

Научная статья

УДК 629.7.01

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=179110>

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИН ОРТОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ КЕССОНА КРЫЛА ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ С УЧЕТОМ МЕМБРАННЫХ И ИЗГИБНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Олег Владимирович Митрофанов<sup>1</sup>, Екатерина Юрьевна Торопылина<sup>2</sup> 

<sup>1, 2</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия

<sup>1</sup> [MitrofanovOV@mai.ru](mailto:MitrofanovOV@mai.ru)

<sup>2</sup> [toropylina.ekaterina@yandex.ru](mailto:toropylina.ekaterina@yandex.ru) 

**Аннотация.** Для композитных панелей с учетом допустимого закритического поведения предложена общая методика (алгоритм) определения минимальных толщин при условии обеспечения критериев статической прочности. Учитываются мембранные и изгибные напряжения, возникающие при потере устойчивости и начальном этапе геометрически нелинейного поведения панелей. В этом случае рассматриваемые панели следует классифицировать как панели средней толщины. Показано, что в общем случае методика определения минимальных толщин при проектировании плоских композитных панелей сводится к минимизации функции одной переменной с учетом исследований по двум параметрам, которые являются координатами  $x$  и  $y$  точек в плоскости панели. Для гладких плоских ортотропных панелей при шарнирном опирании рассмотрены прикладные методики (алгоритмы) определения минимальных толщин с учетом возможного закритического поведения при нагружении сжимающими и касательными потоками, а также комбинированными нагрузками.

**Ключевые слова:** закритическое поведение, ортотропный материал, мембранные напряжения, изгибные напряжения, прямоугольные панели

**Для цитирования:** Митрофанов О.В., Торопылина Е.Ю. Определение толщин ортотропных панелей кессона крыла при закритическом состоянии с учетом мембранных и изгибных напряжений // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 82-92. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=179110>

Original article

## THE WING CAISSON ORTHOTROPIC PANELS THICKNESSES DETERMINING AT THE SUPERCRITICAL STATE WITH REGARD TO MEMBRANE AND BENDING STRESSES

Oleg V. Mitrofanov<sup>1</sup>, Ekaterina Yu. Toropylina<sup>2</sup> 

<sup>1, 2</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russia

<sup>1</sup> [MitrofanovOV@mai.ru](mailto:MitrofanovOV@mai.ru)

<sup>2</sup> [toropylina.ekaterina@yandex.ru](mailto:toropylina.ekaterina@yandex.ru) 

### Abstract

The skin buckling is allowed for the upper load-bearing panels of the small and medium weight-lift ability aircraft caisson at the load exceeding operational level. The authors noted that while designing thin panels, meeting requirements of the static strength at supercritical state, only membrane stresses are being accounted for. The

presented article proposes techniques for the panel minimum thickness determining at the geometrically nonlinear behavior permissibility with regard to extra membrane and bending stresses occurrence at the supercritical state. Thus, the proposed techniques are more general than the known ones for the thin panels design by the supercritical state. The panels under consideration refer to the medium type panels according to the existing classification. The article considers hinge-supported orthotropic panels as an example, and proposes applied design techniques at loading by compressive, tangential and combined strains. It formulates provisions of general technique (algorithm) for the minimum thickness determining of composite panels with regard to the static strength ensuring at super critical behavior for various options of boundary conditions. The problem of optimal designing is reduced in the proposed techniques to minimization of the function of the single variable, which is the panel thickness, and parametric studies by the panel points  $x$  and  $y$  coordinates. The proposed techniques are based on analytical solutions of geometrically nonlinear problems obtained by the Bubnov-Galerkin method. Analytical expressions for membrane and bending stresses were obtained in this work as well. Membrane stresses are obtained from the Erie stress function definition, and bending stresses are being computed by the known relations while the deflection function differentiating. It is noted that the article considers the initial stage of the supercritical behavior, bifurcation (rearrangement of waves generation) is not allowed, and the panel deflection can be described by a single term of the series with an accuracy consistent with engineering calculations in the early stages of design. The article considered an option of combined loading by longitudinal compressive forces and tangential flows. The authors noted that, in general case, this technique may be represented as well for more complex loading options when considering several loading components and acting stresses.

**Keywords:** supercritical behavior, orthotropic material, membrane stresses, bending stresses, rectangular panels

**For citation:** Mitrofanov O.V., Toropylina E.Yu. The Wing Caisson Orthotropic Panels Thicknesses Determining at the Supercritical State with Regard to Membrane and Bending Stresses. *Aerospace MAI Journal*, 2024, vol. 31, no. 1, pp. 82-92. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=179110>

## Введение

Рассмотрим верхние несущие панели кессона крыла из композитных материалов, которые нагружены продольными сжимающими и касательными потоками. Объектами исследований в данной работе являются гладкие панели, для которых возможна потеря устойчивости. В работе допускается начальный этап геометрически нелинейного поведения рассматриваемых гладких панелей и не допускается перестроение форм волнообразования даже при действии расчетных потоков. Отметим, что при рассмотрении геометрически нелинейного поведения тонких панелей, как правило, учитываются только мембранные напряжения. В рассматриваемом случае будем учитывать и мембранные, и изгибные напряжения, а панели следует классифицировать как панели средней толщины. Целью данной работы является формализация алгоритма общей методики (алгоритма) и разработка прикладных методик определения минимальных толщин ортотропных прямоугольных панелей при допустимости закритического поведения при различных комбинациях сжимающих и касательных усилий и использовании условия достижения суммой мембранных и изгибных действующих напряжений предельных значений напряжений композитной структуры по критериям статической прочности. Отметим, что указанное равенство по напряжениям позволяет обеспечить минимальную толщину панели с за-

пасом статической прочности при закритическом поведении, равным единице:  $\eta = 1$ .

Для достижения поставленной цели надо решить следующие задачи. Во-первых, необходимо получить аналитические решения геометрически нелинейных задач ортотропных прямоугольных панелей при заданных вариантах нагружения, выписать аналитические выражения для мембранных и изгибных напряжений. Во-вторых, надо сформулировать постановку задач для прикладных методик определения минимальных толщин несущих панелей по прочности при закритическом состоянии. В-третьих, следует сформулировать общую методику (алгоритм) проектирования композитных панелей средней толщины при допустимости геометрически нелинейного поведения с учетом обеспечения статической прочности. Отметим, что в данной работе для примера будет рассмотрен только вариант шарнирных граничных условий для ортотропной прямоугольной панели. Рассматриваемые ниже задачи относятся к задачам оптимального проектирования несущих композитных панелей. В связи с этим приведем общую формулировку задачи оптимального проектирования: при известных геометрических параметрах панели ( $a \times b$ ) и заданных действующих потоках необходимо определить минимальную толщину гладкой композитной панели, целевая функция веса есть  $V(\delta) \rightarrow \min$  при возможных ограничениях по статической прочности

при закритическом поведении  $H_i(x) \geq 0$ , которые в данной работе будут выполняться в виде равенств действующих суммарных напряжений предельным напряжениям композитного пакета, что обеспечит соответствующие минимальные запасы, равные единице. Отметим, что при проектировании в качестве нагрузки, действующей на панель, задают потоки, а не напряжения. В данной работе будут использованы следующие обозначения:  $q_m$  – действующий поток,  $p_m$  – нагрузка, действующая на панель, определяемая из соотношения  $q_m = p_m \delta$ .

Отметим, что результатами данной работы являются полученные ниже аналитические соотношения и предложенные алгоритмы. Результаты численных параметрических решений здесь не приводятся и являются задачами последующих исследовательских работ.

Для обоснования актуальности темы рассмотрим некоторые публикации, посвященные расчету и проектированию композитных конструкций с учетом обеспечения требований по статической прочности, устойчивости и обеспечения прочности при закритическом поведении. Достаточно большой обзор публикаций, посвященных расчетам и оптимальному проектированию композитных панелей с учетом указанных ограничений, приведен в работе [1]. Интересные параметрические исследования композитных конструкций представлены в работах С.В. Барановски, Л.З. Я [2] и К.В. Михайловского, С.В. Барановски [3]. Работа М. Pogosyan et all [4], демонстрирует комплексный подход к созданию композитных конструкций. Интерес также представляют работы, посвященные разработкам композитных конструкций самолетов малой авиации [5] и беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [6]. В статье М.О. Шевченко и М.М. Пасичной [5] проведен анализ существующих российских самолетов малой авиации и обоснованно выбраны первичные технические характеристики наиболее перспективного изделия. В работе Л.А. Бохоевой, А.Б. Балданова и А.С. Чермошенцевой [6] проведено исследование напряженно-деформированного состояния консоли крыла из композиционных материалов (КМ) для БПЛА и предложена оптимальная конструкция многослойной обшивки консоли крыла, обеспечивающая максимальную прочность и жесткость при заданных нагрузках. В публикации Л.М. Гаввы [7] приведены результаты параметрического анализа напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления. Отметим далее статью А. А. Рябова, Е. Е. Маслова, Д. Ю. Стрельца, В. Г. Слободчикова [8], в которой приведены результаты конечно-элементного анализа прочности подкрепленных композитных панелей с ударными

повреждениями. Аналогичные исследования, касающиеся панелей кессона крыла магистрального самолета, представлены в работе В.И. Голована, Ю.И. Дударькова, Е.А. Левченко, М.В. Лимонина [9], где содержатся результаты исследования несущей способности панелей из КМ при наличии эксплуатационных повреждений. Далее отметим статьи Л.П. Железнова [10, 11], которые посвящены численным исследованиям устойчивости и закритического поведения композитных цилиндрических оболочек при различных вариантах нагружения.

Современные композитные конструкции разрабатывают с учетом наличия возможных дефектов. В связи с этим интерес представляет монография А. А. Дудченко, С.А. Лурье [12], посвященная моделированию процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых КМ.

В работах S. Masood et all [13, 14] приведены результаты численных и экспериментальных исследований нескольких типов композитных подкрепленных панелей, для которых допускалась местная потеря устойчивости обшивки, учитывались дефекты типа расслоений и ударных повреждений. Также в работе [13] рассматривалось влияние усталостного нагружения с целью дальнейшего построения методики проектирования несущих панелей. В статье F. Grotto and all [15] приведены результаты разработки многоосного испытательного стенда в качестве первого шага для исследования оценки устойчивости к повреждениям подкрепленных конструкций при комбинированных нагрузках при допустимости местной потери устойчивости обшивки и низкоскоростных ударных воздействиях. С помощью численного исследования были спроектированы образцы для изучения механизма отклеивания стрингера от обшивки и проведены натурные испытания.

Системный анализ закритического поведения подкрепленных композитных панелей с учетом потери устойчивости обшивки для изучения разделения стрингера представлены в монографии L. Kootte [16], где приведен большой объем результатов испытаний конструктивно-подобных образцов, имитирующих возможные механизмы разрушения композитных структур.

В работах N. Yue and all [17] и С. Dávila and all [18] приведены результаты испытаний и оценки деградации прочностных и жесткостных характеристик подкрепленных композитных панелей с учетом усталостного нагружения.

Методология проектирования тонких композитных несущих панелей предложена в работах [19, 20], где в общем случае рассмотрены задачи проектирования при использовании в основном мембранных напряжений, а аналитические реше-

ния геометрически нелинейных задач, полученные методом Бубнова–Галеркина, использованы при записи нелинейных уравнений относительно толщин панелей. Отметим, что в работе [20] предложено при проектировании толстых композитных панелей рассматривать жесткие панели и учитывать только изгибные напряжения с целью анализа механизма разрушения композитной структуры. Кроме того, отметим работу [21], в которой предложена методика проектирования гладких композитных панелей с учетом двух уровней нагружения. На первом уровне нагружения необходимо обеспечить условия устойчивости, а на втором – прочность при закритическом состоянии. В указанном случае рассматривались две переменные величины (толщина и ширина панели) при обеспечении минимальных запасов по устойчивости и по прочности при геометрически нелинейном поведении.

Далее сделаем следующие замечания. Во-первых, указанные в работах [19 и 20] задачи являются задачами оптимального проектирования панелей. Задачи оптимизации каждый раз сводились к минимизации функции одной переменной (толщины панели) с учетом исследования аналитических выражений для мембранных [19 и 20] или изгибных [20] напряжений и определения потенциально-кри-

тических точек (ПКТ), в которых указанные напряжения могут достигать максимальных по модулю значений. В указанных случаях [19 и 20] аналитически записывались выражения для напряжений, которые допускали определение экстремальных значений при относительно простых экспертных рассуждениях или несложных преобразованиях. В таблице приведены расчетные соотношения для определения толщин ортотропных панелей при сжатии для определения толщин тонких панелей и панелей средней толщины, проектируемых соответственно по мембранным и суммарным (мембранным и изгибным) напряжениям. Для определения места рассматриваемых методик в общей идеологии проектирования несущих конструкций в таблице приведены расчетные соотношения для определения толщин композитных панелей при сжатии с учетом шарнирного опирания. Первые три строки в таблице и показывают место методологии проектирования по закритическому состоянию [19 и 20]. Соотношения, показанные в четвертой строке, соответствуют соотношениям, предложенным в данной работе, посвященной проектированию панелей средней толщины.

В таблице обозначены:  $K, D_{mn}, E_{\min}, E_{\alpha}$  – коэффициенты, зависящие от жесткостных соотношений

**Расчетные соотношения для определения толщин ортотропных панелей при сжатии при шарнирном опирании [19 и 20]**

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин
Статическая прочность	$\delta = \frac{P}{\sigma b}$	$\delta = \frac{P}{\sigma b}$
Устойчивость	$\sigma_{кр} = K \left( \frac{\delta}{b} \right)^2;$ $K = \frac{2\pi^2}{12} \left[ \sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} E_x + 2G_{xy} \right]$	$\delta^3 = b^2 \frac{q_x}{K}$
Закритическое состояние (мембранные напряжения)	$\sigma_x = -\frac{f^2}{8} E_x \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x;$	$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} - \frac{q_x^p}{D_{mn}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0$
Закритическое состояние (мембранные и изгибные напряжения)	$\sigma_x^{мемб} = -\frac{f^2}{8} E_x \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x;$ $\sigma_x^{изгиб} = -\frac{\delta f}{2} E_{\alpha};$ $\sigma_{x\Sigma} = \sigma_x^{мемб} + \sigma_x^{изгиб}$	$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = p_x \left( \frac{m}{a} \right)^2$



композитной структуры панели;  $\bar{\sigma}$  – допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения композитного пакета;  $\bar{\sigma}_{уст}$  – допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна;  $q_x = p_x \delta$  – действующий на панель сжимающий поток;

$$\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}; \bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}.$$

Во-вторых, в данной работе при рассмотрении суммы мембранных и изгибных напряжений необходимо исследовать экстремальные значения уже суммарных напряжений и определять ПКТ, которые в общем случае не будут совпадать с ПКТ, определенными отдельно для мембранных или изгибных напряжений. Кроме того, выражения для мембранных и изгибных напряжений будут включать амплитуду прогиба соответственно во второй и первой степени. В данном случае должен быть описан и формализован иной, более сложный алгоритм определения минимальных толщин с учетом численных параметрических исследований.

Итак, в настоящей работе при рассмотрении панелей средней толщины будет предложена более общая методика проектирования панелей по закритическому состоянию и сформулированы необходимые процедуры проектирования. Общая методика проектирования панелей средней толщины по закритическому состоянию заключается в определении толщин с учетом возникающих при геометрически нелинейном поведении мембранных и изгибных напряжений и сведении математической задачи оптимизации к решению нелинейного уравнения относительно толщины панели с учетом влияния двух параметров при нахождении ПКТ, в которых реализуются максимальные по модулю напряжения.

### 1. Основные геометрически нелинейные соотношения для ортотропных прямоугольных панелей

Запишем исходные соотношения для геометрически нелинейной задачи ортотропных панелей [22]. Условие совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \tag{1}$$

где  $L_m$  – операторы:

$$L_1(F) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4};$$

$$L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).$$

Нелинейное уравнение равновесия

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \tag{2}$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[ D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right].$$

Здесь и далее обозначены:  $E_x, E_y$  – модули упругости ортотропной панели в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G_{xy}$  – модуль сдвига в плоскости ортотропного пакета;  $\mu_{xy}$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение вдоль оси  $x$  при растяжении вдоль оси  $y$ ; условие ортотропии  $E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$ ;  $D_x, D_y, D_3$  – изгибные жесткости ортотропной панели;  $\delta$  – толщина панели;  $F$  – функция напряжений,  $W$  – прогиб прямоугольной панели;  $f$  – амплитуда прогиба.

Далее будем применять метод Бубнова–Галеркина, для реализации которого будет использовано равенство

$$\int_0^a \int_0^b [L_3(F, W) - L_4(W)] W_k dx dy = 0, \tag{3}$$

где  $W_k$  – функция прогиба.

Из определения функции напряжений можно вычислить мембранные напряжения в теряющей устойчивость панели:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Изгибные напряжения находятся по соотношениям [22]

$$\begin{aligned} \delta'_x &= -z \left[ B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]; \\ \delta'_y &= -z \left[ B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]; \\ \tau'_{xy} &= -2z B_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $z = \pm \delta/2$ .

### 2. Определение параметров композитных панелей средней толщины с учетом обеспечения статической прочности при закритическом состоянии

Получим далее соотношения для прикладных методик определения минимальных толщин ортотропных панелей средней толщины при нагружении сжимающими, касательными и комбинированными потоками. Кроме того, перед представлением содержания общей методики проектирования рас-

смотрим сначала прикладную методику для случая продольного сжатия.

**2.1. Прикладная методика определения толщин плоских ортотропных панелей при сжатии**

Для шарнирно опертых ортотропных панелей (рис. 1) воспользуемся некоторыми результатами работ [18 и 19]. Для прогиба используем равенство

$$W = f \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (6)$$

тогда из уравнения совместности деформаций (1) может быть найдено выражение для функции напряжений Эри:

$$F = \frac{E_y a^2}{32b^2 m^2} f^2 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + \frac{E_x b^2 m^2}{32a^2} f^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{p_x y^2}{2}. \quad (7)$$

Далее запишем выражение для определения мембранных продольных напряжений:

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{E_x f^2 m^2 \pi^2}{8a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - p_x. \quad (8)$$

Аналитическое решение геометрически нелинейной задачи, полученное методом Бубнова–Галеркина, имеет вид

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (9)$$

где

$$E_{mn} = \left(\frac{m^4 E_x}{a^4} + \frac{E_y}{b^4}\right) \frac{\pi^2}{16};$$

$$\bar{D}_{mn} = \pi^2 \left[ \frac{\bar{E}_x}{12} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{m}{ab}\right)^2 + \frac{\bar{E}_y}{12} \left(\frac{1}{b}\right)^4 \right].$$

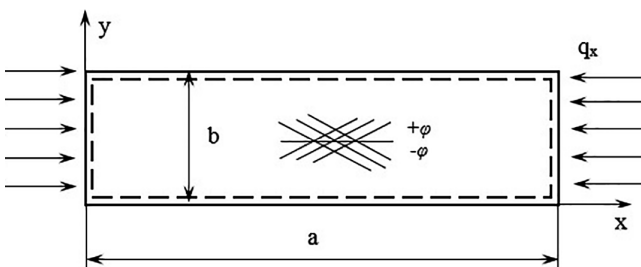


Рис. 1. Ортотропная панель при действии сжимающих усилий

Для прямоугольных панелей имеем: числа полу-волн в поперечном направлении  $n = 1$ , а для продольного направления

$$m = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sqrt{\frac{E_y}{E_x}}. \quad (10)$$

Тогда перепишем обозначения:

$$E_{mn} = \frac{\pi^2 E_y}{8b^4}; \quad \bar{D}_{mn} = \frac{\pi^2}{6b^4} \left[ \bar{E}_y + (\mu_{xy} E_x + 2G_{xy}) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \right].$$

Далее представим выражение для изгибных напряжений:

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -\frac{\delta f E_\alpha}{2} = -\delta f \Omega_x^{\text{изг}}(x, y), \quad (11)$$

где

$$\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \bar{E}_x \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \bar{E}_x \mu_{xy} \left(\frac{\pi}{b^2}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \right].$$

Тогда суммарные напряжения есть

$$\sigma_{x\Sigma} = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}} - \delta f \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) - p_x, \quad (12)$$

Для определения минимальной толщины воспользуемся равенством возникающих суммарных напряжений предельным по прочности значениям композитной структуры:

$$\sigma_{x\Sigma} = \bar{\sigma}_x, \quad (13)$$

в ПКТ с координатами  $(x_\Sigma, y_\Sigma)$ , в которых напряжения могут достигать максимальных по модулю значений. Отметим, что в общем случае точки  $(x_\Sigma, y_\Sigma)$  не совпадают с ПКТ отдельных функций для мембранных  $\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)$  или изгибных  $\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y)$  напряжений и требуется численное решение задачи с более громоздкими соотношениями. В этом случае рассмотрим равенства (12) и (13) в качестве квадратного уравнения относительно амплитуды прогиба и запишем его решение:

$$f = \frac{-\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 \left[ \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) \right]^2 - \dots}}{2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)} - \dots \\ - 4 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) \left( \frac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x \right). \quad (14)$$

Затем подставим (14) в аналитическое решение геометрически нелинейной задачи (9). В итоге получим уравнение относительно искомой толщины

$$\delta^3 \bar{D}_{mv} + \delta \left[ \frac{-\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 (\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y))^2 - \dots}}{2\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)} \dots \right. \\ \left. \dots \frac{-4\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) \left( \frac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x \right)}{\dots} \right]^2 E_{mn} = \left( \frac{m}{a} \right)^2 q_x. \quad (15)$$

Отметим, что далее возможно только численное решение нелинейного уравнения (15) с учетом параметрических исследований и наличия конструктивных ограничений толщины и геометрических параметров панели:  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $\delta \in [0, \delta_{\text{конст}}]$ . Необходимо численно решить уравнение (15) в выбранных точках панели и затем выбрать максимальное значение толщины.

**2.2. Общая методика (алгоритм) проектирования плоских композитных панелей средней толщины по закритическому состоянию при сжатии**

Запишем далее формальный алгоритм вычисления минимальной толщины ортотропной панели при закритическом состоянии, используя ранее приведенный материал:

1. Запись выражения для формы прогиба при возможной потере устойчивости панели с помощью известной функции с точностью до неизвестной величины амплитуды прогиба с учетом рассматриваемых граничных условий.

2. Вычисление параметров волнообразования ортотропной панели при потере устойчивости, которые определяются при известных геометрических параметрах (длине и ширине панели) и жесткостных характеристиках, определяемых укладкой КМ.

3. Аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова–Галеркина и запись замкнутых аналитических соотношений, связывающих толщину, амплитуду прогиба и действующий поток.

4. Получение аналитических соотношений для мембранных напряжений из определения функций напряжений (из которых получаются выражения для напряжений в зависимости от амплитуды прогиба):

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = -\sigma_x^{\text{мемб}}(x, y) - p_x = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - p_x. \quad (16)$$

5. Запись аналитических выражений для изгибных напряжений:

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -f\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) - p_x. \quad (17)$$

6. Запись аналитических выражений для суммарных напряжений и использование равенства действующих напряжений предельным по прочности значениям:

$$\sigma_{x\Sigma} = \sigma_x^{\text{мемб}} + \sigma_x^{\text{изгиб}} = \bar{\sigma}_x. \quad (18)$$

7. Запись аналитического решения квадратного уравнения типа (18) относительно амплитуды прогиба  $f$ .

8. Сведение системы уравнений, включающей решение геометрически нелинейной задачи (п. 3) и выражение для амплитуды прогиба (п. 7), к уравнению относительно толщины панели и уравнению относительно амплитуды прогиба. Итоговое выражение выписывается относительно толщины панели и двух параметров (координат  $x$  и  $y$ ):

$$\delta^3 \bar{D}_{mnk} + \delta \left[ \frac{-\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 (\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y))^2 - \dots}}{2\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)} \dots \right. \\ \left. \dots \frac{-4\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) \left( \frac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x \right)}{\dots} \right]^2 E_{mnk} = q_x, \quad (19)$$

где  $\bar{D}_{mnk}$ ,  $E_{mnk}$  – параметры, зависящие от соотношений геометрических размеров панели и укладки КМ.

9. Численное решение нелинейного уравнения типа (19) и определение оптимальной толщины композитной панели при варьировании двух параметров. При решении должны учитываться конструктивные ограничения:  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $\delta \in [0, \delta_{\text{конст}}]$ .

Отметим, что предложенный алгоритм может быть применен для панелей с разными граничными условиями и различными вариантами нагружения.

**2.3. Прикладная методика определения толщин плоских ортотропных панелей при сдвиге**

Рассмотрим аналогичную задачу проектирования композитных панелей при нагружении касательными потоками (рис. 2). При использовании прогиба в виде [22]

$$W = f \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \quad (20)$$

можно получить функцию напряжений и следующее выражение для касательных напряжений:

$$\tau_{xy}^{\text{мемб}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Omega_{xy}^{\text{мемб}} - p_{xy}, \quad (21)$$

где  $\Omega_{xy}^{\text{мемб}} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}$ .

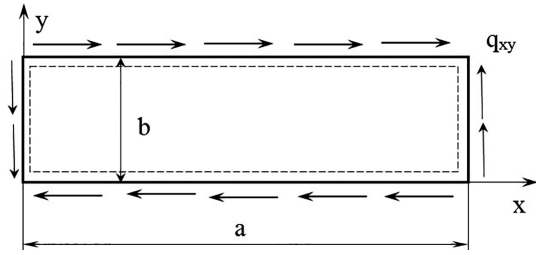


Рис. 2. Ортогруппная панель при действии сжимающих усилий

Также используя выражение для прогиба (20), можно записать уравнение для изгибных напряжений:

$$\tau_{xy}^{изгиб} = -2zB_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = f \delta \Omega_{xy}^{изгиб}, \quad (22)$$

где

$$\Omega_{xy}^{изгиб} = \frac{\pi^2 G_{xy}}{b s^2} \left[ s \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \cos \frac{\pi y}{b} + ab \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \sin \frac{\pi y}{b} \right].$$

Аналитическое решение геометрически нелинейной задачи записывается в виде [18 и 19]

$$f^2 B_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}, \quad (23)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\pi^2}{s^2} \left[ \frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} \left( \frac{\alpha}{b} \right)^2 + \frac{E_x}{16} \frac{\pi^4 f^4}{s^2} \right] + \frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} \left\{ \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{b^2} \right\} + \frac{\alpha \pi^2}{s^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2 G_\alpha};$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{E_x}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})} \frac{\pi^4}{s^4} + 2 \left( \frac{\mu_{xy} E_x}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \times \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{b^2} \right] \frac{\pi^2}{s^2} + \frac{E_y}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})} \left\{ \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{b^2} \right]^2 + \frac{4\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right\}.$$

В более компактном виде имеем

$$\delta^3 \bar{D}_{mn3} + \delta f^2 E_{mn3} = q_{xy}, \quad (24)$$

обозначения в данном случае могут быть получены из равенства (23).

Далее запишем выражение для суммарных касательных напряжений:

$$\tau_{x\Sigma} = -f^2 \Omega_{xy}^{мемб} (x, y) - \delta f \Omega_{xy}^{изгиб} (x, y) - p_x. \quad (25)$$

Используя условие достижения действующими напряжениями предельных по прочности значений  $\tau_{x\Sigma} = \bar{\tau}_{xy}$ , можно получить решение квадратного

уравнения относительно амплитуды прогиба  $f$ , которое следует подставить в (24), откуда можно получить уравнение относительно толщины панели:

$$f = \frac{-\delta \Omega_{xy}^{изгиб} (x, y) + \sqrt{\delta^2 \left( \Omega_{xy}^{изгиб} (x, y) \right)^2 - 2 \Omega_{xy}^{мемб} (x, y) \left( \frac{q_{xy}}{\delta} - \bar{\tau}_{xy} \right)}}{2 \Omega_{xy}^{мемб} (x, y)} \dots \quad (26)$$

#### 2.4. Прикладная методика определения толщин плоских ортогруппных панелей при комбинированном нагружении

Далее рассмотрим задачу проектирования композитных панелей при комбинированном воздействии сжимающими и касательными потоками, изменяющимися пропорционально одному параметру:  $q_x = \xi \bar{q}_x, q_{xy} = \xi \bar{q}_{xy}$ . При использовании прогиба (20) может быть получено аналитическое решение геометрически нелинейной задачи

$$f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}. \quad (27)$$

Запишем по аналогии с вышеприведенным выражением для мембранных напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Omega_x^{мемб} - p_x; \quad (28)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Omega_{xy}^{мемб} - p_x,$$

где

$$\Omega_x^{мемб} = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \frac{E_x}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\};$$

$$\Omega_{xy}^{мемб} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s},$$

а также изгибных напряжений

$$\sigma_x^{изгиб} = -z \left[ B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] = f \delta \Omega_x^{изгиб}; \quad (29)$$

$$\tau_x^{изгиб} = -2z B_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = f \delta \Omega_x^{изгиб}.$$

где

$$\Omega_x^{мемб} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{\bar{E}_x}{s^2} \left\{ \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \sin \frac{\pi y}{b} \right\} - \frac{\pi^2}{2} \frac{\bar{E}_x \mu_{xy}}{s^2 b^2} \left\{ (s^2 + \alpha^2 b^2) \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \sin \frac{\pi y}{b} + 2\alpha s b \cos \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \cos \frac{\pi y}{b} \right\};$$



$$\Omega_{xy}^{изгиб} = \frac{\pi^2 G_{xy}}{b s^2} \left[ s \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \cos \frac{\pi y}{b} + \alpha b \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \sin \frac{\pi y}{b} \right].$$

Используя далее комбинированный критерий прочности в виде равенства

$$\frac{(\sigma_{x\Sigma})^2}{\bar{\sigma}_\sigma^2} + \frac{(\tau_{xy\Sigma})^2}{\bar{\tau}_{\sigma\sigma}^2} = 1, \quad (30)$$

после подстановки в (30) выражений (28) и (29) можно получить уравнение

$$f^4 \left\{ \left( \Omega_x^{мемб} \right)^2 + \left( \Omega_{xy}^{мемб} \right)^2 \right\} + 2\delta f^3 \left\{ \Omega_x^{мемб} \Omega_x^{изгиб} + \Omega_{xy}^{мемб} \Omega_{xy}^{изгиб} \right\} + \delta^2 f^2 \left\{ \left( \Omega_x^{изгиб} \right)^2 + \left( \Omega_{xy}^{изгиб} \right)^2 \right\} = \bar{\sigma}_x^2 \bar{\tau}_{xy}^2. \quad (31)$$

В данном случае изменим алгоритм определения толщины: из выражения (27) необходимо выразить амплитуду прогиба

$$f^2 = \frac{-D_{\alpha\beta} \delta^3 + \frac{\pi^2}{s^2} q_x^p + \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^p}{B_{\alpha\beta} \delta},$$

далее подставить ее в уравнение (31) и получить нелинейное уравнение для численного определения минимальной толщины панели.

### Выводы

В работе получены следующие результаты:

1. На основе аналитических решений геометрически нелинейных задач предложены прикладные методики определения оптимальных толщин ортотропных прямоугольных панелей при обеспечении статической прочности с минимальными запасами при закритическом поведении. При этом итоговые соотношения учитывают мембранные и изгибные напряжения, которые возникают при потере устойчивости панелей и классифицируются как средние. В каждой прикладной методике задача оптимального проектирования сведена к численному решению одного уравнения относительно неизвестной толщины панели и двух параметров (координат  $x$  и  $y$ ).

2. Представлены прикладные методики исследования нагружения панели продольными сжимающими и касательными потоками. Сформулированы пункты общей методики (алгоритма) для проектирования композитных панелей средней толщины при допустимости геометрически нелинейного поведения с учетом обеспечения статиче-

ской прочности при различных граничных условиях и вариантах нагружения.

### Список источников

1. Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000–2015) // International Journal of Maritime Engineering. 2016. Vol. 158. No. A3, pp. A-251 – A-268. DOI: 10.5750/ijme.v158iA3.994
2. Барановски С.В., ЯЛ.З. Оптимизация конструкции киля из полимерных композиционных материалов за счет применения биоподобных конструктивно-силовых схем // Научный вестник МГТУ ГА. 2023. Т. 26. № 2. С. 37–48. DOI: 10.26467/2079-0619-2023-26-2-37-48
3. Барановски С.В., Михайловский К.В. Оптимизация основных геометрических характеристик силовых элементов крыла из полимерных композиционных материалов // Ученые записки ЦАГИ. 2019. Т. 50. № 3. С. 87–99.
4. Pogosyan M., Nazarov E., Bolshikh A. et al. Aircraft composite structures integrated approach: a review // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1925. 19th International Conference “Aviation and Cosmonautics” (23–27 November 2020; Moscow, Russia). DOI: 10.1088/1742-6596/1925/1/012005
5. Шевченко М.О., Пасичная М.М. Разработка конструкции планера современного самолета для осуществления сельскохозяйственных работ // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 3. С. 103–110. DOI: 10.34759/vst-2020-3-103-110
6. Бохоева Л.А., Балданов А.Б., Чермошенцева А.С. Разработка оптимальной конструкции многослойной консоли крыла беспилотного летательного аппарата с экспериментальным подтверждением // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 1. С. 65–75. DOI: 10.34759/vst-2020-1-65-75
7. Гавва Л.М. Параметрический анализ в операционной среде MATLAB напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=80504>
8. Рябов А.А., Маслов Е.Е., Стрелец Д.Ю., Слободчиков В.Г. Численный анализ несущей способности подкрепленной композитной панели с ударным повреждением // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 1. С. 90–97. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-1-90-97
9. Голован В.И., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. Несущая способность панелей из композиционных материалов при наличии эксплуатационных повреждений // Труды МАИ. 2020. № 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
10. Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами // Известия высших учебных

- заведений. *Авиационная техника*. 2022. № 4. С. 44–50.
11. Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленной композитной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // *Полет. Общероссийский научно-технический журнал*. 2022. № 2. С. 40–48.
  12. Дудченко А.А., Лурье С.А. Моделирование процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых композитов. – М.: Изд-во МАИ, 2019. – 160 с.
  13. Masood S.N., Viswamurthy S.R., Gaddikeri K.M. Composites Airframe Panel Design for Post-buckling- An Experimental Investigation // *Composite Structures*. 2020. Vol. 241. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112104
  14. Masood S.N., Gaddikeri K.M., Viswamurthy S.R. Experimental and finite element numerical studies on the post-buckling behavior of composite stiffened panels // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 28. No. 16, pp. 1677–1690. DOI: 10.1080/15376494.2019.1701151
  15. Grotto F., Bouvet C., Castanié B., Serra J. Design and Testing of Impacted Stiffened CFRP Panels under Compression with the VERTEX Test Rig // *Aerospace*. 2023. Vol. 10. No. 4: 327. DOI: 10.3390/aerospace10040327
  16. Kootte L. A methodology to reproduce postbuckling in composite panels to study skin stringer separation. PhD\_Tesis. Delft University of Technology, 2023. DOI: 10.4233/uuid:cfccc1dc-df8a-4a49-8c1a-c2ebad7a1867
  17. Yue N., Broer A., Briand W. et al. Assessing stiffness degradation of stiffened composite panels in post-buckling compression-compression fatigue using guided waves // *Composite Structures*. 2022. Vol. 293. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115751
  18. Dávila C.G., Leone F.A., Rose C.A., Johnston W. Initiation and Propagation of Skin/Stiffener Separation in Postbuckled Structures Subjected to Cyclic Loads // *AIAA Scitech Forum* (11–15 & 19–21 January 2021; Virtual event). DOI: 10.2514/6.2021-0573
  19. Митрофанов О.В. Прикладные методы проектирования несущих панелей из композитных материалов. – М.: Компания Спутник+, 2003. – 239 с.
  20. Митрофанов О.В. Прикладные геометрически нелинейные задачи при проектировании и расчетах композитных авиационных конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2022. – 164 с.
  21. Mitrofanov O., Osman M. Designing of Smooth Composite Panels Providing Stability and Strength at Postbuckling Behavior // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. Vol. 58. No. 1, pp. 15–30. DOI 10.1007/s11029-022-10008-3

## References

1. Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000–2015). *International Journal of Maritime Engineering*, 2016, vol. 158, no. A3, pp. A-251 – A-268. DOI: 10.5750/ijme.v158iA3.994
2. Baranovski S.V., Ya L.Z. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, 2023, vol. 26, no. 2, pp. 37–48. DOI: 10.26467/2079-0619-2023-26-2-37-48
3. Baranovski S.V., Mikhailovskii K.V. *Uchenye zapiski TSAGI*, 2019, vol. 50, no. 3, pp. 87–99.
4. Pogosyan M., Nazarov E., Bolshikh A. et al. Aircraft composite structures integrated approach: a review. *Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1925. 19th International Conference “Aviation and Cosmonautics” (23–27 November 2020; Moscow, Russia)*. DOI: 10.1088/1742-6596/1925/1/012005
5. Shevchenko M.O., Pasichnaya M.M. Developing airframe structure of a modern airplane for agricultural work performing. *Aerospace MAI Journal*, 2020, vol. 27, no. 3, pp. 103–110. DOI: 10.34759/vst-2020-3-103-110
6. Bokhoveva L.A., Baldanov A.B., Chermoshentseva A.S. Optimal structure of multi-layer wing console of unmanned aerial vehicle with experimental validation. *Aerospace MAI Journal*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 65–75. DOI: 10.34759/vst-2020-1-65-75
7. Gavva L.M. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80504>
8. Ryabov A.A., Maslov E.E., Strelets D.Yu., Slobodchikov V.G. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2018, vol. 80, no. 1, pp. 90–97. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-1-90-97
9. Golovan V.I., Dudar'kov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
10. Zheleznov L.P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*, 2022, no. 4, pp. 44–50.
11. Zheleznov L.P., Ser'eznov A.N. *Polet. Obshcherossiiskii nauchno-tekhnicheskii zhurnal*, 2022, no. 2, pp. 40–48.
12. Dudchenko A.A., Lur'e S.A. *Modelirovanie protsessov rosta povrezhdennosti i degradatsii mekhanicheskikh svoystv sloistykh kompozitov* (Modeling of deformation and fracture processes of layered composite materials under local impact), Moscow, MAI, 2019, 160 p.
13. Masood S.N., Viswamurthy S.R., Gaddikeri K.M. Composites Airframe Panel Design for Post-buckling- An Experimental Investigation. *Composite Structures*, 2020, vol. 241. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112104
14. Masood S.N., Gaddikeri K.M., Viswamurthy S.R. Experimental and finite element numerical studies on the post-buckling behavior of composite stiffened panels. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019, vol. 28, no. 16, pp. 1677–1690. DOI: 10.1080/15376494.2019.1701151
15. Grotto F., Bouvet C., Castanié B., Serra J. Design and Testing of Impacted Stiffened CFRP Panels under Compression with the VERTEX Test Rig. *Aerospace*, 2023, vol. 10, no. 4: 327. DOI: 10.3390/aerospace10040327

16. Kootte L. *A methodology to reproduce postbuckling in composite panels to study skin stringer separation*. PhD thesis. Delft University of Technology, 2023. DOI: 10.4233/uuid:cfccc1dc-df8a-4a49-8c1a-c2ebad7a1867
17. Yue N., Broer A., Briand W. et al. Assessing stiffness degradation of stiffened composite panels in post-buckling compression-compression fatigue using guided waves. *Composite Structures*, 2022, vol. 293. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115751
18. Dávila C.G., Leone F.A., Rose C.A., Johnston W. Initiation and Propagation of Skin/Stiffener Separation in Postbuckled Structures Subjected to Cyclic Loads. *AIAA Scitech Forum (11–15 & 19–21 January 2021; Virtual event)*. DOI: 10.2514/6.2021-0573
19. Mitrofanov O.V. *Prikladnye metody proektirovaniya nesushchikh panelei iz kompozitnykh materialov* (Design of load-bearing panels of aviation structures according to the subcritical state), Moscow, Kompaniya Sputnik+, 2003, 239 p.
20. Mitrofanov O.V. *Prikladnye geometricheski nelineinye zadachi pri proektirovanii i raschetakh kompozitnykh aviatsionnykh konstruksii* (Applied geometrically nonlinear problems in design and calculations of composite aircraft structures), Moscow, MAI, 2022, 164 p.
21. Mitrofanov O., Osman M. Designing of Smooth Composite Panels Providing Stability and Strength at Postbuckling Behavior. *Mechanics of Composite Materials*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 15-30. DOI 10.1007/s11029-022-10008-3

Статья поступила в редакцию 23.11.2023; одобрена после рецензирования 19.12.2023; принята к публикации 21.12.2023.

The article was submitted on 23.11.2023; approved after reviewing on 19.12.2023; accepted for publication on 21.12.2023.