Труды МАИ. 2024. № 135
Trudy MAI, 2024, no. 135

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 531.36; 531.381
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=179675

АНАЛИЗ ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ ГЕССА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ШАРА ПО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Александр Сергеевич Кулешов[1], Елена Валерьевна Лобанова[2]✉

[1,2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[1]kuleshov@mech.math.msu.su

[2]yorik0603helena@gmail.com✉

Аннотация: Задача о качении тяжелого неоднородного шара по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости – одна из наиболее известных задач механики, сочетающая простоту постановки с невозможностью полного и общего решения. Результаты исследования этой задачи находят применение при решении различных технических задач, в частности, при решении задачи об обкатке ротора по жесткому подшипнику. Эта задача во многом аналогична задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Известны случаи интегрируемости уравнений движения задачи о качении шара, аналогичные случаям Эйлера – Пуансо, Лагранжа и Гесса классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В данной работе изучается интегрируемый случай задачи о качении шара, аналогичный случаю Гесса. Показано что, как и в классической задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой, качественное описание движения шара по гладкой горизонтальной плоскости сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, причем в случае равенства нулю постоянной интеграла площадей уравнения движения шара могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Ключевые слова: качение неоднородного шара, гладкая плоскость, случай Гесса

Для цитирования: Кулешов А.С., Лобанова Е.В. Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=179675

MECHANICS

Original article

ANALYSIS OF THE HESS INTEGRABLE CASE IN THE PROBLEM OF MOTION OF A BALL ON A SMOOTH PLANE

Alexander S. Kuleshov[1], Elena V. Lobanova[2]✉

[1,2] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[1] kuleshov@mech.math.msu.su

[2] yorik0603helena@gmail.com✉

Abstract: The problem of motion of a heavy nonhomogeneous ball on a fixed smooth horizontal plane is considered. This problem is similar in many aspects to the classical problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point. Both of these problems can be represented in the form of Hamiltonian system with two degrees of freedom. For integrability of both of these problems, only one additional first integral is needed. The equations of motion of both problems have the energy integral and the area integral. There are known integrable cases in the problem of motion of a ball, similar to the Euler – Poinsot, Lagrange and Hess integrable cases in the problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point. In this paper, we study the integrable case of the problem of motion of the ball, similar to the Hess case. Equations of motion of the ball are written using the special coordinate system, originally introduced by P.V. Kharlamov to study various problems of rigid body dynamics. The study showed that the equations of motion of a nonhomogeneous ball on a smooth plane in the Hess case and the equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case have similar properties. In particular, it is shown that, as in the classical problem of the motion of a body with a fixed point, a qualitative description of the motion of a ball on a smooth horizontal plane is reduced to the integration of the second – order linear differential equation, and at the zero level of the area integral the equations of motion of the ball can be integrated in quadratures.

Keywords: Motion of a Nonhomogeneous Ball, Smooth Plane, Hess integrable case

For citation: Kuleshov A.S., Lobanova E.V. Analysis of the Hess integrable case in the problem of motion of a ball on a smooth plane. *Trudy MAI*, 2024. no. 135. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179675

1.Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого неоднородного шара на гладкой горизонтальной неподвижной плоскости α. Будем считать, что центр масс G шара не совпадает с его геометрическим центром C. Введем две правые прямоугольные системы осей координат: неподвижную $Oxyz$ с началом в некоторой точке O плоскости α и подвижную $Gx_1x_2x_3$ с началом в центре масс G шара и осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции шара. Пусть $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – единичные базисные векторы системы координат $Oxyz$. Для единичных базисных векторов системы координат $Gx_1x_2x_3$ выберем обозначения $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пусть x, y, z – координаты центра масс G шара в системе координат $Oxyz$, то есть $\overrightarrow{OG} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

Пусть m и A_1, A_2, A_3 – масса шара и его моменты инерции относительно осей Gx_1, Gx_2 и Gx_3 соответственно. Пусть в системе координат $Gx_1x_2x_3$ вектор угловой скорости шара имеет компоненты ω_1, ω_2, ω_3, а единичный вектор оси Oz имеет в той же системе компоненты γ_1, γ_2, γ_3. Радиус – вектор $\overrightarrow{GQ}$ из центра масс шара G в точку Q, в которой шар касается плоскости α, обозначим через $\mathbf{r} = \overrightarrow{GQ} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Пусть $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$ – ускорение силы тяжести и $\mathbf{N} = -N\boldsymbol{\gamma}$ – реакция плоскости α (в силу того, что плоскость предполагается абсолютно гладкой, реакция плоскости оказывается направленной вдоль $\boldsymbol{\gamma}$).

Рассматриваемая система является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, и ее можно изучать методами динамики гамильтоновых систем

[1 – 6]. Однако, для получения уравнений движения шара воспользуемся общими теоремами динамики. Теорема об изменении количества движения шара приводит к уравнениям

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = N - mg. \tag{1}$$

Теорема об изменении момента количества движения шара относительно его центра масс G приводит к трем уравнениям

$$A_1\dot{\omega}_1 + \left(A_3 - A_2\right)\omega_2\omega_3 = N\left(x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2\right), \quad A_2\dot{\omega}_2 + \left(A_1 - A_3\right)\omega_1\omega_3 = N\left(x_3\gamma_1 - x_1\gamma_3\right),$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + \left(A_2 - A_1\right)\omega_1\omega_2 = N\left(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1\right). \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) следует дополнить также уравнениями Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \tag{3}$$

Для нахождения связи между x_1, x_2, x_3 и γ_1, γ_2, γ_3 предположим, что радиус – вектор геометрического центра C шара относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$ записывается следующим образом: $\overrightarrow{GC} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, где a_1, a_2, a_3 – постоянные. Тогда, принимая во внимание очевидное векторное равенство $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CQ}$, мы можем записать его в виде:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 - R\gamma_1\mathbf{e}_1 - R\gamma_2\mathbf{e}_2 - R\gamma_3\mathbf{e}_3,$$

где R – радиус шара. Отсюда получаем следующие выражения для компонент x_1, x_2, x_3 радиуса – вектора точки касания Q шара с плоскостью α относительно центра масс G шара в зависимости от γ_1, γ_2, γ_3:

$$x_1 = -R\gamma_1 + a_1, \quad x_2 = -R\gamma_2 + a_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a_3. \tag{4}$$

С учетом формул (4) мы можем переписать уравнения (2) так:

$$A_1\dot{\omega}_1+\left(A_3-A_2\right)\omega_2\omega_3=N\left(a_2\gamma_3-a_3\gamma_2\right),\ \ A_2\dot{\omega}_2+\left(A_1-A_3\right)\omega_1\omega_3=N\left(a_3\gamma_1-a_1\gamma_3\right),$$

$$A_3\dot{\omega}_3+\left(A_2-A_1\right)\omega_1\omega_2=N\left(a_1\gamma_2-a_2\gamma_1\right). \tag{5}$$

Добавляя к уравнениям (1), (3), (4), (5) связь между z и γ_1, γ_2, γ_3

$$z=-\left(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)=-x_1\gamma_1-x_2\gamma_2-x_3\gamma_3=R-a_1\gamma_1-a_2\gamma_2-a_3\gamma_3, \tag{6}$$

получим замкнутую систему уравнений (1), (3), (4), (5), (6) относительно неизвестных переменных x, y, z, ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3, x_1, x_2, x_3 и N. Эти уравнения допускают первые интегралы:

$$H=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2\right)+mgz=h,$$

$$K=A_1\omega_1\gamma_1+A_2\omega_2\gamma_2+A_3\omega_3\gamma_3=k,\quad \dot{x}=v_x=\mathrm{const},\quad \dot{y}=v_y=\mathrm{const},\ \Gamma=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей, интегралы, выражающие постоянство проекций вектора скорости центра масс на оси Ox и Oy, и геометрический интеграл.

Без ограничения общности выберем начальные условия так, что

$$v_x=0,\quad v_y=0,\quad x\left(0\right)=x_0=0,\quad y\left(0\right)=y_0=0.$$

Тогда получим замкнутую систему уравнений:

$$m\ddot{z}=N-mg,\qquad z=R-a_1\gamma_1-a_2\gamma_2-a_3\gamma_3,$$

$$A_1\dot{\omega}_1+\left(A_3-A_2\right)\omega_2\omega_3=N\left(a_2\gamma_3-a_3\gamma_2\right),\quad A_2\dot{\omega}_2+\left(A_1-A_3\right)\omega_1\omega_3=N\left(a_3\gamma_1-a_1\gamma_3\right),$$

$$A_3\dot{\omega}_3+\left(A_2-A_1\right)\omega_1\omega_2=N\left(a_1\gamma_2-a_2\gamma_1\right),$$

$$\dot{\gamma}_1=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3,\quad \dot{\gamma}_2=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1,\quad \dot{\gamma}_3=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2 \tag{7}$$

относительно переменных ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3, z и N. Из первого уравнения системы (7) находим:

$$N = m\ddot{z} + mg = mg - ma_1\ddot{\gamma}_1 - ma_2\ddot{\gamma}_2 - ma_3\ddot{\gamma}_3. \qquad (8)$$

Используя три последних уравнения системы (7) и формулу (8), можно выразить N в зависимости от $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_3$, ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3. Подставляя полученное выражение в третье, четвертое и пятое уравнение системы (7), получим замкнутую систему шести уравнений относительно шести неизвестных ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3, которая при любых значениях параметров a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3 допускает три первых интеграла – энергии, площадей и геометрический. Можно показать что, как и в случае системы уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, для полной интегрируемости этой системы не хватает одного первого интеграла [7, 8, 9]. Этот дополнительный первый интеграл существует в двух случаях:

1. Аналог случая Эйлера – Пуансо $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (центр масс шара совпадает с его геометрическим центром). Дополнительный интеграл имеет тот же вид, что и классическом случае Эйлера – Пуансо:

$$A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 = L^2 = \mathrm{const}.$$

2. Аналог случая Лагранжа $A_1 = A_2$, $a_1 = a_2 = 0$ (шар динамически симметричен, а его центр масс лежит на оси динамической симметрии). Дополнительный интеграл имеет тот же вид, что и в классическом случае Лагранжа:

$$\omega_3 = \omega = \mathrm{const}.$$

В работах М.Ю. Ивочкина [10, 11] было показано, что этими двумя случаями исчерпываются все случаи общей интегрируемости в данной задаче. Однако возможны случаи, когда у системы уравнений (7) существует частный интеграл. К таким случаям относится аналог случая Гесса.

3. Аналог случая Гесса (А.А. Буров [12, 13], см. также [14]). Предположим, что параметры шара удовлетворяют соотношениям

$$a_3 = 0, \quad A_2\left(A_3 - A_1\right)a_2^2 = A_1\left(A_2 - A_3\right)a_1^2, \quad A_2 \ge A_3 \ge A_1. \tag{9}$$

Покажем, что при выполнении условий (9) уравнения (7) обладают частным четвертым интегралом следующего вида:

$$A_1\omega_1 a_1 + A_2\omega_2 a_2 = 0. \tag{10}$$

Для этого воспользуемся условием $a_3 = 0$ и перепишем с учетом этого условия третье и четвертое уравнения системы (7). Они перепишутся так:

$$A_1\dot{\omega}_1 + \left(A_3 - A_2\right)\omega_2\omega_3 = Na_2\gamma_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 + \left(A_1 - A_3\right)\omega_1\omega_3 = -Na_1\gamma_3. \tag{11}$$

Первое из уравнений (11) умножим на a_1, а второе – на a_2. Взяв сумму полученных уравнений, представим её в виде

$$\frac{d}{dt}\left(A_1\omega_1 a_1 + A_2\omega_2 a_2\right) = \left(A_3 - A_1\right)\omega_1\omega_3 a_2 + \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 a_1. \tag{12}$$

С учетом второго из условий (9) правая часть уравнения (12) может быть записана следующим образом:

$$\left(A_3 - A_1\right)\omega_1\omega_3 a_2 + \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 a_1 = \frac{\omega_3\left(A_2 - A_3\right)a_1}{A_2 a_2}\left(A_1\omega_1 a_1 + A_2\omega_2 a_2\right).$$

Итак, дифференциальное уравнение (12) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left(A_1\omega_1 a_1 + A_2\omega_2 a_2\right) = \frac{\omega_3\left(A_2 - A_3\right)a_1}{A_2 a_2}\left(A_1\omega_1 a_1 + A_2\omega_2 a_2\right).$$

Следовательно, если начальные условия задачи таковы, что справедливо условие (10), то это условие справедливо во всё время движения шара. Иными словами, при выполнении условий (9) уравнения движения шара обладают частным интегралом (10).

В данной работе рассматривается вопрос об интегрируемости в квадратурах уравнений движения шара в интегрируемом случае, аналогичном случаю Гесса. Показано что, как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, решение задачи о движении шара в изучаемом случае приводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка. При этом, если вектор кинетического момента шара ортогонален вектору $\boldsymbol{\gamma}$, то данное дифференциальное уравнение интегрируется в явном виде, что позволяет свести задачу к квадратурам.

2. Преобразование уравнений движения. Запишем систему уравнений (7) используя специальную систему координат, первоначально введенную П.В. Харламовым [15, 16, 17] для исследования случая Гесса в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Переход от главных центральных осей инерции $Gx_1x_2x_3$ к осям специальной системы координат $G\xi\eta\zeta$ (обозначим через $\mathbf{e}_I$, $\mathbf{e}_{II}$, $\mathbf{e}_{III}$ единичные базисные векторы этой системы) осуществляется по формулам $\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_1 \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \sin\alpha$, $\mathbf{e}_{II} = -\mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cos\alpha$, $\mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}_3$, где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ принимают следующие значения

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \tag{13}$$

Обозначим через L_1, L_2, L_3 компоненты момента количества движения шара относительно центра масс в специальных осях $G\xi\eta\zeta$. Тогда

$$\mathbf{K} = L_1\mathbf{e}_I + L_2\mathbf{e}_{II} + L_3\mathbf{e}_{III} = \left(L_1\cos\alpha - L_2\sin\alpha\right)\mathbf{e}_1 + \left(L_1\sin\alpha + L_2\cos\alpha\right)\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3. \tag{14}$$

С другой стороны, в главных центральных осях инерции $Gx_1x_2x_3$ момент количества движения шара относительно центра масс равен:

$$\mathbf{K} = A_1\omega_1\mathbf{e}_1 + A_2\omega_2\mathbf{e}_2 + A_3\omega_3\mathbf{e}_3. \tag{15}$$

Сравнивая два выражения (14) и (15) для момента количества движения шара, записанные относительно одной и той же системы координат, получаем, что компоненты угловой скорости шара ω_1, ω_2, ω_3 связаны с компонентами L_1, L_2, L_3 момента количества движения шара формулами

$$\omega_1 = \frac{L_1a_1 - L_2a_2}{A_1\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \omega_2 = \frac{L_1a_2 + L_2a_1}{A_2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \omega_3 = \frac{L_3}{A_3}. \tag{16}$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ имеет в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компоненты ν_1, ν_2, ν_3, которые связаны с γ_1, γ_2, γ_3 формулами

$$\gamma_1 = \frac{\nu_1a_1 - \nu_2a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\nu_1a_2 + \nu_2a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{\nu_3}{A_3}. \tag{17}$$

Подставляя формулы (16), (17) в систему уравнений (7) и разрешая её относительно производных $\dot{L}_1$, $\dot{L}_2$, $\dot{L}_3$, $\dot{\nu}_1$, $\dot{\nu}_2$, $\dot{\nu}_3$, получим уравнения движения шара в виде:

$$\dot{L}_1 = -bL_1L_3,$$

$$\dot{L}_2 = bL_2L_3 + \frac{mb\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\left(a+c\right)\nu_2 - b\nu_1\right)\nu_3}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}L_1^2 - \frac{\Gamma\nu_3}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)} -$$
$$-\frac{m\left(a_1^2+a_2^2\right)c^2\nu_1\nu_3}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}\left(L_2^2+L_3^2\right) + \frac{m\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\left(b^2+c^2\right)\nu_2 - 2bc\nu_1\right)\nu_3}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}L_1L_2 +$$
$$+\frac{mbc\left(a_2^4-a_1^4\right)\nu_2^2 + ma_1a_2\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(ac+b^2\right)\nu_3^2 + b\left(a_2^2-a_1^2\right)}{a_1a_2\left(1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)\right)}L_1L_3,$$

$$\dot{L}_3 = bL_1^2 - bL_2^2 - \frac{mb\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\left(a+c\right)\nu_2 - b\nu_1\right)\nu_2}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}L_1^2 + \frac{\Gamma\nu_2}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)} +$$
$$+\frac{m\left(a_1^2+a_2^2\right)c^2\nu_1\nu_2}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}\left(L_2^2+L_3^2\right) - \frac{m\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b^2+c^2\right)\nu_2\nu_3}{1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}L_1L_3 +$$
$$+\frac{ma_1a_2\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(2bc\nu_1 - \left(ac+b^2\right)\nu_2\right)\nu_2 - b\left(a_2^2-a_1^2\right)\left(1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\nu_3^2\right)}{a_1a_2\left(1+mc\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)\right)}L_1L_2,$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - \left(cL_2+bL_1\right)\nu_3,\ \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + \left(aL_1+bL_2\right)\nu_3,$$

$$\dot{\nu}_3 = \left(bL_1+cL_2\right)\nu_1 - \left(aL_1+bL_2\right)\nu_2. \tag{18}$$

Здесь a, b, c и Γ – постоянные, зависящие от параметров a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3, m и g, и определяемые равенствами

$$a = \frac{A_2a_1^2 + A_1a_2^2}{A_1A_2\left(a_1^2+a_2^2\right)},\quad b = \frac{\left(A_1-A_2\right)a_1a_2}{A_1A_2\left(a_1^2+a_2^2\right)},\quad c = \frac{1}{A_3},\ \Gamma = mg\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,.$$

Из первого уравнения системы (18)

$$\dot{L}_1 = -bL_1L_3$$

следует частный интеграл Гесса. Действительно, если начальные условия выбраны так, что в начальный момент времени величина $L_1 = 0$, то имеем

$$L_1 \equiv 0 \tag{19}$$

в любой момент времени движения. Соотношение (19) совместно с условиями (9) определяет интегрируемый случай Гесса в задаче о качении тяжелого неоднородного шара по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Запишем систему уравнений (18) на уровне интеграла Гесса (19). Записанная на уровне интеграла Гесса (19) система уравнений (18) заметно упростится и примет вид:

$$\dot{L}_2 = bL_2L_3 - \frac{m\left(a_1^2 + a_2^2\right)c^2\nu_1\nu_3}{1 + mc\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}\left(L_2^2 + L_3^2\right) - \frac{\Gamma\nu_3}{1 + mc\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)},$$

$$\dot{L}_3 = -bL_2^2 + \frac{m\left(a_1^2 + a_2^2\right)c^2\nu_1\nu_2}{1 + mc\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}\left(L_2^2 + L_3^2\right) + \frac{\Gamma\nu_2}{1 + mc\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)},$$

$$\dot{\nu}_1 = c\left(L_3\nu_2 - L_2\nu_3\right), \quad \dot{\nu}_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = cL_2\nu_1 - bL_2\nu_2. \tag{20}$$

Полученная система уравнений (20) допускает интегралы энергии, площадей и геометрический интеграл:

$$\frac{1}{2}\left(1 + mc\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)\right)\left(L_2^2 + L_3^2\right) - \frac{\Gamma}{c}\nu_1 = E, \quad L_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{21}$$

3. Получение линейного дифференциального уравнения второго порядка. Запишем систему уравнений (20) и первые интегралы (21) в безразмерной форме.

Для этого введем безразмерные компоненты момента количества движения y и z по формулам

$$L_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}\ y, \qquad L_3 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}\ z,$$

а также безразмерное время $t = \dfrac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}$ и два безразмерных параметра

$$d_1 = \frac{b}{c}, \qquad d_2 = mc\left(a_1^2 + a_2^2\right).$$

Обезразмерим постоянные первых интегралов с помощью формул

$$h = \frac{Ec}{\Gamma}, \qquad k_1 = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}\ .$$

Тогда система уравнений (20) перепишется следующим образом:

$$\frac{dy}{d\tau} = d_1 yz - \frac{d_2\left(y^2+z^2\right)\nu_1\nu_3}{1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)} - \frac{\nu_3}{1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -d_1 y^2 + \frac{d_2\left(y^2+z^2\right)\nu_1\nu_2}{1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)} + \frac{\nu_2}{1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)},$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = z\nu_2 - y\nu_3, \qquad \frac{d\nu_2}{d\tau} = -z\nu_1 + d_1 y\nu_3, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau} = y\nu_1 - d_1 y\nu_2. \tag{22}$$

Первыми интегралами системы уравнений (22) являются функции

$$\frac{1}{2}\left(1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)\right)\left(y^2+z^2\right) - \nu_1 = h, \qquad y\nu_2 + z\nu_3 = k_1, \qquad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1. \tag{23}$$

Заметим, что если в системе (22) формально положить $d_2 = 0$, и поменять знак у всех компонент ν_1, ν_2, ν_3 на противоположный, то уравнения движения шара (22) примут вид уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса [18, 19, 20].

Сделаем ещё одну замену переменных в системе (22). Вместо переменных y и z будем использовать другие переменные y_1 и z_1, связанные с y и z соотношениями:

$$y_1 = \sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}\, y, \qquad z_1 = \sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}\, z.$$

Тогда система уравнений (22) перепишется следующим образом:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{d_1 y_1 z_1}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}} - \frac{d_2 k_1 \nu_1 z_1}{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)} - \frac{\nu_3}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}},$$

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -\frac{d_1 y_1^2}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}} + \frac{d_2 k_1 \nu_1 y_1}{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)} + \frac{\nu_2}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}},$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \frac{z_1 \nu_2 - y_1 \nu_3}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}}, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = \frac{d_1 y_1 \nu_3 - z_1 \nu_1}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}},$$

$$\frac{d\nu_3}{d\tau} = \frac{y_1 \nu_1 - d_1 y_1 \nu_2}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}}. \tag{24}$$

Система уравнений (24) допускает первые интегралы

$$\frac{1}{2}\left(y_1^2 + z_1^2\right) - \nu_1 = h, \qquad \frac{y_1 \nu_2 + z_1 \nu_3}{\sqrt{1 + d_2\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}} = k_1, \qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{25}$$

Покажем, как из системы уравнений (24) можно получить одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Для начала умножим первое уравнение системы (24) на y_1, а второе – на z_1. Складывая полученные уравнения, находим:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{y_1^2+z_1^2}{2}\right)=\frac{z_1\nu_2-y_1\nu_3}{\sqrt{1+d_2\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}}. \qquad (26)$$

Теперь воспользуемся очевидным тождеством:

$$\left(y_1^2+z_1^2\right)\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)=\left(y_1\nu_2+z_1\nu_3\right)^2+\left(z_1\nu_2-y_1\nu_3\right)^2.$$

Первое из уравнений (25) дает такое выражение для ν_1:

$$\nu_1=\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h,$$

и следовательно,

$$\nu_2^2+\nu_3^2=1-\nu_1^2=1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2.$$

Окончательно представляем записанное выше тождество так:

$$\left(z_1\nu_2-y_1\nu_3\right)^2=\left(y_1^2+z_1^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)-k_1^2\left(1+d_2\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)\right).$$

Учитывая это соотношение, перепишем уравнение (26) в виде:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{y_1^2+z_1^2}{2}\right)=-\sqrt{\frac{\left(y_1^2+z_1^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)}{1+d_2\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)}-k_1^2}\,. \qquad (27)$$

Получим ещё одно уравнение, которое следует из системы (24). Для этого умножим первое уравнение системы (24) на z_1, а второе уравнение – на y_1. Затем вычтем из второго уравнения первое. В результате будем иметь:

$$y_1\frac{dz_1}{d\tau}-z_1\frac{dy_1}{d\tau}=-\frac{d_1y_1\left(y_1^2+z_1^2\right)}{\sqrt{1+d_2\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)}}+k_1+$$

$$+\frac{d_2k_1\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)\left(y_1^2+z_1^2\right)}{1+d_2\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(y_1^2+z_1^2\right)-h\right)^2\right)}. \tag{28}$$

Введем теперь новые координаты x и φ по формулам $y_1=x\cos\varphi, z_1=x\sin\varphi$. Тогда для определения переменных x и φ будем иметь систему двух дифференциальных уравнений, которая получается из уравнений (27), (28)

$$x\frac{dx}{d\tau}=-\sqrt{\frac{x^2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)}{1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)}-k_1^2},$$

$$x^2\frac{d\varphi}{d\tau}=-\frac{d_1x^3\cos\varphi}{\sqrt{1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)}}+\frac{k_1\left(1+d_2\left(1+\frac{x^4}{4}-h^2\right)\right)}{1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)}. \tag{29}$$

Из системы (29) следует дифференциальное уравнение на функцию $\varphi=\varphi(x)$:

$$\frac{d\varphi}{dx}=g_1(x)\cos\varphi+g_2(x), \tag{30}$$

$$g_1(x)=\frac{d_1x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)-k_1^2\left(1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)\right)}},$$

$$g_2(x)=-\frac{k_1\left(1+d_2\left(1+\frac{x^4}{4}-h^2\right)\right)}{x\sqrt{1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)}\sqrt{x^2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)-k_1^2\left(1+d_2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)\right)}}.$$

При помощи замены

$$w=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

уравнение (30) приводится к уравнению Риккати,

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{2}\big(g_1(x)+g_2(x)\big)+\frac{1}{2}\big(g_2(x)-g_1(x)\big)w^2,$$

которое, в свою очередь, можно привести к виду линейного дифференциального уравнения второго порядка. Таким образом, задача качественного описания движения шара по гладкой горизонтальной плоскости в интегрируемом случае Гесса сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Заметим, что при $k_1=0$ имеем $g_2(x)=0$ и в уравнении (30) разделяются переменные, что дает возможность проинтегрировать данное уравнение в явном виде и получить зависимость $\varphi=\varphi(x)$. Затем из первого уравнения системы (29) находится зависимость $x=x(\tau)$, откуда определяем $\varphi(\tau)$ в виде

$$\varphi(\tau)=\varphi\big(x(\tau)\big).$$

Тем самым, мы можем определить переменные

$$y_1 = y_1(\tau), \qquad z_1 = z_1(\tau).$$

Тогда первое из соотношений (25) дает:

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + z_1^2\right) - h = \nu_1(\tau),$$

откуда определяются переменные y и z в зависимости от времени

$$y = y(\tau), \qquad z = z(\tau).$$

Из уравнений

$$y\nu_2 + z\nu_3 = 0, \quad z\nu_2 - y\nu_3 = \frac{d\nu_1}{d\tau}.$$

получаем

$$y = -\frac{\nu_3}{1-\nu_1^2}\frac{d\nu_1}{d\tau}, \qquad z = \frac{\nu_2}{1-\nu_1^2}\frac{d\nu_1}{d\tau},$$

откуда находятся неизвестные ν_2 и ν_3 как функции τ:

$$\nu_2 = \nu_2(\tau), \qquad \nu_3 = \nu_3(\tau).$$

Таким образом, при нулевой постоянной интеграла площадей мы можем получить зависимости всех переменных от безразмерного времени τ, то есть свести задачу к квадратурам.

Заключение. В данной работе была рассмотрена задача о движении неоднородного шара по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости в интегрируемом случае Гесса. Показано что, как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса, задача исследования движения шара сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка, причем на нулевом уровне интеграла площадей задача сводится к квадратурам.

Список источников

1. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=65212

2. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=72568

3. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

4. Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных «действие-угол» для задачи Эйлера – Пуансо // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=47336

5. Соколов С.В. Интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Механическая интерпретация // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=84387

6. Соколов С.В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93532

7. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. - 384 с.

8. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. - М.: Наука. 1992. - 336 с.

9. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. - М.: Наука. 1988. - 304 с.

10. Ивочкин М.Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости // Математический сборник. 2008. Т. 199. Вып. 6. С. 85-104.

11. Ивочкин М.Ю. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 75. Вып. 5. С. 858-863.

12. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой плоскости: в сб. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. - М.: ВЦ РАН. 1985. С. 118-121.

13. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 5. С. 72-73.

14. Борисов А.В., Мамаев И.С. Случай Гесса в динамике твердого тела // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 256–265.

15. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502-507.

16. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1965. 221 с.

17. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. - Киев: Наукова думка, 2012. - 402 с.

18. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. - М.: Издательство МАИ. 2020. - 260 с.

19. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Динамические системы. 2020. Т. 10. № 2. С. 197–204.

20. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2022, vol. 102, no. 11. DOI: 10.1002/zamm.202100036

References

1. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

2. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568

3. Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

4. Barkin M.Yu. *Trudy MAI*, 2014, no. 72. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47336

5. Sokolov S.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84387

6. Sokolov S.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93532

7. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Dynamics of Rigid Body), Izhevsk, Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, 2001, 384 p.

8. Markeev A.P. *Dinamika tela, vzaimodeistvuyuschego s tverdoi poverkhost'yu* (Dynamics of a Body Being Contiguous To a Rigid Surface), Moscow, Nauka, 1992, 336 p.

9. Rubanovsky V.N., Samsonov V.A. *Ustoichivost' statsionarnykh dvizhenii v primerakh i zadachakh* (Stability of Stationary Motions in Examples and Problems), Moscow, Nauka, 1988, 304 p.

10. Ivochkin M.Yu. *Matematicheskii sbornik*, 2008, vol. 199, no. 6, pp. 85-104.

11. Ivochkin M.Yu. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2009, vol. 75, no. 5, pp. 858-863.

12. Burov A.A. *Zadachi Issledovaniya Ustoichivosti i Stabilizatsii Dvizheniya* (Objectives of the study of stability and stabilization of motion), Moscow, CCAS. 1985. pp. 118-121.

13. Burov A.A. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1986, no. 5, pp. 72-73.

14. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 256-265.

15. Kharlamov P.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1964, vol. 28, no. 3, pp. 502-507.

16. Kharlamov P.V. *Lektsii po dinamike tverdogo tela* (Lectures on Dynamics of a Rigid Body), Novosibirsk, Izdatel'stvo Novosibirskogo universiteta, 1965, 221 p.

17. Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M. *Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela*, (Classical Problems of Rigid Body Dynamics), Kiev, Naukova dumka, 2012, 402 p.

18. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Algoritm Kovachicha i ego primenenie v zadachakh klassicheskoi mekhaniki (The Kovacic Algorithm and its application in Problems of Classical Mechanics), Moscow, MAI, 2020, 260 p.

19. Bardin B.S., Kuleshov A.S. *Dinamicheskie systemy*, 2020, vol. 10, no. 2, pp. 197-204.

20. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case, ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2022, vol. 102, no. 11. DOI: 10.1002/zamm.202100036

Статья поступила в редакцию 02.02.2024

Одобрена после рецензирования 13.02.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 02.02.2024; approved after reviewing on 13.02.2024; accepted for publication on 26.04.2024