, pp. 65-82. DOI: [10.1007/BF00863419](https://doi.org/10.1007/BF00863419)
3. Collins P. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities // Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, San Diego, California, January 28-30, 2008, pp. 720-732.
4. Laurichesse D., Mercier F. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and its Application to PPP // Proceedings of the 20th International Technical

Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2007). Fort Worth, TX, September 2007, pp. 839-848.

5. Подкорытов А.Н. Высокоточное местоопределение в абсолютном режиме в ГНСС с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34845>

6. Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2019. Т. 6. № 1. С. 4-16. DOI: [10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16](https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16)

7. Поваляев А.А., Бабурин А.А., Подкорытов А.Н. Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2021. Т. 8. № 2. С. 51-61. DOI: [10.30894/issn2409-0239.2021.8.2.51.61](https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2021.8.2.51.61)

8. Поваляев А.А., Бабурин А.А., Подкорытов А.Н. Применение теории решетчатых упаковок в задаче определения временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2021. Т.8. №3. С. 48-62. DOI: [10.30894/issn2409-0239.2021.8.3.48.62](https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2021.8.3.48.62).

9. Скакун И.О. Сравнение шкал времени с использованием сигналов глобальных навигационных спутниковых систем // Труды МАИ. 2014. № 73. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=48570>
10. Banville S., Collins P., Lahaye F. Concepts for Undifferenced GLONASS Ambiguity Resolution // Proceedings of the 26th International Technical Meeting of the ION Satellite Division, ION GNSS- 2013, Nashville, Tennessee, September 16-20, 2013, pp. 1186-1197.
11. Wanninger L. Carrier-phase inter-frequency biases of GLONASS receivers // Journal of Geodesy, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 139-148. DOI:[10.1007/s00190-011-0502-y](https://doi.org/10.1007/s00190-011-0502-y)
12. Sleewaegen J-M., Simsky A., De Wild W., Boon F., Willems T. Digital vs analog. Demystifying GLONASS inter-frequency carrier phase biases // Inside GNSS, 2012, vol. 7 (3), pp. 57–61.
13. Kouba J. A guide to using international GNSS service (IGS) products, Geodetic Survey Division, Natural Resources Canada, September 2015.
14. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. GNSS — Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more, Springer, Wien-NewYork, 2008, 548 p.
15. Подкорытов А.Н. Математическая модель смещения фазовых центров антенн при высокоточном местоопределении в глобальных навигационных комплексах // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=28680>
16. Teunissen P.J.G. Generalized Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations. Preprint. Delft University of Technology. Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy, 1984, 47 p. DOI:[10.1007/978-3-642-70659-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-70659-2_3)

17. P.J. Jonge. A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks. Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998, 225 p.
18. Подкорытов А.Н. Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Дисс. ... канд. техн. наук. - М.: 2014, 195 с.
19. Бабурин А.А. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2022. Т. 9. № 4. С. 47–58. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2022.9.4.47.58
20. Бабурин А.А. Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2023. Т. 10. № 1. С. 63–77. DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.2.3.16

## References

1. Povalyaev A.A. *Sputnikovye radionavigatsionnye sistemy. Vremya, pokazaniya chasov, formirovanie izmerenii i opredelenie otnositel'nykh koordinat* (Navigation satellite systems. Time, clock, measurements and relative positioning), Moscow, Radiotekhnika, 2008, 328 p.

2. Teunissen P.J.G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: A method for fast GPS integer ambiguity estimation, *Journal of Geodesy*, 1995, no. 70, pp. 65-82. DOI: 10.1007/BF00863419
3. Collins P. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities, *Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation*, San Diego, California, January 28-30, 2008, pp. 720-732.
4. Laurichesse D., Mercier F. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and its Application to PPP, *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*. Fort Worth, TX, September 2007, pp. 839-848.
5. Podkorytov A.N. *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34845>
6. Povalyaev A.A., Podkorytov A.N., Nikitin C.A., Filimonova D.V. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 4-16. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16
7. Povalyaev A.A., Baburin A.A., Podkorytov A.N. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2021, vol. 8, no. 2, pp. 51-61. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2021.8.2.51.61
8. Povalyaev A.A., Baburin A.A., Podkorytov A.N. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2021, vol. 8, no. 3, pp. 48-62. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2021.8.3.48.62
9. Skakun I.O. *Trudy MAI*, 2014, no. 73. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=48570>

10. Banville S., Collins P., Lahaye F. Concepts for Undifferenced GLONASS Ambiguity Resolution, *Proceedings of the 26th International Technical Meeting of the ION Satellite Division, ION GNSS- 2013*, Nashville, Tennessee, September 16-20, 2013, pp. 1186-1197.
11. Wanninger L. Carrier-phase inter-frequency biases of GLONASS receivers, *Journal of Geodesy*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 139-148. DOI:10.1007/s00190-011-0502-y
12. Sleewaegen J-M., Simsky A., De Wild W., Boon F., Willems T. Digital vs analog. Demystifying GLONASS inter-frequency carrier phase biases, *Inside GNSS*, 2012, vol. 7 (3), pp. 57–61.
13. Kouba J. *A guide to using international GNSS service (IGS) products*, *Geodetic Survey Division, Natural Resources Canada*, September 2015.
14. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. *GNSS - Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*, Springer, Wien-NewYork, 2008, 548 p.
15. Podkorytov A.N. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28680>
16. Teunissen P.J.G. *Generalized Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations*. Preprint. Delft University of Technology. Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy, 1984, 47 p. DOI:10.1007/978-3-642-70659-2\_3
17. P.J. Jonge. *A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks*. Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998, 225 p.
18. Podkorytov A.N. *Vysokotochnoe mestoopredelenie v global'nykh navigatsionnykh sputnikovykh sistemakh v absolyutnom rezhime za schet razresheniya neodnoznachnosti*



*psevdofazovykh izmerenii* (Precise point positioning with phase ambiguity resolution in global navigation satellite systems). Doctor's thesis... Moscow, 2014, 195 p.

19. Baburin A.A. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2022, vol. 9, no. 4, pp. 47–58. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2022.9.4.47.58

20. Baburin A.A. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2023, vol. 10, no. 1, pp. 63–77. DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.2.3.16

Статья поступила в редакцию 07.04.2023

Одобрена после рецензирования 12.04.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 07.04.2023; approved after reviewing on 12.04.2023; accepted for publication on 27.06.2023