Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 456–467
Thermal processes in engineering, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 456–467

Научная статья
УДК 539.3

Аналитические решения краевых задач теплопроводности со свободной границей

Э.М. Карташов[1,2✉], С.С. Крылов[2]

[1] *МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия*
[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
✉ *professor.kartashov@qmail.com*

Аннотация. Развиты аналитические подходы к решению обобщенных краевых задач нестационарной теплопроводности со свободной границей, которые часто встречается во многих практических областях науки и техники. Несмотря на широкое развитие качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных, включая краевые задачи для уравнений параболического типа со свободной границей, аналитическая теория этого класса задач, состоящая в нахождении точных решений, еще не получила своего развития. В данной статье развиваются два самостоятельных аналитических подхода к решению краевых задач нестационарной теплопроводности со свободной границей: метод обобщенного интегрального преобразования в области с движущейся во времени границей и метод дифференциальных рядов. Несмотря на различные функциональные конструкции аналитического решения одной и той же задачи, полученные решения эквивалентны, что особенно эффектно выясняется при рассмотрении классической задачи Стефана и задач типа Стефана. Рассмотрена серия обратных задач Стефана и показана возможность сведения некорректной задачи к корректной первой краевой задаче.

Ключевые слова: краевые задачи, свободная граница, задача Стефана, аналитические решения.

Для цитирования. Карташов Э.М., Крылов С.С. Аналитические решения краевых задач теплопроводности со свободной границей // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 456–467. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=177590

Original article

Analytical solutions of thermal conductivity boundary problems with free border

E.M. Kartashov[1,2✉], S.S. Krylov[2]

[1] *MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
✉ *professor.kartashov@qmail.com*

Abstract. The author elaborated analytical approaches to solving the generalized boundary problems of non-stationary thermal conductivity with free boundary, which are often being encountered in various fields of science and engineering. Despite the widespread development of qualitative theory of differential equations in partial derivations, including boundary problems for the parabolic type equations with free boundary, analytical theory of this class of problems, consisting in the search for the exact solutions, has not yet evolved.

The presented article develops two self-sufficient analytical approaches to the boundary problems of non-stationary thermal conductivity with free boundary. These are the method of the generalized integral transform in the area with the boundary moving in time and the differential series method. Despite different functional structures of one and the same problem solution the obtained solutions are equivalent, which is particularly effectively clarified, while considering classical Stefan's problem and problems of the Stefan's type. The article considered the number of inverse Stefan's problems and proved the possibility of the incorrect problem reducing to the correct first boundary problem.

Keywords: boundary value problems, free border, Stefan's problem, analytical solutions.

For citation. Kartashov E.M., Krylov S.S. Analytical solutions of thermal conductivity boundary problems with free border. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 456–467. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=177590

Введение

Краевые задачи нестационарной теплопроводности в области $\Omega_t = \left[(x,t): 0 < x < y(t), 0 < t < t_0\right]$ со свободной границей $y(t)$, не заданной заранее и подлежащей нахождению вместе с решением дифференциального уравнения теплопроводности в указанной области, принадлежат к сравнительно новому классу задач математической физики. Эти задачи обобщают известную задачу Стефана [1] и в обобщенной постановке имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1-2m}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t),$$

$$\begin{cases} m = 0: 0 \le x < y(t),\ t > 0, \\ m = 1/2: 0 < x < y(t),\ t > 0, \\ m = -1/2: 0 < x < y(t),\ t > 0,\ y_0 = y(0) \ge 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = f(x),\ 0 \le x \le y_0, \quad (2)$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t),\ t > 0, \quad (3)$$

$$T(x,t)\big|_{x=y(t)} = \varphi_2(t),\ t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=y(t)} = \psi(t),\ t > 0. \quad (5)$$

Такие задачи возникают во многих физических явлениях как фазовые превращения среды в тепловых, диффузионных и даже термодиффузионных процессах, которые сопровождаются поглощением или выделением скрытой теплоты (задача Стефана [1]: $\varphi_2(t) = T_n$, $\psi(t) = A dy/dt$, $A = \pm\lambda_n \rho/\lambda$, λ_n – теплота перехода, λ – теплопроводность, ρ – плотность, T_n – температура фазового перехода; знак плюс или минус соответствует процессу охлаждения или нагревания среды с поверхности $x = 0$, где может быть задана либо температура, либо тепловой поток, либо закон теплообмена со средой: в (3) для определенности задана температура, что не ограничивает развиваемого подхода, учитывая, что остальные виды нагрева могут быть рассмотрены по аналогичной схеме), при ударе вязко пластического стержня о жесткую преграду (задача Баренблатта – Ишлинского) [2], в гидромеханике (задача Веригина с более сложными граничными условиями) [3], при сушке капилярно-пористых материалов [4], при замораживании грунта и твердения бетона, промерзании растворов и пористых тел, в кинетической теории роста кристаллов, в тепловой защите космических аппаратов, в некоторых вопросах теории плотин, механики почв, термики нефтяных пластов, электродинамике и в других областях науки и техники [5].

Начало качественного изучения краевых задач со свободной границей можно относится к концу 1950 – началу 1960-х гг., когда были созданы и получили интенсивное развитие новые общие методы изучения линейных, квазилинейных и нелинейных параболических уравнений и краевых задач на их основе. В эти и последующие годы качественная теория дифференциальных уравнений в частных производных достигла необычайно высокого уровня. Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности классических и обобщенных решений одномерных и многомерных задач в нестационарных и квазистационарных постановках, исследованы вопросы устойчивости и асимптотического поведения свободной границы (при $t \to 0$ и $t \to \infty$); выведены эквивалентные функциональные уравнения для неизвестной границы, имеющие существенно различные свойства, развиты методы приближенного и численного решения этих задач, описаны разрывные постановки на примере задач дифракции, изучены свойства решений задач в обобщенной постановке и многие другие вопросы качественной теории краевых задач для уравнений параболического типа со свободной границей [6, 7].

Значительно меньшее внимание было уделено развитию аналитической теории этого класса задач, то есть нахождению аналитических решений (функциональных конструкций) для температурной функции и закона перемещения границы. Можно сказать, что достигнутые успехи в этом направлении были весьма незначительны. Количество различных моделей (1) – (5), изученных аналитически, было крайне ограничено. Это обстоятельство определило принцип построения настоящей работы.

Рассматриваются два различных аналитических подхода для решения указанного класса задач: метод обобщенного интегрального преобразования (более удобный при рассмотрении задач со свободной границей типа (1) – (5)) и метод дифференциальных рядов (при рассмотрении задач Стефана и задач типа Стефана). Однако при этом важно отметить, что, несмотря на различные функциональные конструкции аналитического решения одной и той же задачи в зависимости от метода ее решения, получаемые решения являются эквивалентными (что доказывается). Это обстоятельство имеет большую практическую ценность, так как позволяет варьировать решением в зависимости от требований пользователя, например малые и большие времена, асимптотика решений и т. д.).

1. Аналитическое решение обобщенной задачи со свободной границей интегральным преобразованием обобщенного типа

В постановке задачи (1)–(5) требуется определить функции $T(x,t)$, $y(t)$ такие, что $T(x,t)\in C^2(\Omega_t)$, $\operatorname{grad}_x T(x,t)\in C^0(\Omega_t)$; функция $y(t)$ дифференцируема при $t\ge 0$, $dy/dt\ge \ge \varphi_2'(t)/\psi(t)$, $y(0)=y_0>0$. Эта задача не всегда имеет решение. Например, в случае, когда $f(x)=\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\text{const}$, $\psi(t)=0$, решения нет. В связи с этим сформулируем теорему единственности решения задачи.

Теорема. Решение задачи (1)–(5) такое, что функции $T(x,t)$, $\partial T/\partial x$, $\partial^2 T/\partial x^2$, $\partial T/\partial t$ удовлетворяют условию Липшица в $\Omega_t=\left\{x\in\left[0,y(t)\right],0\le t\le t_0\right\}$ функция $y(t)$ дифференцируема при $0\le t\le t_0$, $dy/dt\ge \ge \varphi_2'(t)/\psi(t)$ единственно, если:

1) функции $\varphi_1'(t),\varphi_2'(t),\psi(t),f''(x)$ – непрерывны;

2) $\varphi_1'(t)\le 0$; $\varphi_2'(t)\le 0$; $\psi(t)>0$; $f''(x)\le 0$; $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$ [7].

В работе [6] сформулированы более сильные требования к краевым функциям в (1)–(5), однако развиваемая в статье методологическая схема решения этой задачи и ее частных случаев не связана с выполнением этих требований.

Метод обобщенного интегрального преобразования позволяет рассмотреть в Ω_t тепловые задачи для невырожденного случая ($y(0)=y_0>0$) и вырожденного случая ($y_0=0$), а также классические задачи теплопроводности в цилиндрической области $\left[0,y_0\right],t\ge 0$ с переменными во времени теплофизическими характеристиками, тепловые задачи с фазовыми превращениями типа Стефана (прямые и обратные) и более общего вида – со свободной границей для уравнений параболического типа. Метод приводит к аналитическим решениям краевых задач нестационарной теплопроводности в виде новой функциональной конструкции. В ряде случаев эти решения могут быть преобразованы к известным ранее для нецилиндрических областей.

Остановимся вначале на классических представлениях метода интегральных преобразований Фурье для цилиндрических областей. Пусть G-конечная (или частично ограниченная) – выпуклая область изменения пространственных переменных (x,y,z) – координат точки $M(x,y,z)$; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область G, **n**-внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный в точках S), $\Omega=\left\{M\in G,t>0\right\}$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве переменных (x,y,z) с основанием G при t = 0. Пусть $T(M,t)$ – температурная функция в области Ω, которая может быть найдена в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T(M,t)+F(M,t),\ M\in G,\ t>0, \quad (6)$$

$$T(M,0)=f(M), M\in G, \quad (7)$$

$$\beta_1\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}-\beta_2 T(M,t)=-\varphi(M,t), M\in S, t>0. \quad (8)$$

Здесь $F(M,t)\in C^0(\overline{\Omega})$, $f(M)\in C^1(\overline{G})$, $\varphi(M,t)\in C^0$ $(S\times t\ge 0)$, $\overline{G}=G+S$, $\overline{\Omega}=\left\{M\in\overline{G},t\ge 0\right\}$; искомое решение

$$T(M,t)\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}),\ \operatorname{grad}_M T(M,t)\in C^0(\overline{\Omega}),$$

$$\beta_1^2+\beta_2^2\ge 0,\ \beta_i=\text{const},\ i=1,2.$$

Нетрудно построить общее решение задачи (6)−(8), если предварительно найдены собственные функции $\psi_n(M,\gamma_n)$ и собственные значения γ_n соответствующей однородной задачи

$$\Delta\psi(M,\gamma)+\gamma^2\psi=0,\ M\in G, \quad (9)$$

$$\beta_1\partial\psi(M,\gamma)/\partial n-\beta_2\psi(M,\gamma)=0,\ M\in S. \quad (10)$$

Для этого введем интегральное преобразование вида

$$L(T)=\overline{T}(\gamma_n,t)=\iiint\limits_G T(M,t)\psi_n(M,\gamma_n)dV_M \quad (11)$$

с формулой обращения

$$T(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\overline{T}(\gamma_n,t);$$
$$\|\psi_n\|^2=\iiint\limits_G \psi_n^2(M,\gamma_n)dV_M, \quad (12)$$

вытекающей из возможности разложения искомого решения $T(M,t)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $\{\psi_n(M,\gamma_n)\}$. Преобразование (11) дает для оператора $\Delta T(M,t)$ следующее изображение

$$L\{\Delta T(M,t)\}=-\gamma_n^2\overline{T}(\gamma_n,t)+$$
$$+\iint\limits_S\left[\psi_n(M,\gamma_n)\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}- \right. \quad (13)$$
$$\left.-T(M,t)\frac{\partial\psi_n(M,\gamma_n)}{\partial n}\right]_{M\in S}d\sigma,$$

где могут быть учтены граничные условия любого рода в (8) и (10). Отсюда, применяя (11)–(12) к задаче (6)–(8), находим ее аналитическое решение в виде

$$T(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\times$$
$$\times\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2t\right]\iiint\limits_G f(M)\psi_n(M,\gamma_n)dV_M+$$
$$+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^t\iint\limits_S[(-1/\beta_1)\varphi(M,\tau)\psi_n(M,\gamma_n)]_{M\in S}\times \quad (14)$$
$$\times\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2(t-\tau)\right]d\sigma d\tau+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\int\limits_0^t\iiint\limits_G F(M,\tau)\psi_n(M,\gamma_n)\times$$
$$\times\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2(t-\tau)\right]dV_M d\tau.$$

Однако проблема построения решения (14) на этом не исчерпывается. В литературе неоднократно обращалось внимание на медленную сходимость рядов (14) в окрестности граничных точек области G, вследствие чего при численной обработке этих рядов возникают трудности. Дальнейшая задача заключается в улучшении сходимости найденных рядов вплоть до границы области G. Для этого: а) строим квазистатическое решение задачи

$$\Delta\Theta(M,t)=0,\ M\in G;$$
$$\beta_1\partial\Theta/\partial n-\beta_2\Theta(M,t)=-\varphi(M,t),\ M\in S \quad (15)$$

(при $\beta_2\neq 0$; случай $\beta_2=0$ рассмотрен в [5]), применяя интегральное преобразование (11), (12)

$$\Theta(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\gamma_n^2\|\psi_n\|^2}\times$$
$$\times\iint\limits_S\left[(-1/\beta_1)\varphi(M,t)\psi_n(M,\gamma_n)\right]\Big|_{M\in S}d\sigma. \quad (16)$$

Одновременно находим для $\Theta(M,t)$ соответствующее решение в замкнутой форме (для случая с одной пространственной переменной это всегда возможно, в противном случае допустимо применить метод произведения решений); в) из правой части (14) вычтем ряд (16) и одновременно прибавим $\Theta(M,t)$ в замкнутой форме. Это дает улучшенное решение с быстрой сходимостью рядов всюду в $\overline{G}=G+S$:

$$T(M,t)=\Theta(M,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\times$$
$$\times\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2t\right]\iiint\limits_G f(M)\psi_n(M,\gamma_n)dV_M+$$
$$+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\left\{\int\limits_0^t\iint\limits_S\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2(t-\tau)\right]\times\right.$$
$$\times\left[(-1/\beta_1)\varphi(M,\tau)\psi_n(M,\gamma_n)\right]_{M\in S}d\sigma d\tau-$$
$$\left.-\frac{1}{\gamma_n^2}\iint\limits_S\left[(-1/\beta_1)\varphi(M,t)\psi_n(M,\gamma_n)\right]\Big|_{M\in S}d\sigma\right\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M,\gamma_n)}{\|\psi_n\|^2}\int\limits_0^t\iiint\limits_G\exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2(t-\tau)\right] \quad (17)$$
$$\times F(M,\tau)\psi_n(M,\gamma_n)dV_M d\tau.$$

Таким образом, применение метода интегральных преобразований при решении тепловых задач типа (6)−(8) в классических областях с неоднородностями в уравнении и краевых условиях должно приводить к двум основным результатам: первоначальному нахождению решения (14) и его улучшению до вида (17). Вторая часть подхода в практике расчета температурных полей в конечных областях еще не получила своего развития, и это обстоятельство приводит во многих случаях к существенной потере точности численных результатов при обработке рядов (14).

Пусть теперь в (1)−(5) Ω есть нецилиндрическая область $\Omega_t = \{0 < x < y(t), t > 0\}$, причем $y(0) = y_0 \geq 0$. Рассмотрим в этой области уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1-2m}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t),$$

$$\begin{cases} m = 0 : 0 \leq x < y(t), t > 0, \\ m = 1/2 : 0 < x < y(t), t > 0, \\ m = -1/2 : 0 < x < y(t), t > 0 \end{cases} \tag{18}$$

Достаточно рассмотреть первые два случая $m = 0, m = 1/2$, так как случай $m = -1/2$ сводится к $m = 1/2$ подстановкой $W(x,t) = xT(x,t)$. Для решения уравнения (18) введем обобщенное интегральное преобразование

$$\overline{T}(p,t) = \int_0^{y(t)} x^{1-m} T(x,t) J_m(x\sqrt{p})\, dx,$$

$$p = \sigma + i\omega; \operatorname{Re} p \geq \beta > 0; -\pi/4 < \arg\sqrt{p} < \pi/4 \tag{19}$$

и с его помощью получим общее соотношение, позволяющее выписать решения различных тепловых задач для уравнения (18). Применяя (19) к (18), находим:

$$\frac{d\overline{T}}{dt} + ap\overline{T} = y^{1-m}(t)\frac{dy}{dt} J_m(y(t)\sqrt{p}) T(y(t),t) +$$
$$+ a y^{1-m}(t) J_m(y(t)\sqrt{p}) \frac{\partial T(y(t),t)}{\partial x} - a\sqrt{p}\, y^{1-m}(t) \times$$
$$\times J_{m-1}(y(t)\sqrt{p}) T(y(t),t) + a p^{m/2} \delta_m T(0,t) +$$
$$+ \int_0^{y(t)} F(x,t) x^{1-m} J_m(x\sqrt{p})\, dx,$$

где $\overline{T}(p,0) = \int_0^{y_0} x^{1-m} T(x,0) J_m(x\sqrt{p})\, dx$

$$\delta_m = \begin{cases} 2^{1-m}/\Gamma(m),\ m > 0, \\ 0,\ m \leq 0. \end{cases}$$

Решение полученного уравнения записывается в виде

$$\overline{T}(p,t) = \exp(-apt)\int_0^{y_0} x^{1-m} T(x,0) J_m(x\sqrt{p})\, dx +$$
$$+ \int_0^t \int_0^{y(\tau)} \exp\left[-ap(t-\tau)\right] x^{1-m} F(x,\tau) J_m(x\sqrt{p})\, dx\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \exp\left[-ap(t-\tau)\right] T(y(\tau),\tau) y^{1-m}(\tau) \times$$
$$\times \left[\frac{dy}{d\tau} J_m(y(\tau)\sqrt{p}) - a\sqrt{p} J_{m-1}(y(\tau\sqrt{p})\right] d\tau +$$
$$+ a\int_0^t y^{1-m}(\tau) J_m(y(\tau)\sqrt{p}) \frac{\partial T(y(\tau),\tau)}{\partial x} \times$$
$$\times \exp\left[-ap(t-\tau)\right] d\tau +$$
$$+ a p^{m/2} \delta_m \int_0^t T(0,\tau) \exp\left[-ap(t-\tau)\right] d\tau. \tag{20}$$

Умножая обе части (20) на $\exp(apt)$ ($\operatorname{Re} p < 0$) и переходя к пределу при $t \to \infty$, получим интегральное уравнение, связывающее краевые функции задачи с законом движения границы:

$$a\int_0^\infty \frac{\partial T(y(t),t)}{\partial x} y^{1-m}(t) J_m(y(t)\sqrt{p}) \exp(apt)\, dt +$$
$$+ \int_0^{y_0} x^{1-m} T(x\sqrt{p})\, dx + a p^{m/2} \delta_m \int_0^\infty T(0,t) \exp(apt)\, dt =$$
$$= \int_0^\infty T(y(t),t) y^{1-m}(t) \left[a\sqrt{p} J_{m-1}(y(t)\sqrt{p}) - \right.$$
$$\left. - \frac{dy}{dt} J_m(y(t)\sqrt{p})\right] \exp(apt)\, dt -$$
$$- \int_0^\infty \int_0^{y(t)} F(x,t) x^{1-m} J_m(x\sqrt{p}) \exp(apt)\, dx\, dt. \tag{21}$$

Функцию $T(x,t)$ будем искать в виде ряда типа Фурье аналогично классическому случаю при $y(t) = l = \mathrm{const}$ (!):

$$T(x,t) = \frac{2}{y^2(t)} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n \exp\left[-(\sqrt{a}\mu_n / y(t))^2 t\right]}{J_{m-1}^2(\mu_n)} x^m J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right), \tag{22}$$

где μ_n − корни уравнения $J_m(\mu) = 0$.

Применяя (19) к (22), приходим к соотношению относительно коэффициентов $a_n(t)$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n a_n(t) \exp\left[-(\sqrt{a}\mu_n / y(t))^2 t\right]}{J_{m-1}(\mu_n)(p - \mu_n{}^2 / y^2(t))} =$$
$$= \frac{y^2(t)\overline{T}(p,t)}{2 J_m(y(t)\sqrt{p})}, \tag{23}$$

где $\overline{T}(p,t)-$ функция (20). Для определения $a_n(t)$ воспользуемся тем, что левая часть соотношения (23) регулярна всюду, за исключением простых полюсов $p_n = \mu_n^2 / y^2(t)$. Проинтегрируем обе части (23) по p последовательно по контурам $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, ...$

Контур γ_n − окружность с центром в точке p_n и радиусом $r_n = \min\left(\left|\mu_n - \mu_{n-1}\right|, \left|\mu_{n+1} - \mu_n\right|\right) / 2y^2(t)$, то есть внутри контура γ_n содержится только одна особая точка p_n. С учетом того что все слагаемые ряда, стоящего в левой части (23), кроме n-го, являются аналитическими функциями на контуре γ_n, получим

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{\mu_n a_n(t) \exp\left[-(\sqrt{a}\mu_n / y(t))^2 t\right]}{J_{m-1}(\mu_n)(p - \mu_n^2 / y^2(t))} dp =$$

$$= \int\limits_{\gamma_n} \frac{y^2(t)\overline{T}(p,t)}{2J_m(y(t)\sqrt{p})} dp.$$

Воспользуемся далее теоремой Коши. Поскольку полюса $p_n = \mu_n^2 / y^2(t)$ простые, то

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{\overline{T}(p,t)}{J_m(y(t)\sqrt{p})}, \frac{\mu_n^2}{y^2(t)}\right] =$$

$$= \frac{p^{m/2}\overline{T}(p,t)}{\left[p^{m/2} J_m(y(t)\sqrt{p})\right]'}\bigg|_{p=\mu_n^2/y^2(t)} =$$

$$= \frac{\mu_n \overline{T}(p,t)}{J_{m-1}(\mu_n)}\bigg|_{p=\mu_n^2/y^2(t)}.$$

С учетом (20) окончательно получим

$$a_n(t) = \int\limits_0^{y_0} x^{1-m} T(x,0) J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right) dx +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^{y(\tau)} \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] x^{1-m} F(x,\tau) J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right) dx d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] T(y(\tau),\tau) y^{1-m}(\tau) \times$$

$$\times\left[\frac{dy}{d\tau} J_m\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right) - a\frac{\mu_n}{y(t)} J_{m-1}\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right)\right] d\tau +$$

$$+a\int\limits_0^t \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] y^{1-m}(\tau) J_m\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right) \times$$

$$\times\frac{\partial T(y(\tau),\tau)}{\partial x} d\tau + a\left(\frac{\mu_n}{y(t)}\right)^m \times$$

$$\times\delta_m \int\limits_0^t \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] T(0,\tau)\, d\tau. \qquad (24)$$

Таким образом, формально получено аналитическое решение тепловой задачи (1)−(5) со свободной границей в виде ряда типа Фурье − Ханкеля (22) с коэффициентами (24), зависящими от всех неоднородностей в (1)−(5), и интегральным уравнением (21) для закона перемещения границы $y(t)$. Однако на этом процедура нахождения аналитического решения задачи не заканчивается. Теперь необходимо это решение улучшить по схеме (16)−(17), что приводит к следующему результату:

$$T(x,t) = T(y(t),t)\left(\frac{x}{y(t)}\right)^{2m} +$$

$$+\frac{\delta_m \Gamma(m)}{2^{1-m}} T(0,t)\left(1 - \frac{x}{y(t)}\right) + \frac{2}{y^2(t)} \times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(t)\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 t\right]}{J_{m-1}^2(\mu_n)} x^{2m} J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right), \quad (25)$$

где

$$a_n(t) = \int\limits_0^{y_0} x^{1-m} T(x,0) J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right) dx +$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{y(\tau)} \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)\tau\right]^2 x^{1-m} F(x,\tau) \times$$

$$\times J_m\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right) dx d\tau + \int\limits_0^t \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] \times$$

$$\times T(y(\tau),\tau) y^{1-m}(\tau)\left[\frac{dy}{d\tau} J_m\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{a\mu_n}{y(t)} J_{m-1}\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right)\right] d\tau +$$

$$+a\int\limits_0^t y^{1-m}(\tau) J_m\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right) \frac{\partial T(y(\tau),\tau)}{\partial x} \times$$

$$\times\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] d\tau + a\left(\frac{\mu_n}{y(t)}\right)^m \delta_m \times$$

$$\times\int\limits_0^t \exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 \tau\right] T(0,\tau)\, d\tau +$$

$$+\left(\frac{\mu_n}{y(t)}\right)^{m-2}\delta_m T(0,t)\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 t\right]-$$

$$-\frac{y^{2-m}}{\mu_n}J_{m-1}(\mu_n)T(y(t),t)\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2 t\right]. \quad (26)$$

Именно в таком виде решение подлежит численной обработке, особенно в окрестности граничных точек.

В случае выполнения условий сопряжения в постановке (1)–(5)

$$T(x,0)\Big|_{x\to 0+}=T(0,t)\Big|_{t\to 0+},$$

$$T(x,0)\Big|_{x\to y_0+0}=T(y(t),t)\Big|_{t\to 0+}$$

решение (22), (24) непрерывно вплоть до границы области определения уравнения (1). В случае $y(t)=l=\mathrm{const}$ выражения (22), (24) примут известный вид

$$T(x,t)=\frac{2}{l^2}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{l}\right)^2 t\right]x^m\frac{J_m(\mu_n x/l)}{J^2_{m-1}(\mu_n)}, \quad (27)$$

$$a_n=\int_0^l x^{1-m}T(x,0)J_m\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^l x^{1-m}F(x,\tau)J_m\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)\times$$

$$\times\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{l}\right)^2\tau\right]dxd\tau-\frac{a\mu_n}{l^m}\times$$

$$\times J_{m-1}(\mu_n)\int_0^t\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{l}\right)^2\tau\right]T(l,\tau)d\tau+$$

$$+a\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^m\delta_m\int_0^t\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{l}\right)^2\tau\right]T(0,\tau)d\tau. \quad (28)$$

В частных случаях для уравнения теплопроводности (18) при m = 0 (сплошной цилиндр) и m = 1/2 (бесконечная пластина) выражения (22), (24) примут вид:

сплошной цилиндр (осесимметричный случай)

$$T(x,t)=\frac{2}{y^2(t)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(t)\exp\left[-(\sqrt{a}\mu_n/y(t))^2 t\right]}{J_1^2(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right),$$

$$a_n(t)=\int_0^{y_0}xT(x,0)J_0\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right)dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^{y(\tau)}\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2\tau\right]xF(x,\tau)\times$$

$$\times J_0\left(\frac{\mu_n x}{y(t)}\right)dxd\tau+$$

$$+\int_0^t\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2\tau\right]T(y(\tau),\tau)\times$$

$$\times\left[\frac{dy}{d\tau}J_0\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right)+\frac{a\mu_n}{y(t)}J_1\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right)\right]d\tau+$$

$$+a\int_0^t y(\tau)J_0\left(\frac{\mu_n y(\tau)}{y(t)}\right)\frac{\partial T(y(\tau),\tau)}{\partial x}\times$$

$$\times\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{y(t)}\right)^2\tau\right]d\tau. \quad (29)$$

Здесь μ_n – корни уравнения $J_o(\mu)=0$.

Бесконечная пластина (стержень с движущейся границей)

$$T(x,t)=\frac{2}{y(t)}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\exp\left[-(\sqrt{a}n\pi/y(t))^2 t\right]\sin\frac{n\pi x}{y(t)},$$

$$a_n(t)=\int_0^{y_0}T(x,0)\sin\frac{n\pi x}{y(t)}dx+\int_0^t\int_0^{y(\tau)}\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}n\pi}{y(t)}\right)^2\tau\right]\times$$

$$\times F(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{y(t)}dxd\tau+\int_0^t\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}n\pi}{y(t)}\right)^2\tau\right]T(y(\tau),\tau)\times$$

$$\times\left[\sin\left(\frac{n\pi y(\tau)}{y(t)}\right)\frac{dy}{d\tau}-\frac{an\pi}{y(t)}\cos\left(\frac{n\pi y(\tau)}{y(t)}\right)\right]d\tau+$$

$$+\frac{an\pi}{y(t)}\int_0^t T(0,\tau)\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}n\pi}{y(t)}\right)^2\tau\right]d\tau. \quad (30)$$

Соответствующим образом записывается и интегральное уравнение (21) при m = 0 и m = 1/2. Из общих соотношений (21), (22), (24) следует, что изложенный подход может быть применен для решения задач как типа Стефана (и более общих для уравнения теплопроводности со свободной границей), так и тепловых задач в области с движущейся (известной) границей, причем в вырожденных и невырожденных областях. Последние случаи до настоящего времени еще не получили своего развития.

2. Задача Стефана. Вырожденная область $x \in [0, y(t)],\ y(0)=0$

Развитый подход на основе обобщенного интегрального преобразования оказывается весьма эффективным для ряда частных задач в (1)−(5). Одна из них − задача Стефана о перемещении фронта фазового перехода в среде $x \in [0, y(t)]$, охлаждаемой (или нагреваемой) с поверхности $x=0$ в вырожденной области (последнее в том смысле, что при $t=0$ область сосредотачивается в точке и имеет начальную температуру, например равную нулю). Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0<x<y(t),\ t>0,\ y(0)=0, \quad (31)$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_c = \text{const},\ t>0, \quad (32)$$

$$T(x,t)\big|_{x=y(t)} = T_n,\ t>0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=y(t)} = A\frac{dy}{dt},\ t>0. \quad (34)$$

В задаче Стефана требуется определить закон движения границы $y(t)$ и температурное поле в среде $T(x,t)$. Эту задачу рассматривали А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [8] на основе понятия эффективной теплоемкости, включающей в себя скрытую теплоту фазового перехода, сосредоточенно выделяющуюся на поверхности раздела фаз. Это позволило с использованием $\delta-$ функции Дирака записать единое уравнение энергии сразу во всей области, занятой теплоносящей средой, причем условие Стефана явилось следствием этого уравнения.

Решение этой задачи имеет вид: $y(t) = \beta\sqrt{t}; \beta-$ $\beta-$ корень трансцендентного уравнения

$$-2\varphi_0/(A\sqrt{\pi a}) = \beta\exp(\beta^2/4a)\Phi(\beta/2\sqrt{a}), \quad (35)$$

$$T(x,t) = \varphi_0 + (A\beta\sqrt{\pi a}/2)\times \times\exp(\beta^2/4a)\Phi(x/2\sqrt{at}), \quad (36)$$

где $\varphi_0 = T_c - T_{n,} \Phi(z) = 2/\sqrt{\pi}\int\limits_0^z \exp(-y^2)dy -$ функция Лапласа.

Используем далее для решения задачи (31)−(34) развитый выше подход. Закон движения границы найдем из интегрального уравнения (21), которое после подстановки $s=-p$ примет вид

$$\int\limits_0^\infty \exp(-apt)ch(y(t)\sqrt{p})dt = \frac{1}{ap} - \frac{\varphi_0}{aA}.$$

После подстановки $z=\sqrt{p}$ и вычисления известного интеграла

$$2\int\limits_0^\infty z\exp(-az^2)ch(\beta\sqrt{z})dz = = \frac{\beta}{2a}\sqrt{\pi/a}\exp(\beta^2/4a)\Phi(\beta/2\sqrt{a}) + 1/a$$

приходим к выражению (35). Коэффициенты $a_n(t)$ после вычисления в (30) примут вид

$$a_n = \frac{2a\beta A}{n\pi}\int\limits^{n\pi\beta}\exp(az^2)\sin\beta z dz + +\frac{2\varphi_0}{n\pi}\left[\exp\left(\frac{an^2\pi^2}{\beta^2}\right) - 1\right],\ n\ge 1.$$

Таким образом, $T(x,t)$ может быть записана в виде, отличном от (36), а именно:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^\infty a_n \exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{\beta^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{\beta\sqrt{t}} = = \sum_{n=1}^\infty a_n' \sin\frac{n\pi x}{\beta\sqrt{t}}. \quad (37)$$

Покажем теперь, что (36) и (37) совпадают. Выпишем необходимые в дальнейшем соотношения:

$$\int\limits_0^y \exp(-x^2)x^{2k}dx = = \frac{(2k)!}{k!}y^{2k}\exp(-y^2)\sum_{m=0}^\infty \frac{2^{2m}(k+m)!\,y^{2m+1}}{(2(k+m)+1)!}, \quad (38)$$

$$\int\limits_0^y \exp(x^2)x^{2k+1}dx = = \frac{(-1)^{k+1}k!}{2}\exp(y^2)\sum_{m=k+1}^\infty \frac{(-1)^m y^{2m}}{m!}, \quad (39)$$

полученные путем последовательного интегрирования по частям. Разлагая $\sin\beta z$ в ряд и применяя затем (39), найдем

$$a_n' = \frac{A\beta^2}{n\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k(an^2\pi^2/\beta^2)^k}{k!}\sum_{m=k}^\infty \frac{\beta^{2m}m!}{a^m(2m+1)!}.$$

С другой стороны, представим $T(x/2\sqrt{at})$ в (36) в виде ряда

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{\beta\sqrt{t}},\ 0<x<\beta\sqrt{t},$$

где коэффициенты b_n находятся путем разложения функции в ряд Фурье на отрезке $0<x<\beta\sqrt{t}$.

Отсюда находим

$$b_n = \frac{2}{\beta\sqrt{t}}\int_0^{\beta\sqrt{t}} T(x/2\sqrt{at})\sin\frac{n\pi x}{\beta\sqrt{t}}dx =$$

$$= \frac{A\beta^2}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(an^2\pi^2/\beta^2)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\beta^{2m}m!}{a^m(2m+1)!}.$$

Видим, что $a_n^{'} = b_n$ и выражение (36) может быть представлено в эквивалентной аналитической форме (37). Отсюда также следует, что выражение (37) удовлетворяет всем условиям задачи (31), (34), что не является очевидным при непосредственной проверке.

Покажем теперь аналитическую эквивалентность решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ 0 \le r < \beta\sqrt{t},\ t > 0, \quad (40)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=\beta\sqrt{t}} = q\sqrt{t},\ t > 0;$$
$$\left|T(r,t)\right| < \infty,\ r \ge 0,\ t \ge 0, \quad (41)$$

которое можно получить, используя (29). Эта задача рассмотрена в [5], ее решение имеет вид:

$$T(r,t) = \frac{aq}{2\beta}t\left(\frac{r^2}{at} + 4\right). \quad (42)$$

Из (42) получаем граничное условие

$$T(y(t),t) = \frac{q(\beta^2 + 4a)}{2\beta}t. \quad (43)$$

Такое же выражение для $T(y(t),t)$ может быть получено из интегрального уравнения (21), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Из (29) найдем

$$a_k(t) = \frac{\beta q(\beta^2 + 8a)}{4}t^2\int_0^1 zJ_0(\mu_k\sqrt{z})\times$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_k}{\beta}\right)^2 z\right]dz + \frac{aq(\beta^2+4a)}{2\beta}t^2\times$$
$$\times\int_0^1 z^{3/2}J_1(\mu_k\sqrt{z})\exp\left[\left(\frac{\sqrt{a}\mu_k}{\beta}\right)^2 z\right]dz.$$

Решение $T(r,t)$ запишется в виде

$$T(r,t) = \frac{2}{\beta^2 t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(t)\exp(-a\mu_k^2/\beta^2)}{J_1^2(\mu_k)}\times$$
$$\times J_0\left(\frac{\mu_k r}{\beta\sqrt{t}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k^{'}(t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{\beta\sqrt{t}}\right). \quad (44)$$

Разлагая в ряд по степеням z функции $J_0(\mu_k\sqrt{z})$ и $\exp(a\mu_k^2 z/\beta^2)$ и умножая ряды по формуле $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{n=0}^{\infty}b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, получим

$$a_k^{'}(t) = \frac{aq\exp(-a\mu_k^2/\beta^2)}{\beta J_1^{\,2}(\mu_k)}t\left\{\left(\frac{\beta^2}{4a}+2\right)+\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\beta^2}{a2^{2n+1}(n!)^2(n+2)} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2^{2n-1}(n!)^2} + \right.$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{m-1}(m^2-n+m-1)}{2^{2m-1}m!(m+1)!(n-m+!)!}\times$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{a}{\beta^2}\right)^{n-m} + \frac{2}{n!}\left(\frac{a}{\beta^2}\right)^n\right]\mu_k^{2n}\right\}.$$

С другой стороны, представим решение (42) в виде ряда

$$T(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{\beta\sqrt{t}}\right), 0 \le r < \beta\sqrt{t},$$

где коэффициенты $b_k(t)$ находятся по правилу разложения функции в ряд по функциям Бесселя на отрезке $0 \le r < \beta\sqrt{t}$. Отсюда находим:

$$b_k(t) = \frac{aqt}{2\beta}\frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1\left(\frac{\beta^2 z^2}{a}+4\right)zJ_0(\mu_k z)dz =$$
$$= \frac{aqt}{\beta J_1^2(\mu_k)}\exp(-a\mu_k^2/\beta^2)\left\{\left(\frac{\beta^2}{4a}+2\right)+\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\beta^2}{a2^{2n+1}(n!)^2(n+2)} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2^{2n-1}(n!)^2} + \right.$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{m-1}(m^2-n+m-1)}{2^{2m-1}m!(m+1)!(n-m+1)!}\left(\frac{a}{\beta^2}\right)^{n-m} +$$
$$\left.\left.+\frac{2}{n!}\left(\frac{a}{\beta^2}\right)^n\right]\mu_k^{2n}\right\},$$

то есть $a_k^{'}(t) = b_k(t)$ и выражения (42) и (44) аналитически эквивалентны. Таким образом, на частных примерах (как и в общем случае) показана эффективность развитого аналитического подхода при рассмотрении достаточно сложных случаев нестационарного теплопереноса в областях с движущимися во времени границами. Специфические особенности метода в случае задания граничных условий, отличных от рассмотренных, заключаются лишь в изменении ядра интегрального преобразования (19) [3]. Все остальные рассуждения сохраняются.

3. Решение задачи Стефана прямой и обратной методом дифференциальных рядов

Обобщенное преобразование (19) приводит к аналитическому решению задачи (1)−(5) со свободной границей в виде ряда (25) с коэффициентами в интегральной форме (26). В частных случаях (задача Стефана и задачи типа Стефана) указанные соотношения могут быть записаны либо в замкнутой форме, либо в эквивалентной в виде ряда Фурье − Ханкеля. Однако изложение аналитических подходов на этом не заканчивается. Рассмотрим еще один подход, весьма эффективный для данного класса задач, особенно задач Стефана прямых и обратных. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+F(x,t),\ 0<x<y(t),\ t>0,$$

$$(y(0)=0), \tag{45}$$

$$T(x,t)\Big|_{x=0}=\varphi(t),\ t>0, \tag{46}$$

$$T(x,t)\Big|_{x=y(t)}=\Psi(t),\ t>0, \tag{47}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)}=A\frac{dy}{dt},\ t>0. \tag{48}$$

Прежде всего получим общее соотношение для записи решений уравнения (45). Для этого в (45) заменим x на ξ, затем умножим на $(\xi-x)$ и проинтегрируем по ξ в пределах от x до $y(t)$. Последовательно проинтегрируем по частям m раз и затем, устремляя $m\to\infty$, получим следующее выражение для $T(x,t)$:

$$T(x,t)=T(y(t),t)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left\{\left[y(t)-x\right]^{2n}\frac{d}{dt}T(y(t),t)\right\}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\left[y(t)-x\right]^{2n+1}\frac{\partial T(y(t),t)}{\partial x}\right\}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_x^{y(t)}(\xi-x)^{2n+1}F(\xi,t)d\xi. \tag{49}$$

Соотношение (49) является обобщенным рядом Коши для уравнения теплопроводности, когда условия Коши заданы вдоль некоторой аналитической дуги $x=y(t)$. Удовлетворяя граничному условию при $x=0$, получим уравнение для нахождения закона движения неизвестной границы

$$\varphi(t)=\Psi(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left\{\left[y(t)^{2n}\frac{d}{dt}\Psi(t)\right]\right\}-$$

$$-Aa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}\left\{\left[y(t)\right]^{2n}\right\}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_x^{y(t)}\xi^{2n+1}F(\xi,t)d\xi. \tag{50}$$

Если в (45)–(48) $T(x,t)\big|_{x=0}=T_c=\mathrm{const}$, $\Psi(t)=T_n=\mathrm{const}$, $F(x,t)=0$, то из (49) получаем

$$T(x,t)=T_n-$$

$$-A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\left[y(t)-x\right]^{2n+1}\frac{dt}{dt}\right\}. \tag{51}$$

Обозначим $\varphi_0=T_c-T_n$. На основании (50) выпишем уравнение для определения границы области

$$-\left(\frac{\varphi_0}{A}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n+1)!}\frac{d^n}{dt^n}\times$$

$$\times\left\{y(t)^{2n+1}\frac{dy}{dt}\right\}=\mathrm{const}. \tag{52}$$

Последнее соотношение выполняется, если $\left[y(t)\right]^{2n+1}\dfrac{dy}{dt}=\gamma_n t^n$, $y(0)=0$, отсюда $\left[y^2(t)\right]^{n+1}=$ $=2\gamma_n t^{n+1}$. Полагая $2\gamma_n=\beta^{2(n+1)}$, находим закон движения границы в виде $y(t)=\beta\sqrt{t}$, где неизвестный коэффициент β подлежит нахождению. Для этого подставим $y(t)=\beta\sqrt{t}$ в (52) и произведем суммирование, используя соотношения

$$\sqrt{\pi}a\exp\left(\frac{\beta^2}{4a}\right)\Phi\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{2m+1}m!}{a^m(2m+1)!},$$

$$(2m+1)!!=\frac{(2m+1)!}{2^m m!}.$$

В результате получим трансцендентное уравнение

$$-2\varphi_0/(A\sqrt{\pi}a)=\beta\exp\left(\frac{\beta^2}{4a}\right)\Phi\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}}\right), \tag{53}$$

совпадающее с приведенным выше (35). Искомое решение $T(x,t)$, имеющее вид автомодельного, можно получить из (51) при $y(t)=\beta\sqrt{t}$

$$T\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)=T_n-\frac{A\beta}{2}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\left[\beta\sqrt{t}-x\right]^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=$$

$$=T_n-\frac{A\beta}{2}\sqrt{\pi a}\exp\left(\frac{\beta^2}{4a}\right)\left[\Phi\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}}\right)-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]=$$

$$= \varphi_0 + \frac{A\beta}{2}\sqrt{\pi a}\exp\left(\frac{\beta^2}{4a}\right)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (54)$$

Это решение приведено в (36). Рассмотрим далее вопрос о нахождении коэффициента β в законе $\beta\sqrt{t}$. Уравнение (53) перепишем в более удобной форме для проведения численного счета

$$-\frac{2}{B\sqrt{\pi}} = \beta_0 \exp\left(\frac{\beta_0^2}{4}\right)\Phi\left(\frac{\beta_0}{2}\right), \quad (55)$$

где введены обозначения $\beta_0 = \beta/\sqrt{a}$, $B = Aa/(T_c - T_n)$. В (55) введем функцию $R(\beta_0) = \beta_0 \exp(\beta_0{}^2/4)\Phi(\beta_0/2)$. Она является четной и принимает неотрицательные значения. Ее график приведен на рис. 1 при $\beta_0 > 0$. В силу монотонного возрастания $R(\beta_0)$ при $\beta_0 > 0$ решение уравнения (55) на этом интервале существует и единственно, так как прямая $y = -\dfrac{2}{B\sqrt{\pi}}$ пересекает график функции $R(\beta_0)$ в единственной точке. Стоит отметить, что такое решение будет существовать только при отрицательных B.

В таблице 1 приведены некоторые корни уравнения (55) при различных значениях B, подсчитанные с точностью до восьмого знака после запятой.

Таблица 1. Корни уравнения (55).

B	β_0	B	β_0
–1	0,8159238858	–6	0,3416036574
–2	0,5857835710	–7	0,3164876847
–3	0,4806983552	–8	0,2962042824
–4	0,4173380583	–9	0,2793792658
–5	0,3738364623	–10	0,2651298320

Рассмотрим еще одно интересное приложение общего соотношения (49) при рассмотрении обратной задачи Стефана. В обратной задаче Стефана по известному закону движения границы поверхности фазового перехода и известным краевым функциям в граничных условиях на движущейся границе отыскивается температура в среде, ее значение на неподвижной границе и начальное распределение (последнее при условии $y(0) = y_0 > 0$). С обратными задачами Стефана для уравнения теплопроводности приходится сталкиваться во многих вопросах науки и техники. В нашем случае рассмотрим один частный (но весьма характерный) пример обратной задачи, возникший при рассмотрении образования жидкой пленки при стыковой электроконтактной сварке и непрерывным оплавлением, что характерно и для многих других процессов. Итак, рассматривается однофазная обратная задача Стефана для жидкой фазы. Предполагаем теплофизические свойства жидкой фазы и толщину жидкой пленки $y(t)$, где $y(t) = t^m, 1 < m < 2$, известными и будем в дальнейшем рассматривать наиболее интересные предельные случаи $m = 1, m = 2$. На границе раздела фаз температура постоянна и равна температуре плавления: $u(y(t),t) = \text{const} = C$, также выполняется условие Стефана $u_x(y(t),t) = -y'(t)$, $t > 0$ (здесь и в дальнейшем все единицы измерения выбраны так, чтобы теплофизические константы были равны единице, что не отражается на сущности решения). Учитывая изложенное, сформулируем задачу в виде

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < y(t), \ t > 0, \ y(0) = 0, \quad (56)$$

$$u(y(t),t) = C = \text{const}, \ t > 0, \quad (57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(y(t),t) = -y'(t), \ t > 0. \quad (58)$$

Начальное условие можно принять произвольным, например равным C, в силу того что $y(0) = 0$. Используя (49) при $C = 0$, что всегда можно принять, не ограничивая общность, решение задачи (56)–(58) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[x - y(t)\right]^{2n}. \quad (59)$$

Тогда при m = 1 имеем

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}(t-x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-x)^n}{n!} = \exp(t-x) - 1. \quad (60)$$

Рассмотрим случай m = 2:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}(x-t^2)^{2n}. \quad (61)$$

Поскольку (61) представляет ряд из производных, то пользоваться им крайне сложно. Представим (61) в виде степенного ряда, для чего положим $\sqrt{x} - t = \alpha, \sqrt{x} + t = \beta$. Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_n^k \times \frac{(2n)!}{(2n-k)!}\frac{(2n)!}{(n+k)!}\alpha^{2n-k}\beta^{n+k}. \quad (62)$$

С другой стороны, при $x = 0$ имеем

$$u(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}t^{4n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{(2n)!(3n)!}t^{3n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(4n+1)}{\Gamma(2n+1)\Gamma(3n+1)}t^{3n},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Опираясь на ее свойства, находим

$$u(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(4n)4n}{\Gamma(2n)2n\Gamma(3n)3n}t^{3n}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)n!}\left(\frac{4}{3}\right)t^{3n}= \quad (63)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4},n\right)\left(\frac{1}{4},n\right)}{\left(\frac{2}{3},n\right)\left(\frac{1}{3},n\right)}\frac{\left(\frac{4}{3}t\right)^{3n}}{n!}={}_2F_2\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4};\ \frac{2}{3},\frac{1}{3};\ \left(\frac{4}{3}t\right)^3\right]-1,$$

где ${}_2F_2(a,b;\,c,d;\,x)$ – обобщенный гипергеометрический ряд,

$$(\alpha,n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Обратная задача Стефана является, вообще говоря, некорректной в смысле Адамара, поскольку малое изменение граничных условий ведет к произвольному изменению решения [11]. Однако в данном примере мы пришли к корректной первой краевой задаче

$$u_t-u_{xx}=0,\ 0<x<y(t),\ t>0,\ y(0)=0,$$

$$u(0,t)={}_2F_2\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4};\frac{2}{3},\frac{1}{3};(\frac{4}{3}t)^3\right]-1,\ t>0,\ u(y(t),t)=0.$$

Ее решение может быть найдено с помощью приведенных выше соотношений. Следовательно, для m = 2 решение может быть найдено или непосредственно по формуле (62), или сведением к корректной задаче.

Заключение

Развиты аналитические подходы для решения краевых задач нестационарной теплопроводности обобщенного типа со свободной границей: метод обобщенного интегрального преобразования и метод дифференциальных рядов. Несмотря на различие функциональных конструкций аналитических решений задачи Стефана и задач типа Стефана, методы приводят к эквивалентным решениям. Рассмотрена серия обратных задач Стефана. Показано сведение указанных задач к корректной первой краевой задаче.

Список источников

1. **Рубинштейн Л.И.** Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 457 с.
2. **Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю.** Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 3. С. 497–502.
3. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. **Рудобашта С.П., Карташов Э.М.** Диффузия в химико-технологических процессах. Москва: Колосс, 2010. 480 с.
5. **Карташов Э.М.** Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (Обзор) // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
6. **Данилюк И.И.** О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1983. Т. 40. Вып. 5. С. 133–185.
7. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
8. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с.
9. **Чекмарева О.М.** По поводу задачи Стефана в цилиндрической и сферической системах координат // Журнал технической физики. 1971. Т. 61. № 5. С. 1071–1072.
10. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1962. 1100 с.
11. **Алифанов О.М.** Обратные задачи теплообмена. Москва: Машиностроение, 1988. 297 с.

References

1. **Rubinshtein L.I.** Stefan's problem [Problema Stefana]. Riga: Zvaizgne, 1967, 457 p. (In Russ.)
2. **Barenblatt G.I., Ishlinsky A.Yu.** On the impact of a visco-plastic rod on a rigid barrier [Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel]. *Applied mathematics and mechanics,* 1962, vol. 26, no. 3, pp. 497–502. (In Russ.)
3. **Kartashov E.M.** Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 540 p. (In Russ.)
4. **Rudobashta S.P., Kartashov E.M.** Diffuziya v khimiko-tekhnologicheskikh protsessakh [Diffusion in chemical technological processes]. Moscow: Koloss, 2010, 480 p. (In Russ.)
5. **Kartashov E.M.** Analiticheskie metody resheniya kraevykh zadach nestatsionarnoi teploprovodnosti v oblastyakh s dvizhushchimisya granitsami (Obzor) [Analytical methods for solving boundary value problems of non-stationary heat conduction in areas with moving boundaries (Review)]. *Journal engineering physics and thermophysics*. 2001, vol. 74, no. 2, pp. 171–195. (In Russ.)
6. **Danilyuk I.I.** O zadache Stefana [On the Stefan problem]. *Advances in Mathematical Sciences*, 1983, vol. 40, iss. 5. pp. 133–185. (In Russ.)
7. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.** Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow: Nauka, 1967, 736 p. (In Russ.)
8. **Tikhonov A.N., Samarsky A.A.** Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1966, 724 p. (In Russ.)
9. **Chekmareva O.M.** Po povodu zadachi Stefana v tsilindricheskoi i sfericheskoi sistemakh koordinat [Regarding the Stefan problem in cylindrical and spherical coordinate systems]. *Journal of Technical Physics,* 1971, vol. 61, no. 5, pp. 1071–1072. (In Russ.)
10. **Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.** Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 1100 p. (In Russ.)
11. **Alifanov O.M.** Obratnye zadachi teploobmena [Inverse problems of heat transfer]. Moscow: Mashinostroenie, 1988, 297 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 29.09.2023; одобрена после рецензирования 10.10.2023; принята к публикации 18.10.2023

The article was submitted on 29.09.2023; approved after reviewing on 10.10.2023; accepted for publication on 18.10.2023