

На правах рукописи



Каранэ Мария Магдалина Сергеевна

**МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Специальность 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2024 год

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

- Научный руководитель:** **Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
- Официальные оппоненты:** **Хлебников Михаил Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова» Российской академии наук
- Фетисов Дмитрий Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
- Ведущая организация:** Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Защита состоится 20 декабря 2024 года в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 на базе МАИ по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, или на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182608

Автореферат разослан _____

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Отдел Ученого и диссертационных советов МАИ.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.327.02,
кандидат физико-математических наук



В. А. Рассказова

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В настоящее время актуальным является разработка новых методов решения задач синтеза оптимального управления с неполной обратной связью по доступным координатам вектора состояния динамических систем в условиях неопределенности в связи с необходимостью учета особенностей большинства прикладных проблем в авиационной и ракетно-космической области.

Существующие численные методы, основанные на необходимых и (или) достаточных условиях оптимальности, рассматривались в работах Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Куржанского А.Б., Черноусько Ф.Л., Гурмана В.И., Кротова В.Ф., Атанса М., Фалба П.Л., Хрусталева М.М., Федоренко Р.П., Горнова А.Ю., Тятюшкина А.И., Fleming W.H., Rishel R.W., Kushner H.J. и др.

Методы решения задач оптимального управления пучками траекторий, в которых учитывается неопределенность задания начальных условий, изучались в работах Куржанского А.Б., Черноусько Ф.Л., Овсянникова Д.А., Бортакковского А.С., Филипповой Т.Ф., Brockett R.W., Henrion D., Korda M., Halder A., Bahattacharya R. и др.

В диссертационной работе предлагается использовать подходы, основанные на переходе от задачи поиска оптимального управления с неполной обратной связью к соответствующей задаче параметрической оптимизации, а также на доказательстве и применении достаточных условий эpsilon-оптимальности с подбором вспомогательных функций в параметрической форме. Для решения возникающих задач параметрической оптимизации предлагается разработать мультиагентные метаэвристические методы поиска экстремума функций многих переменных, а в качестве аппарата параметрического представления неизвестных функций использовать разложения по различным базисным системам.

В качестве методов поиска экстремума функций используются метаэвристические алгоритмы оптимизации, которые начали активно разрабатываться в связи с развитием компьютеров во второй половине XX в. Они успешно применяются во многих областях науки, например в оптимизации, оптимальном управлении, машинном обучении, различных областях искусственного интеллекта. В метаэвристических алгоритмах используются процессы, основанные на взаимодействии группы решений (агентов), которые способны обмениваться информацией и выполнять определенные действия, ведущие к получению результата. Метаэвристические алгоритмы довольно просты в применении и позволяют получать приемлемые результаты за разумное вычислительное время. Главной целью разработки метаэвристических алгоритмов является способность достаточно быстро находить решение громоздких задач и получать хорошие с практической точки зрения результаты.

Метаэвристические алгоритмы условно можно разделить на семь групп: эволюционные алгоритмы, методы роевого интеллекта, методы, имитирующие физические процессы, биоинспирированные методы, мультиагентные методы, мультистартовые методы и методы на основе математических операций. Вклад в развитие метаэвристических алгоритмов внесли: Floudas C.A., Pardalos P.M., Goldberg D., Holland J.N., Clerc M., Zelinka I., Bastos-Filho C., de Lima Neto F., Lins A., Glover F., Brownlee J., Eusuff M.M., Lansey K.E., Moscato P., Dorigo M., Dasgupta S., Karaboga D., Ingber L., Gendreau M., Potvin J-Y., Kochenberger G.A., Neri F., Cotta C., de Castro L.N., Luus R., Feoktistov V., Michalewicz Z., Mishra S.K., DeYong K., Schwefel H.-P., Fogel L., Mirjalili S., Storn R., Price K., Kennedy J., Eberhart R., Yang X.S., Растрингин Л.А., Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г., Карпенко А.П., Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А., Третьяков А.А., Дивеев А.И., Батищев Д.И., Гладков В.А., Курейчик В.В. и др.

В диссертационной работе разработаны четыре мультиагентных алгоритма оптимизации и они применены для поиска оптимальных законов управления непрерывными динамическими системами в условиях неполной информации о состоянии.

Объектом исследования являются мультиагентные алгоритмы поиска условного экстремума и их применение в задачах оптимального управления динамическими системами с неполной информацией о векторе состояния.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения мультиагентных методов оптимизации, методов и алгоритмов поиска оптимального управления и их применение для решения прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) разработать математическое, алгоритмическое и программное обеспечение мультиагентных алгоритмов оптимизации;

2) исследовать их эффективность на стандартном наборе тестовых функций со сложной структурой линий уровня;

3) исследовав эффективность алгоритмов, применить их в прикладных задачах оптимизации параметров технических систем;

4) сформировать алгоритмы поиска оптимального управления непрерывными детерминированными и стохастическими системами на основе предложенных мультиагентных алгоритмов;

5) сформулировать и доказать достаточные условия эpsilon-оптимальности в задаче приближенного синтеза оптимального управления детерминированными системами с неполной обратной связью, а также в задаче приближенного синтеза оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью;

6) сформировать программное обеспечение на основе мультиагентных алгоритмов оптимизации и процедур поиска оптимальных законов управления, а также исследовать их эффективность, решив модельные и прикладные задачи оптимального управления.

Достоверность результатов. Эффективность работы предложенных мультиагентных алгоритмов оптимизации исследована на стандартном наборе тестовых функций со сложной структурой линий уровня. Полученные результаты сравнивались с точными решениями и результатами применения других известных метаэвристических алгоритмов в прикладных задачах оптимизации параметров технических систем, модельных задачах поиска оптимального управления и задаче стабилизации спутника. Предложенное в диссертационной работе решение перечисленных задач не противоречит уже известным результатам.

Методы исследования. В работе используются методы теории оптимального управления, теории оптимизации, спектральной теории, теории вероятностей и статистического моделирования. Для разработки мультиагентных алгоритмов использовались математические модели управления движением агентов, методы синтеза законов управления различной структуры, принятые в теории управления, численные методы приближения функций.

Научная новизна. Предложены новые математические модели описания движения агентов в мультиагентных алгоритмах и методы управления агентами. В работе впервые предложен гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска, мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов и мультиагентный алгоритм, основанный на применении ПИД-регуляторов управления движением агентов. Предложенные методы применены для поиска оптимального программного управления, управления с полной и неполной обратными связями для нелинейных детерминированных и стохастических непрерывных динамических систем. Законы управления искались в параметрической форме с помощью разложений по базисным системам, включая многочлены Лежандра, Чебышёва, косинусоиды, сплайны, финит-

ные функции, а также структуры с конечным числом переключений управления. Сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности законов управления детерминированными динамическими системами с неполной обратной связью, на основе которых разработаны алгоритмы получения верхних оценок близости приближенных решений к оптимальным. Создано алгоритмическое и программное обеспечение, позволяющее находить решение задач условной оптимизации и синтеза оптимального управления.

Практическая ценность. Разработанные в работе мультиагентные алгоритмы можно применять для решения оптимизационных задач и задач оптимального управления в авиационной и космической отраслях, что продемонстрировано в работе на задаче о стабилизации спутника. Получены два свидетельства о государственной регистрации сформированного программного обеспечения [32, 33].

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: международная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2017 – 2021), международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2018 – 2023), IV международная научно-практическая конференция «Информатизация инженерного образования» (ИНФОРИНО) (Москва, 2018), международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018 г. и 2020 г.), международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019), V Всероссийский молодежный научный форум «Наука будущего – наука молодых» (Москва, 2020), международная Азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» (Москва, 2021), XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2024).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 33 работах, из которых 6 работ опубликовано в журналах, входящих в перечень ВАК [1–6], а также 8 работ опубликовано в журналах, индексируемых международной базой Scopus [7–14], 16 работ опубликовано в сборниках тезисов докладов и проиндексировано в РИНЦ [15–31], зарегистрированы 2 программы для ЭВМ [32,33].

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 5 глав, заключение, список используемой литературы и приложение. Работа состоит из 268 страниц, включая 98 рисунков, 106 таблиц и список литературы, содержащий 162 наименования.

Диссертационная работа соответствует пунктам 1, 2, 4 и 5 паспорта специальности 2.3.1 (теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; разработка специального математического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).

Содержание диссертации

Во введении приведен подробный обзор опубликованных работ по тематике диссертационного исследования и сформулирована актуальность работы. Приведены цели и задачи работы, обоснована научная новизна и практическая значимость работы.

В первой главе разработаны мультиагентные методы глобальной условной оптимизации. **В разделе 1.1** приведена постановка задачи оптимизации. Дана непрерывная целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве допустимых решений $D \subseteq R^n$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $D = \{x | x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$. Требуется найти минимум функции $f(x)$ на множестве D , т.е. такую точку $x^* \in D$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x), \quad (1)$$

В разделе 1.2 сформулированы основные принципы создания мультиагентных алгоритмов оптимизации: описаны варианты деления популяции агентов на группы, предложена классификация типов агентов и сценариев их поведения в процессе поиска экстремума.

В разделе 1.3 для решения задачи (1) разработан гибридный мультиагентный метод интерполяционного поиска. Стратегия поиска решения включает три фазы. Первая фаза – интерполяционный поиск, для реализации которого используется кривая Безье, проходящая внутри выпуклой оболочки, образованной выбранными четырьмя точками P_1, P_2, P_3, P_4 (агентами) в популяции. Далее находится решение задачи параметрической оптимизации

$$x^{Bezier4} = \arg \min_{t \in [0;1]} f[(1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 t P_2 + 3(1-t) t^2 P_3 + t^3 P_4],$$

и популяция пополняется новым агентом $x^{Bezier4}$. Для исследования новых областей применяется В–сплайновая кривая, которая формируется по четырем случайным агентам популяции P_1, P_2, P_3, P_4 , отличным друг от друга,

$$x^B = \arg \min_{t \in [0;1]} f \left[\frac{1}{2} [-t(1-t)^2 P_1 + (2-5t^2+3t^3) P_2 + t(1+4t-3t^2) P_3 - t^2(1-t) P_4] \right].$$

Она, как правило, не проходит ни через одну точку, лежит в выпуклой оболочке, порожденной четырьмя решениями. В результате популяция пополняется еще одним новым агентом x^B .

Второй фазой поиска является миграция популяции. При этом в популяции выбирается агент-лидер, и все остальные агенты популяции двигаются по направлению к лидеру, совершая дискретные шаги, в результате которых находится наилучшее положение.

Третьей фазой является фронтальный поиск, который служит для уточнения итогового решения задачи. При этом используются кривая Катмула–Рома:

$$x^{CR} = \arg \min_{t \in [0;1]} f \left[\frac{1}{2} [-t(1-t)^2 P_1 + (2-5t^2+3t^3) P_2 + t(1+4t-3t^2) P_3 - t^2(1-t) P_4] \right],$$

проходящая через положения четырех наилучших агентов, а также интерполяционные кривые Безье и В–сплайновая кривая. Для их формирования учитывается информация о положении трех или четырех лидеров среди агентов популяции.

На первой и третьей фазах проводится одномерная минимизация вдоль параметрических кривых. Для этого используется биоинспирированный метод роевого интеллекта – метод, имитирующий поведение стаи криля, основанный на результатах анализа поведения стай криля – рачков, внешне напоминающих креветок. Их позиции меняются под действием трех факторов: присутствия других членов популяции, необходимости поиска пищи, случайных блужданий.

По окончании трех фаз производятся операции сокращения и восполнения популяции.

В разделе 1.4 разработан мультиагентный метод, использующий линейные регуляторы для управления движением агентов. Уравнение движения агентов

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \quad X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix} - \text{матрицы разме-}$$

ров $(2n \times 2n)$, $(2n \times n)$ соответственно; на управление ограничений не наложено, т.е. $u \in R^n$. В текущей популяции положение лидера фиксируется, а остальные агенты делятся на четыре равные группы: агенты, использующие минимизацию квадратичного критерия качества управления агентами на конечном промежутке времени; агенты, использующие минимизацию квадратичного критерия качества управления агентами на полубесконечном промежутке времени; агенты, использующие минимизацию полуопределенного критерия качества (критерия обобщенной работы) для управления агентами на конечном промежутке времени; агенты, использующие минимизацию приращения критерия качества управления агентами (локально-оптимальный подход).

Для всех агентов каждой группы находится и применяется одно и то же управление с полной обратной связью по вектору состояния, определяемое соотношениями для линейных регуляторов, матрицы коэффициентов усиления которых находятся из условия минимизации квадратичного критерия качества управления, характеризующего характер приближения агента данной группы к агенту-лидеру на текущей итерации, а также интенсивность применяемого управления.

В разделе 1.5 разработан мультиагентный метод оптимизации, использующий ПИД-регуляторы управления движением агентов. Стратегия поиска решения для этого метода такая же как у метода, описанного в разд. 1.4, при этом каждая группа агентов использует другие законы управления агентами: расширенный ПИД-регулятор (EPID), использующий информацию о второй производной и концепцию ограниченной памяти:

$$u_{EPID}(t, \Delta X) = K_P \Delta X + K_{D_1} \dot{\Delta X} + K_{D_2} \ddot{\Delta X} + K_I \int_{t_k}^t \Delta X(\tau) d\tau,$$

где $K_P, K_{D_1}, K_{D_2}, K_I$ – матрицы коэффициентов усиления регулятора, соответствующие пропорциональной, двум дифференциальным и интегральной составляющим, ΔX – отклонение от агента-лидера, t_k – момент начала очередного прохода в процедуре поиска, а также классический ПИД-регулятор; ПИ-регулятор; ПД-регулятор.

В разделах 1.3–1.5 мультиагентные методы заканчивают работу после заданного числа итераций. В последней популяции происходит отбор агента с наименьшим значением целевой функции, который принимается в качестве приближенного решения.

В разделе 1.6 разработан последовательно-параллельный гибридный мультиагентный метод, основанный на алгоритмах, имитирующих империалистическую конкуренцию, поведение стай рыб и криля. Основная идея стратегии поиска заключается в получении начального приближения с помощью алгоритма, имитирующего империалистическую конкуренцию, и последующего улучшения с помощью методов, имитирующих поведение стай рыб и криля. Выбор алгоритма для продолжения производится случайно с некоторой вероятностью, отражающей степень предпочтения при выборе.

В разделах 1.3–1.6 исследуется эффективность предложенных мультиагентных методов на стандартном наборе тестовых функций двух переменных со сложной структурой линий уровня. В результате статистической обработки многократных запусков алгоритмов сформированы рекомендации по заданию их гиперпараметров. В качестве иллюстрирующего примера продемонстрируем результаты поиска глобального минимума корневой функции на множестве допустимых решений $x, y \in [-2; 2]$. При выбранных параметрах гибридного мультиагентного метода интерполяционного поиска на рис. 1 представлена популяция агентов на начальной ($k = 1$), промежуточных ($k = 35, k = 70$) и конечной ($k = 100$) итерациях. Красным цветом обозначено наилучшее решение в популяции на текущей итерации. Результаты работы алгоритма: наилучшее решение $(x^*; y^*) = (0,5; 0,866025)$; значение целевой функции $f(x^*, y^*) = 1$; отклонение от точного решения $\Delta = 0$.

В разделе 1.7 разработанные мультиагентные алгоритмы применены для решения четырех прикладных задач оптимизации параметров технических систем: сварной балки, сосуда высокого давления, редуктора и натяжной пружины. В этих задачах на выбираемые параметры помимо параллелепипедных ограничений наложены ограничения типа неравенств, поэтому решение ищется с помощью метода внешних штрафов путем минимизации величины вспомогательной функции:

$$F(x, c) = f(x) + \sum_{i=1}^m c_i \cdot [\max\{0, g^i(x)\}]^2 \rightarrow \min_{x \in D}, \quad \text{где } g^1(x) \leq 0, \dots, g^m(x) \leq 0 \text{ – ограничения,}$$

c_1, \dots, c_m – коэффициенты штрафной функции.

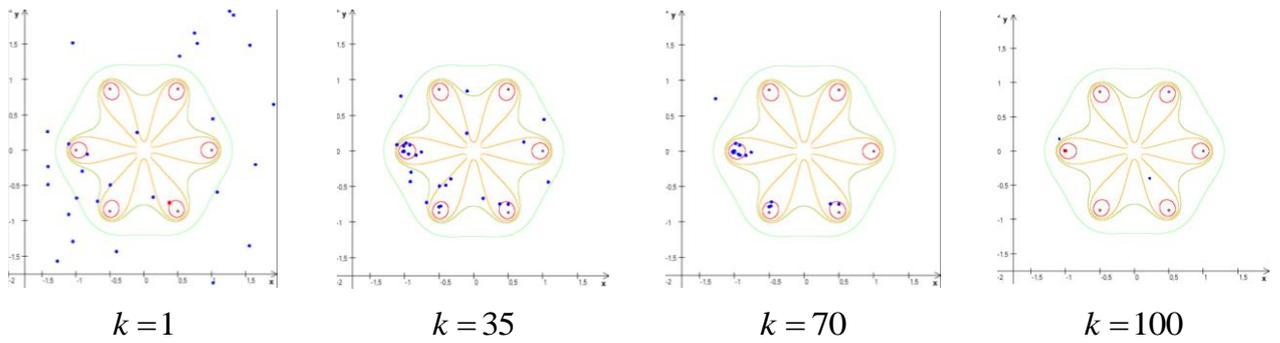


Рис. 1. Начальная, промежуточные и конечная итерации

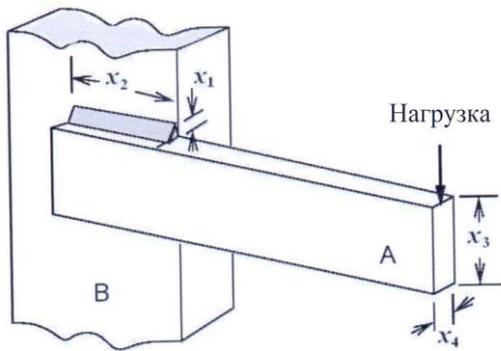


Рис. 2. Сварная балка

Для примера рассмотрим решение задачи, в которой требуется определить параметры (высоту и длину сварного шва, высоту и ширину балки) минимальной по стоимости конструкции сварной балки (рис. 2), исходя из имеющихся семи ограничений по напряжению сдвига, изгиба, продольной нагрузке и отклонению края балки. Задача решена с помощью методов, описанных в разд. 1.3–1.6: $f(x^*) = 1,69$; $x^* = (0,26; 2,67; 8,88; 0,21)^T$. Решение сравнивалось с полученными методами, имитирующими спиральную динамику, поиск группой людей, и методом стохастической диффузии.

Вторая глава посвящена разработке алгоритмов поиска оптимального управления динамическими системами на основе описанных мультиагентных методов оптимизации.

В разделе 2.1 рассмотрены три постановки задач оптимального управления.

1. Оптимальное управление отдельной траекторией детерминированной системы. Поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $x \in R^n, u \in U \subseteq R^q, t \in [t_0, t_f]$, $f(t, x, u)$ – заданная непрерывная вектор-функция ($n \times 1$). Рассмотрены задачи поиска оптимального программного управления $u(t)$, управления $u(t, x^1)$ с неполной обратной связью и управления $u(t, x)$ с полной обратной связью по вектору состояния. В случае программного управления начальное условие задано, в случае поиска управления с полной обратной связью начальное условие произвольное: $x(t_0) = x_0 \in R^n$, а в случае поиска оптимального управления с неполной обратной связью начальное условие задано в виде множества

$$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \mid x^2 = y_0(x^1), x^1 \in R^m \right\}, \quad (3)$$

где вектор-функция $y_0(x^1)$ определяет связь в начальный момент времени t_0 между координатами вектора $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$, информация о которых известна, с координатами вектора $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$, информация о которых не доступна для использования ($0 \leq m \leq n$). На множестве $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ допустимых процессов, т.е. множестве пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, в которых траектория и кусочно-непрерывное управление со значениями

из множества допустимых значений управления U удовлетворяют дифференциальному уравнению (2) и начальному условию, задан функционал качества управления

$$I(d) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_f)). \quad (4)$$

где $f(t, x, u), F(x)$ – заданные непрерывные функции. Требуется найти такую пару $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$, что $I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(d)$.

2. Оптимальное управление пучками траекторий детерминированной системы.

Задана модель объекта управления (2). Рассматривается задача поиска управления $u(t, x^1)$. Начальные условия заданы в виде множества:

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset R^n, \quad (5)$$

где Ω – компактное множество положительной меры с кусочно-гладкой границей. Каждому допустимому управлению $u(t, x^1)$ и множеству Ω ставится в соответствие пучок траекторий уравнения (2):

$$X(t, u(t, x^1)) = \bigcup \{x(t, u(t, x^1(t)), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega\}. \quad (6)$$

Задан функционал $I(x_0, d)$ вида (4), а качество управления пучком траекторий характеризуется

величиной функционала $J[u(t, x^1)] = \int_{\Omega} I(x_0, d) dx_0 / \text{mes } \Omega$ или $J[u(t, x^1)] = \max_{x_0 \in \Omega} I(x_0, d)$.

Требуется найти управление $u^*(t, x^1)$, минимизирующее величину функционала $J[u^*(t, x^1)] = \min_{u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m} J[u(t, x^1)]$, где \mathcal{U}_m – множество допустимых управлений с неполной обратной связью, порождающих для любого начального условия из заданного множества допустимое программное управление. В первом случае искомое управление называется оптимальным в среднем, во втором случае – гарантирующим (минимаксным).

3. Оптимальное управление стохастическими системами. Поведение модели объекта управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито: $dX = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW$, $X(t_0) = X_0$, где $X = (X^1, X^2)^T \in R^n$. О координатах вектора $X^1 \in R^m$ текущая информация известна, а о координатах вектора $X^2 \in R^{n-m}$ отсутствует; вектор-функция $f(t, x, u)$ размеров $(n \times 1)$ и матричная функция $\sigma(t, x, u)$ размеров $(n \times l)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения Ито, $W(t)$ – l -мерный стандартный винеровский случайный процесс; начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности. Задан функционал

качества управления $J[u(t, x^1)] = M \left\{ \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(X(t_f)) \right\}$, где M – знак

математического ожидания. Требуется найти оптимальное в среднем управление $u^*(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$, минимизирующее величину функционала: $J[u^*(t, x^1)] = \min_{u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m} J[u(t, x^1)]$.

Для численного решения задачи предлагается задать структуру искомого закона управления, зависящего от времени и от заданного набора координат вектора состояния, доступных измерению, содержащую набор неизвестных параметров. Таким образом, реализуется переход от поставленных вариационных задач к проблеме конечномерной оптимизации, т.е. проблеме поиска наилучших значений параметров, задающих структуру управления. Поскольку в задачах, рассмотренных в работе, на управление накладываются параллелепипедные ограничения, структура оптимального управления, как следует из необходимых или достаточных условий оптимальности, часто является релейной.

В общем случае закон управления с неполной обратной связью предлагается искать в параметрическом виде, определяемом числом коэффициентов в разложении управления по выбираемой системе базисных функций и их значениями.

В разделе 2.2 описаны способы параметризации закона управления с применением: ортонормированных систем базисных функций; финитных базисных систем функций (кусочно-постоянных, кусочно-линейных, квадратичных, кубических сплайнов); радиально-базисных функций (функция Гаусса, мульти-квадратичная, обратная квадратичная, обратная мульти-квадратичная). Также предлагается использовать псевдоспектральный метод, в котором закон управления аппроксимируется глобальным многочленом, коллокация выполняется в специально выбранных точках (точках коллокации), а в качестве базисных функций применяются полиномы Чебышёва.

При использовании ортонормированных систем базисных функций, предлагается искать закон управления в виде функции насыщения sat , гарантирующей выполнение параллелепипедных ограничений на управление вида $u_j(t) \in [a_j(t), b_j(t)]$, $j = 1, \dots, q$; $t \in T$:

$$u_j(t, x^1) = \text{sat} \{ g_j(t, x_1, \dots, x_m) \}, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$\text{где } \text{sat } v_j(t) = \begin{cases} v_j(t), & a_j(t) \leq v_j(t) \leq b_j(t), \\ a_j(t), & v_j(t) < a_j(t), \\ b_j(t), & v_j(t) > b_j(t), \end{cases} \quad v_j(t) = g_j(t, x_1(t), \dots, x_m(t)),$$

а аргументы функции насыщения $g_j(t, x_1, \dots, x_m)$ искать в виде линейной комбинации

$$\text{базисных функций: } g_j(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_0=0}^{L_0^j-1} \sum_{i_1=0}^{L_1^j-1} \dots \sum_{i_m=0}^{L_m^j-1} c_{i_0 i_1 \dots i_m}^j q(i_0, t) p_1(i_1, x_1) \dots p_m(i_m, x_m),$$

где $c_{i_0 i_1 \dots i_m}^j$ – неизвестные коэффициенты; $L_0^j, L_1^j, \dots, L_m^j$ – масштабы усечения по времени и координатам вектора состояния, используемым в управлении, которые подлежат выбору. В качестве базисных функций $q(i_0, t)$, $p_k(i_k, x_k)$, $k = 1, \dots, m$, можно, например, взять ортонормированную на отрезке $[0; t_f]$ систему косинусоид (остальные системы базисных функций применяются аналогично):

$$q(i_0, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{t_f}}, & i_0 = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{t_f}} \cos \frac{i_0 \pi t}{t_f}, & i_0 = 1, \dots, L_0 - 1, \end{cases} \quad p_k(i_k, x_k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\bar{x}_k - \underline{x}_k}}, & i_k = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\bar{x}_k - \underline{x}_k}} \cos \frac{i_k \pi (x_k - \underline{x}_k)}{\bar{x}_k - \underline{x}_k}, & i_k = 1, \dots, L_k - 1, \end{cases}$$

Предполагается, что $t_0 = 0$ и известна оценка множества возможных состояний, которая представляется прямым произведением $[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n]$, где $\underline{x}_i, \bar{x}_i$ – нижняя и верхняя границы по каждой координате вектора x , определяемые физическим смыслом задачи.

Неизвестные параметры j -й координаты закона управления: матрица-столбец масштабов усечения $L^j = (L_0^j, L_1^j, \dots, L_m^j)^T$ и наилучших значений коэффициентов разложения $c_{i_0, i_1, \dots, i_m}^j$, удобно представить в виде блочной гиперстолбцовой матрицы:

$$C^j = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00\dots 0}^j \\ c_{00\dots 1}^j \\ \vdots \\ c_{00\dots(L_m^j-1)}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{10\dots 0}^j \\ c_{10\dots 1}^j \\ \vdots \\ c_{10\dots(L_m^j-1)}^j \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} c_{(L_0^j-1)0\dots 0}^j \\ c_{(L_0^j-1)0\dots 1}^j \\ \vdots \\ c_{(L_0^j-1)0\dots(L_m^j-1)}^j \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} c_{(L_0^j-1)(L_1^j-1)\dots 0}^j \\ c_{(L_0^j-1)(L_1^j-1)\dots 1}^j \\ \vdots \\ c_{(L_0^j-1)(L_1^j-1)\dots(L_m^j-1)}^j \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T, \quad j=1, \dots, q.$$

Тогда векторы неизвестных, подлежащих поиску, можно записать в форме объединенных матриц-столбцов $L = (L^1, \dots, L^q)^T$, $C = (C^1, \dots, C^q)^T$ с ограничениями на компоненты:

$0 \leq L_i^j \leq L_{\max}$, L_i^j – целые; $j=1, \dots, q$, $i=0, \dots, m$, $i_0 = 0, 1, \dots, L_0^j - 1; \dots; i_m = 0, 1, \dots, L_m^j - 1$; $c_{\min} \leq c_{i_0, i_1, \dots, i_m}^j \leq c_{\max}$, где значения L_{\max} , c_{\min} , c_{\max} задаются исходя из возможных требований к точности решения и ограничений на вычислительные затраты.

Таким образом, осуществляется переход к параметрической целочисленно-непрерывной задаче оптимизации. Для поиска целочисленных переменных используется процедура целочисленного линейного поиска, а для нахождения непрерывных переменных применяются мультиагентные алгоритмы оптимизации, разработанные в главе 1.

В разделах 2.3 – 2.8 для задач из разд. 2.1 описаны пошаговые алгоритмы решения с помощью различных способов параметризации закона управления и мультиагентных методов, а также для частного случая систем описан алгоритм на основе поиска числа и моментов переключения управления. Эффективность предложенных алгоритмов проверялась на трех модельных нелинейных примерах и прикладной задаче о стабилизации спутника. Для задачи поиска оптимального управления пучками траекторий искалось два вида управления: оптимальное в среднем и гарантирующее. Полученные результаты сравнивались с известными, найденными с помощью необходимых условий оптимальности.

В одном из модельных примеров задана система дифференциальных уравнений $\dot{x}_1(t) = \frac{1}{\cos x_1(t) + 2} + 3 \sin x_2(t) + u(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$, где $t \in [0; 1,6]$, $-2 \leq u \leq 1$,

$$\Omega = [0,95; 1,05] \times [-0,05; 0,05], \quad I(x_0, d) = -x_1(1,6) + \frac{1}{2} x_2(1,6), \quad J[u(t, x^1)] = \int_{\Omega} I(x_0, d) dx_0 / \text{mes } \Omega.$$

Решены задачи синтеза оптимального в среднем управления с полной и неполной обратными связями, включая случай программного управления.

В качестве базисных функций использовалась система косинусоид, а для решения параметрической задачи мультиагентный метод, основанный на использовании линейных регуляторов управления движением агентов. Для каждого случая определялось наилучшее количество коэффициентов в разложении L_0, L_1, L_2 и значения коэффициентов. В случае $u(t)$: $J = -2,95377$, в случае $u(t, x_1)$: $J = -2,96564$, в случае $u(t, x_2)$: $J = -2,9702$, в случае $u(t, x_1, x_2)$: $J = -2,97337$. Найденные наилучшие пучок траекторий и порождаемые управления $u(t) = u(t, x_1(t), x_2(t))$ для случая управления с полной обратной связью изображены на рис. 3.

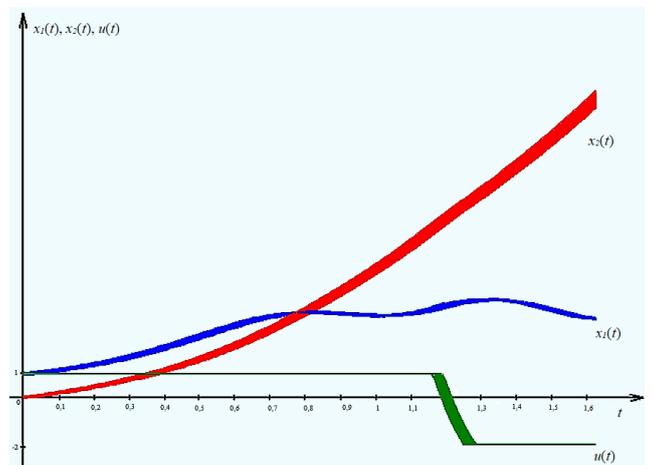


Рис. 3. Графики управлений и траекторий

Получено решение задачи о стабилизации спутника с помощью установленных на нем двигателей. Движение твердого тела относительно центра инерции после перехода к безразмерным переменным, описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}(t) = u_1(t) / 6, \quad \dot{q}(t) = u_2(t) - 0, 2r(t)p(t), \quad \dot{r}(t) = 0, 2[u_3(t) + p(t)q(t)],$$

где p, q, r – проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции, а u_1, u_2, u_3 – управления, которые характеризуют тяги двигателей, расположенных на спутнике; $t \in [0; 1]$. В момент $t_f = 1$ должны выполняться условия: $p(t_f) = q(t_f) = r(t_f) = 0$. Множество допустимых значений управления $U = [-200; 200] \times [-200; 200] \times [-200; 200]$.

Функционал качества управления отдельной траекторией характеризует затраты топлива при работе реактивных двигателей и степень выполнения конечных условий:

$$I(x_0, d) = \int_0^1 [|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|] dt + 10^3 [p^2(1) + q^2(1) + r^2(1)].$$

Найдено оптимальное в среднем программное управление пучком траекторий в условиях неопределенности ($\Omega = [23, 85; 24, 15] \times [15, 85; 16, 15] \times [15, 85; 16, 15]$) с использованием базиса финитных функций (кусочно-постоянный, кусочно-линейный, квадратичный, кубический сплайны) и мультиагентных методов из разд. 1.3, 1.4, наилучшее значение функционала $J = 169, 48431$. На рис. 4 и 5 представлены графики изменения значений координат вектора состояния и оптимального управления для случая использования кубическо-го сплайна и мультиагентного метода из разд. 1.4.

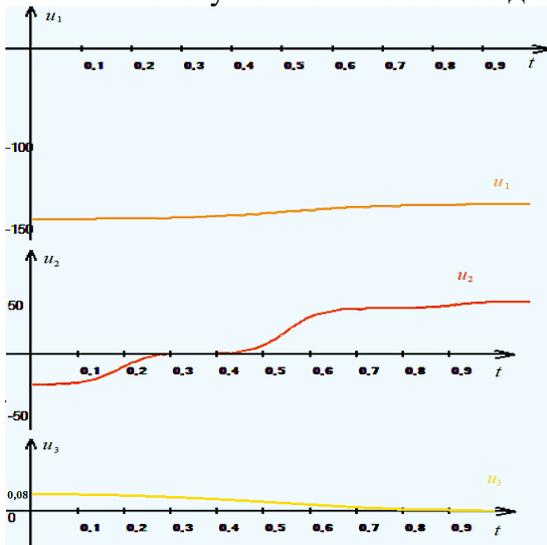


Рис. 4. Графики $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$

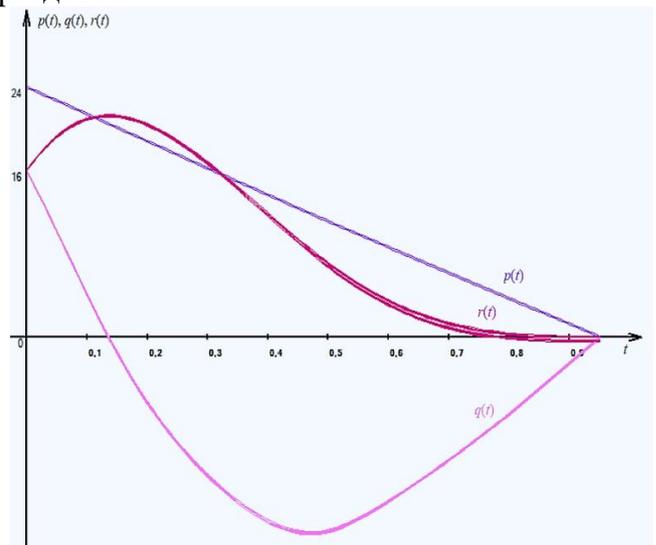


Рис. 5. Графики поведения пучка траекторий

В третьей главе сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности в задаче приближенного синтеза оптимального управления детерминированными системами с неполной обратной связью.

Модель объекта управления задана уравнением (2). Предполагается, что о компонентах вектора $x^1 \in R^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $x^2 \in R^{n-m}$ она отсутствует ($0 \leq m \leq n$), промежуток времени функционирования системы $[t_0, t_f]$ задан, начальные условия имеют вид (3). Обозначим: $B = R^n, B_1 = R^m, B_2 = R^{n-m}$.

Функционал качества управления имеет вид (4). Требуется найти такую функцию $u^*(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$, что

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(d) \quad \forall x_0 \in \Omega, \tag{7}$$

где $d^* = (x^*(t), u^*(t) = u^*(t, x^{1*}(t)))$.

Рассмотрим проблему поиска приближенного решения задачи (7), в которой требуется найти такую функцию $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$, что

$$|I(d^\varepsilon) - I(d^*)| \leq \varepsilon \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad (8)$$

где $d^* = (x^*(t), u^*(t) = \mathbf{u}^*(t, x^{1*}(t)))$, $d^\varepsilon = (x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))$, $I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(d)$, ε – число. Функция $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$ называется ε – оптимальной управляющей функцией на множестве Ω .

Введем в рассмотрение множество функций $\varphi(t, x) \in C^{1,1}(T' \times B)$ и конструкции

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u), \quad G(t_f, x) = \varphi(t_f, x) + F(x).$$

Предположим, что существует множество Φ функций $\varphi(t, x) \in C^{1,1}(T' \times B)$, для которых справедливо: $r(t) = \max_{x^2 \in B_2} \max_{u \in U} R(t, x, u) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1$, $g = \min_{x^2 \in B_2} G(t_f, x) \quad \forall x^1 \in B_1$.

Теорема 1 (достаточные условия ε – оптимальности в задаче (8)). Если существуют такие функция $\varphi(t, x) \in \Phi$, число ε_2 и непрерывная на T функция $\varepsilon_1(t)$, что:

- 1) $|r(t) - R(t, x^1, y^\varepsilon(t, x^1), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1$;
- 2) $|G(t_f, x^1, y^\varepsilon(t_f, x^1)) - g| \leq \varepsilon_2 \quad \forall x^1 \in B_1$,

то управление $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$ является ε – оптимальной управляющей функцией на множестве

Ω при $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$. \square

Здесь функция $y^\varepsilon(t, x^1)$ является решением системы уравнений ($i = 1, \dots, m$; $j = m + 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial y_j^\varepsilon(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j^\varepsilon(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y^\varepsilon(t, x^1), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y^\varepsilon(t, x^1), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)), \quad y_j^\varepsilon(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1).$$

Функция $\varphi(t, x)$ подбирается в форме $\varphi(t, x) = W(t, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot x_j$, где

$W(t, x^1), \psi_j(t, x^1), j = m + 1, \dots, n$, – неизвестные функции, подлежащие определению.

С использованием достаточных условий эpsilon-оптимальности сформирован пошаговый алгоритм, разработано программное обеспечение и решен модельный пример, постановка задачи которого имеет следующий вид. Задана система дифференциальных уравнений $\dot{x}_1(t) = u(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_1(t)$, временной интервал $t \in [0; 2]$, $u \in R$, множество начальных условий $x(t_0) \in \Omega = \{x | x_2 = -\frac{4}{3}x_1, x_1 \in R\}$, функционал (4)

имеет вид $I(x_0, d) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt + \frac{1}{2} [x_1^2(2) + x_2^2(2)]$. Требуется найти ε – оптимальную

управляющую функцию $\mathbf{u}(t, x_1)$ на множестве Ω . Вспомогательную функцию $\varphi(t, x)$ и

закон управления предлагается искать в форме: $\mathbf{u}(t, x_1) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} u_{i_0}^0 q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} u_{i_1}^1 p(i_1, x_1)$,

$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} w_{i_0}^0 q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} w_{i_1}^1 p(i_1, x_1) + \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \psi_{i_0}^0 q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \psi_{i_1}^1 p(i_1, x_1) \cdot x_1$, где $u_{i_0}^0, u_{i_1}^1, w_{i_0}^0, w_{i_1}^1, \psi_{i_0}^0, \psi_{i_1}^1$ –

неизвестные коэффициенты.

В качестве базисных функций $q(i_k, t)$, $p(i_k, x_1)$ использовалась система косинусоид и полиномы Лежандра. Задача решена с использованием гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска. Найдено ε -оптимальное управление с неполной обратной связью $u(t, x_1)$, значение оценки $\varepsilon = 0,874092$. На рис. 6–8 приведены графики порождаемых сигналов управления и траекторий. На рис. 9 изображен график изменения оценки ε с ростом числа итераций. Сравнение точного решения $u(t, x_1) = x_1 / (t - 3)$ с полученным приближенным решением свидетельствует о приемлемой точности достигнутого результата.

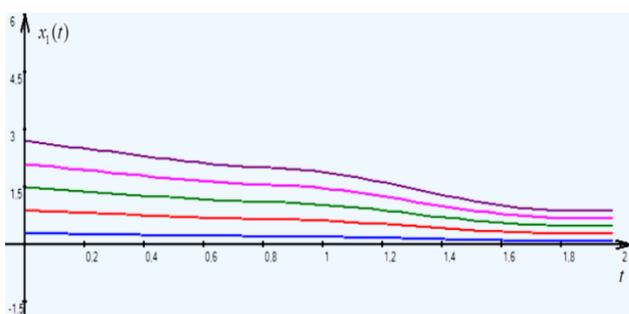


Рис. 6. Графики изменения $x_1(t)$

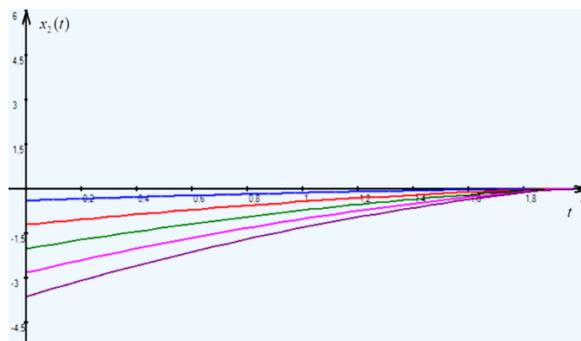


Рис. 7. Графики изменения $x_2(t)$

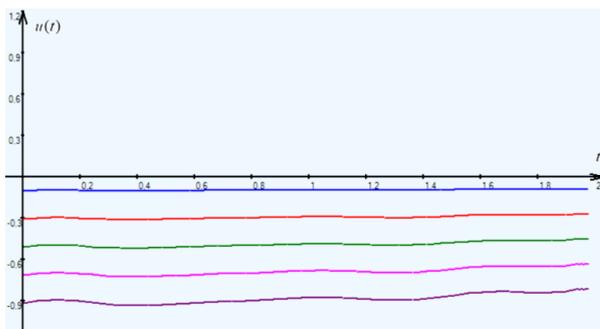


Рис. 8. Графики порождаемого управления $u(t) = u(t, x_1(t))$

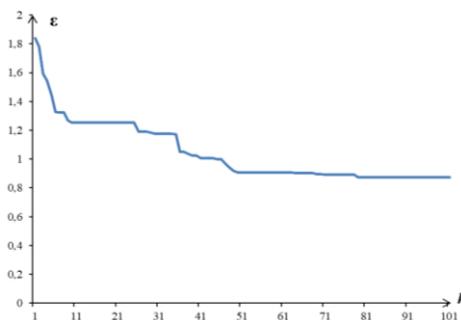


Рис. 9. Изменение величины оценки ε с ростом числа итераций

В четвертой главе сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности в задаче приближенного синтеза оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью. Поведение модели объекта управления описывается уравнением (2), начальные условия заданы в виде (5). Предполагается, что управление $u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$, применяемое в каждый момент времени $t \in T$, имеет вид управления с неполной обратной связью $u(t) = u(t, x^1(t)) \in U$, которое кусочно-непрерывно, а функция $f(t, x, u(t, x^1))$ такова, что решение уравнения (2) с начальным условием (5) существует и единственно. Каждому допустимому управлению $u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$ и множеству Ω ставится в соответствие пучок (ансамбль) траекторий (6) уравнения (2). Для описания начальных условий предлагается использовать гладкие финитные функции $p_0(x) \in C^1(B)$, удовлетворяющие условиям $p_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, p_0(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega$. Описанный класс функций обозначим P . Функция $p_0(x)$ отражает наличие априорной информации о распределении начальных состояний на множестве Ω .

В качестве характеристики текущего положения пучка траекторий можно использовать функцию $p(t, x) \in C^{1,1}$, удовлетворяющую уравнению Лиувилля (уравнению переноса)

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t, x, \mathbf{u}(t, x^1)) p(t, x) \right] = A^{u^{(\cdot)}} [p(t, x)], \quad \forall (t, x) \in Q \quad (9)$$

с начальным условием

$$p(t_0, x) = p_0(x) \quad \forall x \in B, \quad (10)$$

где $A^{u^{(\cdot)}}[\cdot]$ – дифференциальный оператор. В каждый момент времени t носитель функции $p(t, x)$ описывает положение сечения $\Omega_{t,u}$ пучка в пространстве, а величина функции – плотность следов траекторий, т.е. $p(t, x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega_{t,u}$.

Обозначим через $\mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$ множество пар $d_m = (p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1))$, где функции $p(t, x) \in C^{1,1}(Q)$, $\mathbf{u}(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$ и удовлетворяют уравнению (9) с начальным условием (10).

Определим на множестве $\mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$ функционал качества управления

$$J(d_m) = \int_{t_0}^{t_f} \int_B f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) dx dt + F(p(t_f, x)), \quad (11)$$

где $f^0(t, p, u) : T \times R_+ \times U \rightarrow R$, $F(p(x)) : P \rightarrow R$ – заданные непрерывные функция и функционал, $R_+ = [0, \infty)$, $p(x) = p(t, x)$ при фиксированном t .

Далее рассматриваются две задачи. В первой задаче функция $p_0(x)$ считается заданной, а во второй решение ищется сразу для всех допустимых функций $p_0(x) \in P$.

Задача 1. Требуется найти такую пару $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$, что $J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m)$.

Задача 2. Требуется найти такой закон управления $\mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))$, что

$$J(p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m) \quad \forall p_0(x) \in P.$$

Таким образом, проведена редукция исходной задачи управления пучком траекторий к задаче управления решением уравнения с частными производными (9). Роль новой модели объекта управления играет уравнение (9), а состояние описывается функцией $p(t, x)$. В главе 4 рассмотрены проблемы поиска приближенного решения задач 1 и 2.

Задача 3. Требуется найти такую пару $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$, что

$$|J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*)| \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – число, $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$, $J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m)$. Управление $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$ называется ε – оптимальным.

Задача 4. Требуется найти такой закон управления $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$, что

$$|J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*)| \leq \varepsilon \quad \forall p_0(x) \in P, \quad (13)$$

где $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) = \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p^\varepsilon(t, x))) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$, ε – число, $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1) = \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$. Функция $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$ называется ε – оптимальным законом управления на множестве P .

Рассмотрим решение задачи 3.

Пусть имеется пара $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m(t_0, p_0(x))$.

Теорема 2 (достаточные условия ε – оптимальности в задаче (12)). Если существуют такая функция $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$, число ε_2 , непрерывная на T функция $\varepsilon_1(t)$, что:

$$1. \left| r_m(t) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \right| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall t \in T;$$

$$2. \left| G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - g \right| \leq \varepsilon_2,$$

то управление $u^\varepsilon(t, x^1)$ является ε -оптимальным при $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$. \square

Рассмотрим решение задачи 4.

Теорема 3 (достаточные условия ε -оптимальности в задаче (13)). Если существуют такая функция $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$, число ε_2 , непрерывная на T функция $\varepsilon_1(t)$, что:

$$1. \left| r_m(t) - \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} - \int_{B_1} \left[\max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 \right| \leq \varepsilon_1(t)$$

$\forall (t \times p(x)) \in T \times P$;

$$2. \left| G(t_f, p(x)) - g \right| \leq \varepsilon_2, \quad \forall p(x) \in P,$$

то функция $u^\varepsilon(t, x^1; p(x))$, обеспечивающая максимум в условии 1, является ε -оптимальным законом управления на множестве P при $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$. \square

В теоремах 2 и 3 используются конструкции

$$R(t, p(x), u) = \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_B \left\{ A_*^u \left[\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx,$$

$$r_m(t) = \max_{p(x) \in P} \left\{ \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} \left[\max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 \right\},$$

$$G(t_f, p(x)) = S(t_f, p(x)) + F(p(x)), \quad g = \min_{p(x) \in P} G(t_f, p(x)).$$

Здесь Π – множество функций $S(t, p(\cdot)): T \times C^1(B) \rightarrow R$, которые являются функциями аргумента t и функционалами от функции $p(\cdot)$, $\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)}$ – вариационная производная

функционала $S(t, p(\cdot))$ по функции $p(\cdot)$ в точке x , $A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u)$ –

сопряженный дифференциальный оператор.

В работе подробно рассмотрен частный случай функционала (11), когда

$$f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) = f^0(t, x, u(t, x^1))p(t, x), \quad F(p(t_f, x)) = \int_B F(x)p(t_f, x)dx.$$

На основе предложенного подхода сформирован пошаговый алгоритм поиска приближенного оптимального управления с использованием достаточных условий и мультиагентных алгоритмов параметрической оптимизации. Разработано программное обеспечение, с помощью которого выполнен анализ эффективности предложенного подхода.

Решен модельный пример, в котором задана система дифференциальных уравнений $\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin x_1(t) + u(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_1(t) \cos x_2(t)u(t)$, временной интервал $t \in [0; 1]$, ограничения на управление $-1 \leq u \leq 1$. Множество начальных состояний

$\Omega = [-0,05; 0,05] \times [-0,05; 0,05]$. Функционалы $I(x_0, d) = x_2(1)$, $J[u(t, x^1)] = \int_{\Omega} I(x_0, d)p_0(x_0)dx_0$.

Требуется найти оптимальное в среднем программное управление $u(t)$ пучком траекторий. Найдена величина априорной оценки близости полученного управления к опти-

мальному: $\varepsilon = 2,08885$. Наилучшие пучок траекторий и управление изображены на рис. 10, а на рис. 11 приведен график изменения величины оценки с ростом числа итераций.

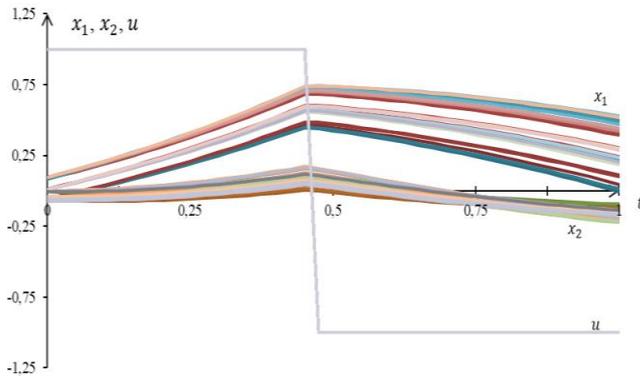


Рис. 10. Графики пучка траекторий и управления.

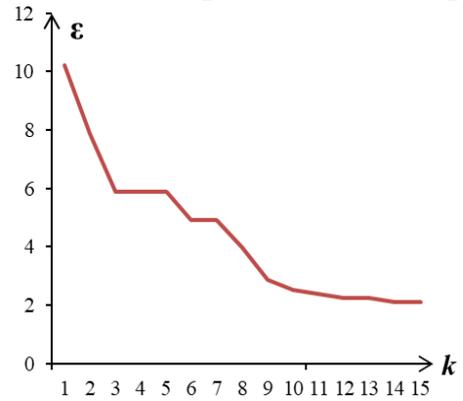


Рис. 11. График изменения величины оценки ε с ростом числа итераций.

В пятой главе описано разработанное программное обеспечение для решения задач поиска глобального экстремума функций многих переменных и поиска оптимального управления непрерывными динамическими системами. Для его создания использовалась среда разработки Microsoft Visual Studio, язык программирования C#. Общая схема программного обеспечения приведена на рис. 12. Оно содержит модуль «Интерфейс», модуль «Мультиагентные алгоритмы», модуль «Базисные системы», а также четыре модуля с решаемыми задачами оптимального управления.



Рис. 12. Общая схема программного обеспечения

Основные результаты работы, выносимые на защиту

Основным итогом диссертационной работы является разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения мультиагентных алгоритмов условной оптимизации динамических систем управления, которая выражается в следующих результатах:

1. Разработаны гибридный мультиагентный метод интерполяционного поиска, мультиагентный метод, использующий линейные регуляторы для управления движением агентов, мультиагентный метод, использующий ПИД-регуляторы для управления движением агентов, последовательно-параллельный гибридный мультиагентный метод, основанный на алгоритмах, имитирующих империалистическую конкуренцию, поведение стаи рыб и криля. [10–13]

2. Исследована эффективность разработанных мультиагентных методов на стандартном наборе тестовых функций со сложной структурой линий уровня, а также сформированы рекомендации по подбору параметров. Решены прикладные задачи оптимизации параметров технических систем: сварной балки, сосуда высокого давления, редуктора и натяжной пружины. [1, 10–13]

3. Разработаны пошаговые алгоритмы поиска оптимального программного управления, управления с неполной обратной связью и управления с полной обратной связью по вектору состояния для детерминированных и стохастических систем, а также соответствующее программное обеспечение. Исследована эффективность предложенных алгоритмов поиска управления на модельных примерах и прикладной задаче о стабилизации спутника. [2–4, 7, 8]

4. Сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности в задаче приближенного синтеза оптимального управления детерминированными системами с неполной обратной связью. Получены априорные оценки близости приближенных решений к точным. Разработаны пошаговые алгоритмы нахождения эpsilon-оптимальных законов управления и соответствующее программное обеспечение. Продемонстрирована эффективность предложенных подходов при решении модельного примера. [5]

5. Сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности в задаче приближенного синтеза оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью. Получены априорные оценки близости приближенных решений к точным. Разработаны пошаговые алгоритмы нахождения эpsilon-оптимальных законов управления и соответствующее программное обеспечение. Продемонстрирована эффективность предложенных подходов при решении модельных примеров. [6]

6. На основе сформированных пошаговых методов оптимизации и алгоритмов поиска оптимального управления разработано программное обеспечение мультиагентных методов оптимизации динамических систем. [32, 33]

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ

1. Пантелеев А.В., Каранэ М.С. Анализ эффективности мультиагентных методов оптимизации элементов конструкций летательных аппаратов// Научный вестник МГТУ ГА. 2019. Т. 22. №2. С. 96–108.
2. Пантелеев А.В., Каранэ М.С. Параметрический синтез оптимального программного управления на основе спектрального метода и мультиагентных алгоритмов оптимизации.// Известия Института инженерной физики, 2020. №3(57). С. 74–78.
3. Пантелеев А.В., Каранэ М. С. Применение гибридного мультиагентного метода интерполяционного поиска в задаче о стабилизации спутника // Труды МАИ. 2021. № 117. DOI: 10.34759/trd-2021-117-10.
4. Каранэ М.С. Псевдоспектральный метод поиска оптимального управления пучками траекторий на базе мультиагентных алгоритмов оптимизации // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 99–122. DOI: 10.17759/mda.2023130206.

5. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Приближенный синтез оптимальных детерминированных систем управления с неполной обратной связью на основе достаточных условий ϵ -оптимальности // Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14, № 1. С. 135–154. DOI: 10.17759/mda.2024140109.

6. Пантелеев А.В., Каранэ М.С. Приближенный синтез оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью // Труды МАИ. 2024. № 136.

Публикации в изданиях, входящих в МСЦ Scopus и (или) Web of Science

7. Каранэ М.М.С., Пантелеев А.В., Мультиагентные алгоритмы оптимизации пучков траекторий детерминированных систем с неполной мгновенной обратной связью // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2022. № 5. С. 50–75. DOI 10.31857/S0002338822050080; Karane M.M.S., Panteleev A.V. Multiagent Algorithms for Optimizing Bundles of Trajectories of Deterministic Systems with Incomplete Instant Feedback// J. Comput. Syst. Sci. Int. 61, 751–775 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1064230722050082>. (WoS, Scopus)

8. Panteleev A., Karane M. Application of a Novel Multi-Agent Optimization Algorithm Based on PID Controllers in Stochastic Control Problems. Mathematics. 2023. Vol. 11, 2903. <https://doi.org/10.3390/math11132903>. (WoS, Scopus)

9. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Multi-agent Optimization Algorithms for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // Proceedings of the 21st International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems, chap. 20, pp. 271; https://doi.org/10.1007/978-981-15-2600-8_20. (Scopus)

10. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Hybrid multi-agent optimization method of interpolation search // AIP Conference Proceedings 2181, 020028 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5135688>. (WoS, Scopus)

11. Panteleev A.V., Karane M.S. Benchmark analysis of novel multi-agent optimization algorithm using linear regulators for agents motion control // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 927 (2020) 012023 doi:10.1088/1757-899X/927/1/012023. (Scopus)

12. Panteleev A.V., Karane M.S. Application of multi-agent optimization methods based on the use of linear regulators and interpolation search for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications, chap. 16, 2021. doi.org/10.1007/978-981-33-4826-4_16. (Scopus)

13. Karane M.M.S. Comparative Analysis of Multi-Agent Methods for Constrained Global Optimization // 2018 IV International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino), Moscow, 2018, P. 1–6. doi: 10.1109/INFORINO.2018.8581711. (Scopus)

14. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Multi-Agent Optimization Algorithms for Optimal Control of Trajectory Pencils // Proceedings - 2021 17th International Asian School-Seminar "Optimization Problems of Complex Systems", OPCS, Moscow, 13–17 September 2021. P. 73–77. DOI 10.1109/OPCS53376.2021.9588739. (Scopus)

Публикации по теме диссертации в других изданиях

15. Каранэ М.М.С. Программное обеспечение метода, имитирующего поведение стаи рыб // Гагаринские чтения – 2017: сб. тезисов. – Москва, 2017. С. 60–61.

16. Каранэ М.М.С. Программное обеспечение метода, имитирующего поведение стаи криля // Гагаринские чтения – 2018: сб. тезисов. Том 2. Москва, 2018. С. 333–334.

17. Каранэ М.М.С. Гибридный мультиагентный алгоритм условной глобальной оптимизации // Материалы XII международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, Алушта, Крым, 24–31 мая, 2018. С. 601–603.

18. Каранэ М.М.С. Метод, имитирующий поведение стаи рыб // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск № 23, 2018. С. 36–44.

19. Каранэ М.М.С. Приложение комплекса программ мультиагентных методов в задачах конструирования технических систем // 17-я международная конференция «Авиация и космонавтика»: сб. тезисов. – Москва, 20–23 ноября, 2018. С. 445–446.
20. Каранэ М.М.С. Анализ эффективности мультиагентных методов условной глобальной оптимизации // Материалы первой Общероссийской научно-практической конференции «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России», Москва, 2018. С. 109–114.
21. Каранэ М.М.С. Применение мультиагентных алгоритмов для поиска оптимального программного управления детерминированными системами // Гагаринские чтения – 2019: сб. тезисов. – Москва, 2019. С. 702.
22. Каранэ М.М.С. Мультиагентные методы в задачах поиска оптимального программного управления детерминированными системами // Материалы XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, Крым, 24–31 мая, 2019. С. 680–682.
23. Пантелеев А.В., Каранэ М.С. Мультиагентный алгоритм поиска оптимального программного управления одним классом детерминированных систем // Моделирование и анализ данных. 2019. № 3. С. 58–64.
24. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Применение мультиагентных алгоритмов и разложений по системам базисных функций в задачах поиска оптимального программного управления одним классом нелинейных систем // 18-я международная конференция «Авиация и космонавтика»: сб. тезисов. – Москва, 18–22 ноября, 2019. С. 202.
25. Каранэ М.М.С. Применение мультиагентного алгоритма оптимизации, основанного на использовании линейных регуляторов управления движением агентов, к задачам оптимизации параметров технических систем // Гагаринские чтения – 2020: сб. тезисов. – Москва, 2020. С. 852–853.
26. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Мультиагентный алгоритм оптимизации на основе применения линейных регуляторов управления движением агентов // Материалы XIII международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, Алушта, Крым, 24–31 мая, 2020. С. 689–691.
27. Каранэ М.М.С. Применение мультиагентного алгоритма оптимизации, основанного на использовании линейных регуляторов управления движением агентов, к задачам оптимизации параметров технических систем // V Всероссийский молодежный научный форум «Наука будущего – наука молодых»: сб. тезисов. – Москва, 2020. С. 12.
28. Каранэ М.М.С. Спектральный мультиагентный метод параметрической оптимизации законов управления стабилизацией спутника // Гагаринские чтения – 2021: сб. тезисов. – Москва, 2021. С. 762–763.
29. Каранэ М.С. Мультиагентные алгоритмы в задачах поиска оптимального управления пучками траекторий // Авиация и космонавтика: Тезисы 21ой международной конференции, Москва, 21–25 ноября 2022 года. С. 394–396.
30. Каранэ М.С. Мультиагентный алгоритм поиска оптимального управления на основе радиально-базисных функций // Авиация и космонавтика: Тезисы 22-ой Международной конференции, Москва, 20–24 ноября 2023 года. С. 255–256.
31. Пантелеев А.В., Каранэ М.С. Мультиагентный алгоритм поиска оптимального программного управления на основе радиально-базисных функций // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. Тезисы, Москва 17–20 июня 2024 года. С. 403–407.

Программы для ЭВМ

32. Каранэ М.М.С. Программный комплекс мультиагентных алгоритмов условной оптимизации // Федеральная служба по интелект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ №RU 2021662276, 26.07.2021.
33. Каранэ М.М.С. Программный комплекс мультиагентных алгоритмов оптимизации пучков траекторий детерминированных систем // Федеральная служба по интелект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ №2023617644, 12.04.2023.