

Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 11. С. 495–506  
Thermal processes in engineering, 2022, vol. 14, no. 11, pp. 495–506

Научная статья  
УДК 536.2  
DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-495-506

## О влиянии эффектов инерции обратной связи на температурное поле системы с активной теплозащитой

А.В. Аттетков<sup>1✉</sup>, И.К. Волков<sup>1</sup>, А.В. Котович<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*  
*fn2@bmstu.ru*<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Сформулирована и решена задача об определении температурного поля системы, имитируемой разделительной изотропной стенкой двух различных сред. Одна из поверхностей стенки обладает ортотропной термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи с запаздыванием, с анизотропным покрытием, подверженным локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что искомое температурное поле представляет собой композицию двух независимых аддитивных составляющих, первая из которых ассоциируется откликом температур разделяемых сред от начальной температуры разделительной системы, а вторая зависит лишь от плотности мощности теплового потока, воздействующего на разделительную систему в условиях охлаждения разделенными средами с температурами, совпадающими с начальной температурой системы. С применением методов интегральных преобразований в аналитически замкнутом виде найдены решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности. Полученные результаты использованы для анализа эффектов инерции обратной связи термоактивной прокладки на формируемое температурное поле изучаемой системы.

**Ключевые слова:** изотропная разделительная стенка двух различных сред, термоактивная прокладка с обратной связью с запаздыванием, анизотропное покрытие, локальное тепловое воздействие, температурное поле, интегральные преобразования

**Для цитирования.** Аттетков А.В., Волков И.К., Котович А.В. О влиянии эффектов инерции обратной связи на температурное поле системы с активной теплозащитой // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 11. С. 495–506. DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-495-506

Original article

## On the feedback inertia effects impact on the temperature field of a system with active thermal protection

A.V. Attetkov<sup>1✉</sup>, I.K. Volkov<sup>1</sup>, A.V. Kotovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Bauman Moscow State Technical University (National research university of technology), Moscow, Russia*  
*fn2@bmstu.ru*<sup>✉</sup>

© Аттетков А.В., Волков И.К., Котович А.В., 2022

**Abstract.** The problem of the temperature field determining of the system, imitated by the splitter isotropic wall of the two different media, was stated and solved. One of the wall surfaces has an orthotropic thermally active layer that functions according to the retarded feedback principle with an anisotropic coating subjected to local heating while undergoing heat exchange with the environment. The article demonstrates that the sought-for temperature field represents composition of the two independent additive components, the first of which is being associated by the difference of the temperatures of the media being separated from the initial temperature of the separating system. The second one depends only on the power density of the heat flow affecting the separating system under conditions of cooling by the separated media with the temperatures coinciding with the initial temperature of the system. Solutions to the respective problems of the non-stationary heat conductivity were found with the methods of integral transforms in the analytically closed form application. The obtained results were employed for analyzing the effects of feedback inertia of thermally active layer on the formed temperature field of the system under study.

**Keywords:** isotropic wall separating two different media, thermally active gasket with retarded feedback, anisotropic coating, local heat impact, temperature field, integral transforms

**For citation.** Attekov A.V., Volkov I.K., Kotovich A.V. On the feedback inertia effects impact on the temperature field of a system with active thermal protection. *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal processes in engineering*, 2022, vol. 14, no. 11, pp. 495–506. (In Russ.). DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-495-506

## Введение

В математической теории теплопроводности [1–6] специфическое положение занимает модель процесса теплопереноса в системе с активной теплозащитой, имитируемой изотропным полупространством (реже – изотропной пластиной) с покрытием при наличии термоактивного промежуточного слоя (термоактивной прокладки) в анализируемой системе, функционирующей по принципу обратной связи [7–9]. Отмеченная специфика обусловлена относительной простотой рассматриваемой математической модели и трудностями, возникающими при нахождении аналитического решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности даже в простейшей ситуации изотропного покрытия активной теплозащиты [10]. Указанные трудности усугубляются при необходимости учета анизотропии свойств покрытия [11–14]. При этом актуальным, представляющим и теоретический, и значимый практический интерес, остается вопрос о влиянии эффектов инерции обратной связи термоактивной прокладки на формируемое температурное поле системы с активной теплозащитой. Обсуждению этого вопроса посвящены проводимые в данной работе исследования.

## Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели при построении математической модели процесса формирования температурного поля  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  предполагалось, что:

1) объект исследований представляет собой систему, образованную изотропной стенкой ( $0 < x_2 < h_{ст}$ ), ограничивающая поверхность которой  $x_2 = 0$  обладает анизотропным покрытием ( $-(h_{п} + h_{тп}) < x_2 < h_{тп}$ ) с термоактивной прокладкой [7–9] ( $-h_{тп} < x_2 < 0$ ), где значения геометрических характеристик  $h_{ст}$ ,  $h_{тп}$  и  $h_{п}$  элементов объекта исследований являются величинами постоянными;

2) термоактивная прокладка является ортотропной и функционирует по принципу обратной связи [11–16], настроенной по начальной температуре  $T_0 = \text{const}$  объекта исследований, то есть в системах «анизотропное покрытие – термоактивная прокладка» и «термоактивная прокладка – изотропная стенка» для искомого температурного поля реализуются следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned}
 T(x_1, -h_{\text{тп}} - 0, x_3, t) &= T(x_1, -h_{\text{тп}} + 0, x_3, t), \\
 \left[ \lambda_{12}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{22}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{23}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_3} \right]_{x_2=-h_{\text{тп}}-0} &- \\
 -\lambda_2^{\text{тп}} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h_{\text{тп}}+0} &= \\
 = -q_{\text{тп}}^{\text{п}} \left[ T(x_1, x_2, x_3, t-t_*) - T_0 \right]_{x_2=-h_{\text{тп}}+0}; & \\
 T(x_1, 0-0, x_3, t) &= T(x_1, 0+0, x_3, t); \\
 \lambda_2^{\text{тп}} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0-0} - \lambda^{\text{ст}} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0+0} &= \\
 = -q_{\text{тп}}^{\text{ст}} \left[ T(x_1, x_2, x_3, t-t_*) - T_0 \right]_{x_2=0+0}, &
 \end{aligned}$$

где  $\{\lambda_{ij}^{\text{п}}\}, \{\lambda_k^{\text{тп}}\}$  и  $\lambda^{\text{ст}}$  – компоненты тензоров теплопроводности анизотропного материала покрытия, ортотропного материала термоактивной прокладки при  $\lambda_1^{\text{тп}} = \lambda_3^{\text{тп}}$  и изотропного материала стенки соответственно;  $q_{\text{тп}}^{\text{п}}$  и  $q_{\text{тп}}^{\text{ст}}$  – определяющие параметры обратной связи термоактивной прокладки со стороны анизотропного покрытия и со стороны изотропной стенки;  $T_0$  – температура внешней среды с незащищенной стороны стенки, которая равна начальной температуре объекта исследований и  $T_0 = \text{const}$ ;  $t_*$  – лаг запаздывания обратной связи, где  $t_* \geq 0$ , и если  $t < t_*$ , то  $T(x_1, x_2, x_3, t-t_*) \equiv T_0$ ;

3) термоактивная прокладка является «термически тонкой», то есть допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [4], суть которой определена совокупностью следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 T(x_1, -h_{\text{тп}} - 0, x_3, t) &= \\
 = \langle T(x_1, x_3, t) \rangle &= T(x_1, 0+0, x_3, t); \\
 \langle T(x_1, x_3, t) \rangle &\triangleq \frac{1}{h_{\text{тп}}} \int_{-h_{\text{тп}}}^0 T(x_1, x_2, x_3, t) dx_2;
 \end{aligned}$$

4) обратная связь термоактивной прокладки настроена по начальной температуре объекта исследований, которая отлична от температуры среды со стороны анизотропного покрытия;

5) теплообмен в системах «внешняя поверхность анизотропного покрытия – внешняя среда» и «внешняя поверхность стенки – внешняя среда» реализуется по закону Ньютона с коэффициентами теплоотдачи  $\alpha_{\text{п}}$  и  $\alpha_{\text{ст}}$  соответственно [2, 3];

6) внешняя поверхность анизотропного покрытия находится под воздействием не только внешней среды, температура которой  $T_c$  отлична от начальной температуры  $T_0$  объекта исследований, но и внешнего теплового потока, который ориентирован в направлении ее внутренней нормали и обладает плотностью мощности  $q(x_1, x_3, t)$ ;

7) при любых фиксированных значениях пространственных переменных, представленным вектором  $[x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2$ , функционал  $q(x_1, x_3, t)$  интегрируем с квадратом по временному переменному  $t \in [0, +\infty)$ , и при любых фиксированных значениях временного переменного  $t \in [0, +\infty)$  он интегрируем с квадратом по совокупности пространственных переменных, представленным вектором  $[x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2$ , то есть [17]

$$\begin{aligned}
 q(x_1, x_3, t) \Big|_{[x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2} &\in L^2[0, +\infty), \\
 q(x_1, x_3, t) \Big|_{t \in [0, +\infty)} &\in L^2(\mathbb{R}^2).
 \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших рассуждений воспользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{T - T_0}{T_c - T_0}; \quad x = \frac{x_1}{l_*}; \quad y = \frac{x_2}{l_*}; \quad z = \frac{x_3}{l_*}; \\
 \text{Fo} &= \frac{\lambda_{22}^{\text{п}} t}{c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} l_*^2}; \quad H_1 = \frac{h_{\text{п}}}{l_*}; \quad H_2 = \frac{h_{\text{тп}}}{l_*}; \quad H_3 = \frac{h_{\text{ст}}}{l_*}; \\
 \mu_{ij} &= \frac{\lambda_{ij}^{\text{п}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \mu = \frac{\lambda_1^{\text{тп}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \mu_* = \frac{\lambda^{\text{ст}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \text{Fo}^* = \frac{\lambda_{22}^{\text{ст}} t_*}{c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} l_*^2}; \\
 a &= \frac{c_{\text{тп}} \rho_{\text{тп}}}{c_{\text{п}} \rho_{\text{п}}}; \quad b = \frac{c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}}}{c_{\text{п}} \rho_{\text{п}}}; \quad \langle \theta \rangle = \frac{\langle T \rangle - T_0}{T_c - T_0}; \\
 Q_0 &= \frac{q l_*}{(T_c - T_0) \lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad Q_* = \frac{(q_{\text{тп}}^{\text{п}} - q_{\text{тп}}^{\text{ст}}) l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \\
 \text{Bi}^{(1)} &= \frac{\alpha_{\text{п}} l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \text{Bi}^{(3)} = \frac{\alpha_{\text{ст}} l_*}{\lambda^{\text{ст}}},
 \end{aligned}$$

где  $l_*$  – используемая единица масштаба пространственных переменных. В этом случае, согласно исходным допущениям, представленным выше, функционалы  $\theta(x, y, z, \text{Fo})$  и  $\langle \theta(x, z, \text{Fo}) \rangle$ , определяющие искомое температурное поле объекта исследований, должны удовлетворять системе трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа [2–6, 17]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \mu_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + 2\mu_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad -(H_1 + H_2) < y < -H_2, \quad Fo > 0; \quad (1)$$

$$a \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial Fo} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial z^2} \right\} + \frac{1}{H_2} \left\{ \mu_* \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0+0} - \left[ \mu_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \Big|_{y=-H_2-0} - Q_* \langle \theta(x, z, Fo - Fo^*) \rangle \right\},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad -H < y < 0, \quad Fo > 0; \quad b \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \mu_* \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right], \quad \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < H_3, \quad Fo > 0,$$

однородным начальным условиям:

$$\theta(x, y, z, Fo) \Big|_{Fo=0} = 0 = \langle \theta(x, z, Fo) \rangle \Big|_{Fo=0}, \quad (2)$$

условиям сопряжения:

$$\theta(x, -H_2 - 0, z, Fo) = \langle \theta(x, z, Fo) \rangle = \theta(x, 0 + 0, z, Fo) \quad (3)$$

и краевым условиям [2–6]:

$$\left[ \mu_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi^{(1)}(1 - \theta) \right] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} = -Q_0(x, z, Fo); \quad \left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} + Bi^{(3)}\theta \right] \Big|_{y=H_3} = 0. \quad (4)$$

При этом должны удовлетворяться следующие требования [17]:

$$Q_0(x, z, Fo) \Big|_{[x, z]^T \in \mathbb{R}^2} \in L^2[0, +\infty); \quad Q_0(x, z, Fo) \Big|_{Fo \in [0, +\infty)} \in L^2(\mathbb{R}^2);$$

$$\theta(x, y, z, Fo) \Big|_{([x, z]^T \in \mathbb{R}^2) \wedge ((y \in [-H_1+H_2, -H_2]) \vee (y \in [0, +\infty)))} \in L^2[0, +\infty),$$

$$\langle \theta(x, z, Fo) \rangle \Big|_{[x, z]^T \in \mathbb{R}^2} \in L^2[0, +\infty); \quad (5)$$

$$\theta(x, y, z, Fo) \Big|_{((y \in [-H_1+H_2, -H_2]) \vee (y \in [0, +\infty))) \wedge (Fo \in [0, +\infty))} \in L^2(\mathbb{R}^2);$$

$$\langle \theta(x, z, Fo) \rangle \Big|_{Fo \in [0, +\infty)} \in L^2(\mathbb{R}^2);$$

$$\theta(x, y, z, Fo) \Big|_{([x, z]^T \in \mathbb{R}^2) \wedge (Fo \in [0, +\infty))} \in L^2([-H_1 - H_2, -H_2] \cup [0, +\infty)).$$

Исходная математическая модель (1)–(5) процесса формирования искомого температурного поля объекта исследований представляет собой смешанную задачу для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа со специфическими условиями сопряжения, представленными не только равенствами (3), но и вторым уравнением системы (1).

### Температурное поле

Проанализировав математическую модель (1)–(5) с учетом известных результатов [18–20], приходим к выводу, что процесс формирования температурного поля объекта исследований в рассматриваемой ситуации имеет аддитивную структуру с двумя независимыми составляющими:

$$\theta(x, y, z, Fo) = \theta_1(y, Fo) + \theta_2(x, y, z, Fo), \quad (6)$$

где функционал  $\theta_1(y, Fo)$  – решение смешанной задачи (1)–(5) при  $Q_0(x, z, Fo) \equiv 0$ , а функционал  $\theta_2(x, y, z, Fo)$  – решение смешанной задачи (1)–(5), где в краевом условии (4) при  $y = -(H_1 + H_2)$  комплекс  $Bi^{(1)}(1 - \theta)$  заменен комплексом  $Bi^{(1)}\theta_2$ .

Для идентификации функционала  $\theta_1(y, Fo)$ , определяющего процесс формирования температуры поля объекта исследований лишь в результате воздействия температуры внешней среды, то есть при  $Q_0(x, z, Fo) \equiv 0$ , переходим в пространство изображений интегрального преобразования Лапласа, определенного парой линейных операторов [2]:

$$L[\bullet] \equiv \int_0^{\infty} \bullet \exp(-sFo) dFo; \quad L^{-1}[\bullet] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bullet \exp(sFo) ds. \quad (7)$$

В этом случае, согласно исходной математической модели (1)–(5) и известным свойствам линейного интегрального оператора  $L[\bullet]$  [2], изображения

$$U_1(y, s) \triangleq L[\theta_1(y, Fo)], \quad \langle U_1(s) \rangle \triangleq L[\langle \theta_1(Fo) \rangle] \quad (8)$$

должны удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{dy^2} - sU_1 &= 0, \quad -(H_1 + H_2) < y < -H_2; \quad \frac{d^2 U_1}{dy^2} - \frac{bs}{\mu_*} U_1 = 0, \quad 0 < y < H_3; \\ \mu_* \frac{dU_1}{dy} \Big|_{y=0+0} - \frac{dU_1}{dy} \Big|_{y=-H_2-0} &= [aH_2s + Q_* \exp(-sFo^*)] \langle U_1(s) \rangle; \quad U_1(-H_2-0, s) = \langle U_1(s) \rangle = U_1(0+0, s); \\ \left[ \frac{dU_1}{dy} + \text{Bi}^{(1)} \left( \frac{1}{s} - U_1 \right) \right] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} &= 0; \quad \left[ \frac{dU_1}{dy} + \text{Bi}^{(3)} U_1 \right] \Big|_{y=H_3} = 0, \end{aligned}$$

решение которой может быть найдено с использованием стандартных методов [21] и представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_1(y, s) \Big|_{y \in [-(H_1+H_2), -H_2]} &= C_1(s) \exp[(y + H_2)\sqrt{s}] + C_2(s) \exp[-(y + H_2)\sqrt{s}]; \\ U_1(y, s) \Big|_{y \in [0, H_3]} &= C_3(s) \exp[y\sqrt{b\mu_*^{-1}s}] + C_4(s) \exp[-y\sqrt{b\mu_*^{-1}s}]; \\ C_1(s) &= \frac{\langle U_1(s) \rangle - \beta(s)}{1 + \alpha_2(s)}, \quad C_2(s) = \frac{\langle U_1(s) \rangle \alpha_2(s) + \beta(s)}{1 + \alpha_2(s)}; \\ C_3(s) &= \frac{\langle U_1(s) \rangle \alpha_1(s)}{1 + \alpha_1(s)}, \quad C_4(s) = \frac{\langle U_1(s) \rangle}{1 + \alpha_1(s)}; \\ \alpha_1(s) &= \frac{\sqrt{s} - \text{Bi}^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}}}{\sqrt{s} + \text{Bi}^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}}} \exp[-2H_3 \sqrt{b\mu_*^{-1}s}]; \\ \alpha_2(s) &= \frac{\sqrt{s} - \text{Bi}^{(1)}}{\sqrt{s} + \text{Bi}^{(1)}} \exp[-2H_1 \sqrt{s}]; \quad \beta(s) = \frac{\text{Bi}^{(1)}}{s(\sqrt{s} + \text{Bi}^{(1)})} \exp[-H_1 \sqrt{s}]; \\ \langle U_1(s) \rangle &= \frac{2\beta(s)}{1 + \alpha_2(s)} \left\{ \frac{1 - \alpha_1(s)}{1 + \alpha_1(s)} \sqrt{b\mu_*} + \frac{1 - \alpha_2(s)}{1 + \alpha_2(s)} + \frac{1}{\sqrt{s}} \gamma(s, Fo^*) \right\}^{-1}; \\ \gamma(s, Fo^*) &= aH_2s + Q_* \exp(-sFo^*). \end{aligned} \quad (9)$$

Даже поверхностный анализ изображения  $U_1(y, s)$  интегрального преобразования Лапласа (7) оригинала  $\theta_1(y, Fo)$ , представленного равенствами (9), убеждает в том, что: 1) в рассматриваемой ситуации переход в пространство оригиналов с использованием известных теорем и таблиц «изображение – оригинал» [2, 22–24] вряд ли целесообразен; 2) определяющим элементом изображения

$U_1(y, s)$  в представлении (9) является функционал  $\langle U_1(s) \rangle$ , оригинал которого описывает температурное поле термоактивной прокладки, обладающей инерционной обратной связью.

С учетом сказанного выше далее ограничимся анализом первого приближения для изображения  $\langle U_1(s) \rangle$ :

$$\langle U_1(s) \rangle \approx \langle U_1^{(0)}(s) \rangle - E(s, Fo^*) \langle U_1^{(0)}(s) \rangle, \quad (10)$$

где согласно (9)

$$\begin{aligned} \langle U_1^{(0)}(s) \rangle &= \frac{2\beta(s)}{1+\alpha_2(s)} \left\{ \frac{1-\alpha_1(s)}{1+\alpha_1(s)} \sqrt{b\mu_*} + \frac{1-\alpha_2(s)}{1+\alpha_2(s)} \right\}^{-1}; \\ E(s, Fo^*) &= \frac{\gamma(s, Fo^*)}{\sqrt{s}} \left\{ \frac{1-\alpha_1(s)}{1+\alpha_1(s)} \sqrt{b\mu_*} + \frac{1-\alpha_2(s)}{1+\alpha_2(s)} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом,  $\langle U_1^{(0)}(s) \rangle$  – изображение оригинала  $\langle \theta_1(Fo) \rangle$ , определяющего температурное поле  $\theta_1(y, Fo)$  термоактивной прокладки при нулевой мощности ее инерционной обратной связи и без учета временной зависимости условия сопряжения, которое имитируется аналогом стационарного варианта второго уравнения системы (1). В свою очередь комплекс изображений  $E(s, Fo^*) \langle U_1^{(0)}(s) \rangle$  реализует коррекцию этого температурного поля, обусловленную нестационарностью условия сопряжения и ненулевой мощностью инерционной обратной связи.

Далее в соответствии с основной целью настоящих исследований и с учетом равенств (10), (11) и (9) полагаем:

$$\begin{aligned} \langle U_1^{(1)}(s, Fo^*) \rangle &\triangleq E(s, Fo^*) \langle U_1^{(0)}(s) \rangle \equiv \langle U_1^{(11)}(s) \rangle + \langle U_1^{(12)}(s, Fo^*) \rangle; \\ \langle U_1^{(11)}(s) \rangle &\triangleq A(s) s \frac{aH_2}{\sqrt{s}} B(s); \quad \langle U_1^{(12)}(s, Fo^*) \rangle \triangleq A(s) s \frac{Q_* \exp(-sFo^*)}{s\sqrt{s}} B(s); \\ A(s) s &\triangleq \frac{2s\beta(s)}{1+\alpha_2(s)} \equiv \frac{2Bi^{(1)}}{(\sqrt{s} + Bi^{(1)}) \exp(H_1\sqrt{s}) + (\sqrt{s} - Bi^{(1)}) \exp(-H_1\sqrt{s})}; \\ B(s) &\triangleq \left\{ \frac{1-\alpha_1(s)}{1+\alpha_1(s)} \sqrt{b\mu_*} + \frac{1-\alpha_2(s)}{1+\alpha_2(s)} \right\}^{-2} \equiv \\ &\equiv \frac{\left[ (\sqrt{s} + Bi^{(3)}) \sqrt{\mu_* b^{-1}} \exp(H_3 \sqrt{b\mu_*^{-1} s}) - (\sqrt{s} - Bi^{(3)}) \sqrt{\mu_* b^{-1}} \exp(-H_3 \sqrt{b\mu_*^{-1} s}) \right]}{\left[ (\sqrt{s} + Bi^{(3)}) \sqrt{\mu_* b^{-1}} \exp(H_3 \sqrt{b\mu_*^{-1} s}) + (\sqrt{s} - Bi^{(3)}) \sqrt{\mu_* b^{-1}} \exp(-H_3 \sqrt{b\mu_*^{-1} s}) \right]} \sqrt{b\mu_*} + \\ &+ \frac{\left[ (\sqrt{s} + Bi^{(1)}) \exp(H_1\sqrt{s}) - (\sqrt{s} - Bi^{(1)}) \exp(-H_1\sqrt{s}) \right]^{-2}}{\left[ (\sqrt{s} + Bi^{(1)}) \exp(H_1\sqrt{s}) + (\sqrt{s} - Bi^{(1)}) \exp(-H_1\sqrt{s}) \right]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, согласно (12) изображение  $\langle U_1^{(1)}(s, Fo^*) \rangle$  имеет единственную точку ветвления  $s = 0$ . Реализовав процедуру обращения интегрального преобразования Лапласа (7) посредством вычисления соответствующих интегралов Римана – Меллина с использованием стандартного контура [2], представленного на рис. 1, теоремы о свертках и таблиц «изображение – оригинал» [2], завершаем процедуру идентификации искомого оригинала:

$$\langle \theta_1^{(1)}(Fo, Fo^*) \rangle \triangleq L^{-1} \left[ \langle U_1^{(1)}(s, Fo^*) \rangle \right] = L^{-1} \left[ \langle U_1^{(11)}(s) \rangle \right] + L^{-1} \left[ \langle U_1^{(12)}(s, Fo^*) \rangle \right];$$

$$L^{-1}\left[\left\langle U_1^{(11)}(s) \right\rangle\right] = \int_0^{Fo} a(Fo - \tau) b_1(\tau) d\tau;$$

$$a(Fo) \triangleq L^{-1}[A(s)s] = \frac{Bi^{(1)}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-uFo)}{\sqrt{u} \cos(H_1\sqrt{u}) + Bi^{(1)} \sin(H_1\sqrt{u})} du;$$

$$b_1(Fo) \triangleq \int_0^{Fo} \frac{aH_2}{\sqrt{\pi(Fo - \tau)}} b(\tau) d\tau;$$

$$b(Fo) \triangleq L^{-1}[B(s)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{Bi^{(1)} \cos(H_1\sqrt{u}) - \sqrt{u} \sin(H_1\sqrt{u})}{\sqrt{u} \cos(H_1\sqrt{u}) + Bi^{(1)} \sin(H_1\sqrt{u})} + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \frac{Bi^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}} \cos(H_3 \sqrt{\mu_*^{-1} bu}) - \sqrt{u} \sin(H_3 \sqrt{\mu_*^{-1} bu})}{\sqrt{u} \cos(H_3 \sqrt{\mu_*^{-1} bu}) + Bi^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}} \sin(H_3 \sqrt{\mu_*^{-1} bu})} \sqrt{b\mu_*} \right\}^{-2} \exp(-uFo) du;$$

$$b_2(Fo, Fo^*) \triangleq \int_0^{Fo - Fo^*} 2Q_* \sqrt{\frac{Fo - Fo^* - \tau}{\pi}} b(\tau) d\tau;$$

$$L^{-1}\left[\left\langle U_1^{(12)}(s, Fo) \right\rangle\right] = \int_0^{Fo} a(Fo - \tau) b_2(\tau, Fo^*) d\tau.$$

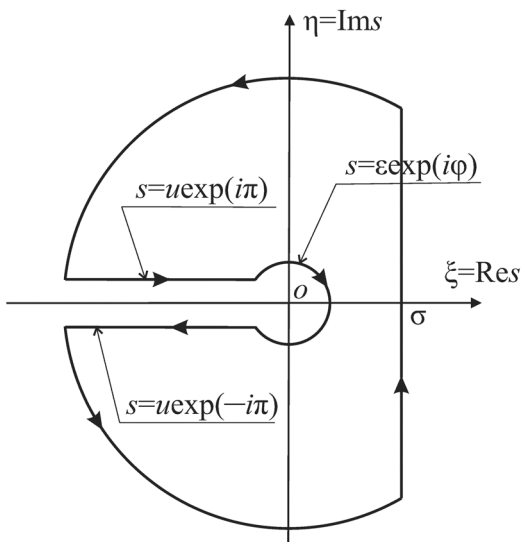


Рис. 1. Контур для вычисления интегралов Римана – Меллина при определении искомой оценки для первой независимой аддитивной составляющей температурного поля объекта исследований

Для достижения основной цели настоящих исследований необходимо идентифицировать еще и вторую независимую аддитивную составляющую процесса формирования искомого температурного поля, представленную функционалом  $\theta_2(x, y, z, Fo)$ , который удовлетворяет смешанной задаче (1)–(5), где в краевом условии (4) при  $y = -(H_1 + H_2)$  комплекс  $Bi^{(1)}(1 - \theta)$  заменен комплексом  $(-Bi^{(1)}\theta_2)$ . С учетом сказанного, к смешанной задаче (1)–(5) последовательно применяем сначала двумерное экспоненциальное интегральное преобразование Фурье по совокупности пространственных переменных  $x$  и  $z$ , задаваемое парой линейных интегральных операторов [25]:

$$\Phi[\bullet] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bullet \exp[-i(px + rz)] dx dz; \quad \Phi^{-1}[\bullet] \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bullet \exp[i(px + rz)] dp dr, \quad (14)$$

а затем интегральное преобразование Лапласа (7) по временному переменному  $Fo$ . В этом случае в пространстве изображений композиции интегральных преобразований (14), (7) с использованием следующих обозначений:

$$A(p, y, r, Fo) \triangleq \Phi[\theta_2(x, y, z, Fo)]; \quad B(p, y, r, s) \triangleq L[A(p, y, r, Fo)];$$

$$\langle A(p, r, Fo) \rangle \triangleq \Phi[\langle \theta_2(x, z, Fo) \rangle]; \quad \langle B(p, r, s) \rangle \triangleq L[\langle A(p, r, Fo) \rangle]; \quad (15)$$

$$f(p, r, Fo) \triangleq \Phi[Q_0(x, z, Fo)]; \quad F(p, r, s) \triangleq L[f(p, r, Fo)]$$

и стандартных свойств линейных интегральных операторов  $\Phi[\bullet]$  и  $L[\bullet]$  [25, 2, 3] модифицированная смешанная задача (1)–(5) может быть представлена в виде краевой задачи для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка со специфическими условиями сопряжения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dy^2} + 2i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) \frac{dB}{dy} - \left[ (\mu_{11}p^2 + 2\mu_{13}pr + \mu_{33}r^2) + s \right] B &= 0, \quad -(H_1 + H_2) < y < -H_2; \\ \frac{d^2 B}{dy^2} - \left[ (p^2 + r^2) + b\mu_*^{-1}s \right] B &= 0, \quad 0 < y < H_3; \\ \left[ \frac{dB}{dy} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)B - \text{Bi}^{(1)}B \right] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} &= F(p, r, s); \\ B(p, -H_2 - 0, r, s) = \langle B(p, r, s) \rangle &= B(p, 0 + 0, r, s); \\ \mu_* \frac{dB}{dy} \Big|_{y=0+0} - \left[ \frac{dB}{dy} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)B \right] \Big|_{y=-H_2-0} &= \left\{ \left[ as + \mu(p^2 + r^2) \right] H_2 + Q_* \exp(-s\text{Fo}^*) \right\} \langle B \rangle; \\ \left[ \frac{dB}{dy} + \text{Bi}^{(3)}B \right] \Big|_{y=H_3} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение краевой задачи (16) может быть определено с использованием стандартных методов [21] и представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} B(p, y, r, s) \Big|_{y \in [-(H_1+H_2), -H_2]} &= C_1(p, r, s) \exp \left\{ - \left[ i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + \sqrt{s + \gamma_1(p, r)} \right] (y + H_2) \right\} + \\ &+ C_2(p, r, s) \exp \left\{ - \left[ i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) - \sqrt{s + \gamma_1(p, r)} \right] (y + H_2) \right\}; \\ B(p, y, r, s) \Big|_{y \in [0, H_3]} &= C_3(p, r, s) \exp \left\{ -y (b\mu_*^{-1})^{1/2} \sqrt{s + \gamma_2(p, r)} \right\} + \\ &+ C_4(p, r, s) \exp \left\{ y (b\mu_*^{-1})^{1/2} \sqrt{s + \gamma_2(p, r)} \right\}; \\ C_1(p, r, s) &= \frac{\alpha_2(p, r, s) \langle B(p, r, s) \rangle - \beta(p, r, s)}{1 + \alpha_2(p, r, s)}; \quad C_2(p, r, s) = \frac{\langle B(p, r, s) \rangle + \beta(p, r, s)}{1 + \alpha_2(p, r, s)}; \\ C_3(p, r, s) &= \frac{\langle B(p, r, s) \rangle}{1 + \alpha_1(p, r, s)}; \quad C_4(p, r, s) = \frac{\alpha_1(p, r, s) \langle B(p, r, s) \rangle}{1 + \alpha_1(p, r, s)}; \\ \alpha_2(p, r, s) &= \frac{\sqrt{s + \gamma_1(p, r)} - \text{Bi}^{(1)}}{\sqrt{s + \gamma_1(p, r)} + \text{Bi}^{(1)}} \exp \left[ -2H_1 \sqrt{s + \gamma_1(p, r)} \right]; \\ \beta(p, r, s) &= \frac{F(p, r, s)}{\sqrt{s + \gamma_1(p, r)} + \text{Bi}^{(1)}} \exp \left[ -i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)H_1 - H_1 \sqrt{s + \gamma_1(p, r)} \right]; \\ \alpha_1(p, r, s) &= \frac{\sqrt{s + \gamma_2(p, r)} - \text{Bi}^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}}}{\sqrt{s + \gamma_2(p, r)} + \text{Bi}^{(3)} \sqrt{\mu_* b^{-1}}} \exp \left[ -2H_3 (b\mu_*^{-1})^{1/2} \sqrt{s + \gamma_2(p, r)} \right]; \\ \gamma_1(p, r) &= (\mu_{11} - \mu_{12}^2) p^2 + 2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23}) pr + (\mu_{33} - \mu_{32}^2) r^2; \quad \gamma_2(p, r) = \mu_* b^{-1} (p^2 + r^2); \end{aligned} \tag{17}$$



$$\langle B(p,r,s) \rangle = \frac{2\beta(p,r,s)\sqrt{s+\gamma_1(p,r)}}{1+\alpha_2(p,r,s)} \left\{ aH_2s + Q_* \exp(-sFo^*) + \right. \\ \left. + \frac{1-\alpha_1(p,r,s)}{1+\alpha_1(p,r,s)} \sqrt{b\mu_*[s+\gamma_2(p,r)]} + \frac{1-\alpha_2(p,r,s)}{1+\alpha_2(p,r,s)} \sqrt{[s+\gamma_1(p,r)]} + \mu(p^2+r^2)H_2 \right\}^{-1},$$

где квадратичные формы  $\gamma_1(p,r)$  и  $\gamma_2(p,r)$  положительно определены [3, 6].

Сопоставление результатов, представленных равенствами (9) и (17), несмотря на внешние значимые различия математических моделей для определения независимых аддитивных составляющих процесса формирования искомого температурного поля, позволяет утверждать, что «технология» получения оценки влияния инерционной обратной связи термоактивной прокладки на этот процесс и в рассматриваемом случае в основном остается неизменной. Но при этом в рассматриваемой ситуации эта «технология» обладает и вполне определенной спецификой.

1. Согласно (17) изображение  $\langle B(p,r,s) \rangle$ , являющееся основой искомой оценки влияния инерционной обратной связи термоактивной прокладки на температурное поле объекта исследований (вторая независимая аддитивная составляющая), в качестве множителя содержит изображение  $F(p,r,s)$  плотности мощности  $Q_0(x,z,Fo)$  внешнего теплового потока. А про функционал  $Q_0(x,z,Fo)$  известно лишь, что он интегрируем с квадратом как по совокупности пространственных переменных в  $\mathbb{R}^2$ , так и по временному переменному на полуинтервале  $[0, +\infty)$ . Поэтому согласно (15) при переходе в пространство оригиналов неизбежно использование теоремы о свертках для реализованных интегральных преобразований (14) и (7) [2, 3, 22, 25].

2. Согласно равенствам (17) изображение  $\langle B(p,r,s) \rangle$  имеет весьма сложную структуру и переход из пространства изображений в пространство оригиналов для оценки, определяющей влияние инерционной обратной связи термоактивной прокладки разделительной системы двух различных сред, обладающей анизотропным покрытием, на ее температурное поле с использованием стандартных свойств интегрального преобразования Лапласа и таблиц «изображение – оригинал» [2, 22–25] представляется маловероятным. Поскольку

изображение  $\langle B(p,r,s) \rangle$  имеет две точки ветвления

$$s_k = -\gamma_k(p,r), \quad k = \overline{1,2},$$

то при вычислении соответствующих интегралов Римана – Меллина целесообразно использовать стандартный контур [2], представленный на рис. 2.

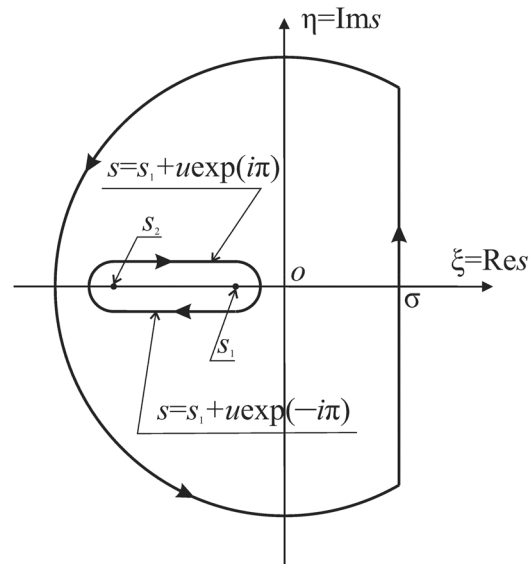


Рис. 2. Контур для вычисления интегралов Римана – Меллина при определении искомой оценки для второй независимой аддитивной составляющей температурного поля объекта исследований

Заметим, что корректность неравенства

$$\gamma_1(p,r) < \gamma_2(p,r), \quad \forall [p,r]^T \in \mathbb{R}^2$$

непосредственно следует из исходных допущений и равенств (17), определяющих положительно определенные квадратичные формы  $\gamma_1(p,r)$  и  $\gamma_2(p,r)$ .

3. Согласно равенствам (17) изображение  $\langle B(p,r,s) \rangle$ , а следовательно, и оценка, определяющая влияние инерционной обратной связи термоактивной прокладки на температурное поле объекта исследований, фактически зависит

не от параметров  $p$  и  $r$  использованного двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (14) как таковых, а от двух положительно определенных квадратичных форм  $\gamma_1(p, r)$  и  $\gamma_2(p, r)$ , представленных равенствами (17). Данное обстоятельство позволяет при проведении вычислительных экспериментов использовать известный подход [12], суть которого состоит в последовательной реализации двух этапов. На первом этапе в соответствии с известной теоремой [25] идентифицируем матрицу  $\Gamma \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  невырожденного преобразования, одновременно приводящего к диагональному виду положительно определенные квадратичные формы  $\gamma_1(p, r)$  и  $\gamma_2(p, r)$ . На втором этапе в двойном несобственном интеграле (14), реализующем оператор  $\Phi^{-1}[\bullet]$ , производим замену переменных с невырожденной матрицей  $\Gamma$  и далее используем существующую связь между двумерным экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье и двумерным интегральным косинус-преобразованием Фурье [25].

### Заключение

1. Процесс формирования искомого температурного поля полностью определен двумя независимыми аддитивными составляющими, первая из которых представлена функционалом  $\theta_1(y, Fo)$ , описывающим процесс формирования температурного поля вследствие отличия температур разделяемых сред от начальной температуры разделительной системы, а вторая – функционалом  $\theta_2(x, y, z, Fo)$ , описывающим процесс формирования температурного поля за счет воздействия теплового потока на анизотропное покрытие анализируемой системы в условиях ее охлаждения разделенными средами.

2. Специфика структуры функционала  $\theta_2(x, y, z, Fo)$  в пространстве изображений композиции используемых интегральных преобразований, согласно равенствам (17), явно указывает на проявление известного эффекта «сноса» температурного поля в анизотропном покрытии разделительной системы.

3. Механизм функционирования «термически тонкой» термоактивной прокладки, не учитывающей возможность протекания в ней теплодиффузионных процессов, качественно не искажает формируемое температурное поле разделительной системы, но требует количественных оценок.

### Список источников

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 552 с.
4. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Издательство Казанского университета, 1978. 188 с.
5. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. Москва: URSS, 2012. 653 с.
6. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. Москва: Физматлит, 2014. 312 с.
7. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции // Известия РАН. Энергетика. 2002. № 4. С. 131–141.
8. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81. № 3. С. 559–568.
9. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Базовая модель процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой // Известия РАН. Энергетика. 2009. № 2. С. 147–155.
10. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями // Известия РАН. Энергетика. 2010. № 3. С. 83–91.
11. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле конструкции с активной системой защиты, содержащей анизотропное покрытие // Известия РАН. Энергетика. 2013. № 6. С. 125–136.
12. Аттетков А.В., Волков И.К. Особенности процесса формирования температурного поля в системе с активной теплозащитой // Известия РАН. Энергетика. 2014. № 3. С. 69–81.
13. Аттетков А.В., Волков И.К. Процессы теплопереноса в системе с активной теплозащитой, обладающей обратной связью и анизотропным покрытием // Известия РАН. Энергетика. 2019. № 5. С. 148–158.
14. Аттетков А.В., Волков И.К. Теплоперенос в разделительной системе двух различных сред, обладающей активной теплозащитой, в условиях локального теплового воздействия // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 3. С. 124–138.
15. Негойце К. Применение теории систем к проблемам управления. Москва: Мир, 1981. 184 с.
16. Дезоер Ч. Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. Москва: Наука, 1983. 278 с.
17. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Москва: Высшая школа, 1970. 712 с.

18. **Аттетков А.В., Власова Л.Н., Волков И.К.** Особенности формирования температурного поля в системе под воздействием осциллирующего теплового потока // *Тепловые процессы в технике*. 2012. Т. 4. № 12. С. 553–558.
19. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Осциллирующая составляющая квазистационарного температурного поля системы, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока // *Известия РАН. Энергетика*. 2015. № 5. С. 124–134.
20. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Осциллирующая составляющая температурного поля анизотропного полупространства, на изотропное покрытие подвижной границы которого воздействует импульсно-периодический тепловой поток // *Тепловые процессы в технике*. 2017. Т. 9. № 1. С. 19–26.
21. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
22. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Операционное исчисление. Москва: Высшая школа, 1966. 408 с.
23. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва: Наука, 1969. 344 с.
24. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Справочник по операционному исчислению. Москва: Высшая школа, 1965. 466 с.
25. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. Москва: Издательство иностранной литературы, 1955. 668 с.
26. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1969. 368 с.

### References

1. **Karlsru G., Eger D.** *Теплопроводность твёрдых тел* [Thermal conductivity of solids]. Moscow, Nauka, 1964, 488 p. (In Russ.)
2. **Lykov A.V.** *Теория теплопроводности* [Theory of heat conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1967, 600 p. (In Russ.)
3. **Kartashov E.M.** *Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 552 p. (In Russ.)
4. **Pudovkin M.A., Volkov I.K.** *Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчётам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении* [Boundary-value problems of the mathematical theory of heat conduction in application to calculations of temperature fields in oil reservoirs in water flooding]. Kazan, 1978, 188 p. (In Russ.)
5. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** *Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термомупругости* [Analytical theory of thermal conductivity and applied thermoelasticity]. Moscow, URSS, 2012, 653 p. (In Russ.)
6. **Formalev V.F.** *Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 312 p. (In Russ.)
7. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Thermoactive gasket as a means of controlled influence on the temperature field of the structure. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2002, no. 4, pp. 131–141.
8. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Mathematical modeling of the process of heat transfer process in a shielded half-space with a thermoactive spacer under external thermal action. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Engineering Physics Journal*, 2008, vol. 81, no. 3, pp. 588–597.
9. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Basic model of the heat transfer process in a shielded half-space with a thermoactive gasket. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2009, no. 2, pp. 147–155.
10. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Temperature field of a multilayer half-space with non-ideal thermal contact between layers. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2010, no. 3, pp. 83–91.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperature field of a structure with an active protection system containing an anisotropic coating. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2013, no. 6, pp. 125–136.
12. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Peculiarities of the process of temperature field formation in a system with active thermal protection. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2014, no. 3, pp. 69–81.
13. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Heat transfer processes in a system with active thermal protection with feedback and anisotropic coating. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2019, no. 5, pp. 148–158. (In Russ.)
14. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Heat transfer in a separation system of two different media with active thermal protection under conditions of local thermal exposure. *Thermal processes in engineering*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 124–138. (In Russ.)
15. **Negoytse K.** *Применение теории систем к проблемам управления* [Application of systems theory to control problems]. Moscow, Mir, 1981, 184 p. (In Russ.)
16. **Dezoer C.** *Системы обратной связи: вход-выходные соотношения* [Feedback systems: Input-output relations]. Moscow, Nauka, 1983, 278 p. (In Russ.)
17. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Уравнения в частных производных математической физики* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1970, 712 p. (In Russ.)
18. **Attetkov A.V., Vlasova L.N., Volkov I.K.** Features of the formation of the temperature field in the system under the influence of an oscillating heat flow. *Thermal processes in engineering*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 553–558. (In Russ.)
19. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Oscillating component of the quasi-stationary temperature field of a system under the influence of a pulse-periodic heat flow. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2015, no. 5, pp. 124–134. (In Russ.)
20. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Oscillating component of the temperature field of an anisotropic half-space, the isotropic coating of the moving boundary of which is affected by a pulse-periodic heat flow. *Thermal processes in engineering technology*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 19–26. (In Russ.)
21. **El'sgol'ts L.E.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka, 1969, 424 p. (In Russ.)
22. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Операционное исчисление* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1966, 408 p. (In Russ.)
23. **Bateman G., Erdelyi A.** *Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина* [Tables of integral transformations. Fourier, Laplace, Mellin transformations]. Moscow, Vysshaya shkola, 1969, 344 p. (In Russ.)
24. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Справочник по операционному исчислению* [Handbook of operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965, 466 p. (In Russ.)

25. **Sneddon I.** Preobrazovaniya Fur'e [Fourier transforms]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1955, 668 p. (In Russ.)
26. **Bellman R.** Vvedenie v teoriyu matrits [Introduction to Matrix Analysis]. Moscow, Nauka, 1969, 368 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 04.10.2022; одобрена после рецензирования 07.11.2022; принята к публикации 14.11.2022.

The article was submitted on 04.10.2022; approved after reviewing on 07.11.2022; accepted for publication on 14.11.2022.