

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
(МАИ)

На правах рукописи



Урюпин Илья Вадимович

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ
НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

По специальности:

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, доцент
Бортаковский Александр Сергеевич

Москва – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ	25
1.1. Постановки задач.....	25
1.1.1. Задача оптимального управления.....	27
1.1.2. Задача управления с фиксированным числом переключений.....	27
1.1.3. Задача минимизации количества переключений	28
1.1.4. Линейно-квадратичная задача управления	28
1.2. Моментные функции цены и образующие	29
1.3. Уравнения для моментных функций цены	30
1.4. Оптимальное позиционное управление	33
1.4.1. Достаточные условия оптимальности.....	34
1.4.2. Алгоритм синтеза оптимального "управляющего комплекса"	35
1.5. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления.....	36
1.5.1. Вспомогательная линейно-квадратичная задача Больца	36
1.5.2. Алгоритм синтеза оптимального "управляющего комплекса" в линейно-квадратичной задаче	38
1.6. Пример.....	39
Выводы	44
2. МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ КУСОЧНО – ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ	45
2.1. Постановки задачи.....	45
2.1.1. Постановка задачи оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений.....	45
2.1.2. Постановка задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных управлений.....	46

2.2. Необходимые условия оптимальности.....	48
2.2.1. Переключаемые системы	48
2.2.2. Непрерывные системы с кусочно-постоянным управлением	49
2.3. Численно-аналитическая процедура применения необходимых условий оптимальности	51
2.3.1. Алгоритм поиска оптимального кусочно-постоянного управления непрерывной системой.....	51
2.3.2. Особенности численно-аналитической процедуры решения.....	52
2.4. Пример.....	53
Выводы	59
3. ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТОВ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ.....	60
3.1. Постановки задач планирования маршрутов на прямоугольной сетке.....	61
3.2. Двухпозиционные функции достижимости и цены.....	64
3.3. Решение типовых задач планирования маршрутов на прямоугольной сетке	65
3.3.1. Задача минимизации количества переключений.....	65
3.3.2. Решение задачи быстродействия.....	66
3.3.3. Решение задачи условного быстродействия	68
3.3.4. Решение задачи быстродействия с минимальным количеством переключений .	68
3.3.5. Решение задачи быстродействия с ограничениями скорости движения и ускорения.....	68
3.4. Оптимизация траекторий Маркова – Дубинса с промежуточными условиями...	70
3.4.1. Постановка задачи	70
3.4.2. Оптимальные и попадающие траектории.....	71
3.4.3. Решение задачи Маркова – Дубинса с промежуточными условиями	71
3.5. Пример.....	73
Выводы	74
4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ МНОГОКРАТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ	75

4.1. Моделирование оптимальных процессов с мгновенными многократными переключениями	75
4.2. Численно-аналитические методы синтеза оптимального "управляющего комплекса"	77
4.3. Программный комплекс синтеза оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления	79
4.4. Программный комплекс оптимизации маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий.....	82
Выводы	85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	86
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	87

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

- АКОР – Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов
- БПЛА – Беспилотный летательный аппарат
- ГП – Функция Гамильтона-Понтрягина
- ГС – Гибридная система
- ГЯБ – Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана
- ДНС – Дискретно-непрерывная система
- КА – Космический аппарат
- ЛА – Летательный аппарат
- ЛДС – Логико-динамическая система
- ЛКЗ – Линейно-квадратичная задача
- НДС – Непрерывно-дискретная система
- ПС – Переключаемая система
- САТ – Система автоматного типа
- СПС – Система с переменной структурой
- СУ – Система управления

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к развитию математической теории оптимального управления, главным образом, связан с практическими задачами управления подвижными объектами. В области авиационной и ракетно-космической техники [4, 46, 47, 51, 65, 69 74, 75, 78, 80, 82, 83, 105, 119] такими объектами являются пилотируемые и беспилотные ЛА. Анализ и оптимизация процессов управления для разрабатываемых или модернизируемых ЛА, а тем более КА, выполняется, как правило, методами математического моделирования, поскольку натурные эксперименты либо затратны, либо невозможны. Математические модели, применяемые в аэрокосмической области, должны соответствовать жестким требованиям, предъявляемым к техническим изделиям. Международные и национальные стандарты надежности разработок авиационной техники, космических систем и комплексов устанавливают предельно допустимые значения по широкой номенклатуре показателей. Поэтому математические модели, разрабатываемые для ЛА, должны отличаться высокой точностью и достаточной полнотой для прогноза показателей качества.

Математическая модель движения, форма математического описания ЛА являются основой для анализа и синтеза систем управления. Цель управления формулируется в техническом задании и заключается, как правило, в достижении определенных значений показателей качества. Качество управления оценивается критериями, выражающими разнообразные и многочисленные требования к функционированию СУ, например: надежность, экономичность, быстродействие, точность и т.п. При проектировании систем управления ЛА стараются получить управление, оптимальное сразу по нескольким критериям, что усложняет задачу, делая ее многокритериальной. Необходимо учитывать технические возможности используемых устройств и механизмов, ресурсы которых ограничены. Как правило, ограничения указаны в технических характеристиках. Например, ограниченными являются запасы топлива, масса полезной нагрузки, количество включений и выключений двигателей, отклонения рулей, тяга двигателей и т.п. На основе технического задания выбираются соответствующие траектории движения – оптимальные, рациональные, попадающие и т.п. – в зависимости от цели управления. Оптимизация траекторий и параметров ЛА позволяет минимизировать те или иные затраты, увеличить эффективность его эксплуатации.

Постановка задачи оптимального управления, как правило, формируется из трех составляющих:

1. Математической модели управляемого объекта. Модель описывает поведение объекта за конкретный период времени под влиянием управляющих воздействий. Математической моделью движения ЛА обычно служит динамический процесс управления [15, 99, 101],

описываемый дифференциальными и рекуррентными уравнениями, содержащими управляющие параметры.

2. Цели управления, которая выражается при помощи функционала качества управления, подлежащего оптимизации.

3. Ограничения на переменные состояния и управляющие воздействия в виде уравнений или неравенств [93]. В самом деле, выбор оптимального управления, минимизирующего функционал качества, ограничен требованиями, отражающими технические характеристики устройств и условий эксплуатации.

Современное развитие теории управления, обусловленное потребностями практики, привело к дальнейшему расширению класса управляемых процессов. Допускаются изменения (скачки) траектории движения. Эти изменения состояния гибридной системы принято называть переключениями. На рисунке В.1 представлена упрощенная схема основных классов систем управления [6, 9, 16, 17, 26, 31, 34, 46, 47, 50, 55, 58, 62, 64, 67, 87, 103, 107, 117, 120, 122, 131, 143, 147, 148], в работе которых происходят переключения. Все системы функционируют в непрерывном времени. Стрелки, связывающие блоки, отражают отношение включения: системы нижнего уровня являются частным случаем систем верхнего уровня. Приведем краткое описание каждой из систем.

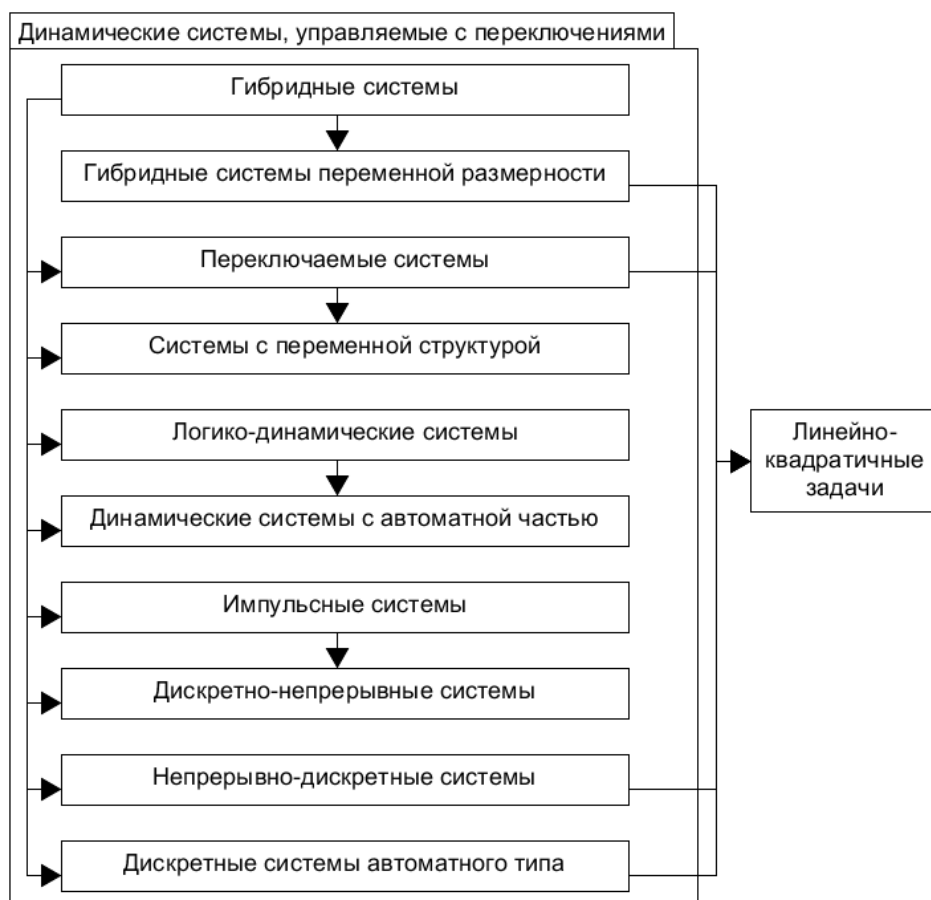


Рисунок В.1. Динамические системы, управляемые с переключениями.

Гибридные системы [46, 47, 50, 103, 131, 139, 143, 144, 147] представляют собой многоуровневые системы, в которой уровни имеют разнородное описание. Вектор-состояния в таких системах содержит как непрерывные, так и дискретные компоненты. Сложные технические системы, обладающие иерархической структурой, характеризуются непрерывной изменяющейся динамикой на самом низком уровне и логическим принятием решений на самом высоком. Практически, все современные системы управления подвижными объектами и технологическими процессами являются гибридными и характеризуются структурными изменениями в ходе функционирования, многорежимностью и разнородностью описания процессов. Развитие гибридных систем тесно связано с достижениями в области информатики и компьютерной технике. Благодаря компьютеризации интенсивно развиваются и применяются в различных областях методы управления, основанные на событиях и логических правилах организации переключений между различными управляющими устройствами. Кроме того, существует большой класс систем, которые могут быть стабилизированы при помощи переключений законов управления, а применение (одного непрерывного) статического закона управления с обратной связью по состоянию к стабилизации не приводит [47]. Этим объясняется интерес к исследованию таких систем.

Гибридные системы переменной размерности (ГСР) [29] представляют собой системы, непрерывное движение которых чередуется с дискретными изменениями (переключениями), при этом меняется размерность пространства состояний. Такое изменение пространства состояний, например, может происходить при изменении количества управляемых объектов, что характерно, в частности, для задач управления группами летательных аппаратов переменного состава. Исследование системы управления с изменяемым пространством состояний известно под разными названиями: составные системы [8, 49], системы с переменной размерностью [72], системы с разветвлением структур [73], ступенчатые системы [85], сложные (многоэтапные) процессы [51], системы со сменой фазового пространства [13], гибридные системы с промежуточными условиями [133, 149]. Необходимые условия оптимальности для гибридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума [99], получены в работах [133, 149]. В этих работах количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы. В работе [20] получены достаточные условия оптимальности, а также выведены уравнения для синтеза оптимальных траекторий для случая, когда моменты переключений, а также их количество заранее не заданы.

Переключаемой системой (ПС) [130, 132, 142] называют многорежимную динамическую систему, составленную из непрерывных (или дискретных) динамических подсистем и управляющего устройства, отвечающего за смену (переключения) режимов [47]. В основе работы управляющего устройства лежат условия в виде ограничений по времени, по

состоянию. Процессы в переключаемых системах имеют два уровня описания: нижний и верхний. На нижнем уровне процессы в каждом из режимов описываются дифференциальными уравнениями. В качестве примера такого процесса может выступать движение объекта. На верхнем уровне – дискретным процессом, отвечающим за переключения режимов. Обе части системы взаимосвязаны и влияют друг на друга в процессе управления. Такие переключения могут производиться под влиянием: внешней среды, сбоев, отказов элементов, подсистем (скачкообразное изменение параметров структуры, как объекта, так и обратной связи). При построении математических моделей ПС переключения описываются как изменения правых частей уравнений движения. Как правило, множество правых частей конечно и каждой соответствует своя типовая траектория [141]. Таким образом, в процессе работы ПС происходят переключения, и из частей типовых траекторий формируется полная траектория. В этих системах переключения являются управлением. В качестве примера можно привести работы [141, 143]. В динамической части движение задается системой линейных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой зависит от дискретного параметра. Выбор значения этого параметра зависит от текущего состояния объекта управления. Таким образом, при каждом изменении дискретного параметра формируются разные системы уравнений и, следовательно, разные траектории движения объекта. Более общие модели переключаемых систем описываются системами дифференциальных или рекуррентных уравнений с переключениями правых частей. Необходимые и достаточные условия оптимальности для ПС получены в работах [22, 50, 53, 127, 128, 129, 130, 138, 149].

Система с переменной-структурой (СПС) [117] представляет динамическую систему, состоящую из совокупности непрерывных подсистем (называемых структурами) с определённым правилом перехода в процессе функционирования от одной структуры данной совокупности к другой. В СПС устройство управления содержит ключевые элементы, которые разрывают или восстанавливают связи между функциональными элементами системы, изменяя тем самым каналы передачи воздействий и обеспечивая переход от одной структуры системы к другой [58, 59]. В качестве примера СПС можно привести систему разработанную С.В. Емельяновым [60]. Принцип построения системы основан на инвариантности ее траектории по отношению к значениям параметров системы в случае, когда управляющее воздействие определяется переключающей функцией и реле. Поведение системы при этом характеризуется движением по переключающей поверхности и называется скользящим режимом [118]. Также использование принципов построения СПС при синтезе систем управления позволяет достичь устойчивости и приемлемого качества в тех случаях, когда параметры объекта изменяются в широких пределах или отсутствует информация, необходимая для реализации обычных

алгоритмов управления с фиксированной структурой, обеспечивающих заданные требования к системе.

Логико-динамическая система (ЛДС) относится к классу гибридных систем и представляет собой систему, состоящую из двух связанных между собой частей – динамической и логической. Поведение динамической части ЛДС описывается дифференциальными уравнениями. Логическая часть ЛДС характеризует операционную ситуацию, в которой происходит управляемое движение динамической части, и может меняться дискретным образом в рамках одной операционной ситуации, либо изменять саму операционную ситуацию. Описывается же логическая часть рекуррентными включениями или уравнениями [9, 21, 34, 61, 62, 97]. Примерами ЛДС могут служить ЛА, управляемые с помощью бортовых вычислительных комплексов [120]. Необходимые и достаточные условия оптимальности ЛДС получены в [9, 21, 25, 109].

Динамическая система с автоматной частью [19, 30, 46] является частным случаем ЛДС. В отличие от логико-динамических систем здесь управление динамической составляющей осуществляется только автоматом, а другие управляющие воздействия отсутствуют. За счет этого модель динамической системы с автоматной частью является более простой по сравнению с ЛДС, однако этот класс охватывает широкий круг прикладных задач из таких сфер, как: авиация, космонавтика [30], радиолокация, оборонный сектор и т.п.[46] В [19] получены достаточные условия оптимальности позиционной конструкции автомата и выведены уравнения для ее нахождения. В [24] получены необходимые условия.

Импульсные системы представляют класс динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с мерами [55, 64, 77, 86, 87, 124, 125, 148]. В такой системе переход из одного состояния в другое происходит непрерывно, а в некоторые моменты времени – скачком, т.е. управляющими сигналами в виде дельта функции. Импульсные системы имеют важное практическое значение, связанное с их применением в микро-электромеханических приборах и измерительных комплексах в области нанотехнологий [86]. Необходимые условия оптимальности, а также существование решений и устойчивости таких систем отражены в [55, 87].

Дискретно-непрерывная система (ДНС) является частным случаем импульсных систем. В ДНС управляющее воздействие представляется импульсом и относится только к дискретной части системы, при этом другие управляющие воздействия отсутствуют [87]. Необходимые и достаточные условия оптимальности для ДНС получены в [54, 87].

Непрерывно-дискретные системы (НДС) сочетают в себе свойства дискретных и непрерывных систем [71]. НДС состоит из связанных между собой двух частей – непрерывной и дискретной. В первой изменение состояния происходит непрерывно, а описание представляется

дифференциальными уравнениями. Во второй – мгновенные изменения состояния (переключения) происходят в заранее заданные моменты времени. Описание дискретной части представляется рекуррентными уравнениями [33]. Достаточные условия оптимальности для таких систем представлены в [33].

Дискретные системы автоматного типа (САТ) моделируют управление переключениями режимов работы сложных динамических систем. САТ описываются рекуррентными уравнениями или включениями. На промежутке непрерывного времени функционирования такие системы конечное число раз меняют свое состояние [26]. При управлении САТ моменты переключений заранее не заданы. Выбор количества и моментов переключений являются ресурсом управления и подлежат оптимизации в зависимости от поставленной цели. САТ являются не единственным классом с таким ресурсом управления, в ПС, СПС, ЛДС и импульсных системах также моменты переключений заранее не заданы. Более того, в ЛДС, САТ, динамических системах с автоматной частью и ПС допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [31]. Процессы с такими переключениями возникают в совершенно обычных задачах, в частности, в задаче управления линейными переключаемыми системами с квадратичным критерием качества [18, 35, 36]. Необходимые и достаточные условия оптимальности для САТ и переключаемых систем представлены в [23, 32].

Рассмотренные выше классы динамических систем относятся к гибридным системам. Отметим, что управляемые процессы с переключениями, также могут описываться и стохастическими системами [95, 96, 106]. Такие системы меняют свои свойства скачкообразно в случайные моменты времени и относятся к системам со случайной или переменной структурой. Исследованию таких систем посвящено большое количество работ, в частности [5, 6, 16, 17, 67, 90, 91, 105, 123]. В диссертации стохастические процессы не рассматриваются.

Задачи оптимизации гибридных систем опираются на теорию оптимального управления непрерывными и дискретными системами. Основным результатом теории оптимального управления для непрерывных систем является принцип максимума Понтрягина [99], который представляет необходимые условия оптимальности и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ) [10]. Для дискретных систем разные формы необходимых условий получены в [15, 101, 104], достаточные условия – в [10,12]. Обобщению этих классических условий посвящено много работ [1, 51, 52, 75]. Распространение классических результатов на другие классы систем продолжается и в настоящее время.

Одна из первых работ, в которой рассматривалась задача оптимального управления ПС, была написана Семеновым В.В. [108]. В его работе непрерывная часть системы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, а конечные наборы правых частей этих уравнений определяют логическую часть системы. Таким образом, логический автомат

управляет движением объекта путем изменения правой части, в результате чего происходит выбор той или иной траектории из конечного множества допустимых типовых траекторий. При этом оптимальная траектория составляется по кусочкам из набора типовых траекторий. В [127, 128] получены необходимые условия оптимальности переключаемых систем. Для вычисления градиента функционала применялась вариация конечного числа моментов переключения, а затраты на переключение состояний не учитывались. В [138] получено "уравнение Беллмана для гибридных систем". Это уравнение представляет собой достаточные условия оптимальности переключаемой системы, которая имеет конечное множество допустимых состояний автоматной части.

На практике наиболее часто встречается класс задач теории оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества. Этот класс задач принято называть **линейно-квадратичными задачами (ЛКЗ)** [2]. В классической ЛКЗ, кроме квадратичного функционала, отсутствуют геометрические ограничения на управление [80]. В качестве примера одной из наиболее востребованных ЛКЗ на практике является задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова А. М., в которой требуется синтезировать оптимальное позиционное управление, т.е. управление с обратной связью. В [80] приводится решение проблемы АКОР для непрерывных систем. Для дискретных систем управления, описываемых рекуррентными уравнениями, решение получено в [70]. Проблемы задачи АКОР имеет многочисленные обобщения, так ее перенос в классы НДС, ЛДС и САТ с мгновенными многократными переключениями дискретной части представлены в [18, 26, 28, 32, 35, 36]. В последних двух классах оптимальные регуляторы получаются кусочно-линейными, а функция цены – кусочно-квадратичная. Напомним, что оптимальным управлением в первоначальной постановке [80] и в большинстве обобщений [7] служат линейные регуляторы, а функция цены является квадратичной. Основной проблемой ЛКЗ и некоторых задач быстродействия [121] на данный момент является невозможность синтеза оптимального позиционного управления и функции цены аналитически. Как правило, в таких задачах поиск оптимального программного управления сводится к задаче конечномерной минимизации. Таким образом, точное решение может быть получено только для узкого сегмента задач оптимального управления, в которых объект управления описывается линейными дифференциальными уравнениями. Для решения остальных задач в практической деятельности применяются различные методы [48] приближенного решения. На рисунке В.2 приведена классификация методов, применяемых для решения задач оптимального управления.

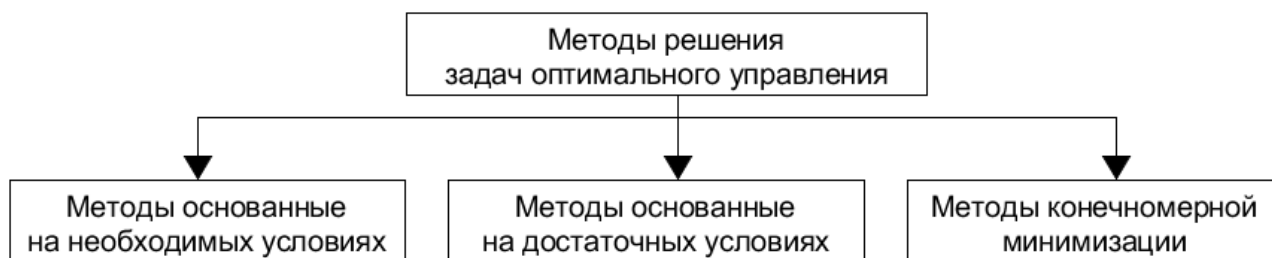


Рисунок В.2. Группы методов решения задач оптимального управления.

К первой группе отнесены численные методы решения задач оптимального управления, основанные на необходимых условиях оптимальности – принципе максимума. Принцип максимума позволяет свести решение задачи оптимального управления к решению двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Для решения этой системы одним из первых был предложен метод последовательных приближений [76], предусматривающий последовательное интегрирование уравнений движений и сопряженной системы с выбором управления из условия максимума функции Гамильтона-Понтрягина. Этот метод имеет многочисленные модификации, отличающиеся процедурами варьирования управления [81, 119]. Также к первой группе можно отнести методы стрельбы, сводящие решение краевой задачи к решению систем алгебраических уравнений. При таком подходе среди методов численного решения большой скоростью сходимости отличаются различные модификации метода Ньютона [68].

Вторую группу представляют методы, основанные на достаточных условиях оптимальности, позволяющие: получить приближенное решение уравнения Беллмана, найти приближенно функцию Кротова [75] (или функцию Беллмана), улучшить имеющееся позиционное управление. Для приближенного решения уравнения Беллмана может быть применен метод характеристик [119]. Функция Кротова определяется неединственным способом, что позволяет создать ряд численных алгоритмов для ее приближенного поиска. Одним из таких подходов является использование рядов Фурье [96], позволяющий получить систему дифференциальных или алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда. Другая идея получения такой системы уравнений реализуется в методе Кротова – Букреева – Гурмана [74]. Для оптимизации позиционного управления могут быть использованы методы первого и второго порядков последовательного улучшения управления, которые являются аналогом условий Кротова.

К третьей группе относятся методы, использующие различные разностные схемы для замены дифференциальных уравнений рекуррентными. Процесс управления заменяется конечной последовательностью значений в узлах сетки. Задача минимизации в функциональном

пространстве становится задачей конечномерной минимизации, для решения которой используются различные численные методы. Здесь применяются: методы вариаций в фазовом пространстве [89, 119] и их разновидности – метод локальных вариаций [76, 126] и метод блуждающей трубки [89]; градиентные методы [68, 98, 119, 122] – метод условного градиента [123], проекции градиента [119], возможных направлений, сопряженных градиентов [45, 119]; а также методы нелинейного программирования [57, 89, 102]. К последним можно отнести эвристические и биоинспирированные методы. Эвристические методы представляют собой обобщенные стратегии поиска экстремума в пространстве решений. В качестве примеров можно выделить "имитацию отжига" и генетические алгоритмы. Биоинспирированные методы представляют собой метаэвристические методы, которые, имитируют процессы в природной среде и поведение некоторых видов животных и растений [92, 94]. Основной особенностью таких методов является возможность поиска глобального экстремума многоэкстремальных целевых функций с большим числом переменных. Сходимость таких методов сильно зависит от выбранных начальных параметров и приближений, что не всегда позволяет получить глобальный оптимум исследуемых функций.

При этом зачастую в задачах оптимального управления, функции требующие оптимизации имеют множество точек локального минимума, среди которых найти глобальный минимум функции, используя вышеперечисленные методы, не удастся. Минимизирующая последовательность, как правило, "сваливается" в локальный минимум. В таких случаях приходится использовать перебор на "сгущающихся" сетках. При своей простоте и достоверности существенным недостатком такого подхода является его неэффективность – большое количество вычислительных операций для получения приемлемой точности решения.

Вместе с задачей оптимального управления гибридными системами [27] также большой интерес представляет задача минимизации количества переключений в непрерывно-дискретных управляемых процессах [36, 41, 110, 111, 114]. Напомним, что под переключением в динамической системе понимается смена режима управляющего устройства. В некоторых классах динамических систем, как отмечалось ранее, такие переключения могут происходить мгновенно и многократно [31]. Основная идея задачи состоит в нахождении такого наименьшего количества переключений, при котором будет достигаться приемлемое значение функционала качества, близкое к оптимальному. Таким образом, минимизацию переключений можно рассматривать как приближенное решение классической задачи управления в классе кусочно-постоянных управлений [41, 110]. При этом постановка задачи может иметь разные типовые ограничения на переключения. Типы задач с переключениями представлены на рисунке В.3.

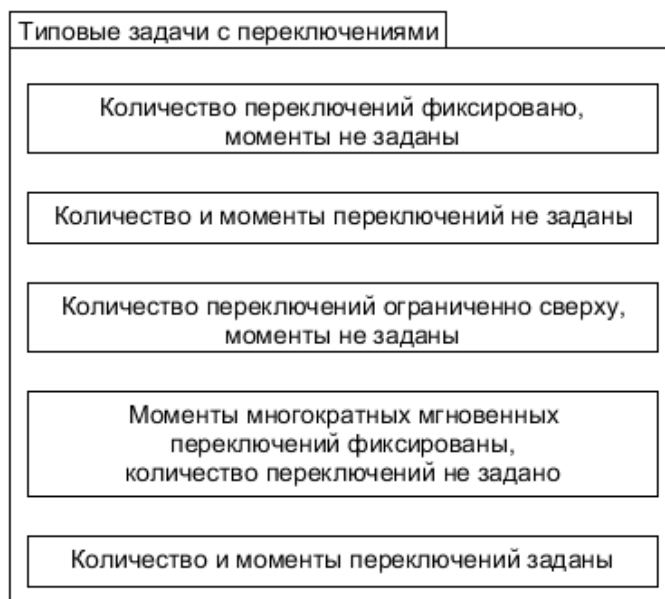


Рисунок В.3 Типовые задачи с переключениями.

Решение типовых задач с переключениями сводится к нахождению функции цены (функции ГЯБ, функции потерь), которая в свою очередь строится из образующих функций цены, представляющих собой вспомогательные функции [27]. Эти функции ищутся рекуррентно, каждой из них соответствует определенное количество переключений. По определению, образующая функция цены равна значению функционала оставшихся потерь [75, 80], вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции, с определенным количеством переключений. "Настоящая" же функция цены является нижней огибающей образующих, т.е. равна их минимальному значению. Оптимальное управление в таких задачах обычно представляет собой целый "*управляющий комплекс*", включающий оптимальное количество переключений, моменты переключений, оптимальное управление непрерывным движением между переключениями и оптимальное управление переключениями (скачками). Рассмотрим подробно типовые задачи с переключениями, представленные на рисунке В.3.

Характерными задачами управления с переключениями, возникающими на практике, являются задачи с фиксированным количеством переключений. В таких задачах требуется найти *условное оптимальное* управление, минимизирующее функционал качества. Здесь под *условным оптимальным* управлением понимается управление, оптимальное при дополнительном условии – заданном (фиксированном) количестве переключений. При такой постановке задачи функция цены совпадает со своей образующей, соответствующей заданному количеству переключений. В

задачах этого типа "управляющий комплекс" составляют: моменты переключений, управление движением между переключениями и оптимальное управление скачками.

Более широкий класс образуют задачи, в которых ограничения на количество переключений отсутствуют. В таких задачах "управляющий комплекс" составляют: количество переключений, моменты переключений, управление движением между переключениями и управления скачками. При отсутствии ограничений на моменты и количество переключений задача оптимизации является наиболее трудоемкой. Основная трудность заключается в том, что оптимальное решение ищется путем последовательного увеличения числа переключений (рекуррентного поиска образующих функций цены), т.е. представляет собой последовательность, которая в виду отсутствия ограничений на количество переключений является не ограниченной сверху и стремится к бесконечности. Пример такой постановки задачи без ограничений на количество и моменты переключений приведен в [19]. В статье рассматривается задача конструирования оптимальной автоматной части ЛДС с линейной динамической частью и квадратичным критерием качества, аналогичной проблеме АКОР Летова – Калмана [75, 80]. В случае отсутствия затрат на переключение, полученная в работе минимизирующая последовательность имеет неограниченное количество переключений в начальный и конечный моменты времени.

В практических задачах все технические устройства имеют ограниченные ресурсы, в частности конечное допустимое количество переключений. Поэтому важный класс образуют задачи с ограниченным количеством переключений. Например, в задаче вывода спутника на геостационарную орбиту используется разгонный блок "Бриз-М" [63], количество включений маршевого двигателя которого ограничено (не более 10 запусков). Это ограничение, разумеется, учитывается при разработке схемы полета. Потребность минимизации количества переключений возникает естественным образом, если затраты на каждое переключение существенные. В этом случае также желательно достичь цели управления с наименьшим количеством переключений. Для решения такой задачи, в отличие от задачи с фиксированным числом переключений, необходимо искать "настоящую" функцию цены, построенную по 10 образующим. Состав "управляющего комплекса" в задачах с ограниченным количеством переключений такой же как в задачах с неограниченным количеством переключений, но рекуррентная процедура построения образующих конечная.

Проще решаются задачи, в которых мгновенные многократные переключения происходят в фиксированные, заранее известные моменты времени, но количество переключений не задано. На практике быстродействие устройства управления, представляемого дискретной частью системы, как правило, гораздо выше, чем скорость непрерывного движения объекта управления. Характерное время принятия решения мало по сравнению с медленно меняющимися

параметрами, описываемыми непрерывной частью системы. Если использовать терминологию быстро-медленного движения, применяемую в механике [88], быстрому движению соответствуют мгновенные многократные переключения дискретной части, а медленному – эволюция (изменение) динамической части. Наличие в системах процессов с мгновенными многократными переключениями не является исключением, встречающимися только в специальных задачах, наоборот они возникают в обычных задачах, связанных с управлением движением летательных аппаратов. Системы с подобными переключениями представлены в первом и третьем разделах диссертации.

Типовая задача с переключениями, в которой количество и моменты переключений заданы, представляет собой классическую задачу управления непрерывно-дискретной системой. Решение подобного типа задач хорошо изучено и описано в [3, 33, 93].

Представленные задачи управления можно разделить по видам оптимизации количества переключений (см. рисунок В.4).

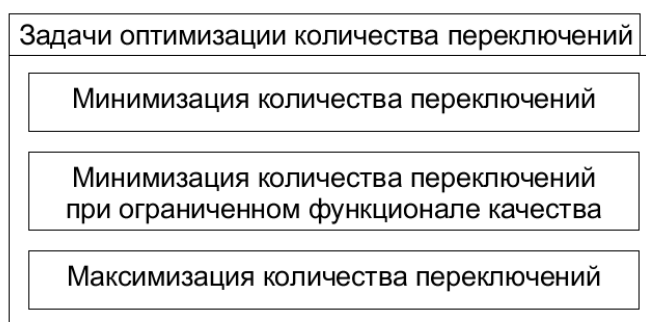


Рисунок В.4. Задачи оптимизаций количества переключений.

Одной из основных задач оптимизации переключений является *задача минимизации количества переключений*. В таких задачах функционалом качества является количество переключений. Примером может служить движение автоматической роботизированной машины по складу с предприятия [38, 115]. Для подхода к месту хранения определенного груза требуется проложить маршрут в обход препятствий. Критерием оптимальности такого маршрута может служить не только его длина, но число поворотов робота-погрузчика. Минимизация количества поворотов (переключений), может быть обусловлена стремлением сократить общее время движения, так как при повороте роботу необходимо снизить скорость или даже остановиться. Подобная задача быстродействия рассмотрена в третьей главе диссертации.

Задача минимизации количества переключений возникает при численном решении задач оптимального управления. В классической постановке управление ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Приближенное решение ищется в "узком" классе кусочно-постоянных

управлений [41, 110]. Основная идея такого подхода заключается в нахождении наименьшего количества переключений, при котором отличие решения в узком классе управлений от точного не превышает заданной погрешности. Условие достижения определенной точности в задаче является нижним ограничением на количество возможных переключений в системе. Поэтому данный вид задачи можно определить как *минимизация количества переключений при ограниченном функционале качества*. Переход от кусочно-непрерывного оптимального управления к приближенному кусочно-постоянному может быть оправдан с практической точки зрения, например, при невозможности физической реализации кусочно-непрерывного управления.

На ряду с задачами минимизации количества переключений существуют задачи *максимизации количества переключений*. В отличие от классической задачи поиска экстремума функции, где переход от поиска минимума к поиску максимума может быть реализован путем замены знака целевой функции на противоположный, в рассматриваемых задачах с переключениями такой подход не может быть применим. Главным препятствием является наличие естественного ограничения – неотрицательности количества переключений. Это ограничение в задаче минимизации – активное, а в задаче максимизации – пассивное.

Практическим примером задачи максимизации количества переключений может являться проблема доставки грузов вертолетом, в заданные пункты назначения, находящиеся в труднодоступных районах страны. Доставка осуществляется с промежуточными остановками в пунктах назначения без возможности дополнительной заправки. Выбор последовательности облета пунктов назначения подлежит оптимизации. В такой постановке задачи остановка в населенном пункте будет являться своего рода переключением. Кроме того, необходимо учитывать грузоподъемность вертолета, а также зависимость характеристик полета от массы перевозимого груза. Еще одним естественным ограничением, которое должно быть учтено, является время, затрачиваемое на осуществление всего маршрута. Требуется составить маршрут движения, обеспечивающий доставку грузов в наибольшее количество пунктов назначения, т.е. максимизировать количество переключений. Отметим, что подобного рода задачи могут быть актуальны непосредственно авиакомпаниям, осуществляющим нерегулярные перевозки грузов или транспортные работы в малонаселенных и труднодоступных регионах. В диссертационной работе проблема максимизации количества переключений не рассматривалась.

Актуальность работы. Важным направлением современного развития теории и практики оптимального управления является исследование и применение гибридных систем. Переключаемые системы представляют собой обширный класс гибридных систем, включающий непрерывно-дискретные, логико-динамические системы, динамических систем с автоматной частью, системы автоматного типа и другие. Теория и практика оптимального управления

переключаемых систем развиваются в настоящее время с нарастающей интенсивностью, так как такие системы имеют широкое применение в авиационной и космической областях, ракетной и роботизированной технике, т.е. напрямую связано с автоматизированием процессов. В переключаемых системах непрерывное изменение состояния описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Дискретные изменения процесса управления моделируют работу автомата с памятью, который осуществляет переключения режимов непрерывного движения объекта управления. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество управления одной траекторией характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени.

Вопросы оптимизации ПС могут возникать в ходе проектирования систем управления подвижными объектами, в частности летательными или космическими аппаратами. Одной из новых проблем, связанных с ПС, являются задачи оптимизации количества переключений. В настоящей диссертационной работе рассматриваются задачи минимизации количества переключений таких систем. Важно отметить, что при возрастающем интересе к исследованиям ПС, вопросы связанные с минимизацией количества переключений ранее не исследовались.

В задачах оптимального управления ПС проблема минимизации количества переключений может возникать при поиске приближенного решения заданной точности. Например, в классических задачах оптимального управления непрерывными системами допустимое управление, как правило, кусочно-непрерывное [14]. В некоторых случаях для упрощения решения можно сузить множество допустимых управлений, например, до кусочно-постоянных с фиксированным числом переключений и искать решение в этом узком классе. Разумеется, при этом будем получать субоптимальное управление, которое, однако, при неограниченном росте количества переключений будет стремиться к оптимальному. Здесь возникает вопрос: при каком количестве переключений субоптимальное управление будет достаточно близким (по функционалу качества) к оптимальному управлению с прикладной точки зрения? Другим очевидным приложением задач минимизации переключений служит классическая задача аппроксимации, в которой требуется определить наименьшее количество частичных отрезков аппроксимации, чтобы погрешность не превышала допустимую [116]. Заметим также, что проблема минимизации количества переключений нередко встречается в прикладных задачах, в которых число переключений, как правило, ограничено. Таким образом минимизация количества переключений является важной составляющей решения задач оптимального управления ПС с заданным уровнем точности.

Кроме того, минимизации количества переключений может быть актуальна в задачах быстрогодействия, планирования и оптимизации маршрутов движения управляемых объектов [43]. В таких задачах изменение направления движения (поворот) считается переключением. Обычно, на практике, поворот сопровождается дополнительными ресурсными затратами. Например, при управлении грузовым автомобилем или погрузчиком на складе наличие большого количества поворотов ведет к увеличению времени движения из-за необходимости снижения скорости при повороте. Другим примером является задача планирования маршрута полета БПЛА. Каждая посадка для заряда (замены) аккумуляторов считается переключением, которая требует дополнительных затрат. Поэтому задача минимизации числа переключений является важной составляющей при планировании оптимальных маршрутов движения.

Таким образом, при возрастающем интересе исследований ПС, проблема минимизации количества переключений представляется актуальной с практической и теоретической точки зрения. Необходимость исследований определяется современными задачами проектирования сложных авиационных, ракетно-космических и роботизированных систем, а полученные результаты имеют практическую направленность и могут быть использованы при создании прикладных систем автоматического управления.

Целью работы является создание методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

В диссертации решаются задачи:

- 1) минимизации количества переключений в линейно-квадратичной задаче синтеза оптимального управления гибридной системой;
- 2) минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального кусочно-непрерывного управления динамическими системами;
- 3) планирования и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата с промежуточными условиями и при наличии препятствий;
- 4) разработки алгоритмов и программных комплексов для численного решения задач оптимального управления ПС.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались математическое моделирование, математическая теория управления, теория дифференциальных уравнений, системный анализ, теория оптимизации, численные методы. Для разработки программного комплекса и проведения вычислительного эксперимента использовались современные компьютерные технологии.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты: разработаны алгоритм и программный комплекс решения ЛКЗ синтеза оптимального управления переключаемыми системами; доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами; разработаны численно-аналитические методы минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального управления непрерывными системами; доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова-Дубинса [11, 84, 134] с промежуточными условиями; разработаны алгоритм и программный комплекс для решения задачи планирования и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата с промежуточными условиями и при наличии препятствий.

Практическая значимость. В диссертационной работе разработаны алгоритмы решения задач анализа и синтеза оптимального управления ПС с учетом минимизации количества переключений, которые могут быть применимы в авиационной и космической областях, а также в робототехнике. Разработаны два программно-вычислительных комплекса:

1. Синтез оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления;
2. Оптимизация маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий.

Получены свидетельства о государственной регистрации (№ 2019614061 от 27 марта 2019 г. [42], №2021619328 от 08 июня 2021 г. [39]).

Достоверность результатов. Разработанные алгоритмы имеют теоретическое обоснование. Диссертация содержит приближенные и аналитические решения академических примеров, демонстрирующих эффективность предлагаемых алгоритмов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на восьми научных конференциях: 17-я Международная конференция "Авиация и космонавтика" (Москва, 2018 год), XLV Международная молодежная научная конференция "Гагаринские чтения" (Москва, 2019 год), 18-я Международная конференция "Авиация и космонавтика" (Москва, 2019 год), XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2019 год), XLVI Международная молодежная научная конференция "Гагаринские чтения" (Москва, 2020 год), Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2020 год), 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика" (Москва, 2020 год), XLVII Международная молодежная научная конференция "Гагаринские чтения" (Москва, 2021 год). На XLV и XLVI и Международных молодежных научных конференциях "Гагаринские чтения" в секции "Теория управления и оптимизация" представленные работы заняли I места в 2019 и 2020 годах.

Работа выполнялась и докладывалась на кафедре "Математическая кибернетика" Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Представленные в диссертационной работе результаты использованы в научно-исследовательских работах, поддержанных грантом РФФИ №18-08-00128-а "Методы оценивания состояния и синтеза переключаемых систем управления подвижными объектами в конфликтной среде при ограниченных ресурсах".

Личный вклад. Все излагаемые в диссертации результаты получены лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки исследуемых задач и условия оптимальности переключаемых систем.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в шести статьях [35, 36, 41, 43, 113, 116] и журналах, входящих в Перечень ВАК, в том числе две статьи [36, 41] опубликованы в журналах, индексируемых в международных базах Web of Science и SCOPUS, а также в трудах научных конференций [37, 38, 40, 110, 111, 112, 114, 115]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ [39, 42]. Всего по теме диссертации опубликовано 16 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов основной части, заключения, списка использованных источников (153 наименования). Работа изложена на 97 страницах, содержит 23 иллюстрации и 1 таблицу.

В первом разделе диссертационной работы рассматривается задача оптимального управления переключаемой системой, непрерывное изменение состояния которой описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы и определяются в процессе оптимизации. Система допускает наличие мгновенных многократных переключений. Качество управления характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение.

Вместе с задачей синтеза оптимального позиционного управления решается задача нахождения минимального количества переключений, при котором значение функционала качества не превышает заданной величины. На основе достаточных условий разработана методика и алгоритм, позволяющий свести задачу синтеза ПС к последовательности задач синтеза непрерывно-дискретных систем с фиксированными моментами переключений с последующей их оптимизацией. Разработанная методика демонстрируется на академическом примере ЛКЗ синтеза оптимальной системы с переключением каналов управления. Особенностью рассматриваемой ЛКЗ является неквадратичность функции цены, что усложняет процедуру синтеза. Проведен анализ численного решения задачи при разных начальных условиях и параметрах.

Во втором разделе рассматривается классическая задача оптимального управления непрерывными системами, в которой допустимое управление – кусочно-непрерывное [14] (либо ограниченное измеримое [99]). Заменяя множество кусочно-непрерывных управлений кусочно-постоянными, получаем задачу управления ПС. Оптимальное управление ПС является субоптимальным для исходной классической задачи, так как класс допустимых управлений более узкий. На основе необходимых условий оптимальности ПС доказываются условия оптимальности кусочно-постоянного управления с учетом затрат на переключения. Разработан численно-аналитический алгоритм решения поставленной задачи, основанный на необходимых условиях оптимальности ПС. Применение алгоритма демонстрируется на академическом примере задачи оптимального гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами в классе кусочно-постоянных управлений. Получено субоптимальное кусочно-постоянное управление с минимальным количеством переключений, обеспечивающее заданную точность (по функционалу) в сравнении с оптимальным кусочно-непрерывным управлением.

В третьем разделе рассматриваются задачи оптимизации маршрутов плоского движения управляемых объектов при наличии препятствий [43]. Решаются разные задачи оптимизации маршрутов движения по прямоугольной сетке, а также оптимизации траекторий (Маркова-Дубинса [11, 84, 134]) движения БПЛА с промежуточными условиями. На основе условий оптимальности переключаемых систем [22] разработаны алгоритмы решения этих задач, в частности двухэтапный алгоритм построения оптимальной траектории движения БПЛА.

В четвертом разделе рассмотрены математические модели гибридных систем с мгновенными многократными переключениями. Описаны методы синтеза и особенности оптимизации переключений в таких системах. Приведены описания программных комплексов, реализующих алгоритмы синтеза оптимального управления ПС для решения линейно-квадратичной задачи, и для решения задач оптимизации маршрутов плоского движения управляемых объектов при наличии препятствий.

В заключении сформулирован основной итог диссертации – разработка методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Поставлена и исследована новая задача минимизации количества переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов функционирования гибридных систем. Доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами с учетом затрат на переключения управления, необходимые условия

оптимальности траектории Маркова-Дубинса с заданными промежуточными состояниями (области исследования 1 и 2 специальности 2.3.1). Разработаны методы и алгоритмы решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления переключаемой системой, задачи оптимального плоского движения объекта по карте с препятствиями (область исследования 4 специальности 2.3.1).

Основные научные результаты, выносимые на защиту:

- 1) поставлена и исследована задача минимизации количества переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов функционирования гибридных систем;
- 2) разработаны численно-аналитический метод решения линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления гибридными системами с мгновенными многократными переключениями и реализующий его программный комплекс;
- 3) доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами с учетом затрат на переключения управления; разработан метод применения условий оптимальности кусочно-постоянного управления для приближенного решения задачи оптимального кусочно-непрерывного управления;
- 4) на основе достаточных условий оптимальности решены задачи быстрого действия и минимизации количества переключений (поворотов) для разных моделей плоского движения объекта управления по карте с препятствиями;
- 5) доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова-Дубинса с заданными промежуточными состояниями, на основе которых разработаны алгоритм решения задачи оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата при наличии препятствий, а также реализующий его программный комплекс.

1. МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается задача оптимального управления переключаемой системой, непрерывное изменение состояния которой описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество управления характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. Вместе с задачей синтеза оптимального позиционного управления решается задача нахождения минимального количества переключений, при котором значение функционала качества не превышает заданной величины.

На основе достаточных условий оптимальности разработана методика решения поставленной задачи и численно-аналитический алгоритм решения ЛКЗ. Применение последнего демонстрируется на академическом примере.

1.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.2)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i = g(t_i, x_{i-}, v_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2) обозначены: $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $i \in \mathcal{N}$, $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$; $u(t)$ – управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T$, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^p$; U – заданное множество допустимых значений управления. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) опускается ($i \notin \mathcal{N}$), а значение управления $u(t_i)$ в этой точке t_i несущественно. В уравнении (1.3) $x_i \triangleq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i -го переключения, а x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i -м переключением:

$$x_{i-} \triangleq \begin{cases} x(t_i - 0), & t_{i-1} < t_i, \\ x_{i-1}, & t_{i-1} = t_i; \end{cases}$$

v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V \subseteq \mathbb{R}^q$; V – заданное множество допустимых управлений переключениями. Функция $f: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на всей области определения вместе с производной $\partial f/\partial x$; функция $g: T \times X \times V \rightarrow X$ ограничена. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [22, 27].

Начальное состояние системы задано

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) не исключает одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0 , поскольку первые несколько моментов переключений (1.1) могут совпадать. Момент t_F окончания процесса управления задан, а конечное состояние свободно – терминальных ограничений нет.

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ составляют наборы $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие: неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ моментов переключений; траекторию $x(\cdot)$, составленную из функций $x: T_i \rightarrow X$, абсолютно непрерывных на каждом ненулевом (по длине) промежутке T_i , $i \in \mathcal{N}$; управление непрерывным движением – ограниченную измеримую на T функцию $u: T \rightarrow U$ и управление переключениями – последовательность $\{v\} \triangleq \{v_i\}_{i=1}^N$ векторов $v_i \in V$; причем пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ удовлетворяют уравнению (1.2) почти всюду на каждом промежутке T_i , $i \in \mathcal{N}$, тройки (x_{i-}, x_i, v_i) , $i = 1, \dots, N$, на \mathcal{T} удовлетворяют рекуррентному уравнению (1.3); в начальный момент времени выполняется условие (1.4). Подчеркнем, что количество $N = |\mathcal{T}|$ переключений и моменты $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F(x(t_F)), \quad (1.5)$$

где функции $f^0: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ и $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и ограничены снизу, а функция $g^+: T \times X \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ неотрицательная, $g^+(\cdot) \geq 0$. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое $g^+(t_i, x_{i-}, v_i)$ в (1.5) как затраты (или "штраф") при переключении $x_{i-} \rightarrow x_i$. В силу непрерывности функции $f^0(t, x, u)$ по всем аргументам функция $f^0[t] = f^0(t, x(t), u(t))$ будет измеримой и ограниченной, т.е. суммируемой, для любого допустимого процесса $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$. Поэтому функционал (1.5) определен на $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. Отметим, что в функционале (1.5) количество переключений N и моменты переключений не заданы, а находятся в результате оптимизации.

1.1.1. Задача оптимального управления

Требуется найти минимальное значение функционала (1.5) и оптимальный процесс $d^* = (\mathcal{J}^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d). \quad (1.6)$$

Если наименьшее значение (1.6) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [75]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие не отрицательности функции g^+ в (1.5):

$$g^+(t, x_i, v_i) \geq \text{const} > 0.$$

Применение таких "штрафов" в функционале качества исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

1.1.2. Задача управления с фиксированным числом переключений

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (1.5) на множестве допустимых траекторий с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ – множество допустимых процессов из $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ с N переключениями, быть может, фиктивными. Подчеркнем, что количество переключений N у всех процессов из $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ одинаковое (равное N), но моменты переключений (1.1) у разных процессов могут не совпадать. Обозначим через $I_N(t_0, x_0, d)$ функционал (1.5) при фиксированном количестве переключений N . Он определен на подмножестве $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ множества $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. Требуется найти минимальное значение функционала (1.5) на множестве $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ и процесс $d^N \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_N(t_0, x_0, d^N) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)} I_N(t_0, x_0, d). \quad (1.7)$$

Такой процесс d^N будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном количестве переключений N .

Поставленные задачи (1.6) и (1.7) представляют собой так называемые задачи со свободным конечным состоянием и фиксированным временем. В более общей постановке [75] на правый конец траектории могут быть наложены терминальные ограничения. Отметим, что поставленные задачи являются частным случаем задачи оптимального управления со сменой модели движения [29].

1.1.3. Задача минимизации количества переключений

В отличие от классических задач оптимального управления [75, 99] для ПС можно сформулировать новые задачи, связанные именно с количеством переключений. Например, в технических приложениях актуальна задача минимизации количества переключений управляемого процесса при обязательном достижении цели управления. Математическая формулировка такой технической задачи может быть следующей. Для ПС (1.1) – (1.4) требуется найти наименьшее количество переключений N^ε , при котором наименьшее значение функционала $I_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, d)$ не превосходит заданной величины ε :

$$\min_{d \in \mathcal{D}_{N^\varepsilon}(t_0, x_0)} I_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, d) \leq \varepsilon. \quad (1.8)$$

В задаче (1.6) вместе с оптимальным управлением нужно найти и оптимальное количество переключений, в задаче (1.7) количество переключений N фиксировано, поэтому нужно получить только условное (с N переключениями) оптимальное управление. В задаче (1.8) нужно искать минимальное количество переключений N^ε , при котором условное (с N^ε переключениями) оптимальное управление обеспечивает достижение заданного уровня ε функционала качества. Заметим, что вопрос минимизации переключений возникает при численном (приближенном) решении разных задач, например при аппроксимации функций. В этом случае величина $\varepsilon > 0$ задает точность приближенного решения.

1.1.4. Линейно-квадратичная задача управления

Пусть уравнения (1.2), (1.3) движения системы линейные:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.9)$$

$$x_i = A_{t_i}x_{i-} + B_{t_i}v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.10)$$

а функционал (1.5) – квадратичный:

$$\begin{aligned} I(t_0, x_0, d) = & \int_{t_0}^{t_F} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) C(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) D(t) u(t) \right\} dt + \\ & + \sum_{i=1}^N \left\{ \lambda_{t_i} + \frac{1}{2} x_i^T C_{t_i} x_i + \frac{1}{2} v_i^T D_{t_i} v_i \right\} + \frac{1}{2} x^T(t_F) F x(t_F). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ограничений на состояние системы и на значения управления нет, т.е. $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^p$ и $V = \mathbb{R}^q$. Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ размеров $n \times n$, $n \times p$, $n \times n$, $p \times p$ ограничены и измеримы на T , матрицы A_t , B_t , C_t , D_t соответствующих размеров ограничены на T . Матрицы $C(t)$, $D(t)$, C_t , D_t и F – симметрические, причем $C(t)$, C_t , F – неотрицательно определенные, а $D(t)$, D_t – положительно определенные. Величина λ_t неотрицательная при всех $t \in T$. Линейно-

квадратичная задача (ЛКЗ) может быть поставлена как задача оптимального управления, (раздел 1.1.1 или 1.1.2) либо как задача минимизации переключений (раздел 1.1.3).

1.2. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ И ОБРАЗУЮЩИЕ

Применение динамического программирования [10] для получения достаточных условий оптимальности позиционного управления связано с понятием функции цены (функции ГЯБ). Для ПС функция цены строится при помощи вспомогательных функций, так называемых образующих функции цены [22, 29]. Определим вспомогательные функции для задачи (1.6)

Обозначим через $\mathcal{D}(t, x)$ множество допустимых процессов, удовлетворяющих начальному условию $x(t) = x$, каждый из которых имеет конечное число переключений на $[t, t_F]$. Оставшиеся переключения происходят в моменты t_1, \dots, t_k , образующие неубывающую последовательность на промежутке $[t, t_F]$:

$$t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F. \quad (1.12)$$

Заметим, что количество k оставшихся переключений и сами моменты t_1, \dots, t_k переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{D}(t, x)$ допустимых процессов определим функционал оставшихся потерь, аналогичный (1.5):

$$I(t, x, d) = \int_t^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^k g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F(x(t_F)). \quad (1.13)$$

Функция цены $\varphi(t, x)$ по определению равна значению функционала оставшихся потерь (1.13), вычисленному на оптимальном процессе с начальным условием $x(t) = x$. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (1.13) на множестве допустимых процессов $\mathcal{D}(t, x)$:

$$\varphi(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}(t, x)} I(t, x, d).$$

Для задачи (1.6) определим *образующую* функции цены, значение $\varphi^k(t, x)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь (1.13), вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции (t, x) и имеющих ровно k переключений. Если обозначить через $\mathcal{D}_k(t, x)$ множество допустимых процессов из $\mathcal{D}(t, x)$, имеющих ровно k переключений, а через $I_k(t, x, d)$ – функционал (1.13) при фиксированном количестве k оставшихся переключений, то

$$\varphi^k(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}_k(t, x)} I_k(t, x, d). \quad (1.14)$$

Функцию $\Phi(t, x | t_1, \dots, t_k)$, равную значению функционала оставшихся потерь (1.13), вычисленному на траектории, которая оптимальна среди всех допустимых траекторий,

исходящих из начальной позиции (t, x) и имеющих k переключений, которые происходят в моменты времени t_1, \dots, t_k , образующие неубывающую последовательность (1.12), назовем k -моментной функцией цены. Если обозначить через $\mathcal{D}(t, x | t_1, \dots, t_k)$ множество допустимых процессов из $\mathcal{D}_k(t, x)$ с k переключениями в моменты времени (1.12), то

$$\phi(t, x | t_1, \dots, t_k) = \min_{d \in \mathcal{D}(t, x | t_1, \dots, t_k)} I_k(t, x, d). \quad (1.15)$$

По определению полагаем, что 0-моментная функция цены совпадает с нулевой образующей, т.е. $\phi(t, x) = \varphi^0(t, x)$.

Можно сказать, что моментная функция цены представляет собой функцию цены при дополнительном условии – фиксированных моментах переключений. Заметим, что образующая функции цены определяется аналогичным способом, а именно множество допустимых процессов сужается при помощи одного дополнительного условия – задания количества переключений. Поэтому образующая функции цены и моментная функция цены являются условными функциями цены [22]. Однако, лучше использовать разные термины и обозначения.

Согласно определениям, функция цены является нижней огибающей своих образующих

$$\varphi(t, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t, x), \quad (1.16)$$

где \mathbb{Z}_+ – множество целых неотрицательных чисел. Образующая связана с моментной функцией цены равенством

$$\varphi^k(t, x) = \min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t, x | t_1, \dots, t_k). \quad (1.17)$$

Подставляя (1.16) в (1.17), можно представить функцию цены через ее моментные функции

$$\varphi(t, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t, x | t_1, \dots, t_k). \quad (1.18)$$

Наименьшее значение функционала (1.13) вычисляется по функции цены

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t, x)} I(t, x, d) = \varphi(t, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t, x | t_1, \dots, t_k).$$

Вспомогательные функции (1.14), (1.15) аналогичны функциям, введенным в [22]. Отличие заключается в том, что условные функции цены в [22] зависели только от момента первого переключения из k оставшихся, а моментная функция (1.15) зависит от всех моментов переключений (1.12).

1.3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕНЫ

Выведем уравнения, которым удовлетворяют моментные функции цены и образующие. Метод динамического программирования отвечает принципу оптимальности Беллмана, согласно которому "*последний участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией*". Для оптимальных траекторий с фиксированным числом переключений из принципа оптимальности Беллмана вытекает следствие: "*участок оптимальной траектории с k*

переключениями после первого переключения является оптимальной траекторией с $k - 1$ переключениями". Используем эту формулировку при выводе уравнений.

Предполагаем, что все моментные функции имеют частные производные по t и x . Нулевую образующую или 0-моментную функцию цены ($\phi(t, x) = \phi^0(t, x)$) находим как значение функционала (1.13) на оптимальном процессе $(x(\cdot), u(\cdot))$ без переключений. Эта функция удовлетворяет уравнению ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x) + \phi_x(t, x)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0 \quad (1.19)$$

с терминальным условием

$$\phi(t_F, x) = F(x). \quad (1.20)$$

Одномоментная функция цены $\phi(t, x|t_1)$ вычисляется на оптимальных траекториях с одним переключением в момент времени $t_1 \geq t$. До переключения процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ управления оптимальный. Поэтому до переключения одномоментная функция цены удовлетворяет уравнению

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x|t_1) + \phi_x(t, x|t_1)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

при всех $t \leq t_1$. В момент переключения $t_1 \in [t, t_F]$ оптимальная траектория имеет разрыв, после которого она уже непрерывна, а значение функционала оставшихся потерь определяется 0-моментной функцией цены. Поэтому в момент переключения t_1 одномоментная функция цены выражается через 0-моментную функцию, согласно равенству

$$\phi(t_1, x|t_1) = \min_{v \in V} [\phi(t_1, g(t_1, x, v)) + g^+(t_1, x, v)].$$

Итак, получены уравнения для одномоментной функции цены. Остальные моментные функции находятся аналогично. Пусть известна $(k - 1)$ -моментная функция цены $\phi(t, x|t_1, \dots, t_{k-1})$. Получим следующую k -моментную функцию $\phi(t, x|t_1, \dots, t_k)$. Для этого нужно решить уравнение

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0 \quad (1.21)$$

с терминальным условием

$$\phi(t_1, x|t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V} [\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)] \quad (1.22)$$

для всех $(t, x) \in T \times X, t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F$.

Таким образом, последовательность моментных функций строится в результате рекуррентной процедуры, которая начинается с решения уравнения ГЯБ (1.19) с терминальным условием (1.20) и продолжается решением уравнения (1.21) с условием (1.22) при $k = 1, 2, \dots$. По каждой моментной функции можно найти соответствующую образующую функции цены по формуле (1.17), а по всем образующим – функцию цены, согласно (1.16).

Моментные функции цены по сравнению с условными функциями цены [22] имеют переменное количество аргументов, которое увеличивается, согласно описанной процедуре. Отметим, что операцию поиска оптимальных моментов переключения при построении моментных функций цены не обязательно выполнять после каждого шага. Ее можно отложить на несколько шагов и выполнить после нескольких итераций. Такая возможность оказывается полезной, например, при решении линейно-квадратичных задач оптимального управления.

Для построения моментных функций цены можно использовать решение вспомогательной задачи Больца

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \\ I &= \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.23)$$

В этой задаче начальная позиция и момент окончания процесса управления заданы, а конечное состояние – свободно. Обозначим ее решение через $\Phi(t_0, x_0 | t_1, F(\cdot))$, подчеркивая зависимость от терминального члена функционала (1.23). Функция $(t, x) \rightarrow \Phi(t, x | t_1, F(\cdot))$ удовлетворяет уравнению ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\Phi_t(t, x | t_1, F(\cdot)) + \Phi_x(t, x | t_1, F(\cdot)) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием

$$\Phi(t_1, x | t_1, F(\cdot)) = F(x).$$

Фактически функция $\Phi(t_0, x_0 | t_1, F(\cdot))$ является функционалом, так как зависит от функции $F(\cdot)$. Будем ее называть функционалом цены в задаче Больца (1.23). Нахождение этого функционала представляется довольно сложной задачей из-за произвольности функции $F(\cdot)$. Поэтому для решения целесообразно ограничить класс функций $F(\cdot)$. Например, представить каждую функцию в виде ряда с конечным числом членов, т.е. задать конечным числом параметров (коэффициентами ряда). В линейно-квадратичных задачах терминальное слагаемое является квадратичной формой и определяется ее матрицей. В этом случае решение задачи Больца (1.23) известно.

Выразим моментные функции цены через этот функционал. Для 0-моментной функции цены $\phi(t, x)$ (или нулевой образующей $\varphi^0(t, x)$) по определению имеем

$$\phi(t, x) = \varphi^0(t, x) = \Phi(t_0, x_0 | t_1, F(\cdot)). \quad (1.24)$$

Одномоментная функция в момент переключения t_1 находится по 0-моментной функции, согласно уравнению

$$\phi(t_1, x | t_1) = \min_{v \in V} [\Phi(t_1, g(t_1, x, v)) + g^+(t_1, x, v)].$$

До момента переключения она представляется через функционал цены в задаче Больца

$$\Phi(t, x|t_1) = \Phi(t, x|t_1, \Phi(t_1, \cdot |t_1)), \quad t < t_1.$$

Для k -моментной функции цены $\Phi(t, x|t_1, \dots, t_k)$ аналогично получаем следующие уравнения. В момент $t = t_1$ первого из k оставшихся переключений она удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Phi(t_1, x|t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V} [\Phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

До момента первого переключения (при $t_0 \leq t < t_1$) она выражается через функционал цены

$$\Phi(t, x|t_1, \dots, t_k) = \Phi(t, x|t_1, \Phi(t_1, \cdot |t_1, \dots, t_k)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

Таким образом, моментные функции цены находятся в результате рекуррентной процедуры (1.25), (1.26), которая начинается с 0-моментной функции цены (1.24), т.е. с функции ГЯБ для процессов без переключений.

1.4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

При решении уравнений (1.16), (1.17), (1.19), (1.21), (1.22) выполняются пять операций минимизации. В результате минимизации левой части (1.19) определяется оптимальное позиционное управление

$$\mathbf{u}(t, x) = \operatorname{argmin}_{u \in U} [\Phi_t(t, x) + \Phi_x(t, x)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] \quad (1.27)$$

непрерывным движением при отсутствии переключений. Минимизируя левую часть (1.21), получаем условное позиционное управление

$$\mathbf{u}(t, x|t_1, \dots, t_k) = \operatorname{argmin}_{u \in U} [\Phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \Phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)]. \quad (1.28)$$

При минимизации правой части (1.22) определяются оптимальное позиционное управление первым переключением системы из k оставшихся:

$$\mathbf{v}(t_1, x|t_2, \dots, t_k) = \operatorname{argmin}_{v \in V} [\Phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)]. \quad (1.29)$$

Минимизация (1.17) позволяет определить оптимальные моменты оставшихся k переключений

$$\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k\} = \operatorname{argmin}_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \Phi(t, x|t_1, \dots, t_k). \quad (1.30)$$

Точки минимума (1.27) – (1.30) находятся при дополнительном условии – заданном количестве k оставшихся переключений, а оптимальное количество переключений определяется в результате минимизации (1.16) или (1.18):

$$\mathbf{k}(t, x) = \operatorname{argmin}_{k \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \Phi(t, x|t_1, \dots, t_k). \quad (1.31)$$

Позиционные конструкции (1.27) – (1.31) позволяют найти оптимальный процесс. Действительно, пусть система находится в позиции (t_0, x_0) , т.е. удовлетворяет начальным условиям (1.4). Для этой позиции определяем оптимальное количество оставшихся

переключений $N = \mathbf{k}(t_0, x_0)$, а также оптимальные моменты $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N\}$ переключений. Если $\mathbf{t}_1 = t_0$, то первое переключение происходит в начальный момент времени. Система сразу совершает скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(\mathbf{t}_1, x_0, v_1)$ под действием управления $v_1 = \mathbf{v}(\mathbf{t}_1, x_0 | \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_N)$. Если $\mathbf{t}_1 > t_0$, то сначала на промежутке $[t_0, \mathbf{t}_1]$ происходит непрерывное движение, согласно уравнению (1.2), с программным управлением $u(t) = \mathbf{u}(t, x(t) | \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N)$, а в конце этого промежутка из состояния $x_{1-} = x(\mathbf{t}_1 - 0)$ происходит скачок $x_{1-} \rightarrow x_1 = g(\mathbf{t}_1, x_{1-}, v_1)$ под действием управления $v_1 = \mathbf{v}(\mathbf{t}_1, x_{1-} | \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_N)$. И в том, и в другом случае система приходит в позицию (\mathbf{t}_1, x_1) , в которой выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений (оно равно $N - 1$) и оптимальных моментов переключений, так как они уже найдены $\{\mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_N\}$. Если в начальной позиции (t_0, x_0) оптимальное количество переключений равно нулю: $\mathbf{k}(t_0, x_0) = 0$, то переключений нет и непрерывное движение системы совершается, согласно уравнению (1.2), под действием программного управления $u(t) = \mathbf{u}(t, x(t))$.

Таким образом, оптимальное позиционное управление для рассматриваемых систем представляет собой целый "управляющий комплекс", состоящий из функций: $\mathbf{u}(t, x)$ и $\mathbf{u}(t, x | \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k)$ – условные оптимальные управления (1.27), (1.28) непрерывным движением системы, $\mathbf{v}(\mathbf{t}_1, x | \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_k)$ – условное оптимальное управление (1.29) переключениями, $(t, x) \rightarrow \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k\}$ – оптимальные моменты (1.30) оставшихся k переключений, $\mathbf{k}(t, x)$ – оптимальное количество (1.31) переключений процесса, исходящего из позиции (t, x) .

1.4.1. Достаточные условия оптимальности

В формулировке достаточных условий оптимальности для задачи (1.1) – (1.6) используются "управляющий комплекс" позиционных конструкций (1.27) – (1.31). Согласно теореме [36]: *если существует последовательность моментных функций $\phi(t, x | \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих на области определения уравнениям (1.20) – (1.23), то для оптимальности допустимого процесса $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\}) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$ с моментами переключений $\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N\}$, образующими неубывающую последовательность (1.1), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$N = \mathbf{k}(t_0, x_0),$$

$$\phi(t, x | \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N) = \min_{t \leq \mathbf{t}_1 \leq \dots \leq \mathbf{t}_N \leq t_F} \phi(t, x | \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N), \quad (1.32)$$

$$u(t) = \mathbf{u}(t, x(t) | \mathbf{t}_{i+1}, \dots, \mathbf{t}_N), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.33)$$

$$v_i = \mathbf{v}(\mathbf{t}_i, x_{i-} | \mathbf{t}_{i+1}, \dots, \mathbf{t}_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.34)$$

где $T_i = [\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1})$, $\mathcal{N} = \{i = 0, 1, \dots, N | \mathbf{t}_i < \mathbf{t}_{i+1}\}$. При $N = 0$ равенства (1.32), (1.34) опускаются, а условие (1.33) принимает вид

$$u(t) = \mathbf{u}(t, x(t)), \quad t \in T.$$

При доказательстве теоремы показывается [36], что моментная функция цены (1.32) совпадает с функцией цены (1.18).

1.4.2. Алгоритм синтеза оптимального "управляющего комплекса"

Опишем алгоритм синтеза "управляющего комплекса" позиционных конструкций, выполняющего роль оптимального позиционного управления.

Шаг 0. Решая уравнение ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x) + \phi_x(t, x)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием

$$\phi(t_F, x) = F(x),$$

находим 0-моментную функцию цены $\phi(t, x)$ (функцию цены в задаче без переключений) и оптимальное позиционное управление непрерывным изменением состояния системы

$$\mathbf{u}(t, x) = \operatorname{argmin}_{u \in U} [\phi_t(t, x) + \phi_x(t, x)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)].$$

Полагая $k = 1$, переходим к шагу k .

Шаг k . Решая рекуррентное уравнение

$$\phi(t_1, x|t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V} [\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)], \quad (1.35)$$

выражаем позиционное управление первого из оставшихся k переключений

$$\mathbf{v}(t_1, x|t_2, \dots, t_k) = \operatorname{argmin}_{v \in V} [\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)].$$

Решая уравнение ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием (1.35), находим k -моментную функцию цены $\phi(t, x|t_1, \dots, t_k)$ и оптимальное позиционное управление непрерывным изменением состояния системы до первого из оставшихся k переключений:

$$\mathbf{u}(t, x|t_1, \dots, t_k) = \operatorname{argmin}_{u \in U} [\phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k)f(t, x, u) + f^0(t, x, u)].$$

Проверяем условие окончания. Таких условий может быть несколько. Общим условием окончания синтеза служит неравенство

$$\min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_F} \phi(t, x|t_1, \dots, t_{k-1}) \leq \min_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t, x|t_1, \dots, t_k), \quad (1.36)$$

если оно выполняется для всех позиций $(t, x) \in T \times X$. Неравенство (1.36) означает, что оптимальный процесс с k переключениями, начинающийся в любой стартовой позиции $(t, x) \in T \times X$, не лучше процесса с $k - 1$ переключением. Тогда процесс с большим, чем k , количеством переключений также будет хуже (точнее, не лучше), чем процесс с $k - 1$ переключением,

поскольку затраты на каждое переключение неотрицательные. Проверять, однако, это общее условие окончания синтеза затруднительно. Как правило, при вычислениях задают максимальное допустимое количество N переключений. Тогда нужно проверять условие $k > N$.

При решении задачи минимизации количества переключений условием окончания служит неравенство (1.8), которое можно записать при помощи k -моментной функции цены

$$\min_{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t_0, x_0 | t_1, \dots, t_k) \leq \varepsilon. \quad (1.37)$$

Если неравенство выполняется, то большего, чем k количества переключений не требуется.

Таким образом, если условие окончания выполняется, то процедура синтеза заканчивается, в противном случае полагаем $k := k + 1$ и переходим к шагу k .

В результате N шагов рекуррентной процедуры находятся моментные функции цены $\phi(t, x)$, $\phi(t, x | t_1)$, ..., $\phi(t, x | t_1, \dots, t_N)$, условные оптимальные позиционные управления непрерывным движением системы $\mathbf{u}(t, x)$, $\mathbf{u}(t, x | t_1)$, ..., $\mathbf{u}(t, x | t_1, \dots, t_N)$ и переключениями $\mathbf{v}(t_1, x)$, $\mathbf{v}(t_1, x | t_2)$, ..., $\mathbf{v}(t_1, x | t_2, \dots, t_N)$. Минимальное значение функционала качества (1.5) с не более чем N переключениями вычисляется по формуле

$$\min I(t_0, x_0, d) = \min_{k=0, \dots, N} \min_{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \phi(t_0, x_0 | t_1, \dots, t_k).$$

С помощью оптимального позиционного управления можно найти условный оптимальный процесс $(T, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ для любого начального состояния $x_0 \in X$ системы (см. раздел 1.4). Это оптимальный процесс с не более чем N переключениями. Если же процедура синтеза была закончена при выполнении общего условия (1.37) с $k = N$, то условный оптимальный процесс будет оптимальным.

1.5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается применение достаточных условий для линейно-квадратичной задачи оптимального управления.

1.5.1. Вспомогательная линейно-квадратичная задача Больца

Для ЛКЗ (1.9)–(1.11) синтеза ПС вспомогательная задача Больца имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \\ I &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t)C(t)x(t) + \frac{1}{2} u^T(t)D(t)u(t) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)Fx(t_1) + \lambda \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где λ – скалярный параметр. Как известно [80], функция цены в ЛКЗ (1.38) квадратичная:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t) x + \lambda, \quad (1.39)$$

причем симметрическая неотрицательно определенная матрица $\Phi(t)$ порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{\Phi}(t) + A^T(t)\Phi(t) + \Phi(t)A(t) + C(t) - \Phi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t) = 0 \quad (1.40)$$

с терминальным условием $\Phi(t_1) = F$. Оптимальное позиционное управление линейное по состоянию:

$$u(t, x) = -L(t)x, \quad (1.41)$$

с матрицей коэффициентов $L(t) = D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t)$. Обозначим решение уравнения (1.40) через $\Phi(t|t_1, F)$, подчеркивая зависимость этого решения от матрицы F терминального члена $\frac{1}{2}x^T F x + \lambda$. От параметра λ решение уравнения (1.40) и управление (1.41) не зависят. Тогда функционал цены в задаче (1.38) имеет вид

$$\Phi(t_0, x_0 | t_1, F(\cdot)) = \frac{1}{2} x_0^T \Phi(t|t_1, F) x_0 + \lambda. \quad (1.42)$$

Будем искать моментные функции цены в ЛКЗ (1.9)–(1.11) квадратичного вида

$$\phi(t, x | t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t | t_1, \dots, t_k) x + \lambda_{t_1} + \dots + \lambda_{t_k}, \quad (1.43)$$

где Φ – симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n . Согласно рекуррентной процедуре, описанной в разделе 1.3, в момент первого из оставшихся k переключений справедливо рекуррентное уравнение (1.25). Записываем его для ЛКЗ:

$$\phi(t_1, x | t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V} \left[\phi(t_1, A_{t_1} x + B_{t_1} v | t_2, \dots, t_k) + \lambda_{t_1} + \frac{1}{2} x^T C_{t_1} x + \frac{1}{2} v^T D_{t_1} v \right]. \quad (1.44)$$

Подставляем функцию (1.43) в уравнение (1.44). Уничтожая свободные члены $\lambda_{t_1}, \dots, \lambda_{t_k}$, получаем алгебраическое уравнение Риккати

$$\Phi(t_1 | t_1, \dots, t_k) = C_{t_1} + L_{t_1}^T D_{t_1} L_{t_1} + (A_{t_1} - B_{t_1} L_{t_1})^T \Phi(t_1 | t_2, \dots, t_k) (A_{t_1} - B_{t_1} L_{t_1}) \quad (1.45)$$

для матрицы квадратичной формы, а также выражение для оптимального позиционного управления первым из оставшихся k переключений:

$$v^k(t_1, x | t_2, \dots, t_k) = -L_{t_1}(t_2, \dots, t_k)x, \quad (1.46)$$

где $L_{t_1}(t_2, \dots, t_k) = (D_{t_1} + B_{t_1}^T \Phi(t_1 | t_2, \dots, t_k) B_{t_1})^{-1} B_{t_1}^T \Phi(t_1 | t_2, \dots, t_k) A_{t_1}$.

До первого переключения моментная функция цены представляется через функционал цены (1.42) в задаче Больца. Записываем выражение (1.26) для ЛКЗ с учетом (1.42):

$$\phi(t, x | t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t | t_1, \Phi(t_1 | t_1, \dots, t_k)) x + \lambda_{t_1} + \dots + \lambda_{t_k}. \quad (1.47)$$

Подставляем функцию (1.43) в уравнение (1.47). Уничтожая свободные члены, получаем выражение для матрицы квадратичной формы

$$\Phi(t|t_1, \dots, t_k) = \Phi(t|t_1, \Phi(t_1|t_1, \dots, t_k)).$$

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм синтеза оптимального позиционного управления линейной ПС с квадратичным критерием качества.

1.5.2. Алгоритм синтеза оптимального "управляющего комплекса" в линейно-квадратичной задаче

В отличие от алгоритма, приведенного в разделе 1.4.2, процедура синтеза "управляющего комплекса" оптимальных позиционных конструкций для ЛКЗ является численно-аналитической. Оптимальные позиционные управления непрерывным движением и скачками выражаются аналитически через моментные функции цены в форме линейных регуляторов.

Пусть известно решение (1.42) вспомогательной задачи Больца (1.38), тогда алгоритм представляется следующим образом.

Шаг 0. Находим матрицу $\Phi(t) = \Phi(t|t_F, F)$ функции цены в задаче без переключений, т.е. матрицу 0-моментной функции цены $\phi(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t)x$. Составим матрицу $L(t) = D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t)$ коэффициентов линейного управления (1.41) непрерывным движением системы. Положим $k = 1$ и перейдем к шагу k .

Шаг k . Решаем алгебраическое уравнение Риккати (1.45), найдем матрицу $\Phi(t_1|t_1, \dots, t_k)$ k -моментной функции цены (1.43) в момент $t = t_1$ первого из оставшихся k переключений, а также матрицу $L_{t_1}(t_2, \dots, t_k)$ коэффициентов линейного управления (1.46) переключением состояния системы. Найдем матрицу $\Phi(t|t_1, \dots, t_k) = \Phi(t|t_1, \Phi(t_1|t_1, \dots, t_k))$ k -моментной функции цены $\phi(t, x|t_1, \dots, t_k)$ до первого переключения, т.е. при $t < t_1$. Составим матрицу $L(t|t_1, \dots, t_k) = D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t|t_1, \dots, t_k)$ коэффициентов линейного управления (1.41) непрерывным движением системы до первого переключения. Условия окончания остаются прежними.

При решении задачи минимизации количества переключений условием окончания служит неравенство (1.37), которое для ЛКЗ имеет вид

$$\min_{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_F} \left\{ \frac{1}{2} x_0^T \Phi(t_0|t_1, \dots, t_k)x_0 + \lambda_{t_1} + \dots + \lambda_{t_k} \right\} \leq \varepsilon.$$

Если неравенство выполняется, то большего, чем k , количества переключений не требуется.

Таким образом, если условие окончания выполняется, то процедура синтеза заканчивается, в противном случае полагаем $k := k + 1$ и переходим к шагу k .

В результате N шагов рекуррентной процедуры находятся матрицы $\Phi(t)$, $\Phi(t|t_1), \dots$, $\Phi(t|t_1, \dots, t_N)$ моментных функции цены (1.43), матрицы $L(t)$, $L(t|t_1), \dots$, $L(t|t_1, \dots, t_N)$ условных оптимальных позиционных управлений непрерывным движением системы

$$\mathbf{u}(t, x|t_1, \dots, t_k) = -L(t|t_1, \dots, t_k)x, \quad (1.48)$$

а также матрицы $L_{t_1}, L_{t_1}(t_2), \dots, L_{t_1}(t_2, \dots, t_N)$ условных оптимальных управлений (1.46) переключениями. Минимальное значение функционала качества (1.11) с не более чем N переключениями вычисляется по формуле

$$\min I(t_0, x_0, d) = \min_{k=0, \dots, N} \min_{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F} \left\{ \frac{1}{2} x_0^T \Phi(t_0|t_1, \dots, t_N) x_0 + \lambda_{t_1} + \dots + \lambda_{t_N} \right\}.$$

С помощью оптимального позиционного управления можно найти условный оптимальный процесс $d = (T, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ для любого начального состояния $x_0 \in X$ системы. Это оптимальный процесс с не более чем N переключениями. Если же процедура синтеза была закончена при выполнении общего условия (1.37) с $k = N$, то условный оптимальный процесс будет оптимальным.

1.6. ПРИМЕР

Пусть на заданном промежутке времени $T = [0, 5]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени $t_i, i = 1, \dots, N$, которые образуют неубывающую последовательность:

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq 5. \quad (1.49)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.50)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентными уравнениями:

$$x_{1i} = x_{2i-} + v_i, \quad x_{2i} = x_{1i-}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.51)$$

Здесь, как и ранее, $\mathcal{N} = \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$; $u(t)$ – значение управления непрерывным движением системы в момент времени $t \in T$, $u \in \mathbb{R}$. В уравнении (1.51) $x_i \triangleq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i -го переключения, x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i -м переключением; v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v \in \mathbb{R}$.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I(x_0, d) = \int_0^5 \frac{1}{2} [u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt + \sum_{i=1}^N \left\{ \lambda_{t_i} + \frac{\eta_{t_i}}{2} v_i^2 \right\}, \quad (1.52)$$

где x_0 – начальное состояние системы, $d = (T, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ – допустимый процесс управления. Коэффициенты $\lambda_{t_i} \geq 0$ и $\eta_{t_i} > 0$ определяют затраты на переключение в момент t_i . Количество

N и моменты переключений t_1, \dots, t_N заранее не заданы и подлежат оптимизации. Требуется найти:

- 1) оптимальный процесс для начального состояния $x_0 = (8, 3)^T$ при $\lambda_{t_i} = 0.005$, $\eta_{t_i} = 10^5$;
- 2) наименьшее количество переключений, при котором значение функционала для начального состояния $x_0 = (8, 3)^T$ при $\lambda_{t_i} = 0$, $\eta_{t_i} = 10^5$ не превосходит величины $\varepsilon = 0.001$.

Рассматривается ЛКЗ. По сравнению с общей постановкой (1.1), (1.9) – (1.11) имеем: $t_0 = 0$,

$$t_F = 5, X = \mathbb{R}^2, U = \mathbb{R}, D(t) = 1, \lambda_t = \lambda, D_t = \eta, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В системе (1.50), (1.51) имеется один канал управления: первая координата управляема при непрерывном движении, а вторая – нет (она экспоненциально отклоняется от нуля). В момент переключения фактически происходит взаимная замена координат состояния – неуправляемая координата становится управляемой и наоборот, причем значение первой управляемой координаты корректируется при помощи управления. Таким образом, совершая переключения (т.е. меняя канал управления), можно фактически управлять каждой координатой системы.

Составим вспомогательную задачу Больца (1.38)

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = (x_{10} \ x_{20})^T,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} [u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) F x(t_1) + \lambda \rightarrow \min.$$

Здесь F – симметрическая неотрицательно определенная матрица второго порядка, $\lambda \geq 0$ – скалярный параметр. Решение задачи ищем в виде квадратичной функции (1.39)

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t|t_1, F) x + \lambda.$$

Записываем дифференциальное уравнение Риккати (1.40) с терминальным условием $\Phi(t_1|t_1, F) = F$ для элементов матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{\Phi}_{11} + 1 - \Phi_{11}^2 = 0; \quad \dot{\Phi}_{12} + \Phi_{12} - \Phi_{11}\Phi_{12} = 0; \quad \dot{\Phi}_{22} + 2\Phi_{22} + 1 - \Phi_{12}^2 = 0,$$

$$\Phi_{11}(t_1|t_1, F) = F_{11}, \quad \Phi_{12}(t_1|t_1, F) = F_{12}, \quad \Phi_{22}(t_1|t_1, F) = F_{22}.$$

Решая эту задачу Коши, получаем

$$\Phi_{11}(t|t_1, F) = \frac{1}{2\Delta^2} [(1 + F_{11}^2) \text{sh} 2\tau + 2F_{12} \text{ch} 2\tau], \quad \Phi_{12}(t|t_1, F) = \frac{F_{12}}{\Delta} e^\tau,$$

$$\Phi_{22}(t|t_1, F) = -\frac{F_{12}^2 e^{2\tau}}{\Delta} \text{sh} \tau + \frac{1}{2} (e^{2\tau} - 1) + F_{22} e^{2\tau}, \quad (1.53)$$

где $\tau = t_1 - t$, $\Delta = \text{ch} \tau + F_{11} \text{sh} \tau$.

Теперь для задачи (1.49) – (1.52) применяем алгоритм, описанный в разделе 1.5.2. Моментные функции цены имеют вид (1.43)

$$\phi(t, x|t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t|t_1, \dots, t_k) x + k\lambda,$$

где $\Phi(t|t_1, \dots, t_k)$ – симметрическая неотрицательно определенная матрица второго порядка, а t_1, \dots, t_k – моменты переключений: $0 \leq t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 5$.

Шаг 0. По формулам (1.53) для нулевой матрицы $F = O$ находим элементы матрицы $\Phi(t) = \Phi(t|5, O)$:

$$\Phi_{11}(t) = \text{th}(5 - t), \quad \Phi_{12}(t) = 0, \quad \Phi_{22}(t) = \frac{1}{2}(e^{2(5-t)} - 1) \quad (1.54)$$

функции цены $\phi(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi(t) x$ в задаче без переключений, т.е. матрицу 0-моментной функции цены. Составляем матрицу $L(t) = (\Phi_{11}(t), \Phi_{12}(t))$ коэффициентов линейного по x управления $u(t, x) = -L(t)x$. Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу k .

Шаг k . Записываем алгебраическое уравнение Риккати (1.45)

$$\Phi(t_1|t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\eta + \Phi_{11}} \begin{pmatrix} \eta\Phi_{22} + \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2 & \eta\Phi_{12} \\ \eta\Phi_{12} & \eta\Phi_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

В правой части равенства (1.55) указываются элементы матрицы $\Phi(t_1|t_2, \dots, t_k)$ предыдущей $(k - 1)$ -моментной функции цены в момент $t = t_1$ первого из оставшихся k переключений. В частности, при $k = 1$ это будут элементы (1.54) матрицы $\Phi(t_1)$. Составляем матрицу $L_{t_1}(t_2, \dots, t_k) = (\Phi_{11}(t_1|t_2, \dots, t_k), \Phi_{12}(t_1|t_2, \dots, t_k))$ коэффициентов линейного управления по x (1.48) переключениями системы. По формулам (1.53) для $F = \Phi(t_1|t_1, \dots, t_k)$ находим элементы матрицы $\Phi(t|t_1, \dots, t_k)$ k -моментной функции цены $\phi(t, x|t_1, \dots, t_k)$ до первого переключения, т.е. при $t < t_1$. Составляем матрицу $L(t|t_1, \dots, t_k) = D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t|t_1, \dots, t_k)$ коэффициентов линейного управления (1.48) непрерывным движением системы до первого переключения.

Проверяем условие окончания. Для задач 1) и 2) они разные и обсуждаются ниже. Если условия не выполняются, то полагаем $k := k + 1$ и переходим к шагу k .

На каждом шаге определяем наименьшее значение функционала (1.52) при фиксированном числе переключений

$$I_k = \min_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 5} \left\{ \frac{1}{2} x_0^T \Phi(t_0|t_1, \dots, t_k) x_0 + k\lambda \right\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

В задаче 1) условием окончания рекуррентной процедуры служит неравенство $I_k < I_{k+1}$. Это условие является частным случаем общего условия окончания (1.36). Его можно использовать на практике при решении ЛКЗ. В задаче 2) процедура решения заканчивается, как только $|I_{k-1} - I_k| \leq \varepsilon$.

При численном решении задач 1), 2) моментные функции цены находились по точным формулам (1.53), (1.55), а минимизация моментов переключений выполнялась приближенно перебором на сетке с шагом 0.02 для $N = 1, 2, 3$, с шагом 0.1 для $N = 4, 5$, с шагом 0.2 для $N =$

6,7,8. В результате приближенного решения задачи 1) были получены следующие минимальные значения функционала качества:

$$I_0 = 49589.2951, I_1 = 78.0481, I_2 = 78.0430, I_3 = 78.0405, I_4 = 78.0398, I_5 = 78.0406.$$

Наименьшее значение достигается при четырех переключениях, которые происходят в моменты времени $t_1 = 0.65, t_2 = 1.83, t_3 = 2.80, t_4 = 3.90$, а управления переключениями будут равными $v_1 = -0.6730 * 10^{-4}, v_2 = -0.2375 * 10^{-4}, v_3 = -0.0968 * 10^{-4}, v_4 = -0.0316 * 10^{-4}$. На рисунке 1.1 изображена оптимальная траектория с четырьмя переключениями. Сплошными линиями представлены непрерывные участки траектории, пунктирными стрелками – переключения. Штрихпунктирная линия $x_1 = x_2$ служит для лучшего восприятия скачков траектории.

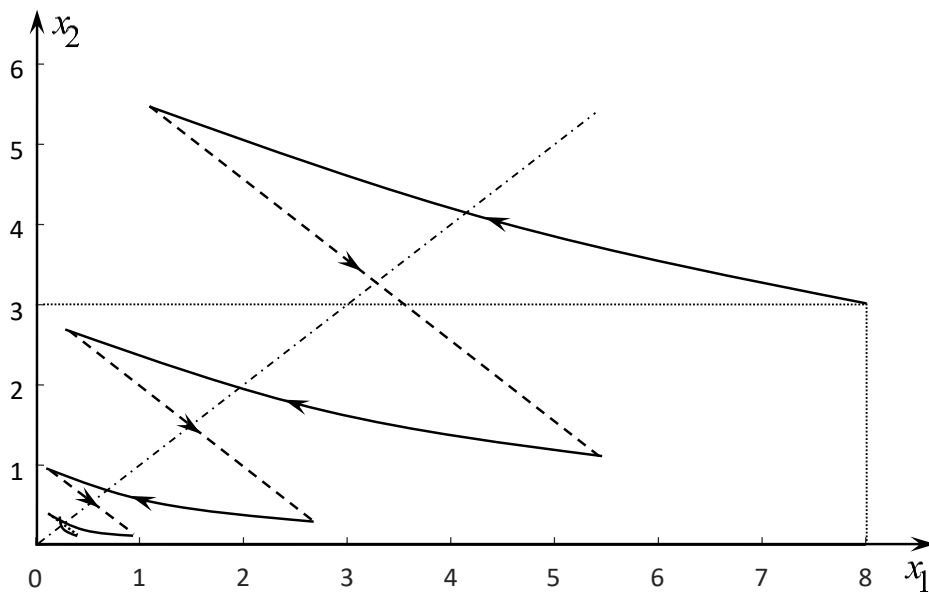


Рисунок 1.1. Оптимальная траектория с четырьмя переключениями.

Для задачи 2) были получены следующие минимальные значения функционала качества:

$$I_0 = 49589.2951, I_1 = 78.0431, I_2 = 78.0337, I_3 = 78.0255, I_4 = 78.0198, I_5 = 78.0156,$$

$$I_6 = 78.0129, I_7 = 78.0104, I_8 = 78.0090.$$

При отсутствии фиксированных затрат на переключение (при $\lambda = 0$) последовательность $I_k, k = 0, 1, \dots$, будет невозрастающей. Как видим, при восьми переключениях выполняется требуемое неравенство $|I_8 - I_7| \leq 0.001$. Поэтому рекуррентная процедура построения моментных функций цены заканчивается при $k = 8$. Оптимальные моменты переключений равны: $t_1 = 0.54, t_2 = 1.10, t_3 = 1.64, t_4 = 2.20, t_5 = 2.56, t_6 = 3.12, t_7 = 3.80, t_8 = 4.44$, а управления переключениями:

$$v_1 = -0.8096 * 10^{-4}, v_2 = -0.5064 * 10^{-4}, v_3 = -0.3027 * 10^{-4}, v_4 = -0.2008 * 10^{-4},$$

$$v_5 = -0.1379 * 10^{-4}, v_6 = -0.0801 * 10^{-4}, v_7 = -0.0402 * 10^{-4}, v_8 = -0.0167 * 10^{-4}.$$

На рисунке 1.2 изображена оптимальная траектория с восемью переключениями.

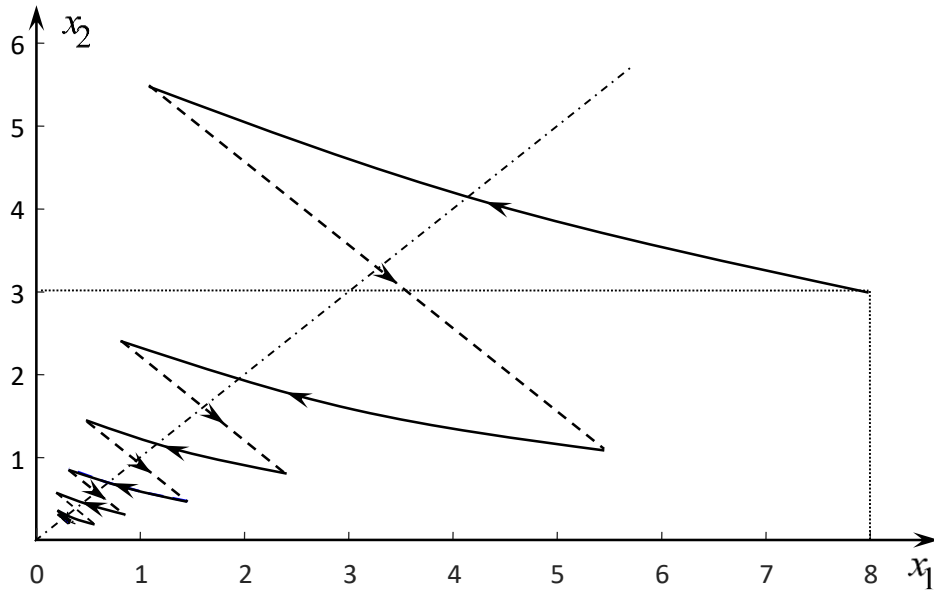


Рисунок 1.2. Оптимальная траектория с восемью переключениями.

Отметим, что в рассматриваемой ЛКЗ возможны оптимальные процессы с мгновенными многократными переключениями. Они возникают при уменьшении коэффициента η . В этом случае затраты на скачки траектории уменьшаются по сравнению с затратами на непрерывное изменение состояния. На рисунках 1.3 и 1.4 показаны оптимальные траектории с четырьмя переключениями. На рисунке 1.3, траектория, полученная при $\eta = 100$, имеет в начальный момент времени мгновенное двукратное переключение $t_1 = t_2 = 0$, при управлениях $v_1 = -0.1697$, $v_2 = -0.1225$, оставшиеся 3 и 4 переключения происходят в моменты времени $t_3 = 0.1$, $t_4 = 0.3$ при управлениях $v_3 = -0.1507$, $v_4 = -0.0809$. Минимальное значение функционала равно $I_4 = 74.484$. Траектория на рисунке 1.4 получена при $\eta = 10$. Она имеет в начальный момент времени мгновенное четырехкратное переключение ($t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$) при управлениях $v_1 = v_3 = -1.4993$, $v_2 = v_4 = -0.6662$. Минимальное значение функционала равно $I_4 = 49.1744$. При малых затратах на скачки траектории именно переключения играют основную роль в процессе управления.

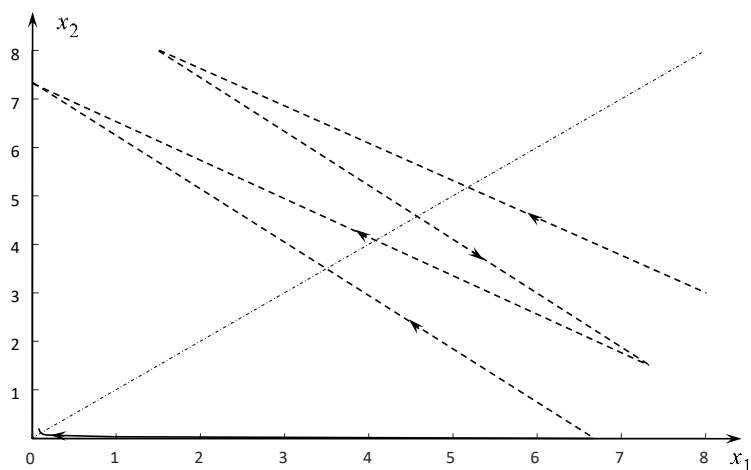


Рисунок 1.3. Оптимальная траектория с мгновенным двукратным переключением.

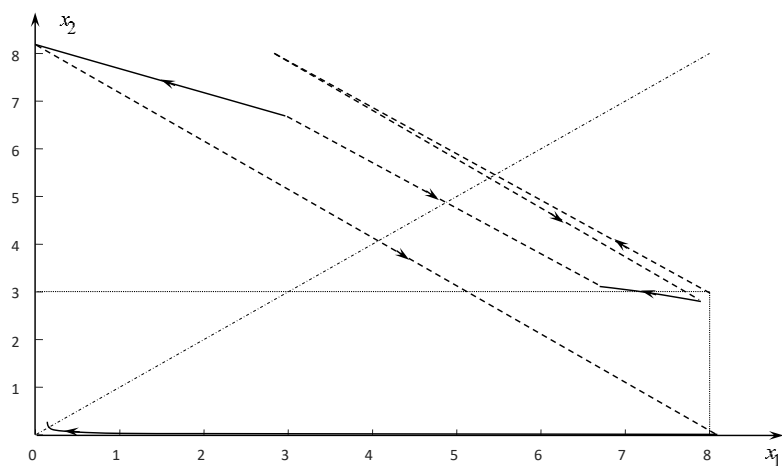


Рисунок 1.4. Оптимальная траектория с мгновенным четырехкратным переключением.

ВЫВОДЫ

1. Поставлена и исследована задача минимизации количества переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов. Рассмотрены задачи оптимального управления ПС при различных ограничениях на количество переключений.
2. На основе достаточных условий оптимальности ПС разработаны:
 - алгоритм синтеза "управляющего комплекса" ПС;
 - алгоритм синтеза "управляющего комплекса" линейной ПС с квадратичным критерием качества.
3. Решен академический пример линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального "управляющего комплекса" ПС. Вместе с задачей оптимального управления решена задача минимизации количества переключений с ограниченным сверху функционалом качества.

2. МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ КУСОЧНО – ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ

В классической задаче оптимального управления непрерывными системами допустимое управление, как правило, кусочно-непрерывное [14] (либо ограниченное измеримое [99]). Аналогичная задача рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений с учетом затрат на переключения управления. Такая постановка задачи является частным случаем задачи оптимального управления гибридными системами. На основе условий оптимальности ПС (раздел 2.2.1) доказываются необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления с учетом затрат на переключения (раздел 2.2.2). Разработан численно-аналитический алгоритм решения поставленной задачи (раздел 2.3). Решен академический пример оптимального гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами в классе кусочно-постоянных управлений. Получено оптимальное кусочно-постоянное управление с минимальным количеством переключений, обеспечивающее заданную точность (по функционалу) в сравнении с оптимальным кусочно-непрерывным управлением (раздел 2.4).

2.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачи оптимального управления динамическими системами в двух классах допустимых управлений: кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных функций.

2.1.1. Постановка задачи оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений

Рассмотрим классическую задачу оптимального управления непрерывной системой [66, 75, 99]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (2.2)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (2.3)$$

Обозначения в задаче (2.1) – (2.3) стандартные: $x(t)$, $u(t)$ – состояние системы и управление в момент времени $t \in T$, $T = [t_0, t_F]$; $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$; $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, U – заданное множество допустимых значений управления. Начальное состояние x_0 задано. Момент окончания t_F и терминальное состояние $x_F = x(t_F)$ определяются первым достижением поверхности $\Gamma(t_F, x_F) = 0$. Функции $f: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f^0: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $F: T \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma: T \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$ непрерывны на

областях определения вместе с частными производными по t и x . Предполагаем, что функции f^0 и F ограничены снизу.

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ образовано парами $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, включающими траекторию $x(\cdot)$ системы – непрерывную кусочно-гладкую функцию $x: T \rightarrow X$, и управление $u(\cdot)$ – кусочно-непрерывную функцию $u: T \rightarrow U$, удовлетворяющую почти всюду на T уравнению движения (2.1) и терминальным условиям (2.2). Функционал в (2.3) определен на множестве допустимых процессов $\mathcal{D}(t_0, x_0)$.

Требуется найти наименьшее значение $\min I$ функционала в (2.3) и оптимальное кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$, на котором это значение достигается.

2.1.2. Постановка задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных управлений

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ кусочно-постоянное управление $u(\cdot)$ динамической системой совершает N переключений в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, N$, образующие возрастающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (2.4)$$

Движение системы и функционал задаются соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1}), \quad (2.5)$$

$$y_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (2.7)$$

$$I(d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^N g^+(y_{i-1}, y_i) + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

В функционале в (2.8) учитываются затраты $g^+(y_{i-1}, y_i)$ на переключение управления $y_{i-1} \rightarrow y_i$, где g^+ – неотрицательная дифференцируемая функция.

"Управляющий комплекс" в задаче (2.4) – (2.8) составляют следующие элементы: количество переключений N , моменты переключений t_1, \dots, t_N , кусочно-постоянное управление $u: T \rightarrow U$, $u(t) = y_i$, $t \in T_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Требуется найти наименьшее значение $\min I$ функционала в (2.8) и оптимальный "управляющий комплекс", на котором это значение достигается.

Задача (2.4) – (2.8) отличается от задачи (2.1) – (2.3) множеством допустимых управлений. Так как кусочно-постоянные управления являются кусочно-непрерывными, то задача (2.4) – (2.8) является частным случаем задачи (2.1) – (2.3).

Отметим, что решение задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций можно рассматривать как приближенное (с погрешностью ε) решение задачи с кусочно-непрерывным управлением. При увеличении количества переключений погрешность ε , вообще говоря, уменьшается, а в пределе – равна нулю, так как любую ограниченную измеримую функцию можно представить как предел ступенчатой.

Задача с фиксированным количеством переключений

Задача минимизации функционала (2.8) на множестве допустимых процессов с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ – множество допустимых процессов из $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ с N переключениями, быть может, фиктивными. Фиктивным считается переключение в момент t_i , при котором значение y не меняется ($y_{i-1} = y_i$) и фактического переключения нет. Подчеркнем, что количество переключений N у всех процессов из $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ одинаковое (равное N), но моменты переключений (2.4) у разных процессов могут не совпадать. Обозначим через $I_N(d)$ функционал (2.8) при фиксированном количестве переключений N . Он определен на подмножестве $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ множества $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. Требуется найти минимальное значение функционала (2.8) на множестве $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ и процесс $d^N \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_N(d^N) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)} I_N(d). \quad (2.9)$$

Такой процесс d^N будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном количестве переключений N . Отметим, что задача (2.9) – конечномерная, поскольку "управляющий комплекс" задается $(N + 1)(m + 1)$ параметрами, где m – размерность пространства управлений.

Задача минимизации количества переключений при ограниченном функционале качества

Задача минимизации количества переключений при ограниченном функционале качества (2.8) формулируется следующим образом. Требуется найти наименьшее количество переключений N^ε , при котором наименьшее значение $I_{N^\varepsilon}(d^{N^\varepsilon})$ функционала (2.8) не превосходит заданной величины ε :

$$I_{N^\varepsilon}(d^{N^\varepsilon}) = \min_{d \in \mathcal{D}_{N^\varepsilon}(t_0, x_0)} I_{N^\varepsilon}(d) \leq \varepsilon. \quad (2.10)$$

Сравнивая поставленные задачи, отмечаем, что в задаче (2.4) – (2.8) нужно найти оптимальное количество переключений, в задаче (2.9) количество переключений N фиксировано, поэтому нужно получить только условный (с N переключениями) оптимальный процесс. В задаче (2.10) нужно искать минимальное количество переключений N^ε , при котором условный (с N^ε переключениями) оптимальный процесс обеспечивает достижение заданного уровня ε

функционала качества. Заметим, что вопрос минимизации переключений возникает при численном (приближенном) решении разных задач, например при аппроксимации функций. В этом случае величина $\varepsilon > 0$ задает точность приближенного решения.

2.2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Приведем необходимые условия оптимальности для переключаемых систем и непрерывных систем с кусочно-постоянным управлением.

2.2.1. Переключаемые системы

Для задачи оптимального управления ПС:

$$\begin{aligned} t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} &\triangleq t_F, \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \\ y_i &\in G(t_i, x(t_i), y_{i-1}) \setminus \{y_{i-1}\}, \quad i = 1, \dots, N, \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \\ \Gamma(t_F, x(t_F), y_N) &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$I(d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) + F(t_F, x(t_F), y_N) \rightarrow \min$$

получены необходимые условия оптимальности [41].

Если оптимальный процесс $(x(\cdot), y(\cdot))$ имеет N переключений в моменты t_1, \dots, t_N : $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$. Тогда существуют функции $\psi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, N$, и такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) сопряженные уравнения

$$\dot{\psi}_i(t) = -H_x(\psi_i(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N};$$

2) промежуточные условия

$$\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-}) = g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i), \quad i = 1, \dots, N; \tag{2.12}$$

3) условия трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\} \delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F = 0$;

4) условия неубывания

$$\left\{ g_y^+[t_{i+1}] + g_z^+[t_i] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt \right\} \delta y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\left\{ g_z^+[t_N] + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций δy_i , $i = 1, \dots, N$;

5) условия стационарности

$$g_t^+[t_i] - \Delta H[t_i] + \lambda_{i+1} - \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (2.13)$$

б) условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1; \quad (2.14)$$

7) условия неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Здесь используются обозначения:

$H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y)$ функция ГП;

$\Delta H[t_i] = H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i)$ скачок функции ГП;

$\Delta f[t_i] = f(t_i, x(t_i), y_{i-1}) - f(t_i, x(t_i), y_i)$.

Аргумент t , заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на оптимальном процессе в указанный момент времени (как это принято в [119]), например $H[t] = \psi(t)f(t, x(t), y(t)) - f^0(t, x(t), y(t))$.

Заметим, что условия 1) – 3) теоремы вместе с уравнениями движения позволяют получить вспомогательные функции, зависящие от $3N + 2$ параметров $t_1, \dots, t_N, y_1, \dots, y_N, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$. Для нахождения этих параметров имеется система из $3N + 1$ условий 4) – 6). Этих уравнений хватает, так как коэффициенты λ_i определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством $\lambda_0 = 0$ (вырожденный случай), либо равенством $\lambda_0 = 1$ (невырожденный случай). Таким образом, необходимые условия полученные в [41], как и принцип максимума [99], дают "полную" систему соотношений для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

2.2.2. Непрерывные системы с кусочно-постоянным управлением

Необходимые условия оптимальности для задачи (2.4) – (2.8) являются частным случаем необходимых условий для ПС (см. раздел 2.2.1.) и формулируются следующим образом.

Теорема 2.1. Пусть оптимальный процесс $(x(\cdot), y(\cdot))$ имеет N переключений в моменты t_1, \dots, t_N : $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_F$. Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \dots, \psi_n(\cdot))$, что выполняются:

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

2) условие трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\}\delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0$;

3) неравенства

$$\left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt - g_{y_i}^+(y_i, y_{i+1}) - g_{y_i}^+(y_{i-1}, y_i) \right\} \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\left\{ g_{y_N}^+(y_{N-1}, y_N) + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций $\delta y_i, i = 1, \dots, N$;

4) равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство теоремы 2.1 следует из необходимых условий оптимальности ПС [41] (см. раздел 2.2.1). По сравнению с этими условиями в задаче (2.4) – (2.8) множество $G(t, x, y)$ совпадает с множеством U допустимых значений y , т.е. $G(t, x, y) = U$. Так как мгновенные многократные переключения, согласно (2.4), отсутствуют, то из условия дополняющей нежесткости (2.14) следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_{N+1} = 0$. Кроме того, из-за отсутствия мгновенных многократных переключений набор вспомогательных функций $\psi_i(\cdot), i = 0, 1, \dots, N$, можно заменить одной функцией $\psi(t)$, полагая $\psi_i(t) = \psi(t), t \in T_i$, поскольку промежутки T_i не пересекаются. Так как затраты на переключения не зависят от состояния x , то из промежуточных условий (2.12) следует, что функция $\psi(\cdot)$ непрерывна справа в любой момент t_i , поэтому она непрерывна на T . Приращение функции ГП в каждый момент переключения будет равно нулю:

$$\Delta H[t_i] = H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0,$$

следовательно условия стационарности (2.13) выполняются. Поскольку начальное состояние y_0 в (2.11) не задано, то в п. 3) добавлено неравенство с вариацией δy_0 .

В случае отсутствия затрат на переключение необходимые условия могут быть сформулированы следующим образом

Следствие. Пусть оптимальный процесс $(x(\cdot), y(\cdot))$ имеет N переключений в моменты $t_1, \dots, t_N: t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_F$. Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \dots, \psi_n(\cdot))$, что выполняются:

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

2) условие трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\} \delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F = 0$;

3) неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\left\{ F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций $\delta y_i, i = 1, \dots, N$;

4) равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

В самом деле, если $g^+(y_i, y_{i+1}) = 0$, то неравенства 3) в теореме 2.1 упрощаются, и принимают вид, указанный в следствии. Другие условия теоремы не меняются.

2.3. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотрим алгоритм применения необходимых условий оптимальности для решения задачи оптимального управления (2.4) – (2.8), а также особенности его численно-аналитической реализации.

2.3.1. Алгоритм поиска оптимального кусочно-постоянного управления непрерывной системой

Согласно необходимым условиям оптимальности задача (2.4) – (2.8) сводится к решению двухточечной краевой задачи с промежуточными условиями. Для процессов с N переключениями в моменты времени t_1, \dots, t_N , удовлетворяющие неравенствам

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \triangleq t_F,$$

нужно выполнить следующие действия.

Шаг 1. Составляем функцию ГП для задачи (2.4) – (2.8):

$$H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y).$$

Шаг 2. Из неравенств

$$\left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt - g_{y_i}^+(y_i, y_{i+1}) - g_{y_i}^+(y_{i-1}, y_i) \right\} \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\left\{ g_{y_N}^+(y_{N-1}, y_N) + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0,$$

справедливых для любых допустимых вариаций $\delta y_i, i = 1, \dots, N$, находим выражения для управлений y_i .

Шаг 3. Составляем систему канонических уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad (2.15)$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

и равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.17)$$

Шаг 4. Записываем краевые условия

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (2.18)$$

а также дополнительные условия в конечный момент времени t_F , которые получаем из условий трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\}\delta x_F = 0, \quad \Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0. \quad (2.19)$$

Шаг 5. Решаем полученную на предыдущих шагах (3 и 4) краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (2.15), (2.16) с краевыми условиями (2.18), (2.19) и промежуточными условиями (2.17). В результате находим условный оптимальный «управляющий комплекс», который может оказаться оптимальным.

Шаг 6. Для найденного "управляющего комплекса" вычисляем значение функционала (2.8).

Таким образом, находится оптимальное управление для заданного количества переключений N . Как правило, алгоритм выполняется последовательно для $N = 0, 1, \dots, N_{\text{МАХ}}$, где $N_{\text{МАХ}}$ – максимальное допустимое количество переключений. Сравнивая вычисленные значения функционала при $N = 0, 1, \dots, N_{\text{МАХ}}$, выбираем минимальное. Этому значению соответствует оптимальное количество переключений.

2.3.2. Особенности численно-аналитической процедуры решения

Предложенный алгоритм (см. раздел 2.3.1) трудно реализовать, так как получаемая по алгоритму краевая задача имеет промежуточные условия. Моменты переключений t_1, \dots, t_N и параметры управления y_0, y_1, \dots, y_N , связаны системой $2N + 1$ трансцендентных уравнений. Ее численное решение является серьезной проблемой, не говоря об аналитическом решении, которое, как правило, невозможно даже при $N = 1$. Поэтому предлагается другой подход, который заключается в минимизации функционала I_N по моментам переключений. Действительно, если управление y_i удастся выразить через моменты переключений $y_i = y_i(t_1, \dots, t_N)$, то функционал I_N , можно представить в виде функции $I_N = I_N(t_1, \dots, t_N)$. Тогда процедура приближенного решения задачи (2.4) - (2.8) при $N \geq 1$ сводится к минимизации функции $I_N(t_1, \dots, t_N)$ с последующей проверкой выполнения необходимых условий оптимальности (2.17). Описанная процедура решения – численно-аналитическая. Необходимые условия используются для составления краевой задачи и получения формул для управлений $y_i(t_1, \dots, t_N)$. Минимизация функции $I_N(t_1, \dots, t_N)$ выполняется численно. После минимизации

вычисляются невязки для системы уравнений (2.17), которые характеризуют точность выполнения необходимых условий оптимальности.

2.4. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами под действием неограниченного ускорения. Постановка задачи оптимального кусочно-непрерывного управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} u^2(t) dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Требуется найти наименьшее значение $\min I$ функционала и оптимальное кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$, на котором этот минимум достигается.

Решение поставленной задачи получено, например в [1], при помощи принципа максимума. Оптимальное управление

$$u(t) = \frac{4}{\pi - 2} (\sin t - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

будет иметь вид гармонической функции, график которой представлен на рисунке 2.1. Наименьшее значение функционала (2.20), при этом, будет равно

$$\min I = \frac{4}{\pi - 2} \approx 3.5039;$$

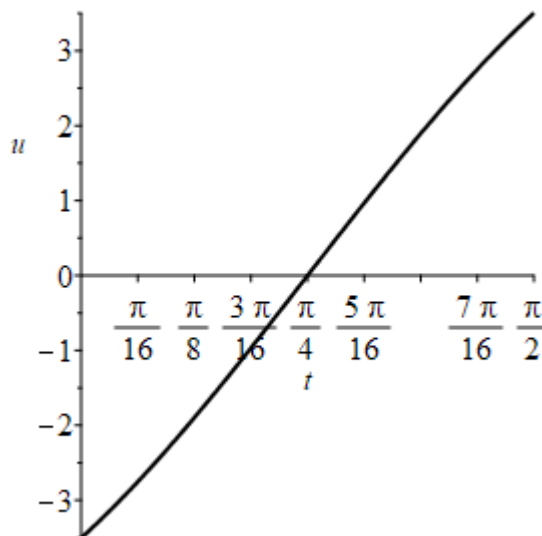


Рисунок 2.1. График оптимального управления в задаче (2.20).

Рассмотрим задачу оптимизации в классе кусочно-постоянных управлений. Пусть на промежутке функционирования $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ система совершает N переключений в моменты времени t_1, \dots, t_N , образующие возрастающую последовательность:

$$0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \triangleq \frac{\pi}{2}. \quad (2.21)$$

Уравнения движения системы и функционал качества имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + y_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad (2.23)$$

$$I_N = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} y_i^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (2.24)$$

Требуется найти наименьшее значение $\min I_N$ функционала (2.24) и оптимальное кусочно-постоянное управление $y(\cdot)$, на котором этот минимум достигается.

Сформулируем задачу минимизации количества переключений. Требуется найти наименьшее количество переключений N^ε , при котором наименьшее значение $\min I_{N^\varepsilon}$ функционала (2.24) отличается от наименьшего значения $\min I$ функционала (2.20) не более чем на заданную величину $\varepsilon = 0.1$:

$$\min I_{N^\varepsilon} - \min I \leq \varepsilon. \quad (2.25)$$

Поставленную задачу можно рассматривать как приближенное с точностью ε решение задачи (2.20) в классе кусочно-постоянных управлений.

По сравнению с общей постановкой задачи (2.4) – (2.8) имеем:

$$t_0 = 0, \quad t_F = \frac{\pi}{2}, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad y \in U = \mathbb{R}, \quad x(0) = (1, 1)^T, \quad f(t, x, y) = (x_2, -x_1 + y)^T, \\ f^0(t, x, y) = \frac{y^2}{2}, \quad g^+(y_{i-1}, y_i) = 0, \quad F(t_F, x(t_F), y_N) = 0, \quad \Gamma(t_F) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Запишем функцию ГП

$$H(\psi, t, x, y) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + y) - \frac{1}{2} y^2$$

и условия теоремы 2.1 для задачи (2.21) – (2.24):

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t), \quad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \quad t \in T; \quad (2.26)$$

2) условия трансверсальности выполняются, так как вариации $\delta t_F = 0$, $\delta x(t_F) = 0$ при фиксированном правом конце траектории;

3) для всех допустимых вариаций δy_i , $i = 0, 1, \dots, N$, выполняются неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\psi_2(t) - y_i] dt \cdot \delta y_i \leq 0 \Leftrightarrow y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi_2(t) dt, \quad (2.27)$$

поскольку ограничений на вариации δy_i нет;

4) в моменты переключений t_i , $i = 1, \dots, N$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \psi_1(t_i)x_2(t_i) + \psi_2(t_i)[-x_1(t_i) + y_{i-1}] - \frac{1}{2}y_{i-1}^2 - \psi_1(t_i)x_2(t_i) - \\ & - \psi_2(t_i)[-x_1(t_i) + y_i] + \frac{1}{2}y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \psi_2(t_i)(y_{i-1} - y_i) - \frac{1}{2}(y_{i-1}^2 - y_i^2) = 0 \Rightarrow 2\psi_2(t_i) = y_{i-1} + y_i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В последнем преобразовании уравнения учитывалось, что $y_{i-1} \neq y_i$, иначе нет переключения.

Таким образом, задача сведена к краевой задаче для уравнений движения (2.22) и сопряженной системы (2.26) с краевыми условиями (2.23). Для нахождения $2N + 1$ управляющих параметров $t_1, \dots, t_N, y_0, y_1, \dots, y_N$ имеются $2N + 1$ уравнений (2.27) и (2.28).

Будем искать решение краевой задачи. Согласно уравнениям движения, траектория имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_i \cos t + B_i \sin t + y_i, \\ x_2(t) &= -A_i \sin t + B_i \cos t, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Условия непрерывности траектории (2.29) в моменты переключений приводят к рекуррентным уравнениям

$$A_i = A_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_i = B_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.30)$$

Следовательно,

$$A_N = A_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_N = B_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \quad (2.31)$$

причем из начальных и конечных условий следует, что

$$A_0 = 1 - y_0, \quad B_0 = 1, \quad A_N = 0, \quad B_N = -y_N. \quad (2.32)$$

Поэтому

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0, \quad 1 + y_N + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i = 0. \quad (2.33)$$

Траектория движения имеет вид (2.29) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2.30) – (2.32). Отметим сразу, что управление без переключения не является допустимым. В самом деле, при $N = 0$ имеем $y_N = y_0$. Тогда уравнения (2.33) противоречат друг другу: $1 - y_0 = 0$ и $1 + y_0 = 0$, что невозможно. Следовательно, допустимые управления обязательно имеют переключения, т.е. $N \geq 1$.

Траектория $x(\cdot)$ определяется управляющими параметрами – значениями управления y_i и моментами переключений t_i , которые удовлетворяют системе уравнений (2.27), (2.28). Эти уравнения тригонометрические, так как вспомогательные функции $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ – периодические,

поскольку описываются уравнениями колебаний (2.26). Найти решение системы тригонометрических уравнений сложно. Для упрощения воспользуемся следующим соображением. График, представленный на рисунке 2.1, оптимального непрерывного управления $u = u(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, в задаче (2.20) симметричен относительно точки $(\frac{\pi}{4}, 0)$. Предположим, что график оптимального кусочно-постоянного управления $y = y(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, имеет тот же центр симметрии. При этом будут выполняться равенства

$$y_i + y_{N-i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t_i + t_{N+1-i} = \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.34)$$

Неравенства для y_i и для t_i в (2.34) повторяются. Поэтому фактически в (2.34) имеется $[N/2] + 1 + [(N+1)/2] = N+1$ равенств. Здесь $[x]$ – целая часть числа x .

Значения y_i выражаются через ψ_2 по формуле (2.27). Чтобы обеспечить равенства (2.34), график функции $\psi_2(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, также должен иметь центр симметрии $(\frac{\pi}{4}, 0)$. Поэтому из решений уравнений (2.26) нужно взять следующее:

$$\psi_1(t) = C \cos(t - \frac{\pi}{4}), \quad \psi_2(t) = -C \sin(t - \frac{\pi}{4})$$

где C – произвольная постоянная. Так как функция ψ_1 является первообразной для ψ_2 , условие (2.27) можно записать в виде

$$y_i = \frac{\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{C}{t_{i+1} - t_i} [\cos(t_{i+1} - \frac{\pi}{4}) - \cos(t_i - \frac{\pi}{4})],$$

или, выделяя общий множитель,

$$y_i = C \Delta_i, \quad \Delta_i \triangleq \frac{[\cos(t_{i+1} - \frac{\pi}{4}) - \cos(t_i)]}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Подставляя управление (2.45) в (3.38) и сокращая на множитель C , получаем

$$\Delta_i + \Delta_{i-1} - 2 \sin(t_i - \frac{\pi}{4}) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.36)$$

Количество уравнений в (2.36) из-за симметрии (2.34) можно уменьшить, полагая $i = 1, \dots, [\frac{N+1}{2}]$.

Итак, для нахождения N моментов переключений составлена система (2.36) N трансцендентных уравнений. Пусть найдено решение t_1, \dots, t_N этой системы. Тогда значения управления можно вычислить по формуле (2.35). Нужно только определить значение произвольной постоянной C . Для этого воспользуемся первым уравнением в (2.33). Второе уравнение из-за условий симметрии (2.34) равносильно первому. Перепишем уравнение в виде

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0 \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=0}^N y_i (\cos t_{i+1} - \cos t_i) = 0.$$

Учитывая симметрию (2.34) и (2.35), получаем равенство

$$C = - \left\{ \sqrt{2} \sum_{i=0}^k \Delta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right\}^{-1}, \quad (2.37)$$

где $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ – целая часть числа $\frac{N}{2}$.

Таким образом, при помощи необходимых условий задача поиска оптимального кусочно-постоянного управления сведена к решению системы N трансцендентных уравнений (2.36) относительно N неизвестных t_1, \dots, t_N , которые должны удовлетворять неравенствам (2.21). Если моменты переключений найдены, то по формуле (2.37) определяем постоянную C , а затем по формулам (2.35) – значения управлений y_0, y_1, \dots, y_N . После этого вычисляем минимальное значение функционала (2.24).

К сожалению, как говорилось ранее, указанный план трудно реализовать, так как система уравнений (2.36) весьма сложная. Ее численное решение является серьезной проблемой, не говоря об аналитическом решении, которое невозможно даже при $N = 1$. Поэтому был использован другой подход, который заключается в минимизации функционала I_N по моментам переключений. Действительно, при заданных моментах t_1, \dots, t_N функционал I_N , учитывая (2.35), можно представить в виде

$$I_N(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i) y_i^2(t_i, t_{i+1}). \quad (2.38)$$

Функция (2.38) зависит от $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ моментов переключений, так как $y_k = 0$ при четном $N = 2k$ и $t_{k+1} = \frac{\pi}{4}$ при нечетном $N = 2k + 1$. Ее нужно минимизировать при ограничениях $0 < t_1 < \dots < t_k < \frac{\pi}{4}$. После нахождения моментов переключений t_1, \dots, t_k , доставляющих условный минимум функции (2.38), нужно проверить выполнение необходимых условий оптимальности, подставляя эти моменты в систему (2.36).

Таким образом, процедура приближенного решения задачи (2.24) при $N \geq 1$ сводится к условной минимизации функции (2.38) с последующей проверкой выполнения равенств (2.36). Описанная процедура решения – численно-аналитическая, поскольку часть необходимых условий оптимальности использованы для получения уравнений (2.35) – (2.37) и составления функции (2.38), минимизация которой производится численным методом.

Результаты приближенных вычислений представлены в таблице 2.1. Кроме минимальных значений функционала (2.24) и погрешности (2.25) в таблице приводится величина невязки $|\delta|$, которая вычисляется по значениям левых частей уравнений (2.36):

$$|\delta| = \sqrt{\delta_1^2 + \dots + \delta_k^2}, \quad \delta_i = \Delta_i + \Delta_{i-1} + 2 \sin(t_i - \frac{\pi}{4}), \quad i = 1, \dots, k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor.$$

Таблица 2.1. Результаты приближенных вычислений

Число переключений N	Минимальное значение функционала $\min I_N$	Невязка $ \delta $	Погрешность $\varepsilon_N = \min I_N - \min I$
1	4.57764	0	1.07376
2	3.90544	0.00046	0.40156
3	3.71780	0.00042	0.21393
4	3.63751	0.82095	0.13363
5	3.59548	0.68004	0.09160

Невязка характеризует точность приближенного решения системы (2.46), т.е. "степень выполнения" необходимых условий оптимальности.

Минимизация выполнялась перебором на сгущающихся сетках. Наименьший шаг сетки $\Delta t = 0.001$. При пяти переключениях погрешность $\varepsilon_5 = 0.091$ оказалась меньше допустимой погрешности $\varepsilon = 0.1$, поэтому процесс решения закончился. Оптимальные моменты переключений и значений управления следующие:

$$t_1 = 0.284, t_2 = 0.540, t_3 = 0.785, t_4 = 1.031, t_5 = 1.287;$$

$$y_0 = -3.0402, y_1 = -1.8498, y_2 = -0.6208, y_3 = 0.6208, y_4 = 1.8498, y_5 = 3.0402.$$

С ростом количества переключений величина минимального значения функционала (2.24), разумеется, монотонно убывает, а невязка – меняется нерегулярно. Видимо, чем больше уравнений в системе (2.36), тем больше невязка. На рисунке 2.2 представлены графики кусочно – непрерывного (черный) и кусочно-постоянного управления с пятью переключениями (красный) для задачи (2.20)

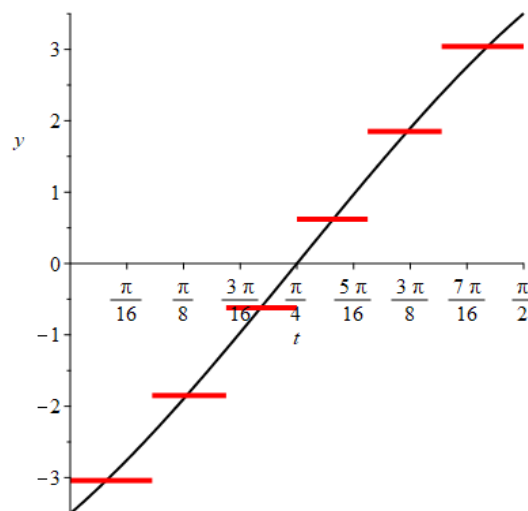


Рисунок 2.2 – График кусочно-постоянного управления с пятью переключениями.

ВЫВОДЫ

1. Поставлена и исследована задача минимизации количества переключений кусочно-постоянных управлений непрерывными системами.
2. Доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянных управлений непрерывными динамическими системами (теорема 2.1).
3. На основе необходимых условий оптимальности ПС разработан численно-аналитический метод минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального управления непрерывными системами
4. Решен академический пример оптимального гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами в классе кусочно-постоянных управлений. Получено оптимальное кусочно-постоянное управление с минимальным количеством переключений, обеспечивающее заданную точность (по функционалу) в сравнении с оптимальным кусочно-непрерывным управлением.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТОВ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ

Рассматриваются задачи планирования и оптимизации маршрутов управления ЛА, исследования которых в настоящее время проходят с нарастающей интенсивностью. Такого рода задачи возникают в процессе предполетного планирования действий смешанных групп пилотируемых и беспилотных ЛА (см. обзор в [56, 79]). Вопросы быстродействия при боевом применении ударных ЛА имеют решающее значение.

Задачи планирования маршрутов движения ЛА, как правило, решаются на плоскости. Траектории ЛА обычно представляются ломаными. При отклонении от источников потенциальных угроз (пунктов противовоздушной обороны противника) траектории строятся [146, 152] при помощи диаграмм Вороного или триангуляции Делоне. Критерием качества управления в этих работах служит расход топлива (пропорциональный протяженности маршрута) и/или риск уничтожения ЛА зенитно-ракетным комплексом противника. Описание плоских траекторий движения ЛА дифференциальными уравнениями применяется при планировании маршрутов [140], в задачах адаптивного управления [135], в частности, при управляемом движении за лидером [136].

В разделе 3 рассматривается движение объектов управления по заданной карте маршрутов. Карта представляет собой связный граф, дуги которого соответствуют непрерывным перемещениям объекта, вершины – дискретным изменениям его состояния (переключениям), а путь, соединяющий несколько вершин графа, описывает непрерывно-дискретный характер траектории движения. К таким картам, например, можно отнести сеть пассажирских авиаперевозок, на которой вершины графа – это аэропорты, а дуги – маршруты перелета. Пересадка пассажиров или дозаправка топливом на аэродроме являются переключениями.

Наличие переключений, прерывающие непрерывное движение объекта управления, является важной особенностью рассматриваемых карт. Подчеркивая это обстоятельство, будем говорить о *карте маршрутов непрерывно-дискретного движения*. Например, карту автомобильных дорог без указания переключений нельзя считать схемой непрерывно-дискретного движения. Если же на этой карте планировать, например, только дальние грузоперевозки, считая переключениями погрузочные или разгрузочные работы, прохождение пограничного и таможенного контроля, отдых водителя или его смену, заправку и т.п., то непрерывно-дискретный характер движения становится очевидным.

Наиболее востребованными являются задачи оптимизации терминальных маршрутов, связывающих заданные начальное и конечное состояние. Например, задачи минимизации длины

пути, времени передвижения, затрат топлива, стоимости перевозки и другие логистические задачи. При планировании маршрутов движения ЛА военного назначения на первый план выходят задачи быстрогодействия, скрытности, координации взаимодействий по времени и на местности.

Математическая постановка задачи, кроме описания карты маршрутов, должна включать модели непрерывного движения и переключений системы управления, функционал качества. В разделах 3.1 – 3.3. исследуется передвижение объекта управления по прямоугольной сетке. Изменение направления движения в узлах сетки (поворот) считается переключением. Часть узлов сетки недопустима для передвижения – в них находятся препятствия. Ставятся задачи минимизации переключений, быстрогодействия или быстрогодействия с учетом количества переключений (см. раздел 3.1). Для решения этих задач вводятся понятия двухпозиционных функции достижимости и цены (см. раздел 3.2), применяются достаточные условия оптимальности переключаемых систем [36].

В разделе 3.4 рассматривается задача оптимизации плоского движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА). В качестве модели движения выбрана модель Маркова – Дубинса [84, 134]. Особенностью задачи быстрогодействия является наличие промежуточных условий – точек на карте, через которые должна проходить траектория БПЛА. Эта задача сводится к решению совокупности задач Маркова – Дубинса с дополнительной конечномерной минимизацией.

В разделе 3.5 приводится академический пример, объединяющий обе задачи, рассмотренные в разделах 3.1 и 3.4. Рациональная траектория движения БПЛА формируется в два этапа. Сначала синтезируется оптимальная ломаная – траектория движения на прямоугольной сетке с препятствиями. Затем "поверх" этой ломаной строится оптимальная траектория Маркова – Дубинса, причем вершины ломаной служат промежуточными точками для траектории БПЛА.

Предлагаемые в статье алгоритмы позволяют разрабатывать рациональные маршруты плоского движения БПЛА при многочисленных препятствиях, например в городе. Задачу оптимального управления при таких фазовых ограничениях решить трудно. Поэтому применение предлагаемых рациональных управлений кажется оправданным.

3.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ МАРШРУТОВ НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Рассматривается движение объекта управления на координатной плоскости. Пути передвижения (карта маршрутов, сеть) образованы целочисленной решеткой, т.е. прямыми, параллельными координатным осям, причем точки пересечения этих прямых (узлы решетки)

имеют целые координаты. В этих точках возможно изменение направления движения. Поворот на $\frac{\pi}{2}$ (в любом направлении) считается переключением системы. Допустимы многократные переключения. Например, полный разворот кругом реализуется двумя последовательными переключениями. Некоторые узлы закрыты препятствиями. Цель управления состоит в перемещении объекта из заданного начального состояния в место назначения в обход препятствий.

Описанная задача представляет в упрощенном виде систему управления движением погрузчика на складе, в библиотеке и т.п. Погрузчик перемещается по дорожкам между стеллажами (контейнерами, полками и т.п.). Пути передвижения образуют сеть. Прямолинейное движение чередуется с поворотами, которые считаются переключениями. Повороты происходят в узлах сети (на развилках и перекрестках). Некоторые дорожки (или узлы сети) закрыты для проезда препятствиями (грузами, неразмещенными на стеллажах, другими погрузчиками и т.п.). Цель управления состоит в доставке груза из заданного начального положения в место назначения по оптимальному маршруту в обход препятствий.

Пусть на промежутке времени $[0, T]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, N$, образующие конечную неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq T. \quad (3.1)$$

Равенство последовательных моментов в (3.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения.

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = V \sin \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (3.2)$$

В этих уравнениях: $t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$, $i \in N \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков T_i прямолинейного движения системы; $x(t)$, $y(t)$ – прямоугольные координаты положения объекта в момент времени $t \in T_i$; V – модуль скорости движения. Угол $\gamma(t)$ наклона траектории к оси абсцисс имеет значение, кратное $\frac{\pi}{2}$, и не меняется при непрерывном движении. Управление непрерывным движением системы отсутствует.

В момент переключения происходит мгновенное изменение направления движения на величину $\frac{\pi}{2}$. При этом повороте угол наклона траектории изменяется согласно рекуррентному уравнению

$$\gamma_i = \gamma_{i-} + \frac{\pi}{2} v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

В уравнении (3.3): v_i – управление, задающее направление поворота, $v_i \in \{\pm 1\}$; $\gamma_i = \gamma(t_i)$ – величина угла наклона траектории сразу после i -го переключения, а γ_{i-} – величина угла непосредственно перед i -м переключением:

$$\gamma_{i-} \triangleq \begin{cases} \gamma(t_i - 0), & t_{i-1} < t_i, \\ \gamma_{i-1}, & t_{i-1} = t_i. \end{cases}$$

Прямоугольные координаты при повороте не меняются, т.е. $x_i = x_{i-}$, $y_i = y_{i-}$.

На сетке заданы запрещенные позиции (препятствия), в которых объект управления не может находиться. Обозначим через $M \subseteq \mathbb{R}^2$ множество допустимых узлов сетки, через которые возможно движение объекта управления. Тогда дополнение \bar{M} будет описывать препятствия.

Начальное состояние системы задано

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

причем координаты x_0, y_0 – целочисленные, а величина угла γ_0 кратна $\frac{\pi}{2}$. Терминальные условия $x(T) = x_T$, $y(T) = y_T$ определяют момент T окончания процесса управления. Здесь (x_T, y_T) – целочисленные координаты цели. Направление движения $\gamma(T)$ в момент достижения цели не существенно. Начальное (x_0, y_0) и конечное (x_T, y_T) положения системы, разумеется, допустимые, т.е. принадлежат M .

Движение рассматриваемой модели управляется при помощи поворотов, т.е. заданием функции $v(\cdot): T \rightarrow \{\pm 1\}$. Допустимые траектории представляют собой ломаные, соединяющие начальное и конечное состояние системы и принадлежащие M . Управление считаем допустимым, если оно порождает допустимую траекторию. Множество допустимых программных управлений обозначим через \mathcal{V} . Подчеркнем, что количество $N = |\mathcal{T}| = |v(\cdot)|$ переключений и моменты переключений (3.1) не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

В *задаче минимизации количества переключений* требуется найти допустимое управление с минимальным количеством переключений:

$$N^* = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} |v(\cdot)|. \quad (3.4)$$

В *задаче быстрого действия* требуется найти допустимое управление, минимизирующее время достижения цели:

$$T^* = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} T(v(\cdot)). \quad (3.5)$$

В *задаче условного быстрого действия* требуется найти управление с фиксированным количеством переключений N , минимизирующее время достижения цели:

$$T_N^* = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}_N} T(v(\cdot)). \quad (3.6)$$

Здесь \mathcal{V}_N – множество допустимых управлений, имеющих ровно N переключений.

В задаче быстрогодействия с минимальным количеством переключений требуется найти условное по быстроддействию управление с наименьшим количеством переключений:

$$T^*_{N^*} = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}_{N^*}} T(v(\cdot)). \quad (3.7)$$

Задача быстрогодействия с ограничениями скорости движения и ускорения. В задачах (3.4) – (3.7) непрерывное движение подвижного объекта управления неуправляемое, линейная скорость – постоянная. Управление осуществляется поворотами в узлах сетки. Изменим модель (3.2), дополняя ее уравнением изменения скорости движения

$$\dot{x}(t) = V(t)\cos\gamma(t), \quad \dot{y}(t) = V(t)\sin\gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = 0, \quad \dot{V}(t) = u(t).$$

Здесь $u(t)$ – ускорение, ограниченное по модулю $|u(t)| \leq U_{\max}$. Линейную скорость $V(t)$ движения будем считать также ограниченной: $V(t) \leq V_{\max}$. Предполагаем, что повороты выполняются только при нулевой скорости движения $V(t) = 0$, причем время поворота на угол 90° равняется ΔT . Роль управления непрерывным движением играет ускорение $u(\cdot)$. Множество допустимых управлений U включает такие кусочно-непрерывные управления $u(\cdot): [0, T] \rightarrow [-U_{\max}, U_{\max}]$, при которых не нарушается ограничение скорости $V(t) \leq V_{\max}$. Качество допустимого управления оценивается функционалом

$$T(u(\cdot), v(\cdot)) = T + N\Delta T,$$

в котором кроме времени T кусочно-непрерывного движения учитывается время, затраченное на повороты.

Требуется найти допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, при которых время движения с учетом поворотов минимальное

$$T = \min_{(u(\cdot), v(\cdot)) \in U \times \mathcal{V}} T(u(\cdot), v(\cdot)).$$

3.2. ДВУХПОЗИЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДОСТИЖИМОСТИ И ЦЕНЫ

Для решения задачи минимизации количества переключений используется **двухпозиционная функция достижимости**. Ее значение $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$ равно нулю, если существует допустимая траектория без переключений, приводящая систему из состояния (x, y, γ) в положение (\hat{x}, \hat{y}) . В противном случае, по определению, полагаем $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = +\infty$. Если отрезок от стартовой точки (x, y) до прицельной точки (\hat{x}, \hat{y}) принадлежит лучу:

$$x(t) = x + tV\cos\gamma, \quad y(t) = y + tV\sin\gamma, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

и содержит только допустимые узлы из M , то $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = 0$, иначе $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = +\infty$. Направление движения $\hat{\gamma}$ в прицельной точке должно совпадать с направлением γ , так как переключений нет. Поэтому $\hat{\gamma}$ не указывается в аргументах функции $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$.

Для решения задачи быстродействия определяем *двухпозиционную функцию цены*. Ее значение $\theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$ равно времени прямолинейного движения из стартового состояния (x, y, γ) в прицельное положение (\hat{x}, \hat{y}) . Если отрезок от стартовой точки (x, y) до прицельной точки (\hat{x}, \hat{y}) принадлежит лучу (3.8), то

$$\theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = (|x - \hat{x}| + |y - \hat{y}|) / V.$$

В противном случае по определению полагаем $\theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = +\infty$. Направление движения $\hat{\gamma}$ в конечном состоянии совпадает с γ , так как поворотов нет, поэтому $\hat{\gamma}$ не указывается в аргументах функции $\theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$.

Введенные вспомогательные двухпозиционные функции достижимости и цены используются для нахождения образующих функций цены в соответствующих задачах.

3.3. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ МАРШРУТОВ НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

3.3.1. Задача минимизации количества переключений

Синтез позиционного управления, минимизирующего количество переключений, получим на основе достаточных условий оптимальности [36]. Пусть $s(x, y, \gamma)$ – функция цены, равная минимальному количеству поворотов траектории, исходящей из состояния (x, y, γ) и попадающей в цель (x_T, y_T) ; $s_k(x, y, \gamma)$ – образующая функции цены, равная либо количеству поворотов k , траектории соединяющей состояние (x, y, γ) с целью (x_T, y_T) , либо $+\infty$, если такой траектории не существует.

Запишем уравнения для образующих функции цены. Нулевая образующая находится по двухпозиционной функции достижимости (см. раздел 3.2)

$$s_0(x, y, \gamma) = S(x, y, \gamma | x_F, y_F).$$

Остальные образующие будут удовлетворять рекуррентному уравнению

$$s_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} s_{k-1} \left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v \right) + 1 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

В процессе решения уравнений (3.9) находится условное оптимальное позиционное управление

$$v_k(x, y, \gamma) = \arg \min_{v \in \{\pm 1\}} s_{k-1} \left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v \right). \quad (3.10)$$

Минимальное количество переключений N определяется по образующим функции цены

$$N = \min_{k \in Z_+} s_k(x_0, y_0, \gamma_0),$$

где Z_+ – множество целых неотрицательных чисел.

Численное решение задачи проводится на ограниченной сетке M . При этом операцию минимизации по узлам сетки в уравнении (3.10) можно выполнить простым перебором. Для сеток с большим количеством узлов необходимо использовать методы целочисленной минимизации.

На рисунке 3.1 показаны оптимальные траектории с наименьшим количеством поворотов на сетке размеров 10×10 при следующих значениях параметров:

$$V = 1 \text{ м/с}, \quad x_0 = 7, \quad y_0 = 10, \quad \gamma_0 = \pi/2, \quad x_T = 5, \quad y_T = 1. \quad (3.11)$$

Препятствия на сетке отмечены "крестиками", начальное состояние представлено треугольником, конечное состояние – квадратом. Оптимальные по количеству переключений траектории представлены двойной штриховой (а) и пунктирной (б) линиями, направление движения отмечено стрелками. Минимальное количество переключений равно пяти.

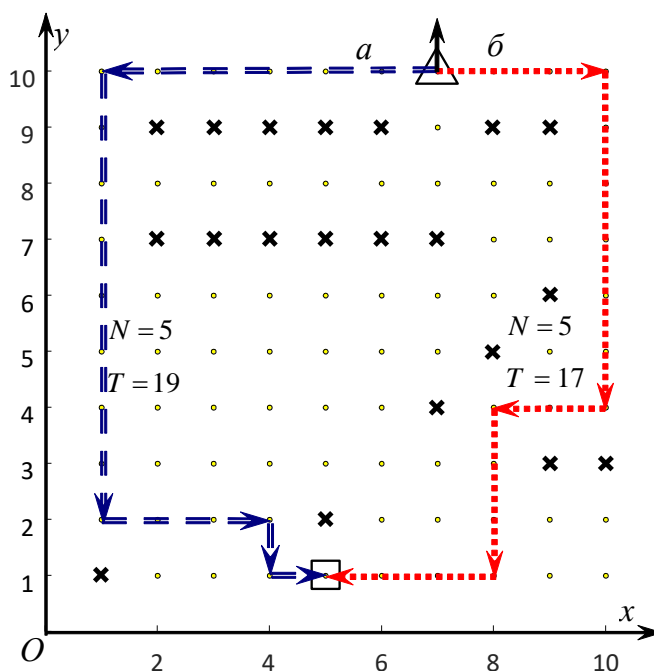


Рисунок 3.1. Оптимальные траектории с наименьшим количеством поворотов.

3.3.2. Решение задачи быстродействия

Синтез позиционного управления, оптимального по быстродействию, получаем на основе достаточных условий оптимальности [36]. Обозначим через $\theta(x, y, \gamma)$ значение функции цены, т.е. минимальное время достижения цели (x_T, y_T) , начиная движение из стартового состояния (x, y, γ) . Поскольку задача стационарная, то функция цены не зависит от времени. Образующая $\theta_k(x, y, \gamma)$ функции цены равна, по определению, минимальному времени достижения цели на

допустимых траекториях, имеющей ровно k переключений (поворотов). Если допустимой траектории с k поворотами не существует, то полагаем $\theta_k(x, y, \gamma) = +\infty$.

Запишем уравнения для образующих функции цены. Нулевая образующая находится по двухпозиционной функции цены

$$\theta_0(x, y, \gamma) = \theta(x, y, \gamma | x_T, y_T). \quad (3.12)$$

Остальные образующие удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$\theta_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ \theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} \theta_{k-1} \left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v \right) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

В процессе решения уравнений (3.13) находится условное оптимальное позиционное управление

$$v_k(x, y, \gamma) = \arg \min_{v \in \{\pm 1\}} \phi_{k-1} \left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v \right).$$

Минимальное время движения определяется по образующим функции цены

$$T = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \theta_k(x_0, y_0, \gamma_0). \quad (3.14)$$

Численное решение задачи проводится на ограниченной сетке M . При этом операцию минимизации по узлам сетки в уравнении (3.13) можно выполнить простым перебором. Для сеток с большим количеством узлов необходимо использовать методы целочисленной минимизации.

На рисунке 3.2 показана траектория, оптимальная по быстродействию. Решение получено на сетке размеров 10×10 со значениями параметров (3.11). Минимальное время движения равно 13 с., а траектория имеет семь поворотов.

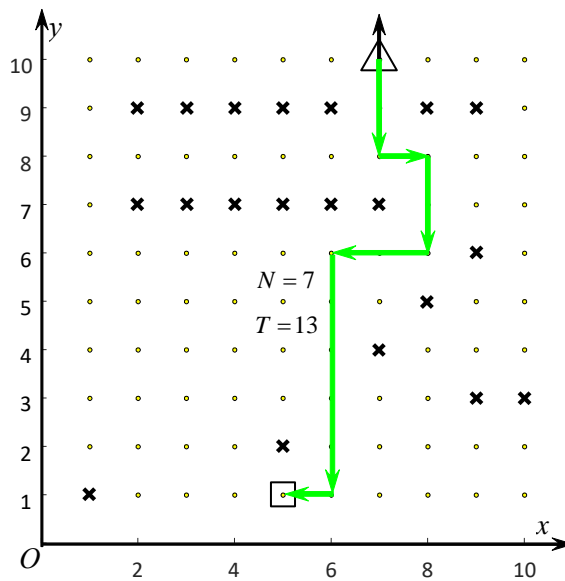


Рисунок 3.2. Оптимальная траектория по быстродействию.

3.3.3. Решение задачи условного быстродействия

Для решения задачи условного быстродействия с заданным количеством N переключений достаточно найти первые $N + 1$ образующих функции цены, решая рекуррентное уравнение (3.13) для $k = 1, \dots, N$. После чего условное минимальное время достижения цели находится по формуле

$$T_N = \min_{k=0,1,\dots,N} \theta_k(x_0, y_0, \gamma_0).$$

3.3.4. Решение задачи быстродействия с минимальным количеством переключений

Решение такой задачи выполняется в два этапа. Сначала определяется минимальное количество переключений N (см. раздел 3.2.1). Затем, при этом количестве переключений, решается задача условного быстродействия (см. раздел 3.3.3) и находится время (3.7). Для параметров (3.11) на рисунке 3.3 пунктирной линией показана оптимальная по быстродействию траектория с минимальным количеством переключений. Время движения равно 17 с.

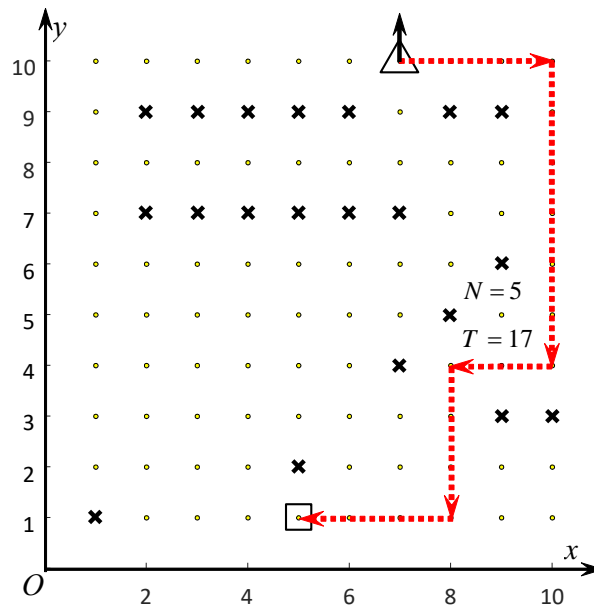


Рисунок 3.3. Оптимальная траектория по быстродействию с минимальным количеством переключений.

3.3.5. Решение задачи быстродействия с ограничениями скорости движения и ускорения

Для задачи (3.8) двухпозиционная функция цены находится, используя принцип максимума [151]. Оптимальная по быстродействию траектория непрерывного движения состоит из трех участков: разгон с максимальным ускорением, движение с максимальной скоростью,

торможение с минимальным ускорением. График скорости представлен на рисунке 3.4 (а). Если скорость движения не ограничена или длина отрезка мала, то оптимальная траектория состоит из разгона и торможения (график скорости на рисунке 3.4 (б)).

Если нет допустимой траектории, то $\theta(x_0, y_0, \gamma_0 | x_1, y_1) = +\infty$.

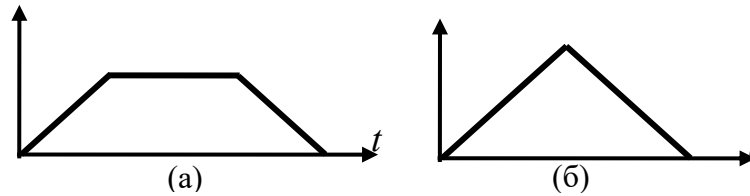


Рисунок 3.4. Графики скоростей.

Нулевая образующая находится по двухпозиционной функции цены (3.15), согласно (3.12). Остальные образующие удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$\theta_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ \theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} \theta_{k-1}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v) + \Delta T \right\}, k = 1, 2, \dots$$

Минимальное время движения определяется по формуле (3.14).

Численное решение задачи получено на сетке размеров 10×10 со значениями параметров (3.11). Оптимальные траектории представлены на рисунке 3.5. Они совпадают с найденными ранее для других задач. Траектория (а) получена для $U_{\max} = 2 \text{ м/с}^2$, $V_{\max} = +\infty \text{ м/с}$, $\Delta T = 1 \text{ с.}$, т.е. без ограничения скорости. Время движения по этой траектории $T_a = 10,3323 \text{ с.}$ Траектория (б) найдена при $U_{\max} = 2 \text{ м/с}^2$, $V_{\max} = 4 \text{ м/с}$, $\Delta T = 1 \text{ с.}$, причем $T_b = 10,6171 \text{ с.}$ Траектория (в) оптимальная при $U_{\max} = 2 \text{ м/с}^2$, $V_{\max} = 4 \text{ м/с}$, $\Delta T = 0 \text{ с.}$, когда повороты выполняются мгновенно. Время движения $T_v = 5,7511 \text{ с.}$

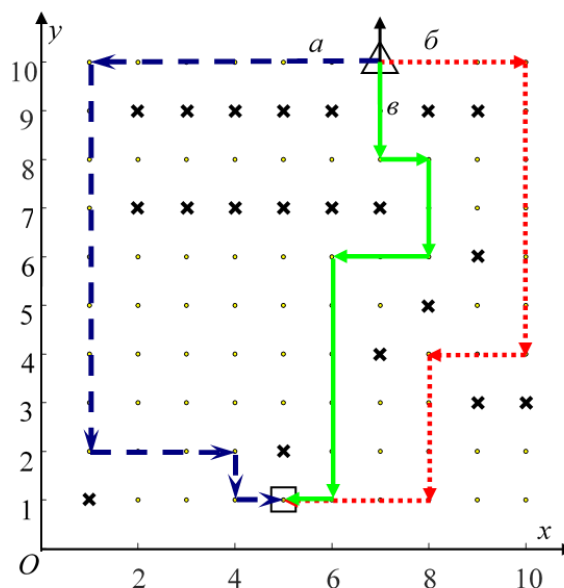


Рисунок 3.5. Оптимальные траектории в задаче быстрогодействия с ограничениями скорости движения и ускорения.

Таким образом, для планирования маршрутов непрерывно-дискретного движения вполне эффективно применение достаточных условий оптимальности переключаемых систем. Разумеется, предлагаемые алгоритмы синтеза управления переносятся и на другие карты с более сложной сетью дорог. Кроме препятствий на схеме, можно учитывать факторы, затрудняющие движение. Например, ограничения на отдельных участках скорости и направления движения, габаритов и грузоподъемности достаточно просто задаются на нагруженных ориентированных графах.

3.4. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ МАРКОВА – ДУБИНСА С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

3.4.1. Постановка задачи

Пусть на промежутке времени $[0, T]$ плоское движение объекта управления описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = V \sin \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq \omega, \quad (3.16)$$

где x, y – прямоугольные координаты объекта; γ – угол между вектором скорости и осью абсцисс, V – линейная скорость, u – угловая скорость, которая является управлением, ограниченным по модулю заданной величиной ω . Уравнения (3.16) описывают так называемые траектории Маркова – Дубинса [84, 134], которые часто используют в качестве модели движения БПЛА [134].

Терминальные условия определяют начальное состояние

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (3.17)$$

и конечное положение объекта управления

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T. \quad (3.18)$$

Промежуточные условия

$$x(t_i) = x_i, \quad y(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.19)$$

задают точки, через которые траектория должна проходить. Моменты времени t_1, \dots, t_m ограничены неравенствами $0 < t_1 < \dots < t_m < T$. Углы $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m), \gamma(T)$, определяющие направления движения в промежуточных точках и в конечный момент времени, произвольные. Допустимым считается кусочно-непрерывное управление $u: [0, T] \rightarrow [-\omega, \omega]$, которое порождает допустимую траекторию, соединяющую терминальные состояния (3.17), (3.18) и проходящую через промежуточные точки (3.19).

Требуется найти минимальное время T и допустимое управление, при котором это минимальное время достигается, т.е. решить задачу быстродействия:

$$T \rightarrow \min. \quad (3.20)$$

3.4.2. Оптимальные и попадающие траектории

В классической задаче Маркова – Дубинса [84] требуется перевести систему из заданного начального состояния (3.17) в заданное конечное

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \gamma(T) = \gamma_T. \quad (3.21)$$

Решение этой задачи описано в [151]. Заметим, что для произвольных состояний аналитический выбор оптимальной траектории достаточно сложный. Задача с произвольным направлением скорости в конечный момент времени исследована в [44]. Для решения обеих задач можно использовать принцип максимума [99]. Оптимальное управление релейное: либо нулевое ($u(t) = 0$), которому соответствует прямолинейное движение, либо максимальное по модулю ($u(t) = \pm\omega$) – движение по окружности радиуса V/ω в положительном или отрицательном направлениях соответственно. Типовые оптимальные траектории для задачи "состояние – состояние" (с конечными условиями (3.21)) описаны в [1]. Они представляют собой гладкое соединение либо трех дуг окружностей, либо двух дуг и отрезка их общей касательной. Для задачи "состояние – цель" (с конечными условиями (3.18)) типовые оптимальные траектории – это гладкое соединение либо двух окружностей, либо дуги окружности и отрезка. Допустимые траектории видов "дуга – отрезок – дуга" или "дуга – дуга – дуга" для задачи с конечными условиями (3.21), а также "дуга – отрезок" или "дуга – дуга" для задачи с конечными условиями (3.18), будем называть *попадающими*. В зависимости от терминальных условий попадающих траекторий в задаче "состояние – состояние" не может быть более восьми, а в задаче "состояние – цель" – не более шести. Поэтому для решения достаточно составить все попадающие траектории, вычислить время движения по каждой из них и выбрать минимальное. Подробное описание алгоритмов решения задач "состояние – состояние" и "состояние – цель" приведено в [43].

3.4.3. Решение задачи Маркова – Дубинса с промежуточными условиями

Для задачи (3.16) – (3.20) назначим в промежуточных точках направления движения, задавая углы

$$\gamma(t_i) = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.22)$$

Тогда допустимая траектория будет разбита на m участков вида "состояние – состояние" и еще один (последний) участок вида "состояние – цель". На каждом участке, используя алгоритмы из [43] для нахождения типовой оптимальной траектории Маркова – Дубинса, можно найти частичную оптимальную траекторию всего маршрута. Однако траектория, составленная из

частичных оптимальных траекторий, не будет оптимальной в целом. Для этого нужно выполнить оптимизацию углов (3.22).

Действительно, обозначим через $\Theta(x_0, y_0, \gamma_0 | x_1, y_1, \gamma_1)$ или $\Theta(x_0, y_0, \gamma_0 | x_F, y_F)$ минимальное время движения из состояния (x_0, y_0, γ_0) в состояние (x_1, y_1, γ_1) или в цель (x_F, y_F) соответственно. Тогда время движения по составленной траектории будет зависеть только от углов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, определяющих направление движения в промежуточных точках

$$T(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum_{i=1}^m \Theta(x_{i-1}, y_{i-1}, \gamma_{i-1} | x_i, y_i, \gamma_i) + \Theta(x_m, y_m, \gamma_m | x_F, y_F), \quad (3.23)$$

а минимальное время является решением задачи

$$\min T = \min_{\gamma_1, \dots, \gamma_m} T(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \quad (3.24)$$

оптимизации по углам $\gamma_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, \dots, m$.

В самом деле, согласно принципу оптимальности Беллмана [10], любой участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией. Поэтому траектории между состояниями

$$(x_0, y_0, \gamma_0), (x_1, y_1, \gamma_1), \dots, (x_m, y_m, \gamma_m)$$

являются решениями задач "состояние – состояние", а на последнем участке от (x_m, y_m, γ_m) до точки (x_F, y_F) – решением задачи "состояние – цель". Время движения по этой попадающей траектории определяется формулой (3.23). Минимизируя это выражение по направлениям скорости в промежуточных точках, получаем лучшую попадающую траекторию и наименьшее значение времени (3.24). Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 3.1. *Для того чтобы траектория $(x(\cdot), y(\cdot), \gamma(\cdot))$ в задаче (3.16) – (3.20) с промежуточными условиями была оптимальной необходимо, чтобы:*

- 1) *участки траектории между промежуточными точками $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m), (x_F, y_F)$ совпадали с кривыми Маркова-Дубинса;*
- 2) *углы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ направления скоростей в точках $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ были решением задачи минимизации (3.24).*

Замечание. Как показали расчеты, задача (3.24) хорошо решается методами спуска. В качестве начального приближения для γ_i , $i = 1, \dots, m$, можно взять угол, соответствующий среднему направлению в промежуточной точке

$$\left[\left(x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}) \right) + \left(x(t_{i+1}) - x(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i) \right) \right] / 2.$$

3.5. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу оптимизации маршрутов движения БПЛА при наличии препятствий. Рациональная траектория БПЛА формируется в два этапа. Сначала по карте непрерывно-дискретного движения с отмеченными препятствиями синтезируется оптимальная по быстродействию ломаная (см. разделы 3.1 – 3.3). Используя эту ломаную в качестве опорной траектории, формируется оптимальная траектория Маркова – Дубинса. Вершины ломаной служат промежуточными точками для траектории БПЛА (см. раздел 3.4).

Для опорных траекторий, найденных в разделе 3.3 на прямоугольной сетке, получены оптимальные траектории Маркова – Дубинса с промежуточными условиями. Расчеты проводились при $V = 1$ м/с. и $\omega = 3$ рад/с. На рисунке 3.6 начальное состояние системы обозначено треугольником, конечное – квадратом, промежуточные точки – окружностями. Опорные траектории изображены штрихпунктирными линиями (ломаные a , b , v), а оптимальные траектории Маркова – Дубинса представлены двойной штриховой (a), пунктирной (b) и сплошной (v) линиями соответственно. Время движения по этим траекториям: $T_a = 19.45$ с., $T_b = 17.43$ с., $T_v = 14.43$ с.

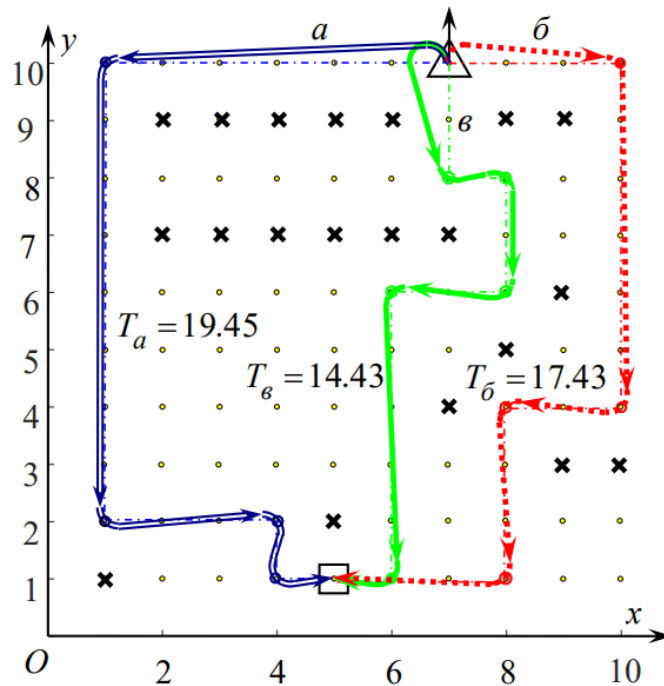


Рисунок 3.6. Оптимальные траектории Маркова – Дубинса с промежуточными условиями.

ВЫВОДЫ

1. Поставлена и исследована задача оптимизации маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий.
2. Рассмотрены решения типовых задач планирования маршрутов на прямоугольной сетке.
3. Поставлена и исследована задача оптимизации траектории Маркова – Дубинса с промежуточными условиями.
4. Доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова – Дубинса с промежуточными условиями.
5. Решен академический пример задачи планирования и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата с промежуточными условиями и при наличии препятствий.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ МНОГОКРАТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В разделе 4.1 рассматриваются математические модели оптимального управления гибридными системами, особенностью функционирования которых является наличие мгновенных многократных переключений.

В разделе 4.2 анализируются процедуры решения задач синтеза оптимального "управляющего комплекса" ПС и применяемые для этого численно-аналитические методы. Алгоритмы синтеза включают ряд вспомогательных задач: интегрирование дифференциальных уравнений непрерывного движения, решение рекуррентных уравнений, описывающих переключения, конечномерная минимизация, решение краевых задач с промежуточными условиями. Эти задачи решаются с помощью известных численных методов. Задачи нахождения образующих функции цены, двухпозиционных и моментных функций цены являются новыми. Для их решения разработаны новые численно-аналитические методы и реализующие их программные комплексы.

В разделе 4.3 описывается программный комплекс для решения задачи синтеза оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления (см. раздел 1.6), а также задачи минимизации количества переключений.

В разделе 4.4 описывается программный комплекс решения задачи оптимизации маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий, а именно: задача планирования оптимальных (по быстродействию) маршрутов на прямоугольной сетке с минимальным количеством переключений, а также задача оптимизации траекторий Маркова-Дубинса с промежуточными условиями при наличии препятствий (см. разделы 3.3 и 3.4).

Программные комплексы реализованы в среде MATLAB. Они предназначены для численно-аналитического решения задач оптимального управления ПС с минимальным количеством переключений. Программные комплексы позволяют проводить численные расчеты для разных параметров, задаваемых пользователем.

4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С МГНОВЕННЫМИ МНОГОКРАТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В задачах оптимального управления ПС, рассматриваемых в разделах 1 и 3 допустимыми считаются процессы с мгновенными многократными переключениями. Процессы с такими переключениями не являются исключениями, а возникают в обычных задачах управления ПС.

Например, оптимальные процессы с мгновенными многократными переключениями получены в разделе 1.6 для ЛКЗ синтеза оптимальной ПС и в разделе 3.1 при оптимизации нелинейной ПС.

Процессы с мгновенными многократными переключениями являются относительно новыми в теории оптимального управления. Моделирование детерминированных дискретных процессов управления, описываемых рекуррентными уравнениями, как правило, не представляет трудностей. Однако, при оптимизации моментов переключений возможное равенство этих моментов необходимо предусматривать в алгоритмах специальным образом. В любых задачах конечномерной оптимизации с нестрогими ограничениями типа неравенств наиболее сложным является поиск точек экстремума на границе допустимой области решения. При оптимизации ПС минимальное количество переключений заранее не известно. Поэтому неизвестно количество переменных минимизируемой функции и количество ограничений типа неравенств. В этом заключается сложность численной оптимизации ПС.

В разделе 1.1 рассматривается система, которая на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (4.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in N, \quad (4.2)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i = g(t_i, x_{i-}, v_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

В соотношениях (4.1) – (4.3) обозначения совпадают с принятыми в разделе 1.1. Равенства моментов переключений, допустимые в (4.1), означают наличие мгновенных многократных переключений.

В исследованиях ГС используются различные математические модели переключений [130, 137, 153]. Кроме рекуррентных уравнений (4.3) для описания переключений, в диссертации используется также модель с рекуррентным включением (см. раздел 2):

$$x_i \in G(t_i, x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.4)$$

где $G: T \times X \rightarrow 2^X$ – многозначное отображение. При этом описании явное управление переключениями отсутствует, а мгновенные многократные переключения не исключаются. Модели (4.3) и (4.4) в некотором смысле эквивалентны, так как $G(t, x) = \bigcup_{v \in V} g(t, x, v)$. Поэтому далее рассматривается только модель (4.3).

При заданных моментах переключений (4.1) и известных управлениях $u(t)$ и v_i моделирование выполняется просто: уравнение (4.2) интегрируется численно, например,

методом Рунге – Кутты, а скачки состояния системы находятся в моменты переключений по формуле (4.3).

Однако, процедура поиска оптимальных моментов переключений гораздо сложнее. Решение задачи синтеза сводится к нахождению моментных функций цены (см. раздел 1.2). Эти функции определяются численно при заданных моментах переключений, а оптимальные управления непрерывным движением $u(t)$ и скачками v_i выражаются аналитически через моментные функции цены. Поэтому синтез ПС сводится к оптимизации моментов переключений. При численной реализации необходимо специально предусматривать мгновенные многократные переключения, которым соответствует равенства в (4.1). Это нетрудно реализовать при дискретной оптимизации моментов переключений. Поэтому на промежутке времени функционирования системы выбирается сетка с постоянным шагом Δt , на которой происходит дискретная оптимизация.

Описанная оптимизация выполняется на фиксированной сетке при заданном количестве переключений N . Как правило, количество переключений последовательно увеличивается. Если при увеличении количества переключений минимальное значение функционала не уменьшается, то процесс минимизации на фиксированной сетке заканчивается. Для достижения большей точности шаг сетки уменьшается. Количество переключений системы и число узлов сетки связаны. Разумеется, число узлов сетки должно быть больше N . Однако связь между этими параметрами не исчерпывается этим простым неравенством. Зависимость существует, но она нам не известна. В этом заключается сложность процедуры минимизации, так как фактически минимизируются функции с неизвестным количеством аргументов.

Применение известных методов нецелочисленной минимизации для рассматриваемой задачи труднореализуемо. Это связано с тем, что количество ограничений типа неравенств на переменные заранее не задано, а меняется с увеличением количества переключений. Поэтому область допустимых значений переменных имеет сложную границу из-за допустимости мгновенных многократных переключений. Это обстоятельство существенно осложняет применение численных методов.

4.2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО "УПРАВЛЯЮЩЕГО КОМПЛЕКСА"

Решение задач оптимального управления ПС сводится к нахождению "управляющего комплекса", в состав которого, обычно входят элементы: оптимальное количество переключений, моменты переключений, оптимальное управление непрерывным движением между переключениями и оптимальное управление переключениями (скачками). Состав и процедура поиска "управляющего комплекса" зависит от постановки задачи (см. введение).

В ЛКЗ оптимального управления (см. раздел 1.5) "управляющий комплекс" представлен 4 элементами: количеством и моментами переключений, а также непрерывным и дискретным управлениями. Оптимальные позиционные управления непрерывным движением и скачками выражаются аналитически через моментные функции цены в форме линейных регуляторов. Моментные функции цены находятся численно, последовательно решая рекуррентные и дифференциальные матричные уравнения. Моменты переключений вычисляются в результате дискретной минимизации. Количество переключений определяется целочисленным перебором.

Для задачи оптимального управления непрерывными системами в классе кусочно-постоянных управлений (см. раздел 2) "управляющий комплекс" содержит следующие параметры: количество переключений N , моменты переключений t_1, \dots, t_N и управления u_0, u_1, \dots, u_N . Поиск этих параметров (см. раздел 2.3.1) связан с решением краевой задачи с промежуточными условиями, состоящими из $2N + 1$ трансцендентных уравнений, решение которых является серьезной проблемой. Поэтому предлагается другой численно-аналитический подход, который заключается в минимизации функционала I_N по моментам переключений (см. раздел 2.3.2) с последующей проверкой выполнения условий оптимальности. При таком походе составление краевых задач и формул для оптимальных управлений, согласно необходимым условиям, выполняется аналитически, а минимизация функционала по моментам переключений – численно.

В задачах оптимизации маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий (см. раздел 3.3) "управляющий комплекс" включает: количество переключений N , моменты переключений и управление переключениями. Управление непрерывным движением отсутствует. Переключением считается изменение направления движения объекта управления на $\frac{\pi}{2}$. Momentами переключений служат узлы сетки, в которых происходят повороты. Оптимальное управление переключениями выражается аналитически через образующие функции цены. Образующие находятся численно в результате рекуррентной процедуры с использованием вспомогательных двухпозиционных функции (см. раздел 3.2), которые выражаются аналитически.

Задача оптимизации траекторий Маркова – Дубинса с промежуточными условиями (см. раздел 3.4) является завершающим этапом задачи оптимизации маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий. Она представляет собой задачу управления непрерывной системой с промежуточными условиями. Так как промежуточные состояния системы заданы и нет управления переключениями, то система не является гибридной. Для получения оптимального управления достаточно найти оптимальные направления движения в промежуточных точках, так как решение задачи оптимального

управления между промежуточными точками известно [1, 43, 134]. Таким образом, задача сводится к конечномерной оптимизации направлений.

Для приведенных выше численных процедур, используемых в алгоритмах решения задач оптимального управления, применяются стандартные и модифицированные методы. Интегрирование дифференциальных уравнений выполнялось методом Рунге-Кутты, дискретная минимизация – перебором на сгущающихся сетках, непрерывная минимизация – модификацией метода градиентного спуска на сетке. Модификация заключается в приближенном выборе на заданной сетке наилучшего направления и оптимальной длины шага по этому направлению. Характерный размер сетки уменьшается в процессе решения.

Для проверки аналитических решений краевой задачи для линейной системы дифференциальных уравнений, формул, полученных для вспомогательных двухпозиционных функций цены и оптимальных управлений, применялась система аналитических вычислений Maple.

4.3. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОБМЕНОМ КАНАЛОВ УПРАВЛЕНИЯ

Разработанный в среде программирования MATLAB программный комплекс [42] позволяет решить ЛКЗ синтеза оптимальной ПС с обменом каналов управления (см. раздел 1.5). Интерфейс программы состоит из четырех областей – панелей. На панели "Постановка задачи" сформулирована исходная задача. Панель "Входные параметры" предназначена для внесения и корректировки пользователем значений параметров задачи и программы решения. Результаты расчетов выводятся на панелях "Выходные параметры" и "Фазовый портрет". На последней строятся оптимальные траектории движения ПС. Интерфейс программы представлен на рисунке 4.1.

Входными параметрами программного комплекса являются: допустимое число переключений N , начальное состояние $x_0 = (X_{10}, X_{20})^T$, коэффициенты затрат на переключения λ и η , промежуток времени функционирования системы t_0, t_f , величина шага интегрирования dt непрерывного движения системы, величина шага Δt сетки для оптимизации моментов переключений, а также максимальное количество вычислений функционала. Кроме этого, пользователь может задать начальное приближение моментов переключений. В противном случае, в качестве начального приближения будут взяты точки, равномерно распределенные на промежутке функционирования системы. После ввода всех входных параметров выполняется расчет. Выходными параметрами являются: минимальное значение функционала I , оптимальные моменты переключений t_1^*, \dots, t_N^* , количество вычислений функции и время, затраченное на

расчет. В графической области строится фазовый портрет оптимальной траектории ПС, где синим цветом обозначены непрерывные участки, а красным – переключения

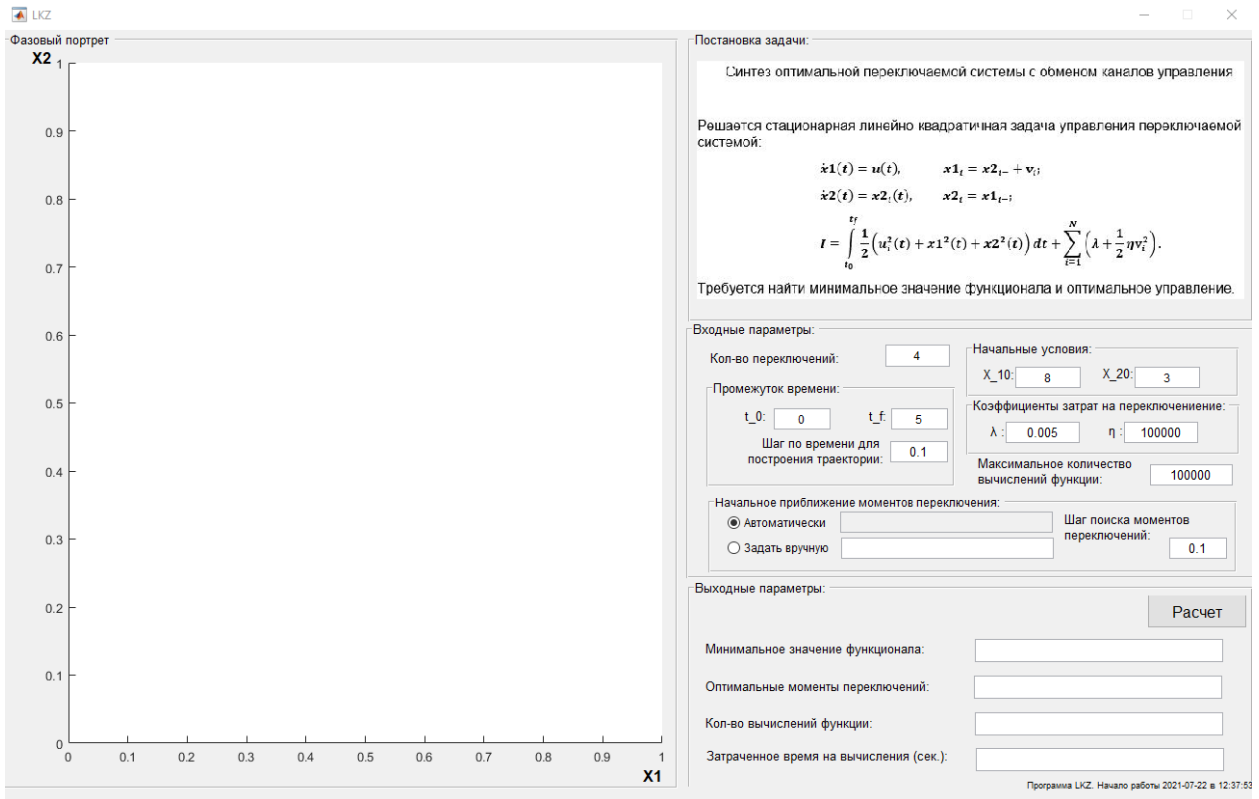


Рисунок 4.1. Интерфейс программного комплекса для решения ЛКЗ.

На рисунке 4.2, 4.3 представлены результаты работы программного комплекса – оптимальные фазовые траектории. Траектория на рисунке 4.2 получена при следующих значениях параметров: $t_0 = 0$, $t_f = 5$, $N = 4$, $x_0 = (8, -1)^T$, $\lambda = 0.005$, $\eta = 10000$, максимальное количество вычислений функционала – 100000, $dt = \Delta t = 0.01$. Начальные приближения моментов переключений определялись автоматически (равномерно на заданном промежутке).

В результате расчетов были получены: минимальное значение функционала $I_4^* = 46,34$, оптимальные моменты переключений $t_1^* = 1.06$, $t_2^* = 1.95$, $t_3^* = 3.02$, $t_4^* = 4,01$, количество вычислений функционала – 4390, время решения задачи – 0.8 с.

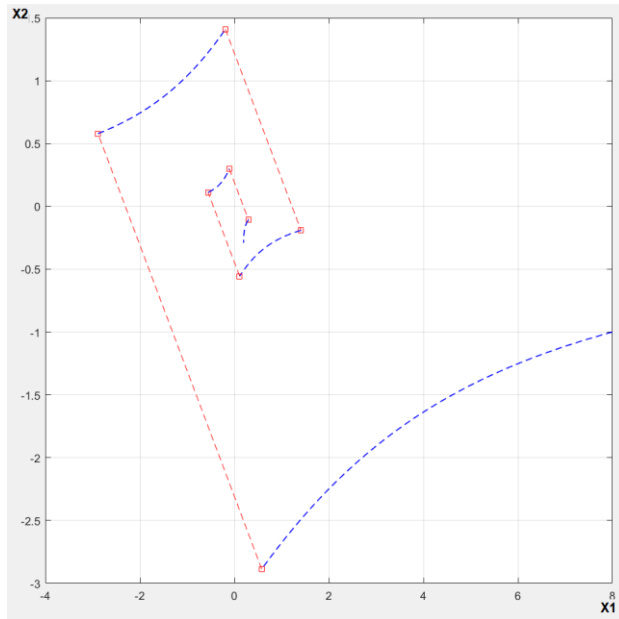


Рисунок 4.2. Оптимальная фазовая траектория с 4 переключениями.

Траектория с четырьмя переключениями в начальный момент времени (см. рисунок 4.3) получена при следующих значениях параметров: $t_0 = 0$, $t_f = 5$, $N = 4$, $x_0 = (8, 3)^T$, $\lambda = 0.009$, $\eta = 1$, максимальное количество вычислений функционала – 100000, $dt = \Delta t = 0.005$. Начальные приближения моментов переключений определялись автоматически (равномерно на заданном промежутке).

В результате расчетов были получены: минимальное значение функционала $I_4^* = 13.14$, оптимальные моменты переключений $t_1^* = t_2^* = t_3^* = t_4^* = 0$, количество вычислений функционала – 7738, время решения задачи – 1.4 с.

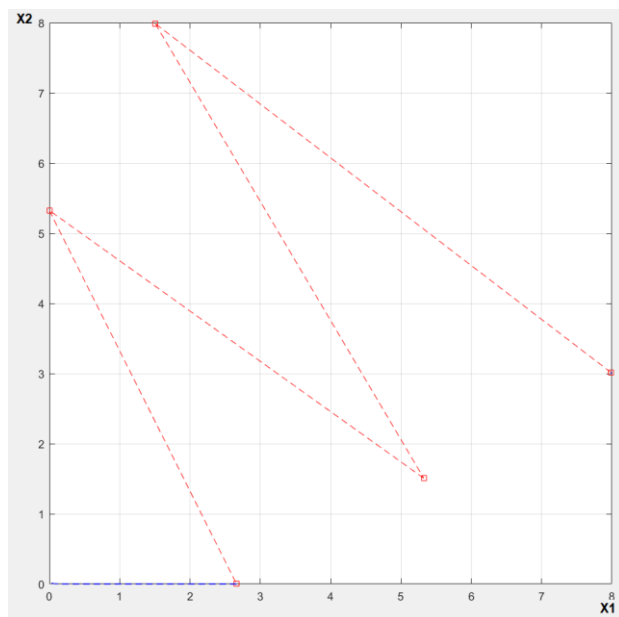


Рисунок 4.3. Оптимальная фазовая траектория с мгновенными переключениями.

4.4. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТА НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ

Разработанный в среде программирования MATLAB программный комплекс [39] позволяет решать: задачи планирования маршрутов плоского движения на сетке с препятствиями (см. раздел 3.3), задачи построения и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса с промежуточными условиями при наличии препятствий (см. раздел 3.4). Интерфейс программы состоит из двух частей. Первая служит для внесения и корректировки пользователем значений параметров задачи, а также для представления результатов расчетов. Вторая – представляет оптимальные фазовые траектории. Интерфейс программы изображен на рисунке 4.4.

Сначала пользователь выбирает карту, по которой двигается объект управления. Подготовка карт осуществляется заранее на программном уровне. Затем следует выбрать один из трех расчетов в раскрывающемся списке:

- 1) планирование траектории;
- 2) построение траектории Маркова-Дубинса без оптимизации промежуточных условий;
- 3) оптимизация траектории Маркова-Дубинса.

Отметим, что каждый из трех расчетов можно отнести к определенному этапу решения.

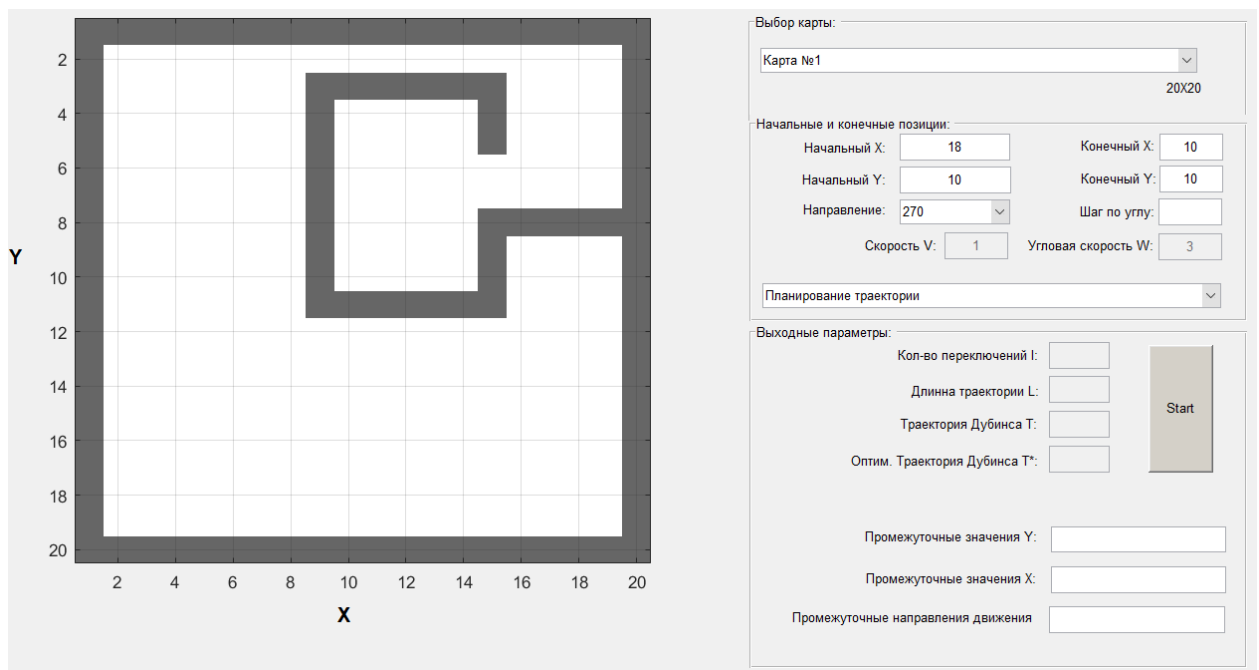


Рисунок 4.4. Интерфейс программы.

Первый этап – 1) соответствует решению задачи поиска оптимального (по быстродействию) маршрута с минимальным количеством переключений. Для поиска

оптимальной траектории применяется метод, разработанный в диссертации (см. раздел 3.3). На этом этапе оптимальная траектория представляет собой ломаную с вершинами в узлах сетки.

Второй этап – 2) и 3) представляет собой построение оптимальной траектории Маркова-Дубинса с промежуточными условиями, т.е. проходящей через заданные вершины ломаной, полученной на первом этапе решения. Для решения этой задачи используется метод, разработанный в диссертации (см. раздел 3.4). Оптимизация заключается в определении наилучших направлений движения в промежуточных узлах. Она выполняется численно модифицированным методом градиентного спуска на сгущающихся сетках.

В зависимости от выбора этапа решения, на панели "Входные данные" (см. рисунок 4.5) вводятся параметры задачи.

Начальные и конечные позиции:

Начальный X:	<input type="text" value="18"/>	Конечный X:	<input type="text" value="10"/>
Начальный Y:	<input type="text" value="10"/>	Конечный Y:	<input type="text" value="10"/>
Направление:	<input type="text" value="270"/>	Шаг по углу:	<input type="text"/>
Скорость V:	<input type="text" value="1"/>	Угловая скорость W:	<input type="text" value="3"/>

Планирование траектории

Рисунок 4.5. Панель «Входные параметры».

При планировании оптимального по быстродействию маршрута движения с минимальным количеством переключений пользователю необходимо ввести координаты начальной и конечной позиции объекта управления, а также начальное направление движения. В случае оптимизации траекторий Маркова-Дубинса дополнительно следует задать линейную и угловую скорости, а также шаг оптимизации углов направления движения в промежуточных точках. После ввода всех входных параметров выполняется расчет ("Start").

Результаты расчетов выводятся на панель "Выходные параметры", где указывается: количество переключений и длина оптимальной траектории, а также визуализация полученного маршрута движения на выбранной карте.

На рисунках 4.6, 4.7 представлены оптимальные траектории, полученные на первом и втором этапах решения, соответственно. На рисунке 4.6 представлена оптимальная траектория (ломаная), полученная на карте размером 10×10 м. при следующих значениях параметров: начальная позиция – (6,2), начальный угол направления движения – 90 градусов, конечная позиция – (4,8). Полученная траектория изображена зеленым цветом, "звездами" обозначены промежуточные узлы (точки поворотов). Планируемая траектория имеет 3 переключения, одно из которых происходит в начальный момент времени. Длина траектории $L = 12$ м.

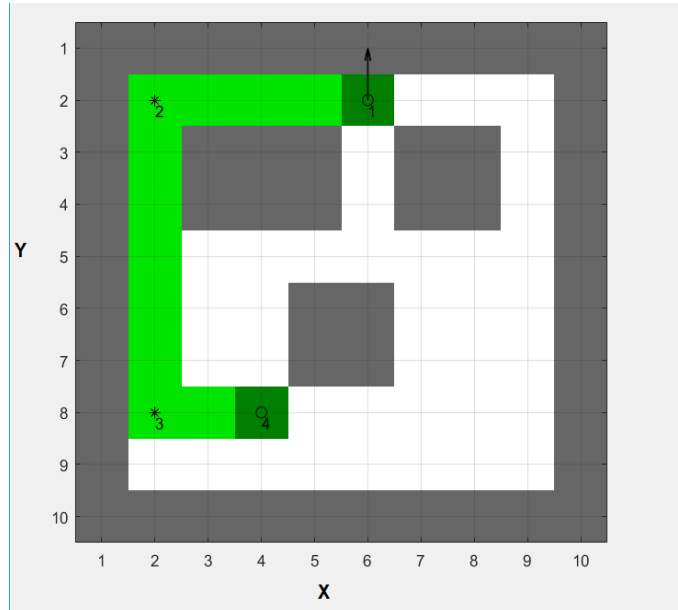


Рисунок 4.6. Оптимальная траектория (ломаная).

На втором этапе получена оптимальная траектория Маркова-Дубинса, представленная на рисунке 4.7 красными линиями. Стрелками обозначены направления движения в начальной и промежуточных точках. Параметры используемой модели: линейная скорость движения $V = 1$ м/с., угловая скорость $\omega = 3$ рад/с. Промежуточными точками служат узлы ломаной, найденные на первом этапе. Оптимизация углов направлений движения в промежуточных точках проводилась с шагом 5 градусов. Минимальное время движение $T^* = 12,3$ с.

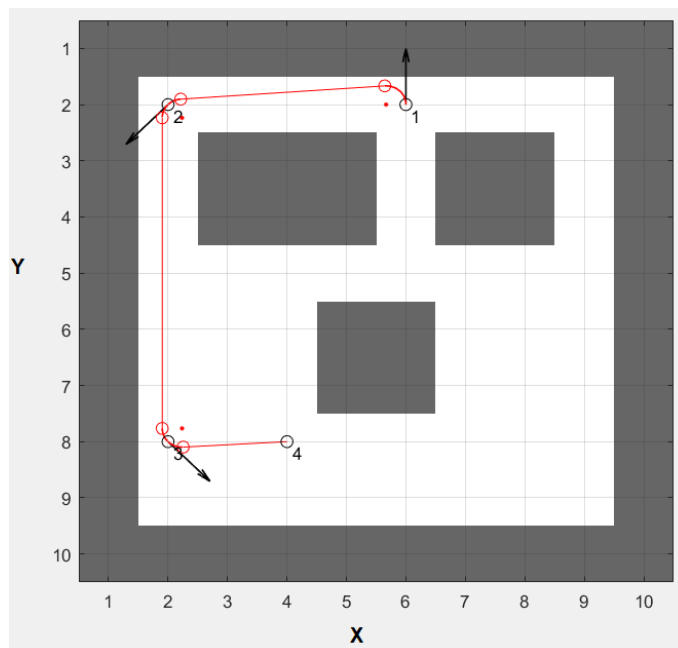


Рисунок 4.7. Оптимальная траектория Маркова-Дубинса.

ВЫВОДЫ

1. Описана реализация численно-аналитических методов синтеза оптимального "управляющего комплекса" для ПС с мгновенными многократными переключениями.
2. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритм решения линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления переключаемой системы. Эффективность работы комплекса продемонстрирована на примере. Получено свидетельство о государственной регистрации программы [42].
3. Разработан программный комплекс оптимизации маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий. Эффективность работы комплекса продемонстрирована на примере. Получено свидетельство о государственной регистрации программы [39].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным итогом диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники, выразившееся в следующих научных результатах:

- 1) поставлена и исследована задача минимизации количества переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов функционирования гибридных систем;
- 2) разработаны численно-аналитический метод решения линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления гибридными системами с мгновенными многократными переключениями и реализующий его программный комплекс;
- 3) доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами с учетом затрат на переключения управления; разработан метод применения условий оптимальности кусочно-постоянного управления для приближенного решения задачи оптимального кусочно-непрерывного управления;
- 4) на основе достаточных условий оптимальности решены задачи быстрогодействия и минимизации количества переключений (поворотов) для разных моделей плоского движения объекта управления по карте с препятствиями;
- 5) доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова-Дубинса с заданными промежуточными состояниями, на основе которых разработаны алгоритм решения задачи оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата при наличии препятствий, а также реализующий его программный комплекс.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 391 с.
2. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
3. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др.* Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 376 с.
4. *Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями. // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. №6. С.150-163.
5. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971. – 424 с.
6. *Артёмьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 160 с.
7. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАЛИТ, 2007. – 281 с.
8. *Барсегян В.Р.,* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. // Наука, М., 2016. – 230 с.
9. *Батурин В.А., Гончарова Е.В., Малтугуева Н.С.* Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами. // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №5. С. 53-61.
10. *Беллман Р.* Динамическое программирование. Издательство иностранной литературы. 1960. – 400 с.
11. *Бердышев Ю.И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса. // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т.22. № 1. С. 26–35.
12. *Болтянский В.Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1964. Т.28. №3. С. 418-514.
13. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Диф. уравнения. 1983. Т.19. № 3. С. 518–521.
14. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. – 408 с.
15. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. – 448 с.
16. *Борисов А.В., Босов А.В., Кибзун А.И., Миллер Г.Б., Семенухин К.В.* Метод условно-минимаксной нелинейной фильтрации и современные подходы к оцениванию состояний нелинейных стохастических систем. // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 3–17.

17. *Борисов А.В., Панков А.Р.* Минимаксное линейное оценивание в обобщенных неопределенно-стохастических системах II. Минимаксная фильтрация в динамических системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с мерой. // Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С.139-152.
18. *Бортаковский А.С.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в классе логико-динамических (гибридных) систем. // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С.3-23.
19. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы. // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. №6. С.77-92.
20. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т.308. С. 88 –100.
21. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами. // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. М.: ВНИИМИ. 1992. Вып. 2-3. С.72-79.
22. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами. // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 86-103.
23. *Бортаковский А.С.* Необходимые и достаточные условия оптимальности стационарных дискретных систем автоматного типа. // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. №6. С.53-70.
24. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы. // Тр. МИАН. 2008. Т.262. С.50–63.
25. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами. // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. №6. С.16–33.
26. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа. // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. №1. С.5–26.
27. *Бортаковский А.С.* Оптимизация переключающих систем. М.: Изд-во МАИ, 2016. 120 с.
28. *Бортаковский А.С.* Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности. // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №2. С.41-55.
29. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. №4. С.57-74.
30. *Бортаковский А.С., Коновалова А.А.* Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту при ограниченном количестве включений двигателя // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №6. С.97-107.
31. *Бортаковский А.С., Коновалова А.А.* Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях. // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 5. 38 с.

32. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных стационарных систем автоматного типа. // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 6. С. 20-34.
33. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами. // *АиТ*, 1987. №7. С.57–66.
34. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами при мгновенных многократных переключениях автоматной части. // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2011, № 42. С.36-47.
35. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Компьютерная технология синтеза оптимальных линейных переключаемых систем // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2019. №11. С.13-22.
36. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. №4. С. 29-46.
37. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Минимизация переключений кусочно-постоянных управлений гибридными системами // 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика", г. Москва. 23-27 ноября 2020, – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Перо", 2020 С. 499.
38. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Многокритериальная оптимизация маршрутов плоского движения переключаемых систем // *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам*, г. Суздаль. 3-8 июля 2020. – Тезисы докладов. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. С. 45-46.
39. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Оптимизация маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий. // *Федеральная служба по интеллект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ №2021619328*. 2021.
40. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Оптимизация переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-19), Москва. 17-20 июня 2019. – Тезисы докладов. – М.: ИПУ РАН. С.977-981.
41. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Оптимизация траекторий переключаемых систем // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. № 5. С. 33-51.
42. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Синтез оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления. // *Федеральная служба по интеллект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2019614061*. 2019.

43. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Синтез траектории летательного аппарата с многокритериальным планированием промежуточных условий // *Электронный Журнал "Труды МАИ"*, 2020. №113. – 20 с. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118185>.
44. *Бортаковский А.С., Щелчков К.А.* Задачи группового быстродействия летательных аппаратов // *Электронный Журнал "Труды МАИ"*, 2018. № 99. – 21 с. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=92021>.
45. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. – 544 с.
46. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунцов Б.Е.* Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 352 с.
47. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Фолиант, 2011. Т.1. С.23-81.
48. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: "Факториал Пресс", 2002. – 824 с.
49. *Величенко В.В.*, Оптимальное управление составными системами. ДАН СССР, 1967. С.754–756.
50. *Гурман В.И.* Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем. // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2004. №4. С.70–75.
51. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. – 288 с.
52. *Гурман В.И., Ни Минь Кань.* Вырожденные задачи оптимального управления. I. // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 3. С. 36-50.
53. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями. В сб. «Нелинейная динамика и управление». Вып.6. М.: ФИЗМАЛИТ, 2008. С. 101-136.
54. *Дыхта В.А.,* Неравенства Гамильтона-Якоби в задачах оптимизации дискретно-непрерывных управляемых систем / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Тез. докл. XI между нар. конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)».* М.: ИПУ РАН, 2010. С. 117-119.
55. *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: ФИЗМАЛИТ, 2000. – 256 с.
56. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд-во МАИ, 2015. – 272 с.
57. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. – 432 с.

58. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. – 336 с.
59. *Емельянов С.В.* Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматизации полёта. М.: Наука, 1968. – 324 с.
60. *Емельянов С.В.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970 – 592 с.
61. *Жук К.Д., Тимченко А.А.* Автоматизированное проектирование логико-динамических систем. Киев: Наукова думка, 1981. – 320 с.
62. *Жук К.Д., Тимченко А.А., Даленко Т.И.* Исследование структур и моделирование логико-динамических систем. // Киев: Наукова думка, 1975. 199 с.
63. *Журавин Ю.* Разгонный блок “Бриз-М” // Новости космонавтики. 2000 Т.10 № 8(211). С. 52–55.
64. *Завалицин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. – 256 с.
65. *Иослович И.В.* Оптимальная стабилизация осесимметричного спутника с помощью системы из n реактивных двигателей. // Искусственные спутники Земли. 1966. № 4.
66. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. – 481 с.
67. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: ФИЗМАЛИТ, 1993. – 272 с.
68. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. Учеб. пособие. -2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
69. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов. // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. №5. С. 51–64.
70. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. – 656 с.
71. *Кезлинг Г.Б.* Технические средства АСУ. Л.: Машиностроение, 1986. Т.2. – 720 с.
72. *Кириллов А.Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью. // Изв. вузов. Приборостроение, 2009. Т.52. №3. С. 23–28.
73. *Кириченко Н.Ф., Сопронюк Ф.А.* Минимаксное управление в задачах управления и наблюдения для систем с разветвлением структур. // Обозр. прикл. и промышл. Математики. 1995. Т.2. Вып.1. С.78–91.
74. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение 1969. – 288 с.
75. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. – 446 с.

76. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. // Ж. вычисл. математики и математ. физики, 1972. №1. С.14-34.
77. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Импульсное управление в моделях гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т.45. №3. С.716-727.
78. *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. – 292 с.
79. *Лебедев Г.Н., Румакина А.В.* Система логического управления обхода препятствий беспилотным летательным аппаратом при маршрутном полете // Электронный Журнал "Труды МАИ", 2015. № 83. – 19 с URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=61905>.
80. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973. – 390 с.
81. *Любушкин А.А., Черноусько Ф.Л.* Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Известия АН СССР. Сер. техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 83-96.
82. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987. – 302 с.
83. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдений и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. – 311 с.
84. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. // Сообщения Харьковского математического общества. 1889, Т. 2. №1. С. 250-276.
85. *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами. // Автоматика и телемеханика, 1972. № 3. С. 15-23.
86. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями М.: ЛЕНАНД, 2019. – 736 с.
87. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. – 429 с.
88. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
89. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. 1971. – 424 с.
90. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. // Автоматика и телемеханика, 2011. № 2. С. 142-158.
91. *Пакшин П.В.* Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях. // Автоматика и телемеханика, 1983. № 6. С. 74-84.

92. *Пановский В.Н., Пантелеев А.В.* Метаэвристические интервальные методы поиска оптимального в среднем управления нелинейными детерминированными системами при неполной информации о ее параметрах. // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 1. С. 53-64.
93. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
94. *Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А.* Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. – 244 с.
95. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью. // Автоматика и телемеханика, 2018. № 1. С. 130-146.
96. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом. // Информ. и ее примен., 2011. Т.5. Вып. 2. С.69–81.
97. *Пегачкова Е.А.* Методика приближенного синтеза оптимальных линейных логико-динамических систем. // Вестник Московского авиационного института, 2010 г., Т. 17, № 3. С.222-225.
98. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974. – 376 с.
99. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961. – 392 с.
100. *Попов Д.* Поиск обобщенных решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования с помощью барьерных функций. // Изв. Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2011. Т.4. № 2. С. 135.
101. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973. – 255 с.
102. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. – 320 с.
103. *Расина И.В.* Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов. // Программные системы: теория и приложения, 2012. №5 (9). С.49-72.
104. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. II. // Автоматика и телемеханика, 1959. С. 1441-1458.
105. *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод оптимизации квазилинейных стохастических систем в приложении к задаче оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой. // Программные системы: теория и приложения, 2015. № 2. С. 3-17.
106. *Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Оптимальное управление нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния. // Автоматика и телемеханика, 2006. № 7. С.62-75.

107. *Сачков Ю.Л.* Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях // УМН, 77:1(463), 2022 С.109–176
108. *Семенов В.В.* Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем // Приборостроение, 1984. №9. С.71-77.
109. *Семенов В.В., Репин В.М., Журина Н.Э.* Алгоритмизация процессов управления ЛА в классе логико-динамических систем. М.: Изд-во МАИ, 1987. – 49 с.
110. *Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений непрерывными системами // XLVII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва. 20-23 апреля 2021. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Перо", 2021. С.777.
111. *Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // XLV Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва. 16-19 апреля 2019. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 717.
112. *Урюпин И.В.* Оптимальная кусочно-гладкая аппроксимация траекторий непрерывных систем // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва. 19-23 ноября 2018. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Люксор", 2018. С. 225.
113. *Урюпин И.В.* Оптимизация непрерывных систем в классе кусочно-постоянных управлений // Электронный Журнал "Труды МАИ", 2021. № 121. – 29 с. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=162666>.
114. *Урюпин И.В.* Оптимизация переключений в линейно-квадратичных задачах управления непрерывно-дискретными системами // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва. 18-22 ноября 2019. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Логотип", 2019. С. 210.
115. *Урюпин И.В.* Оптимизация траектории равномерного движения объекта на сетке // XLVI Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 2020. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2020. С. 865.
116. *Урюпин И.В.* Синтез оптимальных кусочно-гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов // Электронный Журнал "Труды МАИ", 2018. № 100. – 15 с. URL: trudymai.ru/published.php?ID=93440.
117. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние проблемы, перспективы. // Автоматика и телемеханика, 1983. № 9. С. 5–25.
118. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. – 272 с.

119. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 488 с.
120. *Федунов Б.Е.* Проблемы разработки бортовых оперативно-советующих систем для антропоцентрических объектов. // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. №5. С.147-160.
121. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 553 с.
122. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. – 223 с.
123. *Хрусталева М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению. // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 84-105.
124. *Цыпкин Я.З.* Теория импульсных систем. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1958. – 724 с.
125. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. – 414 с.
126. *Черноузько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. – 238 с.
127. *Axelsson H., Boccadoro M., Egerstedt M., Valigi P., Wardi Y.* Optimal Mode-Switching for Hybrid Systems with Varying Initial States. // Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems and Applications, 2008. Vol.2. No.3. pp.765-772.
128. *Axelsson H., Wardi Y., Egerstedt M., Verriest E.* Gradient Descent Approach to Optimal Mode Scheduling in Hybrid Dynamical Systems. // Journal of Optimization Theory and Applications, 2008. Vol.136. No.2. pp.167-186.
129. *Boltyanski V.G.* The maximum principle for variable structure systems. // Int. Journal on Control, 2004. Vol.77. No.17. pp.1445–1451.
130. *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K.* A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory. // IEEE Trans. Automatic Control, 1998. Vol.43. No.1. pp.31-45.
131. *Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y.* Optimal control of a class of hybrid systems. // IEEE Trans. Aut. Con, 2001. Vol.46. No.3. pp.398-415.
132. *Daafouz J., Di Benedetto M., Blondel V., Ferrari-Trecate G., Hetel L., Johansson M., Vidal R.* Switched and piecewise affine systems. // In J. Lunze & F. Lamnabhi-Lagarrigue (Eds.), Handbook of Hybrid Systems Control: Theory, Tools, Applications. 2009, pp.87-138.
133. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.,* The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle. // Syst. Control Lett., 2008. pp. 964–970.

134. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents. // *Amer. J. Math.*, 1957. Vol.79. No.3. pp. 497–516.
135. *Dušan M. Stipanovic, Gökhan Inalhan, Rodney Teo, Claire J. Tomlin.* Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles // *Automatica*, 2004. Vol.40. pp.1285-1296.
136. *Ha J., Sattigeri R.* Vision-based obstacle avoidance based on monocular slam and image segmentation for UAVs // *Infotech@Aerospace*, 2012. pp. 1-9.
137. *Hai Lin, Guisheng Zhai, Panos J. Antsaklis* Optimal Persistent Disturbance Attenuation Control for Linear Hybrid Systems // *Hybrid Systems and Applications*, 2006. Vol.65. No.6. pp.1231-1250.
138. *Hedlund S., Rantzer A.* Optimal control of hybrid systems. // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Phoenix, AZ)*, 1999. pp.3972-3977.
139. *Heemels W., Lehmann D., Lunze J., De Schutter B.* Introduction to hybrid systems. // In J. Lunze & F. Lamnabhi-Lagarrigue (Eds.), *Handbook of Hybrid Systems Control: Theory, Tools, Applications*, 2009. pp. 3-30.
140. *Kamal W.A., Samar R.* A Mission Planning Approach for UAV Applications // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.* pp.3101-3106.
141. *Li Z., Soh Y., Wen C.* *Switched and impulsive systems: Analysis, design and applications.* Berlin: Springer, 2005. – 271 p.
142. *Liberzon D.* *Switching in Systems and Control.* Berlin: Springer, 2003. – 252 p.
143. *Matveev A.S., Savkin A.V.* *Qualitative theory of hybrid dynamical systems.* Boston: Birkhäuser, 2000. – 364 p.
144. *Riedinger P., C. Iung, F. Kratz.* An optimal control approach for hybrid systems// *European journal of control*, 2003. Vol. 9. No.5. pp.449-458.
145. *Riedinger P., Vivalda J.C.* Dynamic output feedback for switched linear systems based on a LQG design. // *Automatica*, 2015. No 54. pp.235–245.
146. *Rong Zhu, Dong Sun, Zhaoying Zhou.* Cooperation Strategy of Unmanned Air Vehicles for Multitarget Interception // *Journal Guidance*, 2005. Vol. 28. No.5. pp.1068-1072.
147. *Savkin A.V., Evans R.J.* *Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems.* Boston: Birkhäuser, 2002. – 364 p.
148. *Silva G.N., Vinter R.V.* Necessary conditions for optimal impulsive control problems. // *SIAM. J. Control and Optim.*, 1997. Vol.35. No.6. pp.1829-1846.

149. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems. // Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.
150. *Tewari A.* Optimal nonlinear spacecraft attitude control through Hamilton – Jacobi formulation. // J. Astronautical Science., 2002. Vol.50. pp.99-112.
151. *Tsourdos A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. New York: Wiley&Sons, 2011. – 190 p.
152. *Winstrand M.* Mission Planning and Control of Multiple UAV's. // Scientific Report № FOI-R-1382-SE Swedish Defence Research Agency, 2004. P. 52.
153. *Zefran M., Bullo F., Stein M.* A notion of passivity for hybrid systems // International Conference on Decision and Control, Orlando, FL, 2001. pp. 1-6.