

Научная статья  
УДК 629.7.036.5  
DOI: 10.34759/vst-2023-1-54-63

## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР ДВУХИМПУЛЬСНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Владимир Митрофанович Балык<sup>1✉</sup>, Игорь Денисович Бородин<sup>2</sup>, Дмитрий Дмитриевич Гайдаров<sup>3</sup>,  
Наталья Всеволодовна Майкова<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия  
<sup>1</sup> balikv@gmail.com

**Аннотация.** Сформулирована задача выбора оптимальных проектных параметров и режимов движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Выбор режима движения БПЛА предполагает определение оптимального сочетания участков с работающим и неработающим двигателем. Качество БПЛА оценивается векторным критерием оптимальности, состоящим из таких критериев, как дальность полета, время полета, стартовая масса аппарата, высота полета, удельный расход топлива. Таким образом, здесь возникает многокритериальная задача, которая разрешается на основе принципа рациональной организации сложной системы. Приводится рациональное проектное решение БПЛА, полученное на основе аддитивного принципа оптимальности с переменными весовыми коэффициентами.

**Ключевые слова:** аддитивный принцип оптимальности, режимы движения БПЛА, проектные параметры, векторный критерий, весовые коэффициенты

**Для цитирования:** Балык В.М., Бородин И.Д., Гайдаров Д.Д., Майкова Н.В. Многокритериальный выбор двухимпульсного режима движения беспилотного летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 1. С. 54–63. DOI: 10.34759/vst-2023-1-54-63

Original article

## MULTI-CRITERIA SELECTION OF THE UNMANNED AERIAL VEHICLE TWO-IMPULSE MODE OF MOTION

Vladimir M. Balyk<sup>1✉</sup>, Igor' D. Borodin<sup>2</sup>, Dmitrii D. Gaidarov<sup>3</sup>, Natal'ya V. Maikova<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
<sup>1</sup> balikv@gmail.com

**Abstract.** The article deals with the problem of design an aircraft guided missile (AGM) with a solid propellant rocket engine (SPRE), and performs comparative analysis of the of the AGM motion along the trajectory in the multiple activation mode. The authors demonstrate that the engine may be regulated to a certain degree by the thrust cutoff at certain time instants. This is being implemented with the specially designed dampers. To realize the

passive flight segment, the passive flight segment parameters duration, selected from the flight range maximizing condition, is being introduced to the design parameters vector. Particularly, alongside with the AGM flight range increase, the passive segments inclusion into the flight trajectory may lead to the AGM flight altitude, its operation time and other optimality criteria losses.

In essence, the AGM trajectory consisting of both active (with running engine) and passive (with dead engine) segments is being determined by the AGM motion mode. This mode, alongside with the other design parameters and the SPRE parameters, constitutes the design solution vector, which is being selected by the vector criterion.

The final design solution selection is being performed employing convolution with variable weight coefficients. Substantiation of this application of convolution is being derived from the principle of the complex technical system rational organizing. The gain from the passive segments application herewith is 10% in range on average. The additive principle with optimal weighting coefficients allows selecting design solutions without involving any information hypotheses. In case of the preferences presence of the project designer, correction of the obtained solution is being performed in accordance with this system of preferences.

**Keywords:** additive optimality principle, rational organization principles, motion modes, design parameters UAV, vector criterion, weight coefficients

**For citation:** Balyk V.M., Borodin I.D., Gaidarov D.D., Maikova N.V. Multi-Criteria Selection of the Unmanned Aerial Vehicle Two-Impulse Mode of Motion. *Aerospace MAI Journal*, 2023, vol. 30, no. 1, pp. 54–63. DOI: 10.34759/vst-2023-1-54-63

## Введение

Тактическое ракетное вооружение, наряду с совершенствованием систем управления и наведения, т.е. повышением эффективности использования вооружения в составе боевых комплектов, развивается по пути совершенствования двигательных установок на базе ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ). Ракетные двигатели твердого топлива, как и жидкостные ракетные двигатели, являются наиболее применяемыми на объектах ракетно-космической техники (РКТ) различного назначения. Это подтверждается широким использованием РДТТ в качестве маршевых двигательных установок (ДУ) на объектах РКТ от ракет-носителей (РН) различных классов до оперативно-тактических ракет, в частности, БПЛА. РДТТ применяются для торможения отработавших ступеней РН, для дополнительного разгона космических аппаратов при переходах с промежуточных орбит на требуемые конечные орбиты; широко используются в качестве ускорителей с целью повышения энергетических возможностей РН и расширения круга решаемых или целевых задач.

В то же время, в отличие от жидкостных ракетных двигателей, регулировка тяги РДТТ технически трудно реализуема, и изменение тяги во времени определяется начальными конфигурациями заряда РДТТ и характеристиками твердых ракетных топлив. В работе показывается, что в известной мере регулировать РДТТ можно за счет отсечки тяги в определенные моменты времени с помощью специально сконструированных заслонок [1–4]. Для

реализации пассивного участка полета в состав вектора проектных параметров вводится продолжительность пассивного участка  $\Delta t$ , которая выбирается из условия максимизации дальности полета [5–8]. В частности, включение в траекторию полета пассивных участков полета, наряду с увеличением дальности полета БПЛА, может привести к потерям по высоте полета, времени работы БПЛА и другим критериям оптимальности.

По существу, траектория БПЛА, состоящая из комбинации активных (с работающим двигателем) и пассивных участков (с неработающим двигателем) траектории, определяется режимом движения БПЛА, который наряду с проектными параметрами БПЛА и параметрами РДТТ составляет вектор проектного решения, выбираемый по векторному критерию [9, 10].

В работе многокритериальная проблема решается с помощью так называемого принципа рациональной организации системы [11]. Данный принцип здесь применяется с тем отличием, что вместо вектора критериальных ограничений используется вектор весовых коэффициентов.

## 1. Постановка задачи

Вектор проектного решения БПЛА состоит из проектных параметров собственно аппарата и РДТТ —  $a$  и режима движения —  $z(t)$ . В качестве критерия оптимальности принята дальность полета  $L$  БПЛА:

$$J^{opt}(a^*, z^*(t), x) = \max_{a \in A, z(t) \in Z} L(a, z(t), x).$$

Здесь

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in A \subset R^n;$$

$$z(t) = (z_1(t), \dots, z_k(t)) \in Z \subset R^k;$$

$a$  и  $z(t)$  — векторы оптимизируемых параметров и режимов движения, являющиеся элементами действительных векторных пространств  $R^n$  и  $R^k$  соответственно;  $A$  и  $Z$  — замкнутые области в действительных векторных пространствах  $R^n$  и  $R^k$ ;

$$\frac{dx}{dt} = f(a, z, x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_r) \in X \subset R^r$  — вектор фазовых координат, являющийся элементом действительного векторного пространства  $R^r$ ;  $X$  — замкнутая область в действительном векторном пространстве.

Если скорость БПЛА на пассивном участке траектории меньше некоторой заданной величины  $V^{\text{зад}}$ , то необходимо включить двигатель:

$$V(a, z, x) \leq V^{\text{зад}}. \quad (2)$$

Условие (2) относится к функциональным ограничениям. Математическая модель БПЛА представлена операторным уравнением:

$$F = R(D)$$

с областью определения на множестве  $D = A \times Z \times X$  и областью значений на множестве  $F$ , где ставится в соответствие множеству каждому элементу множества  $d \in D$  ( $d$  — вектор проектного решения выходных характеристик БПЛА). В качестве выходных характеристик здесь принимается векторный критерий:

$$F = (J_1, J_2, \dots, J_l),$$

где  $J_1, J_2, \dots, J_l$  — частные критерии оптимальности. Раскрытие многокритериальной неопределенности осуществляется на основе аддитивного принципа оптимальности с переменными весовыми коэффициентами:

$$J = \min_{d \in D} (\tilde{\alpha}_1 J_1(d) + \tilde{\alpha}_2 J_2(d) + \dots + \tilde{\alpha}_l J_l(d)).$$

Здесь  $\tilde{\alpha}_i \in W$  —  $i$ -й весовой коэффициент,  $i = \overline{1, l}$ ; область  $W$  определяется условиями:

$$\tilde{\alpha}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, l}; \quad \sum_{i=1}^l \tilde{\alpha}_i = 1.$$

Ставится следующая задача: найти  $J = \min_{d \in D} \sum_{i=1}^l \tilde{\alpha}_i J_i(d)$ , где  $d = (a, \tilde{\alpha})$ ,  $a$  — вектор проектных параметров;  $\tilde{\alpha}$  — вектор весовых коэффициентов,  $d \in D = A \times Z \times X \times W$ , при выполнении (1) и (2).

В качестве проектных параметров БПЛА и оптимизируемых совместно с ними параметров РДТТ рассматриваются:  $l_{\text{кр}}$  — размах крыла;  $\dot{m}$  — расход топлива;  $P_k$  — давление в камере сгорания;  $\Delta t$  — продолжительность планирующего полета. Соответственно вектор проектных параметров  $a$  имеет вид:  $a = (l_{\text{кр}}, \dot{m}, P_k, \Delta t)$ .

## 2. Математическая модель двухрежимного БПЛА

Система уравнений движения центра масс БПЛА, используемая при решении задачи совместной оптимизации параметров БПЛА и РДТТ, имеет следующий вид:

$$m \frac{dV}{dt} = P \cdot \cos \alpha - c_x \frac{\rho V^2}{2} \cdot S - mg_0 \sin \theta,$$

$$m \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt} = P \cdot \sin \alpha + c_y \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S - mg_0 \cos \theta,$$

$$-m \cdot V \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\psi}{dt} = -P \cdot \sin \beta + c_z \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S;$$

кинематические соотношения:

$$\frac{dx}{dt} = V \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi,$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi;$$

уравнение изменения массы:

$$\frac{dm}{dt} = -m_c.$$

Здесь  $m$  — текущее значение массы БПЛА;  $V$  — относительная скорость БПЛА;  $P$  — тяга РДТТ;  $\alpha$  — угол атаки;  $\beta$  — угол скольжения;  $c_x, c_y, c_z$  — коэффициенты лобового сопротивления подъемной и боковой сил;  $S$  — площадь миделя;  $\rho$  — плотность атмосферы на высоте  $y$ ;  $g_0$  — ускорение силы тяжести у поверхности Земли;  $\psi$  — угол курса БПЛА;  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к местному горизонту;  $m_c$  — секундный расход топлива.

В процессе решения задачи необходимо построить программу изменения тяговых  $P(t)$  и расходных  $m_c(t)$  характеристик РДТТ во времени.

Программы изменения тяговых и расходных характеристик разделены на три временных участка:

- участок от момента старта БПЛА до первого, промежуточного, выключения РДТТ —  $[t_0, t_1]$ ;
- участок от момента включения РДТТ до конечного времени работы двигателя —  $[t_2, t_k]$ ;
- участок с неработающим РДТТ —  $[t_1, t_2]$ .

Алгоритм формирования программ изменения тяги и, соответственно, расходных характеристик РДТТ приведен в [12, с. 40].

Суммарное время работы двигателя  $[t_0, t_1] \cup [t_2, t_k]$  определяется в зависимости от рабочего запаса топлива на БПЛА:  $m_T = m_0(1 - \mu_k)$ . Значение тяги на участках  $[t_0, t_1] \cup [t_2, t_k]$  и удельный импульс тяги в пустоте  $I_{уд}^n$ , а также массовый секундный расход продуктов сгорания рассчитываются по соотношениям [13, с. 114]:

$$P(t, a) = I_{уд}^n \cdot m_c(t, a),$$

$$I_{уд}^n = \frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{k+1}{k} \chi \cdot R \cdot T_2} \left( \lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} \right),$$

$$\dot{m}_c(t, a) = A_n \frac{P_k(t) \cdot F_{кр}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_\Gamma}},$$

где  $k$  — показатель адиабаты расширения продуктов сгорания в сопловом блоке;  $R, T_\Gamma$  — соответственно газовая постоянная продуктов сгорания и температура горения;  $\chi$  — коэффициент теплопотерь в камере сгорания;  $\lambda_a$  — приведенная скорость в выходном сечении сопла;  $P_k(t)$  — давление торможения на входе в сопло;  $F_{кр}$  — площадь критического сечения сопла.

Коэффициент  $A_n$  определяется по зависимости:

$$A_n = \sqrt{k \cdot \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Изменение силы тяги РДТТ во времени определяется характером изменения давления  $P_k(t)$  в камере сгорания, которое может быть получено в результате решения задачи внутренней баллистики РДТТ [14–16]. Уравнение баланса газа в камере сгорания:

$$\frac{d}{dt} \left\{ V_{св}[e(t), a] \cdot \frac{P_k(t)}{\chi \cdot R \cdot T_\Gamma} \right\} = \dot{m}_\Gamma[e(t), a] - \dot{m}_c(t, a). \quad (3)$$

В левой части уравнения представлено изменение массы газа в свободном объеме  $V_{св}[e(t), a]$  камеры сгорания в единицу времени, в правой части — разность прихода газа вследствие горения ракетного топлива  $\dot{m}_\Gamma[e(t), a]$  и расхода газа через сопло  $\dot{m}_c(t, a)$ . Здесь  $e(t)$  — зависимость толщины сгоревшего свода заряда от времени  $t$ .

Приход газа в камеру сгорания вследствие горения ракетного топлива определяется соотношением:

$$\dot{m}_\Gamma[e(t), a] = S[e(t), a] \cdot U \cdot \rho_m,$$

где  $S[e(t), a]$  — изменение поверхности горения заряда ракетного топлива во времени;  $U, \rho_m$  — со-

ответственно скорость горения и плотность топлива.

После подстановки  $\dot{m}_\Gamma[e(t), a]$  и  $\dot{m}_c(t, a)$  в (3), в предположении, что  $\chi \cdot R \cdot T_\Gamma \approx \text{const}$ , получим систему дифференциальных уравнений для расчета внутрибаллистических характеристик РДТТ:

$$\begin{aligned} \frac{V_{св}[e(t), a]}{\chi \cdot R \cdot T_\Gamma} \cdot \frac{dP_k}{dt} &= S[e(t), a] \cdot U \cdot \rho_m - \\ - A_n \cdot \frac{P_k \cdot F_{кр}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_\Gamma}} - \frac{P_k}{\chi \cdot R \cdot T_\Gamma} \cdot \frac{dV_{св}[e(t), a]}{dt}, \\ \frac{dV_{св}[e(t), a]}{dt} &= S[e(t), a] \cdot U, \\ \frac{de}{dt} &= U. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) может быть проинтегрирована, если заданы начальные условия  $P_{k_0}, V_{св_0}, e_0$  при  $t = t_0$ , а также известны скорость горения  $U$  и зависимость изменения площади горения заряда  $S = S[e(t), a]$  от толщины сгоревшего свода  $e$ . На основании результатов интегрирования системы (4) была получена следующая расчетная модель.

Радиус критического сечения сопла  $R_{кр}$  определяется из условия обеспечения требуемого уровня пустотной тяги  $P$  РДТТ [17].

Радиус среза сопла  $R_a$  вычисляется в зависимости от степени расширения сопла  $\xi$ :  $R_a = R_{кр} \cdot \xi$ . Площадь критического сечения сопла  $F_{кр}$  при условии обеспечения требуемого значения пустотной тяги РДТТ вычисляется по формуле:

$$F_{кр} = \frac{P}{\varphi_p \cdot P_k \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \varphi_c \cdot k \cdot \lambda_a + \frac{\pi(\lambda_a)}{q(\lambda_a)} \right]},$$

где  $\varphi_p$  — коэффициент расхода;  $\varphi_c$  — коэффициент потерь удельного импульса;  $\lambda_a$  — приведенная скорость на срезе сопла.

Газодинамические функции  $\pi(\lambda_a)$  и  $q(\lambda_a)$  определяются в виде:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_a) &= \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ q(\lambda_a) &= \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda_a \cdot \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_a^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значение приведенной скорости  $\lambda_a$  здесь определяется в результате решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{R_{кр}^2}{R_a^2} = q(\lambda_a).$$

Зависимость коэффициента расхода РДТТ  $\varphi_p$  от конструктивной схемы дозвуковой части приведена на рис. 1. Параметр  $\bar{R}_1$  рассчитывается по соотношению:

$$\bar{R}_1 = \frac{R_1}{D_{кр}},$$

где  $R_1$  — радиус скругления дозвуковой части сопла;  $D_{кр}$  — диаметр критического сечения сопла.

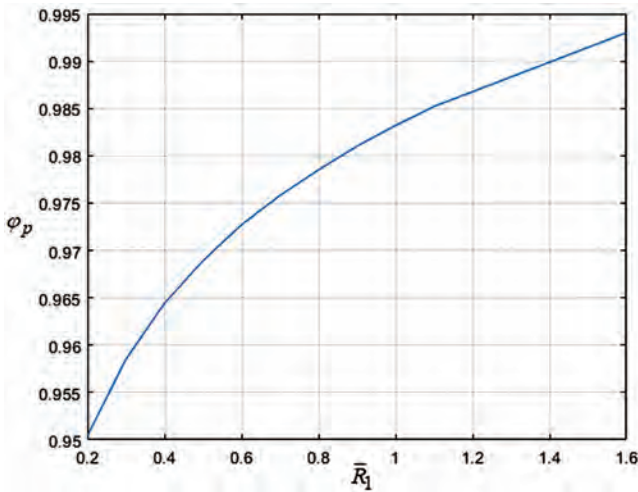


Рис. 1. Зависимость коэффициента расхода РДТТ  $\varphi_p$  от  $\bar{R}_1$

На начальном этапе проектирования РДТТ суммарные потери удельного импульса определяются по статистической зависимости вида:

$$C_\Sigma = -2,46 + 3,28 \cdot \ln \beta - 1,11 \cdot \ln D_{кр} + 0,254 \cdot q_{ae} + 1,234 \cdot \ln \xi + 0,7 \frac{m_{TZP}}{m_T},$$

где  $m_{TZP}$  — масса теплозащитного покрытия. Величина  $\beta$  определяется в виде:

$$\beta = \frac{\theta_0 + 2 \cdot \beta_a}{3},$$

где  $\theta_0 = \arctg\left(\frac{\xi - 1}{\bar{x}_a}\right)$ ,  $\bar{x}_a = \frac{L_c}{R_{кр}}$ .

Коэффициент расхода газа  $A$ :

$$A = \frac{1}{\sqrt{RT}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2gK}{k+1}}.$$

Пустотный термодинамический удельный импульс:

$$I_{уд} = \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot (k+1)}{A}.$$

Относительная площадь среза сопла:

$$\bar{F}_a = \frac{F_a}{F_{кр}}.$$

Приведенный полный импульс потока:

$$Z(\lambda_a) = \frac{1}{2} \left( \lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} \right).$$

Суммарный импульс:

$$I_\Sigma = I_{уд} \cdot \varphi_\Sigma \cdot m_T \cdot Z(\lambda_a) - F_a P_H \tau_n,$$

где  $\varphi_\Sigma$  — коэффициент, учитывающий суммарные потери в камере сгорания и в сопле;  $\tau_n$  — полное время работы РДТТ.

Единичный импульс:

$$I_{ед} = \frac{I_\Sigma}{m_T}.$$

Тяга РДТТ:

$$P = I_{ед} \cdot G + F_a P_H.$$

Для исследований свойств двухимпульсного режима движения БПЛА рассматривались два критерия оптимальности — дальность полета  $L$  и время полета  $T$ . На рис. 2 показан процесс максимизации дальности ( $N$  — число поисковых шагов), а на рис. 3 — процесс минимизации времени. На рис. 4 приведена кривая компромиссных решений, из которой видно, что критерии  $L$  и  $T$  противоречивы и для выбора окончательного проектного решения необходимо применять некоторый принцип оптимальности.

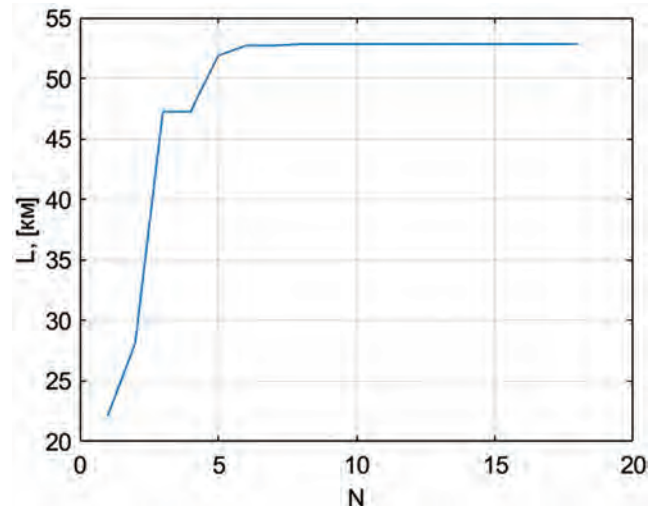


Рис. 2. Решение задачи  $\max_{a \in D} L(a)$

Аналогичные зависимости были получены для случая, когда на траектории движения БПЛА присутствует пассивный участок полета. На рис. 5



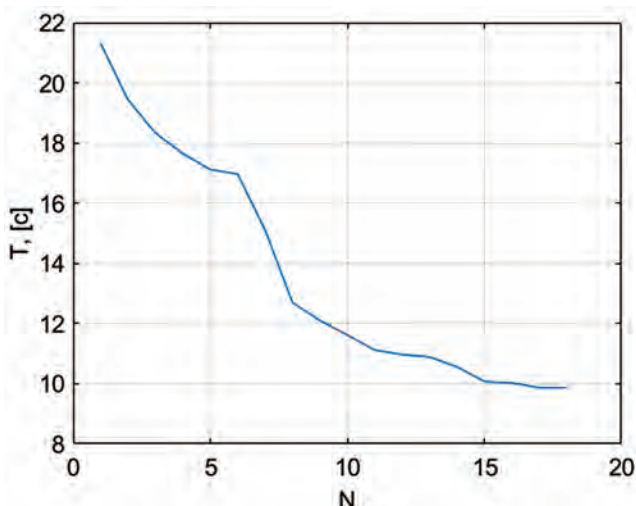


Рис. 3. Решение задачи  $\min_{a \in D} T(a)$

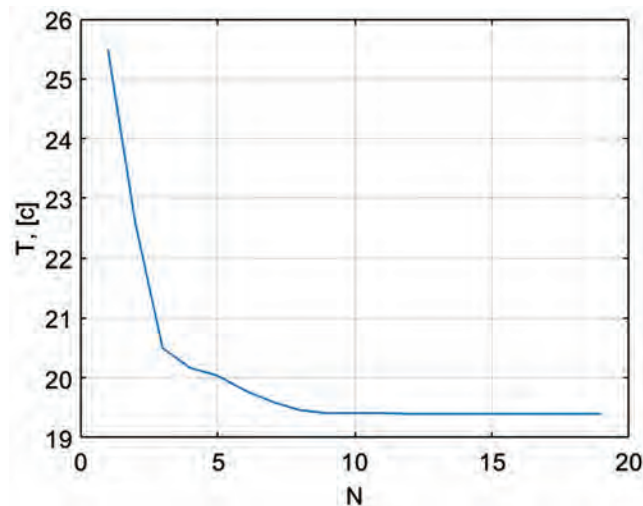


Рис. 6. Решение задачи  $\min_{a \in D} T(a)$ , при  $\Delta t \neq 0$

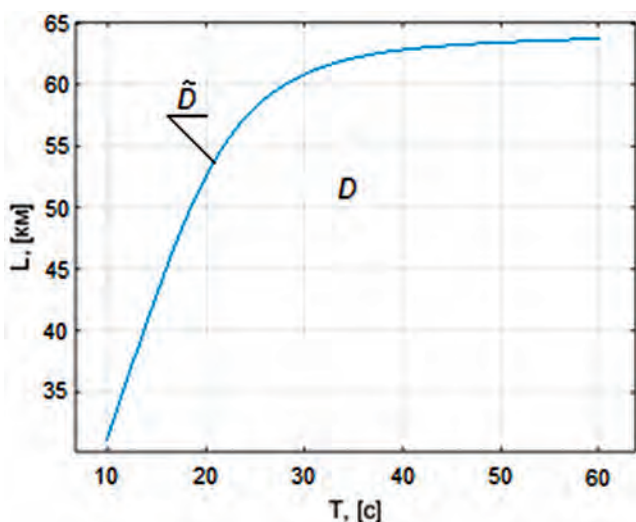


Рис. 4. Область компромиссов  $\tilde{D}$  в координатах  $(T, L)$

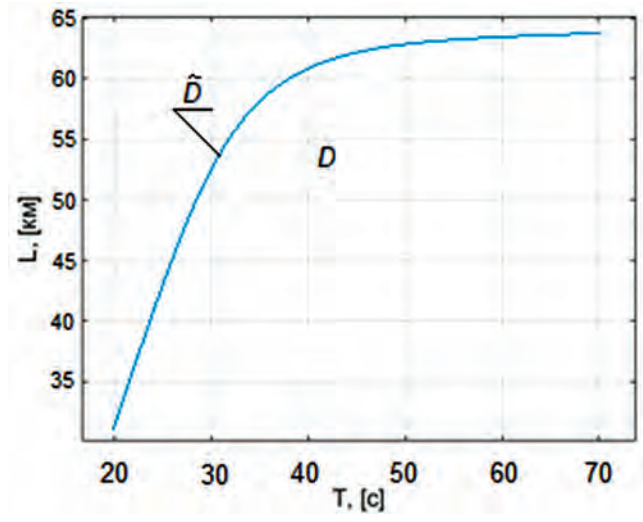


Рис. 7. Область компромиссов  $\tilde{D}$  в координатах  $(T, L)$ , при  $\Delta t \neq 0$

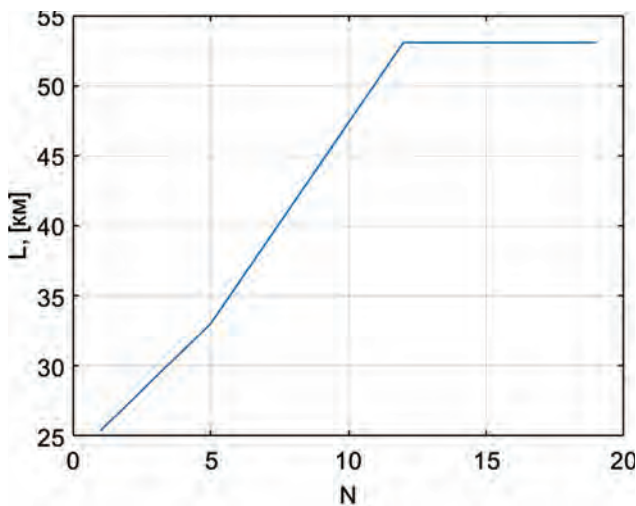


Рис. 5. Решение задачи  $\max_{a \in D} L(a)$ , при  $\Delta t \neq 0$

показана дальность полета БПЛА при пассивном участке полета, на рис. 6 — время полета, на рис. 7 — область компромиссов в координатах  $(T, L)$ .

Сравнение результатов, полученных при работающем двигателе на всём участке полета и при двухимпульсном режиме движения (см. рис. 2 и рис. 5), показало, что выключение двигателя в период с 4-й секунды полета по 23-ю секунду позволило увеличить дальность полёта на 9279 м.

Как видно из рис. 7, критерии  $L$  и  $T$  противоречивы, т.е. исходная задача является многокритериальной. Для раскрытия многокритериальной неопределенности здесь будет использован аддитивный принцип оптимальности с переменными весовыми коэффициентами.

**3. Аддитивный принцип оптимальности с переменными весовыми коэффициентами**

Пусть задана область допустимых решений  $D \subset E^n$ , на которой определены векторы  $n$ -мерного Евклидова пространства (проектные параметры)  $a = \{a_i\}_{i=1}^n$ . Качество проектного решения определяется набором частных критериев оптимальности, представляющих собой скалярные функции  $J_1(d), J_2(d), \dots, J_l(d)$ . Частные критерии образуют  $l$ -мерный вектор эффективности  $J = \{J_k\}_{k=1}^l$ . Без потери общности, предполагается, что все частные критерии необходимо минимизировать. Известно, что критерии ограничены таким образом, что  $0 \leq J_k(d) \leq A_k, k \in [1, l]$ , но конкретные значения ограничений  $A_k, k = 1, l$  не определены.

В задаче необходимо определить вектор проектных параметров  $d^*$  из области  $D$  и оптимальный вектор весовых коэффициентов  $\tilde{\alpha}_i, i = \overline{1, l}$  в аддитивном принципе оптимальности вида:

$$J_0 = \min_{d \in D, \tilde{\alpha} \in [0,1]^l} \sum_{i=1}^l \tilde{\alpha}_i J_i(d).$$

Покажем, что аддитивный принцип оптимальности следует из принципа рациональной организации сложной системы, если весовые коэффициенты принять в виде:

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{J_k(d)}{A_k}, k = \overline{1, l}.$$

Согласно определению принципа рациональной организации [4], сложная система организована рационально, если рациональное проектное решение принадлежит области компромиссов и удовлетворяет всем принципам оптимальности. Математическая реализация принципа рациональной организации состоит в вырождении области компромиссов в единственную точку  $d^*$ , которая является исходным решением многокритериальной задачи.

По определению, область компромиссов состоит из таких проектных решений  $d^*$ , для которых улучшение по одной группе критериев приводит к ухудшению по другой группе, т.е.:

$$D_d^k = \{d^* \mid d^* \in D_d; \forall d \in D_d; J_k(d^*) \leq J_k(d), k \in [1, m < l]; J_k(d^*) < J_k(d), k \in [m + 1, l]\}.$$

Здесь  $D_d$  — область допустимых проектных решений.

Предполагая условия выпуклости такими, при которых выполняются леммы Карлина, получаем

выражение для области компромиссов как решение задачи параметрического программирования [7]:

$$D_\alpha = \bigcup_{\alpha \in D_\alpha} F^{-1} \left[ \min_{d \in D_d} \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k J_{0k}(d, A) \right], \quad (6)$$

где  $F^{-1}$  — обратное отображение  $J_0 \rightarrow d$ ,  $J_0 = \left\{ \frac{1}{A_k} J_k(d) \right\}_{k=1}^l = \{J_{0k}(d, A)\}_{k=1}^l$ ;  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^l$  — вектор весовых коэффициентов.

$$D_\alpha = \left\{ \tilde{\alpha} \mid \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k = 1; \tilde{\alpha}_k > 0 \right\}. \quad (7)$$

После реализации принципа рациональной организации область компромиссов стягивается в точку  $d^*$  и выражение (6) принимает вид:

$$d^* = \bigcup_{\tilde{\alpha} \in D_\alpha} F^{-1} \left[ \min_{d \in D_d} \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k J_{0k}(d, A) \right]. \quad (8)$$

Из условия единственности точки  $d^*$  следует необходимость постоянства суммы  $\sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k J_{0k}(d, A)$  в выражении (8) при параметре  $\tilde{\alpha} \in D_\alpha$ . Эта сумма не будет зависеть от конкретных параметров, если:

$$J_{01}(d, A) = J_{02}(d, A) = \dots = J_{0l}(d, A). \quad (9)$$

Если качество относительных потерь  $J_{01} = J_{02} = \dots = J_{0l} = \mu$  удовлетворяется, рассматриваемая сумма, с учетом (7)  $\sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k = 1$ , примет вид:

$$\sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k J_{0k} = \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k \mu = \mu \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k = \mu \cdot 1 = \mu$$

и не будет зависеть от параметра  $\tilde{\alpha}$ .

С другой стороны, точка  $d^*$  принадлежит области компромиссов с произвольным набором параметров из  $D_\alpha$ . Используя произвольный выбор этих параметров и основываясь на свойствах (7), можно записать:

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \dots = \tilde{\alpha}_l = \frac{1}{l}.$$

Тогда выражение (8) запишется в виде:

$$d^* = F^{-1} \left[ \min_{d \in D_d} \sum_{k=1}^l \frac{1}{l} J_{0k}(d, A) \right] = F^{-1} \left[ \min_{d \in D_d} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l J_{0k}(d, A) \right].$$

Положение экстремума не меняется при наличии постоянного коэффициента, поэтому, сокращая на коэффициент  $1/l$ , получим:

$$d^* = F^{-1} \left[ \min_{d \in D_d} \sum_{k=1}^l J_{0k}(d, A) \right]. \quad (10)$$

Условия (9) и (10) можно переписать в виде следующей системы уравнений:

$$J_{0,j}(d, A) - J_{0,j+1}(d, A) = 0, \quad j = \overline{1, l-1}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^l J_{0k}(d_i, A) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

которая реализует принцип рациональной организации сложной системы. При этом (11) реализует условия равенства относительных потерь. Обобщением принципа рациональной организации является не задание весовых коэффициентов, как это сделано в (9), а их поиск на отрезке [0, 1], наряду с поиском вектора оптимального проектного решения  $d^{opt}$ .

Тогда вместо (10) может быть записан следующий обобщенный аддитивный принцип оптимальности:

$$\text{opt } J = \min_{\substack{d \in D_d \\ \tilde{\alpha} \in D_{\tilde{\alpha}}}} \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_k J_{0k}(d, A),$$

где  $\text{opt } J$  — обозначение принципа оптимальности.

Ограничение  $A_j$  определяется по  $k$ -й относительной потере:

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{J_k(d)}{A_k}, \quad k = \overline{1, l}.$$

С применением обобщенного аддитивного принципа относительности была решена задача выбора двухимпульсного режима движения беспилотного летательного аппарата, сформулированная следующим образом.

Найти:

$$J = \max_{a \in D_d, \tilde{\alpha} \in D_{\tilde{\alpha}}} [\tilde{\alpha} \bar{L}(a) + (1 - \tilde{\alpha}) \bar{T}(a)], \quad (13)$$

где  $a = (l_{кр}, \dot{m}, P_k)$  — в случае одноимпульсного режима движения;  $a = (l_{кр}, \dot{m}, P_k, \Delta t)$  — в случае двухимпульсного режима движения. Здесь приняты те же обозначения, что и в разделе 1.

На рис. 8 приведены результаты решения задачи (13) для режима одноимпульсного полета, а на рис. 9 — аналогичные результаты в режиме двухимпульсного полета.

Вектор проектного решения для *одноимпульсного режима* при полученном весовом коэффициенте  $\tilde{\alpha} = 0,954$  имеет следующий состав:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 2 \text{ кг/с}, \\ P_k &= 102,6 \text{ атм}, \\ l_{кр} &= 1,108, \\ \tilde{\alpha} &= 0,954. \end{aligned}$$

При этом дальность полета и время полета соответственно равны:

$$\begin{aligned} L &= 52 \ 854 \text{ м}, \\ T &= 63 \ 845 \text{ с}. \end{aligned}$$

Для двухимпульсного полета было получено следующее компромиссное решение:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 2,319 \text{ кг/с}, \\ P_k &= 89,9 \text{ атм}, \\ l_{кр} &= 0,75, \\ \tilde{\alpha} &= 17,33 \text{ с (время планирующего полета)}. \end{aligned}$$

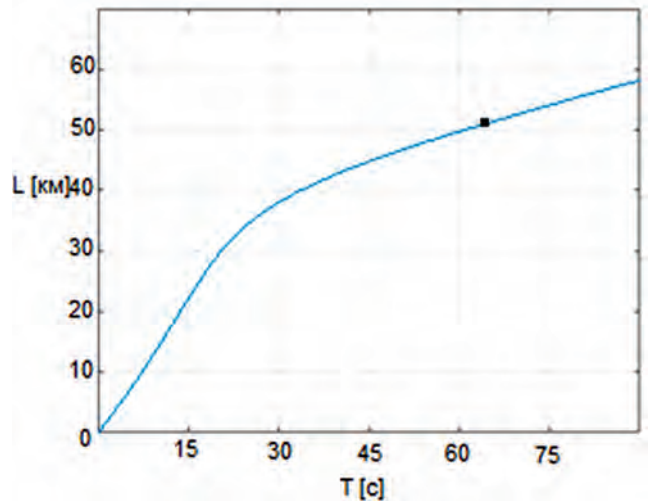


Рис. 8. Точкой на контрольной кривой показано окончательное решение в случае одноимпульсного режима полета

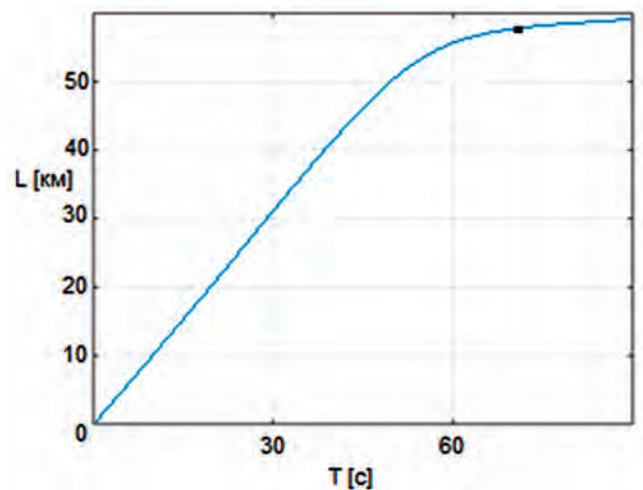


Рис. 9. Точкой на контрольной кривой показано окончательное решение в случае двухимпульсного режима полета

Данное решение получено при весовом коэффициенте  $\tilde{\alpha} = 0,842$ .

Дальность полета и время полета соответственно равны:

$$\begin{aligned} L &= 56 \ 311 \text{ м}, \\ T &= 72,437 \text{ с}. \end{aligned}$$

Здесь оптимизация задачи (13) проводилась известным методом комбинированного поиска экстремума [18–20].  $N$  — число удачных шагов оптимизации.



Рассмотренный метод является полностью формализованным, в котором выбор весовых коэффициентов основывается на структуре соответствующей математической модели  $R$  и исходных данных. Очевидно, что, если у проектанта есть какая-либо система предпочтений между частными критериями оптимальности, то полученные по данному методу весовые коэффициенты являются «начальной точкой» при принятии проектных решений, которая в дальнейшем может корректироваться.

## Выводы

1. Показана эффективность введения в режим движения БПЛА пассивного участка полета.

2. Обобщенный аддитивный принцип оптимальности позволяет принимать проектные решения без введения каких-либо информационных гипотез, например таких, как предположение равенства относительных критериальных потерь.

## Список источников

1. Сорокин В.А., Граменицкий М.Д., Рыбаулин С.Н. и др. Многорежимный ракетный двигатель. Патент RU 2715450 С1. Бюл. № 7, 28.02.2020.
2. Гайдаров Д.Д., Граменицкий М.Д., Зыбин П.И. и др. Многорежимный ракетный двигатель твердого топлива. Патент RU 2715453 С1. Бюл. № 7, 28.02.2020.
3. Гайдаров Д.Д., Рыбаулин С.Н., Сорокин В.А. Двухрежимный сопловой блок. Патент RU 2736089 С1. Бюл. № 32, 11.11.2020.
4. Khare S., Saha U.K. Rocket nozzles: 75 years of research and development // *Sādhanā*. 2021. Vol. 46: 76. DOI:10.1007/s12046-021-01584-6
5. Обносов Б.В., Сорокин В.А., Яновский Л.С. и др. Конструкция и проектирование комбинированных ракетных двигателей на твердом топливе: Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. — 303 с.
6. Ерохин Б.Т. Теория, расчет и проектирование ракетных двигателей: Учебник. Ч. 1. Двигатели твердого топлива. — М.: МГАПИ, 2004. — 863 с.
7. Гайдаров Д.Д. Расчет ракетных двигателей твердого топлива с соплом Лавала // *Меридиан*. 2021. № 4(57). URL: <http://meridian-journal.ru/site/article?id=5054>
8. Ерохин Б.Т. Теоретические основы проектирования РДТТ. — М.: Машиностроение, 1982. — 206 с.
9. Rao G.V.R. Recent developments in rocket nozzle configurations // *ARS Journal*. 1961. Vol. 31. No. 11, pp. 1488–1494. DOI: 10.2514/8.5837
10. Sutton G.P. *Rocket Propulsion Elements*. — John Wiley & Sons, Inc., 2001, pp. 379–386.
11. Воронин А.Н. Многокритериальная оптимизация динамических систем уравнения // *Кибернетика*. 1980. № 4. С. 56–66.
12. Сенькин В.С. К вопросу о постановке задачи оптимизации проектных параметров ракетного двигателя на твердом топливе // *Техническая механика*. 2014. №4. С. 39–52.

13. Воронин А.Н. Векторная оптимизация многосвязных динамических систем // *Автоматика*. 1979. № 5. С. 19–25.
14. Липанов А.М., Алиев А.В. Проектирование ракетных двигателей твердого топлива: Учебник для вузов. — М.: Машиностроение, 1995. — 400 с.
15. Милехин Ю.М., Ключников А.Н., Бурский Г.В., Лавров Г.С. Энергетика ракетных двигателей на твердом топливе. — М.: Наука, 2013. — 207 с.
16. Татаренко Д.С., Шутов П.В., Ефанов В.В., Роговенко О.Н. Способ определения баллистических характеристик неуправляемых объектов // *Вестник Московского авиационного института*. 2016. Т. 23. № 3. С. 77–83.
17. Захаров И.В., Трубников А.А., Решетников Д.А. Программно-методическая система оценки влияния технического состояния управляемой авиационной ракеты класса «воздух-воздух» на точность ее наведения // *Вестник Московского авиационного института*. 2016. Т. 23. № 1. С. 9–18.
18. Балык В.М. Статический синтез проектных решений при разработке сложных систем. — М. Изд-во МАИ, 2011. — 278 с.
19. Балык В.М., Бородин И.Д. Выбор устойчивых проектных решений беспилотного летательного аппарата в условиях действий факторов неопределенности // *Вестник Московского авиационного института*. 2022. Т. 29. № 1. С. 57–66. DOI: 10.34759/vst-2022-1-57-66
20. Акимов Е.Н., Балык В.М. Полиномиальное моделирование внешнего целевого множества при построении системы летательных аппаратов оптимального типажа // *Вестник Московского авиационного института*. 2016. Т. 23. № 2. С. 14–23.

## References

1. Sorokin V.A., Gramenitskii M.D., Rybaulin S.N. et al. *Patent RU 2715450 C1*, 28.02.2020.
2. Gaidarov D.D., Gramenitskii M.D., Zybin P.I. et al. *Patent RU 2715453 C1*, 28.02.2020.
3. Gaidarov D.D., Rybaulin S.N., Sorokin V.A. *Patent RU 2736089 C1*, 11.11.2020.
4. Khare S., Saha U.K. Rocket nozzles: 75 years of research and development. *Sādhanā*, 2021, vol. 46: 76. DOI:10.1007/s12046-021-01584-6
5. Обносов B.V., Sorokin V.A., Yanovskii L.S. et al. *Konstruktsiya i proektirovanie kombinirovannykh raketnykh dvigatelei na tverdom toplive* (Structure and design of combined rocket engines on solid fuel), Moscow, MG TU im. N.E. Bauman, 2014, 303 p.
6. Erokhin B.T. *Teoriya, raschet i proektirovanie raketnykh dvigatelei. Ch. 1. Dvigateli tverdogo topliva* (Theory, calculation and design of rocket engines. Part 1. Solid fuel engines), Moscow, MGAPI, 2004, 863 p.
7. Gaidarov D.D. *Meridian*, 2021, no. 4(57). URL: <http://meridian-journal.ru/site/article?id=5054>
8. Erokhin B.T. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya RD TT* (Theoretical foundations of the RD TT design), Moscow, Mashinostroenie, 1982, 206 p.
9. Rao G.V.R. Recent developments in rocket nozzle configurations. *ARS Journal*, 1961, vol. 31, no. 11, pp. 1488–1494. DOI: 10.2514/8.5837
10. Sutton G.P. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, Inc., 2001, pp. 379–386.

11. Voronin A.N. *Kibernetika*, 1980, no. 4, pp. 56–66.
12. Sen'kin V.S. *Tekhnicheskaya mekhanika*, 2014, no. 4, pp. 39–52.
13. Voronin A.N. *Avtomatika*, 1979, no. 5, pp. 19–25.
14. Lipanov A.M., Aliev A.V. *Proektirovanie raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* (Solid fuel rocket engines designing), Moscow, Mashinostroenie, 1995, 400 p.
15. Milekhin Yu.M., Klyuchnikov A.N., Burskii G.V., Lavarov G.S. *Energetika raketnykh dvigatelei na tverdom toplive* (Power engineering of rocket engines on solid fuel), Moscow, Nauka, 2013, 207 p.
16. Tatarenko D.S., Shutov P.V., Efanov V.V., Rogovenko O.N. Uncontrolled objects ballistic characteristic calculation technique. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 3, pp. 77–83.
17. Zakharov I.V., Trubnikov A.A., Reshetnikov D.A. Program-methodic system for the impact of guided aircraft missile of “air-to-air” class technical state on its guidance accuracy. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 9–18.
18. Balyk V.M. *Sticheskiy sintez proektnykh reshenii pri razrabotke slozhnykh sistem* (Static synthesis of design solutions in the development of complex systems), Moscow, MAI, 2011, 278 p.
19. Balyk V.M., Borodin I.D. Selection of stable design solutions for unmanned aerial vehicle under conditions of uncertainty factors action. *Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 57–66. DOI: 10.34759/vst-2022-1-57-66
20. Akimov E.N., Balyk V.M. Outer set polynomial modeling in constructing an optimal type aircraft system. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 2, pp. 14–23.

Статья поступила в редакцию 07.11.2022; одобрена после рецензирования 05.12.2022; принята к публикации 26.12.2022.

The article was submitted on 07.11.2022; approved after reviewing on 05.12.2022; accepted for publication on 26.12.2022.