

На правах рукописи



ПАНЁВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

**Исследование движения тела по
горизонтальной плоскости под влиянием
перемещения внутренней массы**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: **Бардин Борис Сабирович**
доктор физико-математических наук,
доцент.

Официальные оппоненты: **Болотник Николай Николаевич**
доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, главный научный сотрудник.

Кулешов Александр Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО "Московский физико-технический институт (государственный университет)".

Защита состоится 21.12.2018 в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института

https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=98257

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н, доцент



Гудаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Последние десятилетия характеризуются бурным развитием робототехнических систем. Одним из актуальных направлений в этой области является разработка и создание мобильных роботов, которые могут использоваться для решения широкого круга задач. В частности, для освоения космического пространства требуется создание автономных мобильных устройств, которые могут работать в ближнем и дальнем космосе. Развитие медицины достигло такого уровня, на котором возможно применение мобильных роботов как в диагностике, так и при лечении. Перспективным представляется использование роботов в агрессивных средах, в ближайшем будущем мобильные роботы также могут иметь решающее значение для изучения и освоения подводного мира. Таким образом, перед робототехникой ставятся новые амбициозные задачи, для решения которых необходимо проведение теоретических исследований в данной области: построения адекватных математических моделей роботов, их численный и аналитический анализ, поиск оптимального управления движением мобильных устройств, и др.

Среди большого числа робототехнических устройств, можно выделить класс устройств, движение которых осуществляется без участия внешних движителей (колес, гусениц, ног, и т.д.). Такие устройства имеют значительные преимущества перед мобильными системами других типов. Они просты в конструировании, не требуется создания механизмов для передачи движения от приводов к движителям и могут быть выполнены в форме запаянных капсул. Это делает их устойчивыми к внешним воздействиям, поэтому вибрационные роботы могут оказаться весьма перспективными для работы в агрессивных средах как на твердых поверхностях, так и в жидкостях. В частности, они могут использоваться для исследования космических тел и ремонта труднодоступных для человека участков космических аппаратов. Кроме того, благодаря простоте конструкции, данный тип мобильных устройств легко поддается масштабированию, в частности, в сторону уменьшения размеров, что делает перспективным их использование в медицине для проведения диагностических обследований внутри тела человека и доставки медикамента точно к пораженному участку. Применение мобильных роботов будет несомненно перспективным для ремонта и профилактики инженерных систем, например инспекции технического состояния тонких труб.

Движение робота без внешних движителей может осуществляться благодаря перемещению внутренних элементов под действием сил трения, возникающих при взаимодействии между системой и опорной плоскостью. В последние два десятилетия исследованию данных систем посвящено множество работ видных отечественных и зарубежных ученых. Строгое теоретическое исследование задач динамики и оптимального управления движением механических систем, состоящих из корпуса (несущего тела) и внутренних подвижных масс, было начато в работах Черноусько Ф.Л., Болотника Н.Н.,

Vartholomeos P. и Papadopoulos E. Цикл работ Иванова А.П. и Сахарова А.В. посвящен анализу двумерного движения. Исследование безударных прыжков тела, несущего две подвижные массы, выполнено Бардиным Б.С. Задача поиска оптимального управления в случае кругового относительного движения внутренней массы рассматривалась в работах Голицыной М.В. и Самсонова В.А. Прикладным задачам динамики, математического моделирования движения, а также вопросам конструирования мобильных роботов, способных передвигаться по поверхности благодаря перемещению внутренних масс посвящены работы Яцуна С.Ф.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является полное качественное исследование динамики механической системы, состоящей из твердого тела (корпуса) и материальной точки (внутренней массы), движущейся внутри него по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела, причем угловая скорость радиуса-вектора точки, задающего ее относительное движение, постоянна. Предполагается, что тело находится на плоской горизонтальной поверхности, сила трения между корпусом и поверхностью описывается комбинированной моделью сухого (кулонова) и вязкого трения.

Методы исследования. Для достижения цели работы в диссертации применялись современные методы теоретической механики и теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Достоверность результатов. Достоверность представленных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, хорошим согласованием результатов диссертации с выводами о движении исследуемой системы, полученными ранее другими авторами для некоторых частных случаев данной задачи. Достоверность результатов диссертации подтверждается также тем, что выводы, полученные аналитически, полностью согласуются с результатами численного анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты.

- Для всех допустимых значений параметров исследуемой механической системы показано существование и единственность движения корпуса с периодически меняющейся скоростью.
- Проведена полная качественная классификация возможных периодических режимов движения. Показано, что возможны как периодические движения корпуса с остановками и залипанием (конечными интервалами покоя), так и движения корпуса без залипания.
- Доказано, что при любой начальной скорости корпус выйдет на периодический режим движения. В зависимости от значений параметров задачи выход на периодический режим движения возможен либо за ко-

нечный промежуток времени, либо будет носить асимптотический характер.

- Для всех возможных значений параметров дана полная качественная характеристика поведения интегральных кривых уравнения движения корпуса. Получены аналитические выражения, определяющие в пространстве решений уравнения движения интегральные кривые, разделяющие области с различным характером движения корпуса.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Показано, что при любых значениях параметров задачи существует единственный режим движения с периодически меняющейся скоростью. В зависимости от значений параметров задачи может реализовываться один из трех следующих периодических режимов.

- За период полного оборота внутренней массы по окружности, корпус дважды останавливается, покоится в течение конечного интервала времени (залипает), а затем начинает движение в противоположном направлении. При таком движении его координата и скорость меняются периодически, т.е. перемещение корпуса за полный оборот внутренней массы по окружности равно нулю.
- За период полного оборота внутренней массы по окружности, корпус дважды останавливается и меняет направление движения, но залипание корпуса имеет место только на одном временном интервале. Скорость корпуса меняется периодически, причем за один период корпус перемещается в положительном направлении.
- За период полного оборота внутренней массы по окружности, корпус дважды останавливается и сразу начинает движение в противоположном направлении. В этом случае корпус движется без залипания, перемещаясь за один период в положительном направлении.

Пространство параметров разделяется на три области (I, II, III) в каждой из которых реализуется один из указанных выше периодических режимов движения.

2. Установлено, что движение корпуса с периодически меняющейся скоростью является предельным режимом движения. Выход на периодический режим движения в областях I, II, III имеет различный характер.

- В области I при произвольных значениях начальной скорости корпуса его движение выйдет на периодический режим в течение конечного промежутка времени. Получены границы диапазона начальных скоростей, для которых выход на периодический режим движения осуществляется за один оборот точки по окружности.

- В области II при произвольных значениях начальной скорости корпуса его движение, также выйдет на периодический режим в течение конечного промежутка времени. Однако при приближении значений параметров к границе, разделяющей области II и III, время выхода на периодический режим неограниченно возрастает.
- В области III при произвольных значениях начальной скорости корпуса его движение асимптотически приближается к периодическому режиму без остановок в зонах замедления.

3. Дано полное качественное описание движения корпуса. В частности, для каждой из областей I, II, III построено пространство решений уравнения движения и получены явные аналитические выражения для границ диапазонов начальных скоростей, в которых движение корпуса имеет качественно различный характер.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты проведенного исследования представляют общетеоретический интерес, а также могут иметь прикладное значение для создания мобильных робототехнических систем, движущихся посредством перемещения внутренних масс. Они могут быть использованы на этапе проектирования и конструирования современных мобильных роботов.

Апробация результатов.

- на научных семинарах кафедры мехатроники и теоретической механики Московского авиационного института,
- на 13-й международной конференции "Авиация и космонавтика" (МАИ, 2014, Москва),
- на 50-ой всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2014, Москва),
- на международной конференции по математической теории управления и механике, (Суздаль, 2015),
- на международной конференции "Vibroengineering-2016 / Special Topic: Dynamics of Strong Nonlinear Systems" (ИМАШ РАН, 2016, Москва),
- на международной конференции по математической теории управления и механике, (Суздаль, 2017),
- на международной научной конференции по механике "VIII Поляховские чтения" (СПбГУ, 2018, Санкт-Петербург),
- в Московском государственном университете им М.В. Ломоносова на семинаре им. В.В. Белецкого по динамике относительного движения

- в Институте проблем механики им А.Ю. Ишлинского на семинаре по теории управления и динамике систем под руководством академика РАН Черноусько Ф.Л.

Публикации. Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 9 научных работах, из них 5 статей [1–5] в журналах, входящих в перечень ВАК, и 4 публикации [6–9] в различных сборниках и материалах конференций.

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 13 иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 112 страниц. Библиография включает 98 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и задачи работы, приведен обзор исследований по динамике и управлению движением механических систем, содержащих подвижные внутренние элементы, и дано краткое изложение содержания работы по главам.

В первой главе формулируется постановка задачи, выписаны уравнения движения и выполнен анализ динамики системы в случае нулевой начальной скорости.

Исследуемая механическая система, состоит из твердого тела массой M , находящегося на горизонтальной шероховатой плоскости, и внутренней массы – материальной точки массой m , движущейся внутри тела по окружности радиуса R , центр которой совпадает с центром масс корпуса. Во все время движения внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, а угловая скорость ω радиуса-вектора точки, задающего ее относительное движение, постоянна. Для определенности полагаем, что движение внутренней массы по окружности происходит против часовой стрелки. Движение системы рассматривается в вертикальной плоскости, в которой введена абсолютная система координат Oxy (см. рис 1); X, Y – координаты центра масс O_1 корпуса в этой системе. Между корпусом и плоскостью опоры действуют силы сухого (кулонова) и вязкого трения, k – коэффициент сухого трения, ν – коэффициент вязкого трения.

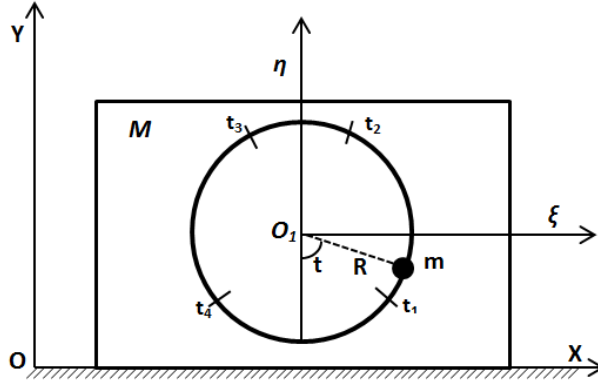


Рис. 1. Механическая система

Уравнение движения корпуса имеет вид

$$\dot{u} = \sin t + f_c - \alpha u, \quad (1)$$

где $u = \dot{x}$ – безразмерная скорость корпуса, а функция f_c задается следующим образом

$$f_c = \begin{cases} -k(\mu + \cos t)\text{sign } u, & \text{если } u \neq 0; \\ -\sin t, & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| \leq k(\mu + \cos t); \\ -k(\mu + \cos t)\text{sign}(\sin t), & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| > k(\mu + \cos t). \end{cases} \quad (2)$$

Дифференцирование в (1) выполняется по безразмерному времени t , роль которого играет угловая координата, определяющая положение внутренней массы относительно корпуса (см. рис 1). Безразмерная координата x и безразмерные параметры μ , α введены по формулам

$$x = \frac{(M + m)X}{Rm}, \quad \mu = \frac{(M + m)g}{Rm\omega^2}, \quad \alpha = \frac{\nu}{(M + m)\omega}. \quad (3)$$

Рассматривается поступательное движение корпуса по горизонтальной плоскости. Предполагается, что параметры системы удовлетворяют следующим неравенствам

$$k^2 < \frac{1}{\mu^2 - 1}, \quad \mu > 1. \quad (4)$$

Первое неравенство гарантирует, что корпус может начать движение из состояния покоя, а второе - означает, что он будет двигаться без отрыва от горизонтальной плоскости. Для исследования динамики системы важную роль играет характер движения корпуса на промежутках времени, когда ускорение тела противоположно направлению скорости или равно нулю. Границы указанных интервалов находятся из уравнения $\sin t = \pm k(\mu + \cos t)$ и могут

быть вычислены по следующим формулам

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right); \\
 t_2 &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right); \\
 t_3 &= 2\pi - t_2; \quad t_4 = 2\pi - t_1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

На интервале времени (t_2, t_3) внутренняя масса находится в верхней части траектории движения, а на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$ – в её нижней части (см. рис 1). Указанные интервалы будем называть соответственно верхней и нижней зонами замедления. Если корпус остановится в момент прохождения внутренней массой зоны замедления, то он будет оставаться в покое до тех пор, пока масса не покинет зону замедления. Такое явление называют залипанием корпуса.

В главе 1 предполагается, что в момент времени t_1 корпус имеет нулевую скорость и начинает движение в положительном направлении оси OX . Показано, что возможны три качественно различных типа движения корпуса, которым в пространстве параметров задачи соответствуют три области I, II, III. В случае отсутствия в системе сил вязкого трения $\alpha = 0$, эти области представлены на рис. 2. Верхняя граница области I является также и границей области, в которой корпус может начать движение из состояния покоя. Она задается уравнением $k^2(\mu^2 - 1) = 1$.

В диссертации были получены уравнения границ, разделяющих области I, II и области II, III, которые имеют соответственно следующий вид

$$-\operatorname{arcctg}k + \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + \mu k^2}{\mu k(k^2 + 1)} = 0 \tag{6}$$

и

$$\cos t_1 + \cos \left[t_1 + \frac{\sin t_1 + \sqrt{1 - (\cos t_1 - \pi k \mu)^2}}{\mu} \right] = \pi k \mu. \tag{7}$$

Было показано, что если параметры задачи k и μ лежат в области I, то, начав движение в момент времени t_1 в положительном направлении оси OX , корпус остановится в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I \in (t_2, t_3)$ и будет находиться в покое на интервале времени от $t_1 + \Delta t_*^I$ до t_3 , а затем начнет движение в противоположном (отрицательном) направлении до остановки при $t = t_3 + \Delta t_*^I \in (t_4, t_1 + 2\pi)$, после чего он будет находиться в покое пока внутренняя масса не покинет нижней зоны замедления, т.е. до момента времени $t_1 + 2\pi$. Движение корпуса в положительном и отрицательном направлениях

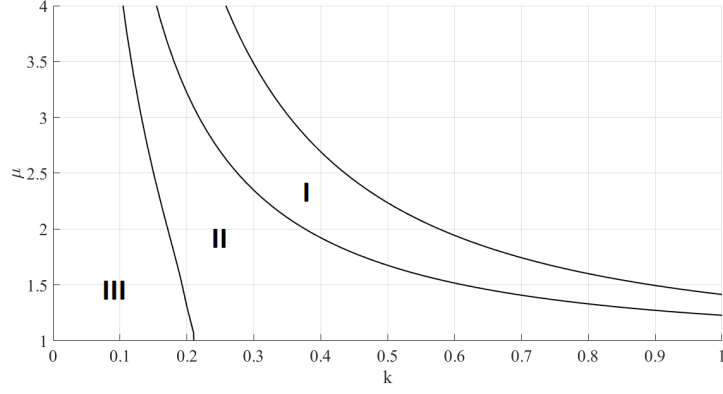


Рис. 2. Области возможных режимов движения

происходит в течении равных промежутков времени. Более того, установлено, что для $\tau > 0$ будет иметь место равенство

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau), \quad (8)$$

интегрируя обе части которого на интервале от 0 до Δt_*^I приходим к тождеству

$$x(t_1 + \Delta t_*^I) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t_*^I) + x(t_3). \quad (9)$$

Таким образом, и скорость, и координата корпуса являются периодическими функциями безразмерного времени, а перемещение корпуса за время полного оборота внутренней массы по окружности равно нулю.

Величина Δt_*^I определяется из уравнения

$$(\cos t_1 + k \sin t_1)(1 - \cos \Delta t_*^I) + k\mu(\sin \Delta t_*^I - \Delta t_*^I) = 0. \quad (10)$$

В диссертационной работе показано, что если значения параметров задачи принадлежат области II (см. рис. 2), то начав движение в момент времени t_1 в положительном направлении, корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II}$ и сразу начнет движение в отрицательном направлении. Двигаясь в отрицательном направлении, корпус остановится в нижней зоне замедления в момент времени $t_3 + \Delta t_{**}^{II} < t_1 + 2\pi$, после чего он будет оставаться в покое пока внутренняя масса не покинет нижней зоны замедления, т.е. до момента времени $t_1 + 2\pi$. Выражение, задающее перемещение корпуса за один оборот точки по окружности, имеет вид

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_{**}^{II}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + u(t_1 + \Delta t_*^{II})(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II}) \quad (11)$$

На интервалах $[t_1, t_1 + \Delta t_*^{II}]$ и $[t_1 + \Delta t_{**}^{II}, t_3 + \Delta t_*^{II}]$ скорость $u(t)$ положительна, поэтому интегралы в правой части (11) положительны. Положительным, очевидно, будет и последнее слагаемое в (11), следовательно перемещение корпуса за один оборот внутренней массы по окружности отлично от нуля.

В главе 1 показано, что если значения параметров задачи принадлежат области III (см. рис. 2), то начав движение в момент времени t_1 в положительном направлении корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{III}$, и сразу начнет движение в отрицательном направлении. Далее, двигаясь в отрицательном направлении, корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_{**}^{III} > t_1 + 2\pi$, после чего сразу начнет движение в положительном направлении. Таким образом, при $t_1 + 2\pi$ скорость будет отлична от нуля (отрицательна), поэтому движение корпуса не будет периодическим. Численный анализ показал, что это движение носит предельный характер асимптотически приближаясь к некоторому режиму движения без интервалов залипания с периодически меняющейся скоростью. Последнее утверждение строго аналитически доказано в главе 2.

В главе 1 был рассмотрен и общий случай, когда между корпусом и поверхностью действуют как сила сухого, так и сила вязкого трения $\alpha \neq 0$. Возможные режимы движения были также классифицированы в зависимости от поведения корпуса в зонах замедления. Было показано, что пространство параметров k, μ и α разделяется на три области, которые как и в случае $\alpha = 0$ обозначены I, II, III.

- в области I корпус движется периодически возвратно-поступательно, залипая в верхней и нижней зонах замедления.
- в области II периодически меняется только скорость корпуса, а координата центра масс возрастает за период на некоторую величину; залипание корпуса имеет место только в нижней зоне замедления.
- в области III корпус движется без залипания, ни скорость, ни координата не являются периодическими функциями, однако движение носит асимптотический характер приближаясь к некоторому режиму с периодически меняющейся скоростью.

Поверхности, разделяющие области I, II и области II, III задаются уравнениями

$$-G_1(t_3) + e^{\alpha(t_1-t_3)}G_2(t_1) = 0, \quad (12)$$

$$G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3+\Delta t_*^{II}-t_1-2\pi)}G_2(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0, \quad (13)$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} G_1(t) &= -\alpha^2 f_1(t) + \alpha f_1'(t) + k\mu, \\ G_2(t) &= -\alpha^2 f_2(t) + \alpha f_2'(t) - k\mu, \end{aligned} \quad (14)$$

а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определены по формулам

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin t - k(\mu + \cos t), \\ f_2(t) &= \sin t + k(\mu + \cos t). \end{aligned} \quad (15)$$

Δt_*^{II} зависит от параметров задачи и находится из уравнения

$$\cos t_1 - \cos(t_3 + \Delta t_*^{II}) - k\mu(t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1) - k(\sin(t_3 + \Delta t_*^{II}) - \sin t_1) = 0. \quad (16)$$

Результаты, полученные в главе 1 опубликованы в [1, 4, 7, 8].

Во второй главе выполнен полный качественный анализ движения корпуса с произвольной начальной скоростью в случае, когда в системе действуют только силы сухого трения. Исследование проведено на основе подробного анализа свойств решений уравнения движения (1). Для каждой из областей I, II, III было построено пространство интегральных кривых, которое позволяет получить полную качественную характеристику движения корпуса при произвольной начальной скорости. Особую роль для анализа движения корпуса играют интегральные кривые, которые описывают движение корпуса с остановками на границах зон замедления эти кривые на рисунках 3, 5, 6 изображены жирными линиями и обозначены $u_+^{(1)}$, $u_+^{(3)}$, $u_-^{(3)}$, $u_-^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(4)}$. Они разделяют пространство решений на области, для которых движение корпуса имеет качественно различный характер. Нижним индексом '-' обозначены интегральные кривые, описывающие движение корпуса, при котором он совершит остановку на границе зоны замедления, двигаясь в отрицательном направлении. Движение, при котором корпус совершает остановку на границе зоны замедления, двигаясь с положительной скоростью, описывается интегральными кривыми, отмеченными индексом '+'. Через $u_0(t)$ обозначена интегральная кривая, заданная нулевым начальным условием ($u_0(t_1) = 0$). В области I и II эта кривая описывает периодическое движение с залипанием в зонах замедления.

На рис. 3а представлено пространство решений уравнения движения. Интегральные кривые $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, заданные начальными условиями

$$u_+^{(3)}(t_1) = 2k\mu \operatorname{arctg} k - 2 \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + k^2\mu}{k^2 + 1}, \quad (17)$$

$$u_-^{(3)}(t_1) = -\frac{2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + 2\mu k^2}{k^2 + 1} - 2k\mu \operatorname{arctg}(k), \quad (18)$$

ограничивают область, соответствующую движению корпуса, при котором он на интервале времени $[t_1; t_1 + 2\pi]$ совершит остановку в верхней зоне замедления и, соответственно, с момента времени t_3 выйдет на периодический режим. Интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, которые задаются начальными условиями $u_-^{(1)}(t_1) = -2\pi k\mu$ и $u_+^{(1)}(t_1) = 2\pi k\mu$, ограничивается область,

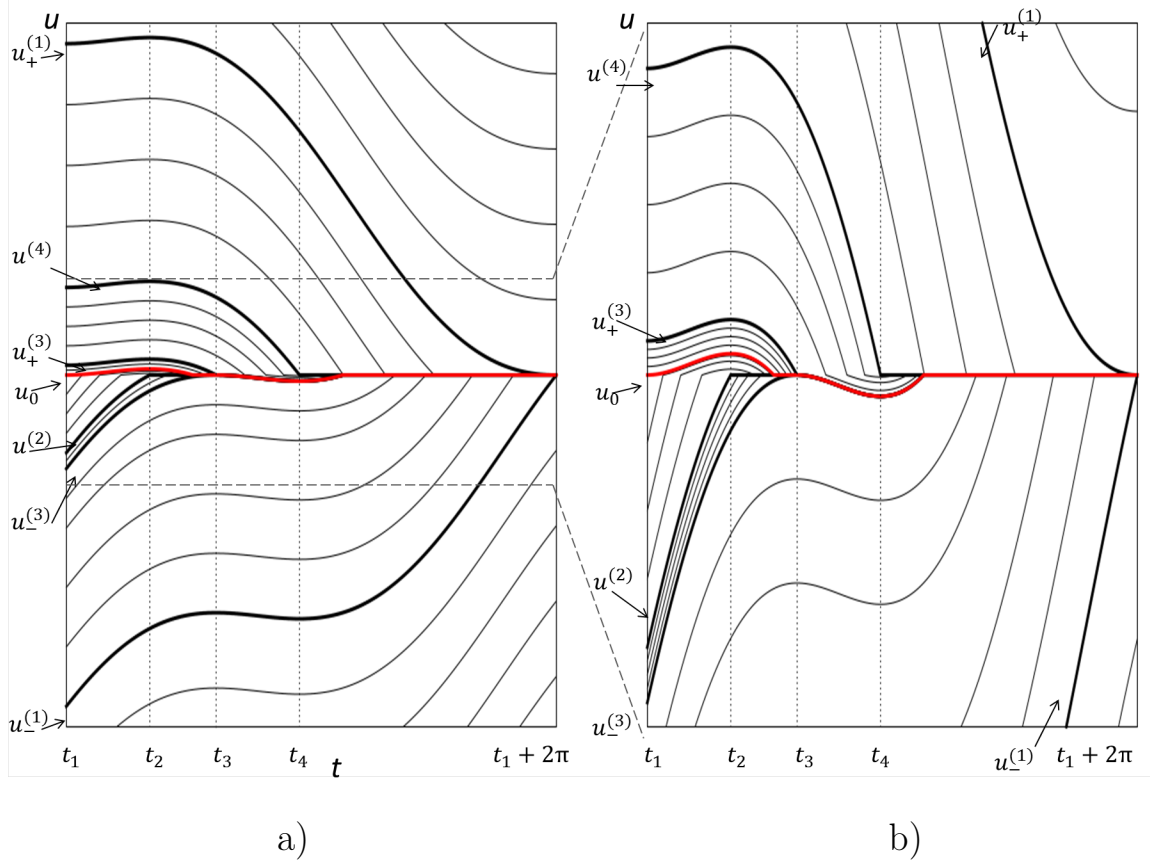


Рис. 3. Пространство решений уравнения движения в подобласти I ($k = 0.7, \mu = 1.5$).

в которой движение корпуса выйдет на периодический режим на интервале времени $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Если же начальная скорость такова, что $|u(t_1)| > 2\pi k\mu$, то на всем интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится по модулю на $2\pi k\mu$.

Таким образом, если параметры задачи принимают значения из области I, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в периодический режим, т.е. будет двигаться возвратно-поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления. На рис. 3b в увеличенном масштабе показана часть рис. 3a, ограниченная горизонтальными пунктирными прямыми линиями. В диссертации были получены аналитические выражения для начальных условий, определяющих все представленные граничные интегральные кривые.

В области II возможны два качественно различных случая движения корпуса. Если выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) > -2\pi k\mu$, то характер движения корпуса будет мало отличаться от его движения для значений параметров из области I. Этот случай реализуется для значений параметров из подобласти IIa (см. рис 4).

Более подробно остановимся на случае когда выполняется неравенство $u_-^{(3)}(t_1) < -2\pi k\mu$, этот случай имеет место для подобласти значений парамет-

ров IIb. Граница, разделяющая области IIa и IIb, задается уравнением

$$\cos t_3 - \cos t_1 + k\mu(2\pi + t_1 - t_3) + k(\sin t_1 - \sin t_3) = 0. \quad (19)$$

В подобласти IIb пространство интегральных кривых имеет вид представленный на рис. 5. На основе поведения интегральных кривых в диссертации доказаны следующие утверждения.

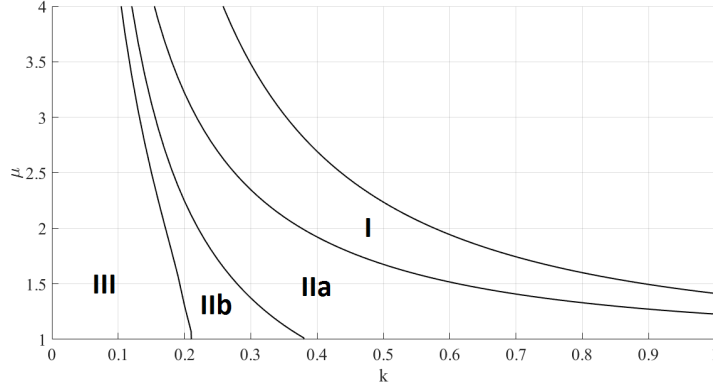


Рис. 4. Подобласти IIa и IIb.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < 2\pi k\mu$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнет двигаться 2π -периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановок зонах замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и

$u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом. Было доказано, что в данном случае за конечный промежуток времени корпус также выйдет на периодический режим движения с остановками в зонах замедления.

4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) > 2\pi k\mu$ или $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$, то на всем интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится по модулю на $2\pi k\mu$.

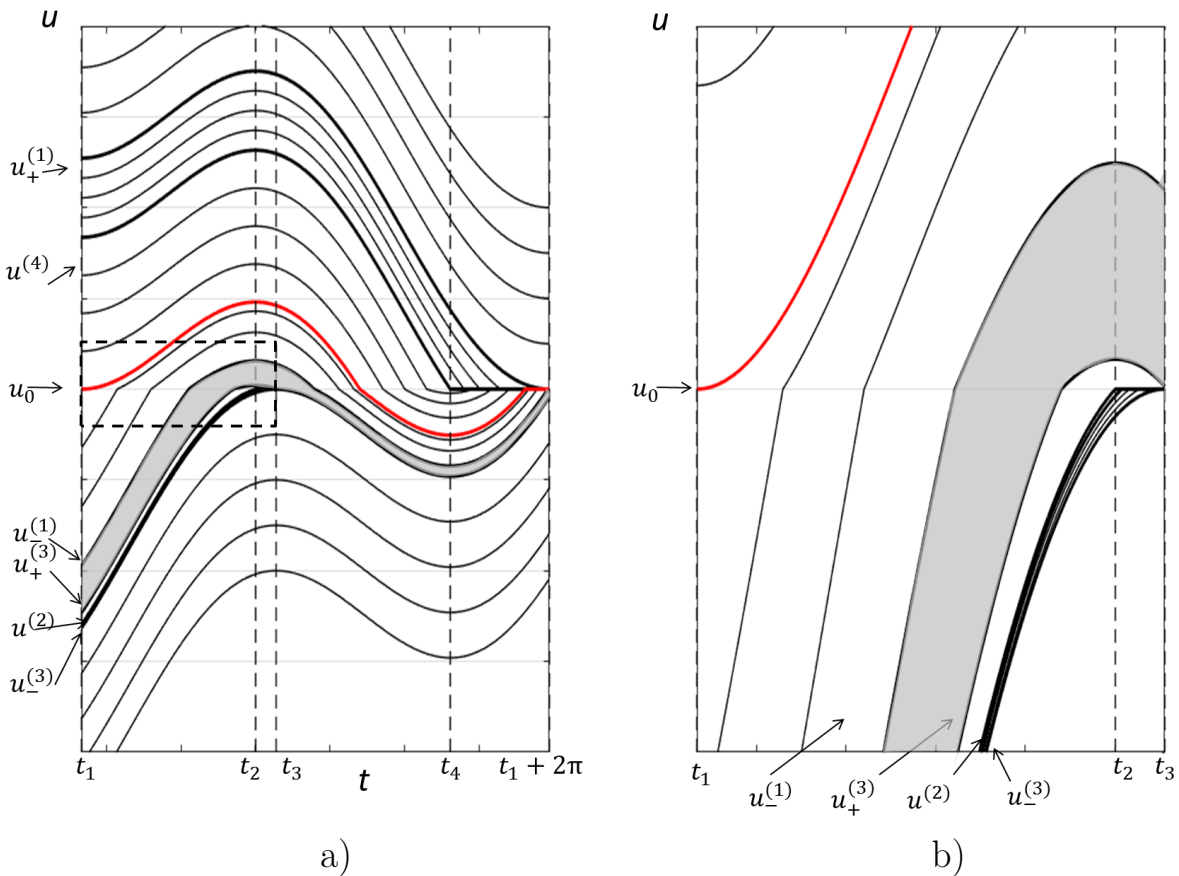


Рис. 5. Пространство решений уравнения (1) в подобласти IIb ($k = 0.22, \mu = 1.5$).

Таким образом, если параметры задачи принимают значения из области II, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в 2π -периодический режим, т.е. будет двигаться с 2π -периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении. При приближении значений параметров к границе разделяющей области II и III время выхода корпуса на периодический режим неограниченно возрастает.

Пространство решений уравнения (1), построенное для значений параметров из области III, представлено на рис. 6. На основе анализа поведения интегральных кривых уравнения (1) были сделаны следующие утверждения о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

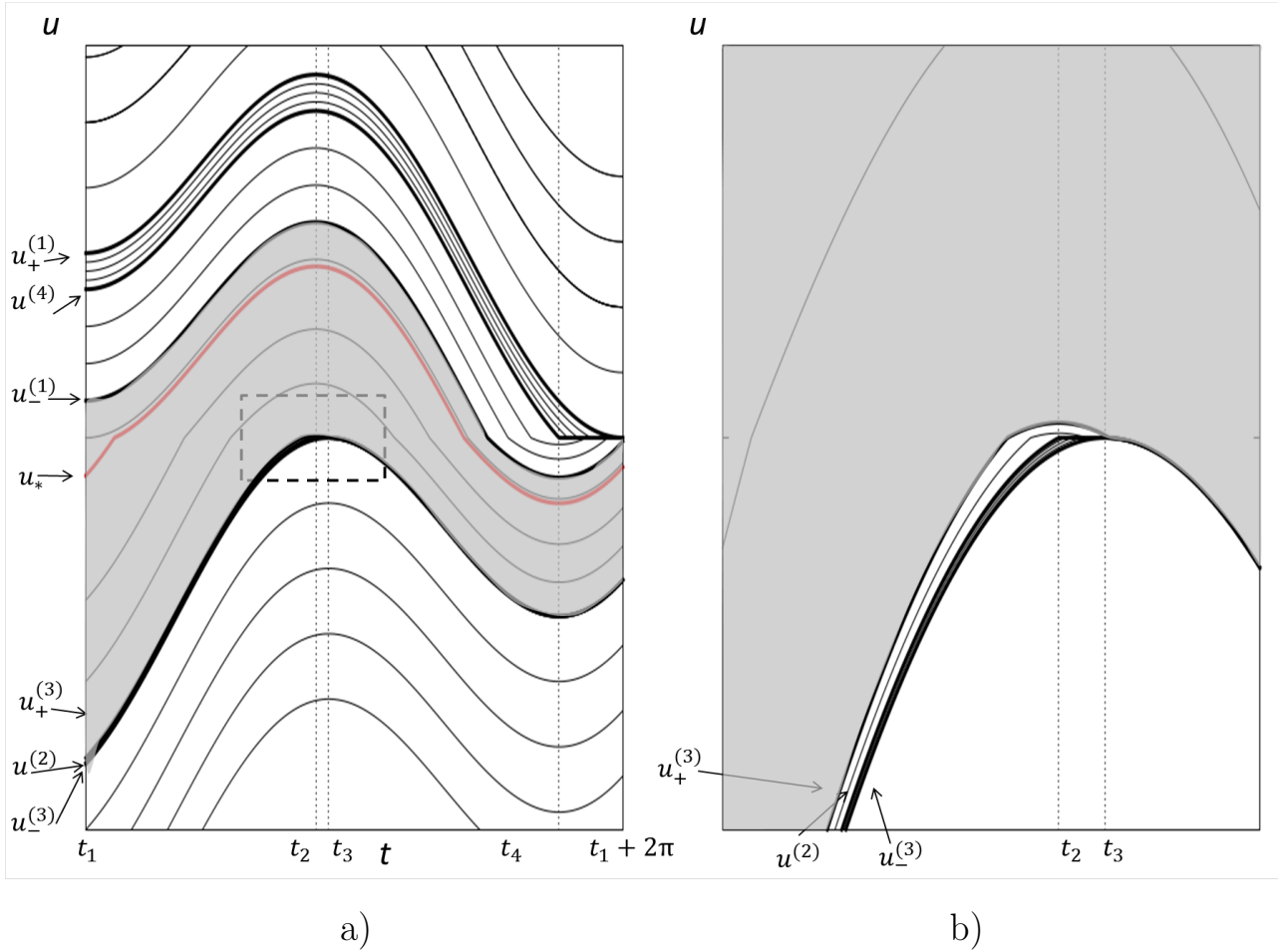


Рис. 6. Пространство решений уравнения (1) в подобласти III ($k = 0.15, \mu = 1.5$).

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) \geq 2\pi k\mu$, то корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится на $2\pi k\mu$. При выполнении неравенства $u(t_1) \leq u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится по модулю на $2\pi k\mu$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < 2\pi k\mu$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На Рис. 6а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t \geq t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение

в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 6а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t \geq t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На Рис. 6а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

В диссертации было показано, что в области III существует единственный периодический режим движения с остановками вне зон замедления. На рис. 6 этому режиму движения соответствует интегральная кривая u_* , которая определяется следующим начальным условием.

$$u_*(t_1) = \cos t_* - \cos t_1 - k\mu(t_* - t_1) - k(\sin t_* - \sin t_1), \quad (20)$$

где t_* вычисляется по формуле

$$t_* = \frac{\pi}{2} - \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \frac{x_0}{\pi k}, \quad (21)$$

x_0 – положительный корень уравнения $2(1 + \cos x) = \mu^2 x^2 + \pi^2 k^2 \mu^2$.

Для значений параметров из области III все решения уравнения (1) асимптотически приближаются к указанному режиму движения.

Результаты, полученные в главе 2 опубликованы в [3, 5, 6].

Третья глава посвящена анализу движения корпуса при произвольной начальной скорости, когда в системе имеются как силы вязкого, так и силы сухого трения. В диссертации было показано, что если параметры задачи лежат в области I, а в момент времени t_1 скорость корпуса имела значение из диапазона от $u_-^{(3)}(t_1)$ до $u_+^{(3)}(t_1)$, где

$$u_+^{(3)}(t_1) = e^{\alpha t_3} [e^{\alpha t_3} (G_1(t_3)) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1)], \quad (22)$$

$$u_-^{(3)}(t_1) = e^{\alpha t_3} [e^{\alpha t_3} (G_2(t_3)) - e^{\alpha t_1} G_2(t_1)], \quad (23)$$

то двигаясь в положительном направлении корпус остановится на интервале (t_3, t_4) и сразу начнет движение в отрицательном направлении до остановки в нижней зоне замедления, после чего он будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$, т.е. выйдет на периодический режим движения.

Если начальная скорость корпуса лежит в диапазоне от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_-^{(3)}(t_1)$ или от $u^{(4)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, где

$$u_-^{(1)}(t_1) = e^{\alpha(t_1+2\pi)}[e^{\alpha(t_1+2\pi)}(G_2(t_1+2\pi)) - e^{\alpha t_1}G_2(t_1)], \quad (24)$$

$$u_+^{(1)}(t_1) = e^{\alpha(t_1+2\pi)}[e^{\alpha(t_1+2\pi)}(G_1(t_1+2\pi)) - e^{\alpha t_1}G_1(t_1)], \quad (25)$$

$$u^{(4)}(t_1) = e^{\alpha t_4}[e^{\alpha t_4}(G_1(t_4)) - e^{\alpha t_1}G_1(t_1)], \quad (26)$$

то при значениях параметров из области I корпус двигаясь в отрицательном или положительном направлениях соответственно, остановится в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до ее правой границы, а затем начнет совершать периодические возвратно поступательные движения с залипанием в верхней и нижней зонах замедления. Если же начальная скорость корпуса лежит вне диапазона от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$ то за один оборот точки ее абсолютное значение уменьшится по модулю на величину, превосходящую константу $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. Следовательно, если в начальный момент $t = t_1$ скорость корпуса меньше $u_-^{(1)}(t_1)$ или больше $u_+^{(1)}(t_1)$, то через конечное число оборотов точки по окружности значение скорости попадет в диапазон от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$.

Таким образом, для значений параметров из области I, в течение конечного промежутка времени движение корпуса выйдет на периодический режим, который описывается решением $u_0(t)$, т.е. корпус будет двигаться возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

На рис. 7 представлено пространство решений уравнения (1), построенное на основе проведенного выше анализа и позволяющее получить полную качественную картину движения корпуса для значений параметров из области I.

Для значений параметров из области II, как и при отсутствии вязкого трения, были рассмотрены два качественно различных случая: $u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1)$ и $u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$. Уравнение $u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1)$ разделяет область II на две подобласти IIa и IIb. Для значений параметров из подобласти IIb характер движения корпуса будет иметь качественные различия по сравнению с областью I и подобластью IIa.

В диссертации, на основе анализа поведения интегральных кривых (см. рис. 8) были доказаны следующие утверждения о движении корпуса в подобласти IIb.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ или $u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус на всем интервале $(t_1, t_1+2\pi]$, будет двигаться без остановок и за время движения его скорость по модулю уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$.

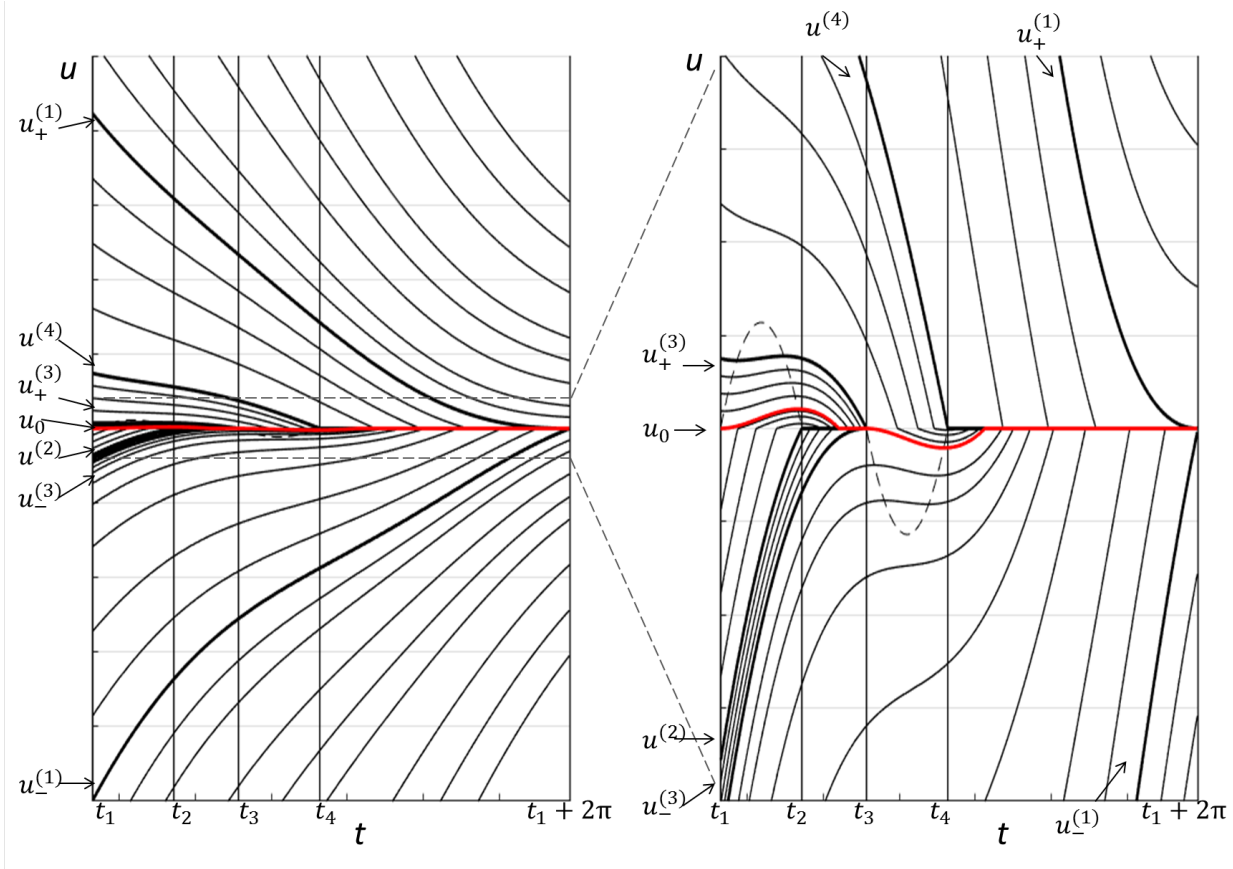


Рис. 7. Пространство решений уравнения (1) в подобласти I ($k = 0.7, \mu = 1.5, \alpha = 0.3$).

В первом случае корпус на всем интервале движется в отрицательном направлении, а во втором - в положительном. В пространстве решений уравнения (1), представленном на рис. 8, такому движению соответствуют интегральные кривые, расположенные ниже кривой $u_-^{(3)}(t)$ и выше кривой $u_+^{(1)}$.

2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнет двигаться 2π -периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На рис. 8 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.
3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 8 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают

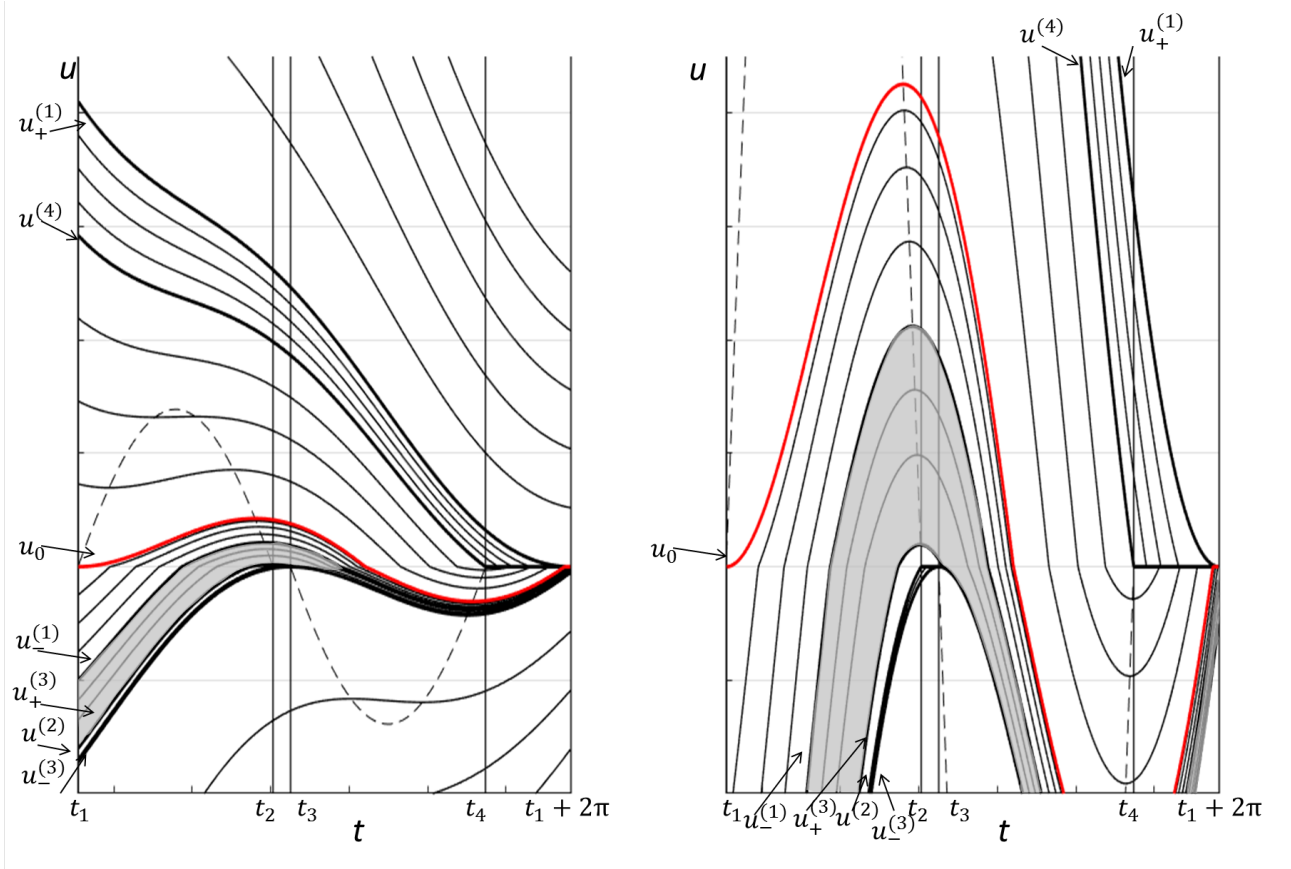


Рис. 8. Пространство решений уравнения (1) в подобласти IIb ($k = 0.225, \mu = 1.5, \alpha = 0.25$).

$(u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t))$ и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 8 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

В главе 3 было доказано, что для значений параметров из подобласти IIb независимо от величины начальной скорости, корпус за конечное время выйдет на периодический режим движения, соответствующий интегральной кривой $u_0(t)$.

Таким образом, если параметры задачи принимают значения из области II, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в 2π -периодический режим, т.е. будет двигаться с 2π -периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении. Влияние вязкого трения на динамику системы выражается в том, что выход

на периодический режим движения происходит за меньшее время, чем при его отсутствии.

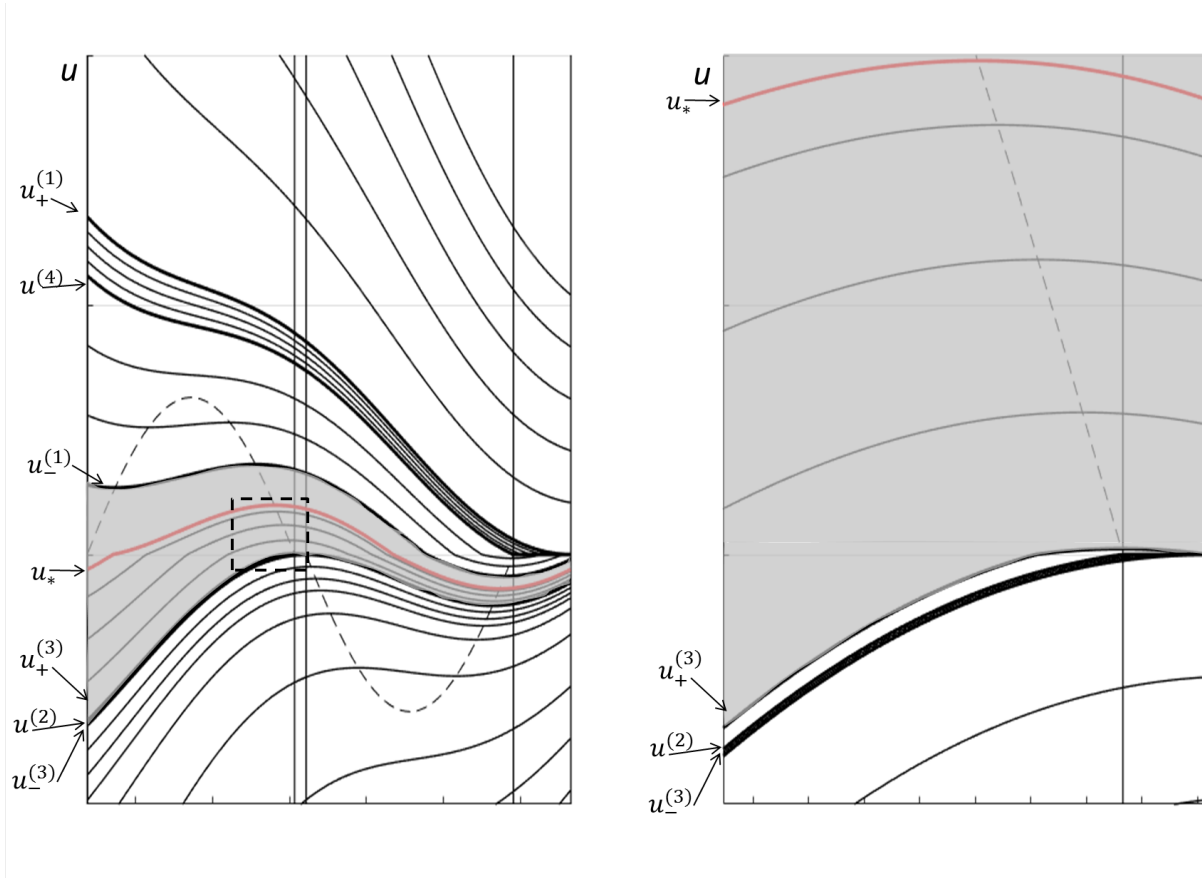


Рис. 9. Пространство решений уравнения (1) в подобласти III ($k = 0.15, \mu = 1.5, \alpha = 0.25$).

На рис. 9 изображено пространство решений уравнения (1), построенное для значений параметров из области III. На основе анализа поведения интегральных кривых уравнения (1) были сделаны следующие выводы о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) \geq u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k \mu e^{\alpha(t_2 - t_1)}$. При выполнении неравенства $u(t_1) \leq u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится по модулю на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k \mu e^{\alpha(t_2 - t_1)}$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое

до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На рис. 9 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t \geq t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 9 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t \geq t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 9 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

Из сформулированных выше утверждений следует, что за конечный промежуток времени значения скорости корпуса попадают в диапазон скоростей от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u_-^{(1)}(t_1)$. Это означает, что начиная с некоторого момента времени движение корпуса описывается интегральными кривыми из области, ограниченной кривыми $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$. В диссертации было показано, что последовательность значений $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ убывает, а последовательность $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ возрастает при $n \rightarrow \infty$. Эти последовательности ограничены снизу и сверху соответственно и, следовательно, имеют предел, которому соответствует периодический режим движения корпуса без залипания. Также было показано, что если такой периодический режим в области III существует, то он единственный. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$.

Таким образом, из сказанного выше следует, что интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$ описывают движение корпуса асимптотически приближающееся к движению без залипания. Поэтому асимптотически приближаться к указанному периодическому режиму будут и движения, заданные интегральными кривыми, лежащими в области, ограниченной $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$.

Из вышесказанного следует, что в области III всегда существует единственный периодический режим движения без залипания. При любой начальной скорости движение асимптотически приближается к данному периодическому режиму. Интегральная кривая, описывающая указанный пе-

риодический режим обозначена через u_*

Результаты, полученные в главе 3 опубликованы в [2, 4].

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. *Бардин Б.С., Панёв А.С.* О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности. // *Труды МАИ*. 2015. V. 84.
2. *Панёв А.С.* О движении твердого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде. // *Труды МАИ*. 2018. V. 98.
3. *Bardin B. S., Panev A. S.* On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // *VP Vibroengineering PROCEDIA*. 2016. V. 8. P. 135–141.
4. *Bardin B. S., Panev A. S.* On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959 (030002). <https://doi.org/10.1063/1.5034582>.
5. *Bardin B.S., Panev A.S.* On motion of a body with moving internal mass on a rough horizontal surface // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14, no. 4.

Прочие публикации автора диссертации

6. *Бардин Б.С., Панёв А.С.* Исследование возможных режимов движения тела, несущего подвижную массу, при произвольной начальной скорости // Международная конференция по математической теории и механике. Суздаль. 7-11 июля 2017г. С. 28-29. Тезисы
7. *Бардин Б.С., Панёв А.С.* О движении по горизонтальной плоскости тела с внутренней подвижной массой // Международная конференция по математической теории и механике. Суздаль. 3-7 июля 2015г. С. 33-35. Тезисы
8. *Панёв А.С.* Исследование периодических режимов движения тела, несущего подвижную точечную массу // L всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва. 12-15 мая 2015г. С. 153-158. Тезисы
9. *Панёв А.С.* Динамика твердого тела, движущегося по горизонтальной плоскости посредством перемещения внутренней массы // 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2015». Москва. 16-20 ноября 2015 года. С. 443-445. Тезисы.