На правах рукописи

НИКАБАДЗЕ МИХАИЛ УШАНГИЕВИЧ

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТОНКИХ ТЕЛ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой

степени доктора физико–математических наук

МОСКВА – 2014 г.

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана

Научный консультант: д.ф.-м.н., профессор,
Димитриенко Юрий Иванович

Официальные оппоненты: **Радаев Юрий Николаевич**,
д.ф.-м.н., проф., ИПМех имени А.Ю. Ишлинского РАН, ведущий научный сотрудник

Зингерман Константин Моисеевич,
д.ф.-м.н., проф., ТвГУ, ф-т прикладной матемематики и кибернетики, заведующий кафедрой вычислительной математики

Каюмов Рашит Абдулхакович,
д.ф.-м.н., проф., КазГАСУ, строительный ф-т, заведующий кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости

Ведущая организация: Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ), г. Казань

Защита диссертации состоится 10 декабря 2014 г. в 15 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и в сети Интернет: на сайте ВАК РФ http://www.vak.ed.gov.ru и на веб-сайте МАИ http://www.mai.ru/events/defens/doctor

Автореферат диссертации разослан 5 ноября 2014 г.

Отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенный печатью организации, просим направлять в адрес диссердационного совета университета.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.125.05 Г.В. Федотенков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В последние годы наблюдаются создание и интенсивное внедрение новых материалов в современное машинно- и приборостроение. Это в свою очередь вызвало быстрый рост интереса к изучению зависимости физико-механических свойств этих материалов от их внутренней структуры. Как известно, синтез материалов с заданными физико-механическими свойствами относится к разряду «вечных» проблем механики материалов и материаловедения. Особенно актуальными эти задачи стали в последние два десятилетия, когда появились возможности управления структурой материала на уровне отдельных молекул и даже атомов.

Появление и широкое внедрение в различные отрасли техники новых материалов (композитных материалов слоистой и волокнистой структуры, наноматериалов и, вообще говоря, материалов с внутренней структурой) вызвало также необходимость в разработке новых методов расчета и проектирования тонких тел, изготовленных из этих материалов. Классическая теория, которая безраздельно господствовала в прикладных методах расчета тонкостенных конструкций, оказалась неспособной удовлетворительно описать напряженно-деформированное состояние композитных тонких тел. Кроме того, классическая теория упругости оказывается не в состоянии удовлетворительно объяснить закономерности некоторых явлений, которые можно наблюдать в реальных упругих телах. Например, на основании классической теории упругости не удается объяснить и предсказать законы распространения коротких акустических волн в кристаллических твердых телах, поликристаллических металлах и высоких полимерах.

Классическая теория также не дает достаточно удовлетворительной согласованности ее результатов с экспериментальными данными для тел с ярко выраженной поликристаллической структурой в условиях сложного напряженного состояния с большим градиентом напряжений. В частности, эта теория не может дать какого-либо вразумительного объяснения влиянию градиента напряжений на усталостные характеристики поликристаллических материалов. Причину этой несогласованности теории и опыта, очевидно, надо искать в том, что сплошная упругая модель твердого тела, лежащая в основе классической теории упругости, принципиально не в состоянии отобразить те упругие свойства реальных тел, которые определяются их дискретной структурой. Следовательно, для объяснения этих явлений нужно новая модель твердого тела механики сплошной среды, в которой свойства, вытекающие из дискретной структуры реальных тел, были бы явно отражены.

Дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея, не могут быть объяснены в рамках классической модели сплошной среды. В рамках же среды Коссера (или более обобщенной среды) этот эффект имеет объяснение. При этом степень затухания амплитуды рэлеевской волны с глубиной, а также эллиптичность волны зависят от материальных констант среды, в том числе и от параметров, описывающих моментные свойства. Это обстоятельство позволяет надеяться на эффективное применение такого типа волн в возможных экспериментальных исследованиях, направленных на обнаружение микроконтинуального поведения материала и далее на определение материальных параметров.

Предположения классической теории упругости приводят к некорректностям в теориях трещин и дислокации, а также при рассмотрении тел с угловыми точками. То же самое можно сказать о телах другой реологии. Конечно, перечень явлений, для изучения которых классическая теория непригодна, можно было продолжать, однако с целью сокращения письма ограничимся вышесказанным.

Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих вибропоглащающих характеристик. В ряде случаев необходимость применения многослойных тонких тел вызывается конструктивными и эксплуатационными соображениями. Это очень важно при повышенных требованиях к безопасности конструкций, особенно в самолето- и ракетостроении, тем более, что прогресс вычислительной техники обеспечивает возможность проведения все более и более сложных численных расчетов.

К настоящему времени развит целый ряд теорий тонкостенных конструкций (стержней, пластин, оболочек и многослойных конструкций). Однако в связи с широким использованием тонких тел (одно-, двух-, трех- и многослойных конструкций), изготовленных из новых материалов возникает потребность создания новых теорий и усовершенствованных методов их расчета. Поэтому развитие метода ортогональных полиномов в механике тонких микрополярных и классических упругих тел и на его основе построение новых теорий тонких тел с внутренней структурой, а также создание эффективных методов их расчета являются важными и актуальными задачами. Следовательно, актуальным является получение аналитических решений каких-нибудь задач механики тонких тел.

Цель работы. Развитие метода ортогональных полиномов в механике тонких микрополярных и классических упругих тел и его применение при построении различных вариантов теорий однослойных и многослойных упругих тонких тел, а также аналитические и численные решения некоторых задач.

Настоящая диссертационная работа посвящена развитию метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел и его применению при построении различных вариантов теорий деформируемых твердых тонких тел. Диссертация состоит из 6 глав, заключения и списка литературы, включающего 530 наименований. Она изложена на

384 страницах. В ней для формул применяются тройная нумерация. Первая цифра означает номер главы, а вторая и третья – номер раздела и соотношения соответственно.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

— предложены различные параметризации областей однослойного и многослойного тонких тел. Создан новый тензорный аппарат для описания предложенных параметризаций и введен аппарат дифференциальных операторов для теорий тонких тел. Сформулированы фундаментальные теоремы для областей тонких тел при этих параметризациях;

— получены рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева, применяемые при построении различных вариантов теорий тонких тел;

— построена теория моментов относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Даны представления уравнений движения и притока тепла и ОС физического и теплового содержаний при рассматриваемых параметризациях, а также в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах;

— на основании развитого метода ортогональных полиномов (Лежандра и Чебышева) построены новые варианты теорий упругих тонких тел (однослойных и многослойных тонких тел с одним малым размером, а также тонких тел с двумя малыми размерами и тонких плоских областей с одним малым размером) при различных параметризациях областей этих тел, среди которых новая параметризация более доступная к экспериментальному изучению;

— исходя из вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенных вариационных принципов типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории, получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из последних в свою очередь выведены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. При этом для микрополярной теории многослойных тонких тел как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера, так как из них легко выводятся остальные (Лагранжа, Кастильяно). Доказаны теоремы о минимуме стационарной точки лагранжиана и максимуме стационарной точки кастильяниана, а также теорема о единственности обобщенного решения краевых задач;

— даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах для тонких тел. Построены корректирующие слагаемые, позволяющие удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхносрях. По способу В.В.Понятовского найдены различные выражения для компонент тензора напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям. Доказано, что способ В.В.Понятовского эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов;

— исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS (тонких и пологих) и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Выведены граничные условия. Даны сравнения уравнений различных теорий. Сформулирована гипотеза о жесткости в поперечном направлении тонких тел;

— найдены обратные тензоры-операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях как для изотропных однородных материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии. В этих случаях получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды. При этом в случае отсутствия объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала, что наводит на мысль, что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды. Построен также обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды с кусочно-гладкой плоской границей. Выявлены случаи, для которых легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения;

— из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения квазистатической задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае и в перемещениях и вращениях в микрополярном случае. Из последних систем уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных векторов-функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с учетом этих условий. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них — система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функций. На основании найденного обратного оператора к оператору любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Поэтому, используя метод И.Н.Векуа для решения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение;

— получены расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника, а также для редуцированной среды, содержащие уравнение классической теории;

— выведены расщепленные системы уравнений квазистатической задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений, из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории в перемещениях. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Используя метод Векуа, для этих систем, а также для уравнений редуцированной среды можно выписать аналитические решения;

— приведены численные решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с защемленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с защемленными краями.

Обоснованность и достоверность теоретических положений и выводов диссертации подтверждена строгими математическими выводами, основанными на положениях механики, линейной алгебры, функционального анализа, теории матриц, дифференциальной геометрии и тензорного исчисления и которые согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения многих важных практических задач в тех областях техники, в которых применяются тонкие тела. В частности, могут быть использованы в ЦАГИ, ЦИАМ, МГУ, ИТПМ СО РАН, ИПМ РАН, ЦНИИМаш, МАИ и в других организациях, занимающихся разработкой и совершенствованием образцов автомобильной, ракетной и авиационной техники.

На защиту выносится развитие метода ортогональных полиномов в механике тонких микрополярных и классических упругих тел и его применение при построении различных вариантов теорий однослойных и многослойных упругих тонких тел, а также аналитические и численые решения некоторых задач.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова (Казань. 1998 г.), на 16-ой межреспуб. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Новосибирск. 1999 г.), на междунар. конф. «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation» (Киев. 1999 г.), на научно-исследовательских семинарах кафедры механики композитов мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Б.Е. Победри (1998-2013 г.г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. И.А. Кийко (2009-2013 г.г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., акад. РАН Р.И. Нигматулина, на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина, акад. РАН И.Г. Горячевой и д.ф.-м.н., проф. В.М. Александрова, на научно-исследовательском семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н. проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н., М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф., С.А. Агафонова (2007–2013 г.г.), на научно-исследовательском семинаре «Проблемы механики сплошной среды» в ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН под руководством д.ф.-м.н. проф. С.В. Нестерова и д.ф.-м.н. проф. Д.В. Георгиевского, на научно-исследовательском семинаре МГТУ им. Н.Э.Баумана под руководством проф. В.С. Зарубина (2010 г.), на «Семинаре по МСС им. Л.А.Галина ИПМех РАН» под руководством проф. В.М.Александрова, проф. В.Н.Кукуджанова и проф. А.В. Манжирова (2010 г.), на конференциях «Ломоносовские чтения», секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова (2003–2014 г.г.), на междисциплинарном семинаре с международным участием «Методы многомастабного моделирования и их приложения» ВЦ РАН под руководством академика РАН Е.И.Моисеева, проф. С.А.Лурье, проф. С.Я.Степанова (2014 г.), на научно-исследовательский семинар кафедры № 902 МАИ «Сопротивление материалов. Динамика и прочность машин» по механике под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В.Тарлаковского, (2014 г.), на «Семинаре по механике прочности и разрушения ИПМех РАН» под руководством член-корр. РАН Р.В. Гольдштейна (2014 г.).

Публикация результатов. Результаты диссертации достаточно полно опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из 6 глав, заключения и списка литературы, включающего 530 наименований. Она изложена на 384 страницах. В ней для формул применяются тройная нумерация. Первая цифра означает номер главы, а вторая и третья – номер раздела и соотношения соответственно.

Личный вклад автора. Представленные в работе научные результаты получены лично автором. Во всех случаях использования результатов других исследований в работе приведены ссылки на источники информации.

Автор выражает искреннюю благодарность за постоянное внимание к работе и ценные советы научному консультанту, профессору Ю.И.Димитриенко, а также профессорам: Б.Е.Победре, В.И.Горбачеву, С.В.Шешенину, Д.В.Георгиевскому и сотрудникам кафедр «Механика композитов» Механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э.Баумана за сотрудничество и взаимопонимание.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан краткий обзор литературы (обзор, включающий 976 наименований, приведен в [50]), обоснована актуальность научных теоретических исследований. Сформулированы: цель работы, ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость.

1 В первой главе «О параметризации области тонкого тела трехмерного евклидова пространства» рассмотрена эффективная параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями. Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Разработан новый тензорный аппарат для описания введенных параметризаций. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее новой параметризации [50, 53, 79, 81, 83].

1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Компоненты переноса и представление единичного тензора второго ранга (ЕТВР). Фундаментальная теорема. Рассматривается область трехмерного евклидова пространства, ограниченную двумя лицевыми поверхностями $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ и боковой поверхностью $\sum$. В дальнейшем условно лицевую поверхность $\overset{(-)}{S}$ будем называть внутренней базовой поверхностью, а $\overset{(+)}{S}$ – внешней базовой поверхностью. Кроме того, поверхность $\overset{(-)}{S}$ часто будем называть основной базовой поверхностью.

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде

$$\mathbf{r}(x', x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3\mathbf{h}(x') = (1 - x^3)\overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3\overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \ \forall x^3 \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2) \tag{1.2}$$

являются векторными параметрическими уравнениями базовых поверхностей $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ соответственно, $x' = (x^1, x^2)$ — произвольная точка на $\overset{(-)}{S}$. Вектор

$$\mathbf{h}(x') = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \tag{1.3}$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}$ на внешнюю $\overset{(+)}{S}$, вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям.

Для производных по x^P от соотношений (1.1) и (1.2) в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ введены соответственно[1] обозначения $\mathbf{r}_P \equiv \partial_P \mathbf{r} = \partial \mathbf{r}/(\partial x^P)$, $\mathbf{r}_{\underset{P}{*}} = \partial_P \overset{(*)}{\mathbf{r}}$, $* \in \{-, +\}$. Здесь $\overset{(-)}{M}$ — некоторая точка на внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, $\overset{(+)}{M}$ — ее образ на внешней базовой поверхности $\overset{(+)}{S}$ при отображении $\mathbf{h} : \overset{(-)}{S} \to \overset{(+)}{S}$, а M — точка на эквидистантой поверхности S, определяемой (1.1) при $x^3 = \text{const}$. Следовательно, пары векторов $\mathbf{r}_{\underset{1}{*}}$, $\mathbf{r}_{\underset{2}{*}}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, с помощью которых обычным образом определяются соответствующие контравариантные базисы $\overset{*}{\mathbf{r}}{}^1$, $\overset{*}{\mathbf{r}}{}^2$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ [84, 89].

Дифференцируя (1.1) сперва по x^P, а потом по x^3, получим

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\underset{P}{-}} + x^3 \mathbf{h}_P = (1 - x^3)\mathbf{r}_{\underset{P}{-}} + x^3 \mathbf{r}_{\underset{P}{+}}, \ \ \mathbf{h}_P \equiv \partial_P \mathbf{h}; \ \ \mathbf{r}_3 \equiv \partial_3 \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{h}(x'), \ \ \forall x^3 \in [0, 1]. \tag{1.4}$$

На основании третьего соотношения (1.4) можно принять, что

$$\mathbf{r}_{\underset{3}{-}} = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_{\underset{3}{+}} \equiv \partial_3 \mathbf{r} = \mathbf{h}(x'), \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \tag{1.5}$$

В силу (1.5) соотношения (1.4) можно объединить и представить в виде

$$\mathbf{r}_p(x', x^3) = \mathbf{r}_{\underset{p}{-}}(x') + x^3 \mathbf{h}_p(x') = (1 - x^3)\mathbf{r}_{\underset{p}{-}}(x') + x^3 \mathbf{r}_{\underset{p}{+}}(x'). \tag{1.6}$$

Тройки векторов $\mathbf{r}_{\underset{1}{\star}}, \mathbf{r}_{\underset{2}{\star}}, \mathbf{r}_{\underset{3}{\star}}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ образуют трехмерные (пространственные) ковариантные базисы. По этим базисам, можно построить соответствующие им контравариантные базисы $\overset{\star}{\mathbf{r}}{}^1, \overset{\star}{\mathbf{r}}{}^2, \overset{\star}{\mathbf{r}}{}^3$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$. В самом деле, на основании их определения имеем [84, 89]

[1] Зависимость величин от x' означает их зависимость от x^1 и x^2. Применяются обычные правила тензорного исчисления [84, 86, 89]. Прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1,2 и 1,2,3 соответственно. $\emptyset$ — символ пустого множества. Запись $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ означает, что если $* = -$, то $\overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}$; если, $* = \emptyset$, то $M \in S$; если $* = +$, то $\overset{(+)}{M} \in \overset{(+)}{S}$. Запись $\mathbf{r}_{\tilde{p}} = g^{\breve{q}}_{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\breve{q}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, означает, что если, например, $\sim = \emptyset$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_p = g^{\bar{q}}_p \mathbf{r}_{\underset{q}{-}}$, если $\sim = +$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_{\underset{p}{+}} = g^{\bar{q}}_{\underset{p}{+}} \mathbf{r}_{\underset{q}{-}}$ и т.д. Перебирая все значения, получим все соотношения. Эти соглашения применяются и в дальнейшем.

$$\mathbf{r}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2} C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \qquad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \tag{1.7}$$

где $C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = \left(\mathbf{r}^{\tilde{k}} \times \mathbf{r}^{\tilde{p}}\right) \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ — контравариантные компоненты дискриминантных тензоров в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, соответственно.

Введены в рассмотрение следующие матрицы:

$$g_{\breve{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\breve{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad g_{\breve{p}}^{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\breve{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g^{\breve{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}^{\breve{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, g_{\tilde{q}}^{\breve{p}} = \mathbf{r}^{\breve{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \tag{1.8}$$

Тогда нетрудно доказать, что между базисными векторами и матрицами (1.8) имеются сохраняющие силу при жонглировании индексами связи:

$$\mathbf{r}_{\breve{p}} = g_{\breve{p}}^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}} = g_{\breve{p}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{p}}^{\breve{q}} = g_{\tilde{p}}^{\overset{*}{n}} g_{\underset{*}{n}}^{\breve{q}}, \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \tag{1.9}$$

На основании (1.6) из (1.8) получим

$$\begin{gathered}
g_{p\breve{q}} = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\breve{q}} = (1 - x^3) g_{\overset{-}{p}\breve{q}} + x^3 g_{\overset{+}{p}\breve{q}}, \quad g_p^{\breve{q}} = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^{\breve{q}} = (1 - x^3) g_{\overset{-}{p}}^{\breve{q}} + x^3 g_{\overset{+}{p}}^{\breve{q}}, \\
g_{pq} = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q = g_{p\breve{n}} g_q^{\breve{n}} = (1 - x^3)^2 g_{\overset{-}{p}\overset{-}{q}} + x^3 (1 - x^3) \big(g_{\overset{-}{p}\overset{+}{q}} + g_{\overset{+}{p}\overset{-}{q}}\big) + (x^3)^2 g_{\overset{+}{p}\overset{+}{q}}, \\
g_{\overset{+}{p}\overset{+}{q}} = g_{\overset{+}{p}\overset{-}{m}} g_{\overset{+}{q}}^{\overset{-}{m}}, \quad \smile \in \{-, +\}.
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Выражения для $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$ имеет вид

$$\sqrt{g} = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \det\left(g_p^{\tilde{q}}\right), \quad \overset{(\sim)}{\vartheta} \equiv \sqrt{g \overset{(\sim)}{g}{}^{-1}} = \det\left(g_p^{\tilde{q}} = \det\left(g_P^{\tilde{Q}}\right) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}}, \ \sim \in \{-, +\}, \tag{1.11}$$

где ϵ^{IJ}, ϵ_{KL} — символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} = \left(\mathbf{r}_{\tilde{1}} \times \mathbf{r}_{\tilde{2}}\right) \cdot \mathbf{r}_{\tilde{3}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{\overset{(-)}{g}} = \sqrt{g}\,\Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{\overset{(+)}{g}} = \sqrt{g}\,\Big|_{x^3=1}.$$

Нетрудно заметить, что имеет место более общие соотношения, чем (1.11)

$$\begin{gathered}
\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} = \sqrt{\overset{(\smile)}{g}} \det\left(g_{\tilde{P}}^{\breve{Q}}\right), \quad \overset{(\underset{\sim}{\smile})}{\vartheta} \equiv \det\left(g_{\tilde{P}}^{\breve{Q}}\right) = \det\left(g_{\tilde{p}}^{\breve{q}}\right) = \sqrt{\overset{(\sim)}{g} \overset{(\smile)}{g}{}^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\tilde{I}}^{\breve{K}} g_{\tilde{J}}^{\breve{L}}, \\
\overset{(\underset{\sim}{\smile})}{\vartheta} \equiv \sqrt{\overset{(\sim)}{g} \overset{(\smile)}{g}{}^{-1}} = \overset{(\underset{\smile}{\sim})}{\vartheta}{}^{-1}, \quad \overset{(\approx)}{\vartheta} = 1, \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}.
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Учитывая (1.12), из второго соотношения (1.11) получим

$$\begin{gathered}
\overset{(-)}{\vartheta} = \sqrt{g \overset{(-)}{g}{}^{-1}} = (1 - x^3)^2 \overset{(=)}{\vartheta} + x^3 (1 - x^3) \operatorname{tr}\big(g_{\overset{+}{J}}^{\overset{-}{I}}\big) + (x^3)^2 \overset{(\mp)}{\vartheta}, \\
\overset{(+)}{\vartheta} = \sqrt{g \overset{(+)}{g}{}^{-1}} = (1 - x^3)^2 \overset{(\pm)}{\vartheta} + x^3 (1 - x^3) \operatorname{tr}\big(g_{\overset{-}{J}}^{\overset{+}{I}}\big) + (x^3)^2 \overset{\binom{+}{+}}{\vartheta}.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Нетрудно доказать, что для $\mathbf{r}^{\breve{k}}$ (1.7) и матриц (1.8) имеем выражения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{\breve{k}} = \frac{1}{2}\overset{(\breve{\sim})}{\vartheta}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g^{\tilde{m}}_{\breve{p}}g^{\tilde{n}}_{\breve{q}}\mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad g^{\breve{k}}_{\tilde{l}} = \mathbf{r}^{\breve{k}}\cdot\mathbf{r}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\breve{\sim})}{\vartheta}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g^{\tilde{m}}_{\breve{p}}g^{\tilde{n}}_{\breve{q}},\\
&g^{\tilde{l}\,\breve{k}} = \mathbf{r}^{\breve{k}}\cdot\mathbf{r}^{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\breve{\sim})}{\vartheta}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}g^{\tilde{m}}_{\breve{p}}g^{\tilde{n}}_{\breve{q}}g^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim\,\in\{-,+\},\ \smile\,\in\{-,\emptyset,+\}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Из (1.14) при $\smile\,=\emptyset$ получаем

$$
g^{k}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g^{\tilde{m}}_{p}g^{\tilde{n}}_{q}, \ \ g^{k\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}g^{\tilde{m}}_{p}g^{\tilde{n}}_{q}g^{\tilde{s}\tilde{l}}, \ \ \sim\,\in\{-,+\}. \tag{1.15}
$$

Представление ЕТВР имеет вид

$$
\underset{\sim}{\mathbf{E}} = g^{\breve{n}}_{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\breve{n}}, \quad \sim,\smile\,\in\{-,\emptyset,+\}, \tag{1.16}
$$

сохраняющий силу при жонглировании[2] немыми индексами. Из (1.16) видно, что матрицы (1.8) (см. также (1.14), (1.15)) являются компонентами ЕТВР.

Введены следующие определения:

Определение 1.1. Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки в виде (1.1), называется новой параметризацией области тонкого тела (НПОТТ) трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. При этом она называется регулярной, если внутренняя $\overset{(-)}{S}$ и внешняя $\overset{(+)}{S}$ поверхности — регулярные поверхности.

Определение 1.2. Компоненты $g^{\breve{q}}_{\tilde{p}}$, $\sim,\smile\,\in\{-,\emptyset,+\}$, $\sim\,\neq\,\smile$ и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются компонентами переноса ЕТВР при НПОТТ.

Определение 1.3. Компоненты $g_{\tilde{p}\tilde{q}}$, $g^{\tilde{q}}_{\tilde{p}}$, $g_{\tilde{p}\tilde{q}}$ $\sim\,=-$ $(\sim\,=+)$, и компоненты переноса $g_{\tilde{p}\breve{q}}$, $g^{\breve{q}}_{\tilde{p}}$, $\sim\,=+$, $\smile\,=-$ $(\sim\,=-$, $\smile\,=+)$, называются основными компонентами ЕТВР при НПОТТ, если в качестве основной базовой применяется внутренняя (внешняя) базовая поверхность.

Компоненты переноса и компоненты ЕТВР, зависящие от поперечной координаты x^3, представлены в виде рядов относительно этой координаты:

$$
\begin{aligned}
&g^{P}_{\underset{M}{-}} = \sum_{k=0}^{\infty}\underset{(k)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}(x^3)^k, \ \ g^{3}_{\underset{M}{-}} = -g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}\sum_{s=0}^{\infty}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}(x^3)^{s+1}, \ \ g^{PQ} = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)g^{\bar{Q}\bar{M}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}(x^3)^s,\\
&g^{P3} = -g^{\bar{3}}_{\underset{Q}{+}}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\underset{(s)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}g^{\bar{M}\bar{Q}}(x^3)^{s+1}, \ \ g^{33} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}g^{\bar{3}}_{\underset{Q}{+}}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\underset{(s)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}g^{\bar{M}\bar{Q}}(x^3)^{s+2},\\
&g^{P}_{\underset{M}{-}}g^{Q}_{\underset{N}{-}} = \sum_{s=0}^{\infty}\underset{(s)}{B}{}^{\bar{P}\bar{Q}}_{\underset{M}{+}\underset{N}{+}}(x^3)^s, \ \ \underset{(s)}{B}{}^{\bar{P}\bar{Q}}_{\underset{M}{+}\underset{N}{+}} = \sum_{r=0}^{s}\underset{(s-r)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}\underset{(r)}{A}{}^{\bar{Q}}_{\underset{N}{+}}, \ \ \underset{(0)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}} = g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}}, \ \ \underset{(1)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}} = g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}},\\
&\underset{(2)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}} = \big(g^{\bar{P}}_{\underset{N}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{N}{+}}\big)\big(g^{\bar{N}}_{\underset{M}{-}} - g^{\bar{N}}_{\underset{M}{+}}\big), \ldots, \ \ \underset{(n)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}} = \big(g^{\bar{P}}_{\underset{N_1}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{N_1}{+}}\big)\big(g^{\bar{N}_1}_{\underset{N_2}{-}} - g^{\bar{N}_1}_{\underset{N_2}{+}}\big)\ldots\big(g^{\bar{N}_{n-1}}_{\underset{M}{-}} - g^{\bar{N}_{n-1}}_{\underset{M}{+}}\big).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее НПОТТ формулируется в виде.

[2] Под жонглированием немыми индексами понимается то, что, если один из индексов опускается, то соответствующий ему индекс поднимается, и наоборот.

Теорема 1.1. *Наличие единичного тензора второго ранга, представленного в виде* (1.16), *необходимо и достаточно для существования, и притом единственной, с точностью до движения в* $\mathbb{R}^3$ *некоторой регулярной области тонкого тела при ее новой параметризации. При этом число независимых основных компонент ЕТВР зависит от типа семейства параметризации.*

2 Во второй главе «Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов» выписаны основные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго родов, с помощью которых в свою очередь получены несколько дополнительных соотношений, играющих важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел, как при классической, так и при новой (неклассической) параметризации областей этих тел. Определены моменты тензорных полей, их компонент и некоторых дифференциальных операторов от них в криволинейных координатах. В частности, определены моменты скалярных и тензорных функций, а также их производных и повторных производных. Кроме того, получены представления и найдены моменты относительно полиномов Чебышева лапласиана, градиента, ротора, повторного градиента, дивергенции, повторной дивергенции тензора второго ранга, градиента дивергенции. Выведены выражения для моментов k-го порядка произведения двух функций на произвольную степень поперечной координаты.

2.1 Основные рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Чебышева первого и второго родов. Полиномы Чебышева первого и второго родов на сегменте [-1,1] обозначаются через $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и $U_n(x) = 1/(n+1)T'_{n+1}(x)$, а смещенные полиномы Чебышева первого и второго родов на [0,1] – через $T^*_n(t) = T_n(2t-1)$ и $U_n(t)^* = U_n(2t-1)$ соответственно, где $-1 \le x \le 1$, $x = 2t-1$, $0 \le t \le 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел. Основные рекуррентные формулы для смещенных полиномов Чебышева первого и второго родов на $[0,1]$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&4tT^*_n(t) = T^*_{n-1}(t) + 2T^*_n(t) + T^*_{n+1}(t), \quad n \ge 1,\\
&4tT^{*\prime}_n(t) = \frac{n}{n-1}\,T^*_{n-1}(t) + 2T^{*\prime}_n(t) + \frac{n}{n+1}\,T^*_{n+1}(t), \quad n > 1,\\
&T^{*\prime}_n(t) = 4nT^*_{n-1}(t) + \frac{n}{n-2}\,T^{*\prime}_{n-2}(t), \quad n > 2;\\
&4tU^*_n(x) = U^*_{n-1}(t) + 2U^*_n(t) + U^*_{n+1}(t), \quad n \ge 1,\\
&2tU^{*\prime}_n(x) = 2nU^*_n(t) + U^{*\prime}_{n-1}(t) + U^{*\prime}_n(t), \quad n \ge 1,\\
&U^{*\prime}_n(x) = 4nU^*_{n-1}(t) + U^{*\prime}_{n-2}(t), \quad n \ge 2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ниже с целью сокращения письма дополнительные рекуррентные соотношения выпишем только для смещенных полиномов Чебышева второго рода.

2.2 Дополнительные рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Чебышева второго рода. Эти соотношения легко получаются из соответствующих основных рекуррентных соотношений (2.1). Некоторые из них имеют вид [43, 50]

$$2^{2s}t^s U_k^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p U_{k-s+p}^*(t), \quad k-s \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

$$2^{2s}t^s U_m^*(t) U_n^*(t) = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q U_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n-m-s \geq 0, \tag{2.3}$$

$$U_n^{*\prime}(t) = 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(n-2k)U_{n-(2k+1)}^*(t) = 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(2k+1+a)\,U_{2k+a}^*(t), \quad n \geq 1, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} U_n^{*\prime\prime}(t) &= 2^4\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}(k+1)(n-k)[n-(2k+1)]U_{n-(2k+2)}^*(t) = \\ &= 2^2\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}(2k+2-a)\big[(n+1)^2-(2k+2-a)^2\big]U_{2k+1-a}^*(t), \quad n \geq 2, \end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^s U_n^{*\prime}(t) &= 4\sum_{k=0}^{(n-s-2)/2}\sum_{p=0}^{2s}(n-2k)C_{2s}^p U_{p-u}^*(t) + 4s\sum_{p=1}^{2s} C_{2s}^p\,U_{p-1}^*(t) + \\ &+4\sum_{k=(n-s+2)/2}^{[(n-1)/2]}(n-2k)\Big[-\sum_{q=2}^{u} C_{2s}^{q-2}U_{u-q}^*(t) + \sum_{p=u}^{2s} C_{2s}^p U_{p-u}^*(t)\Big], \\ & u = 2k+1+s-n, \quad n-s=2l, \quad l \geq 0,\ n \geq 1,\ s \geq 0, \end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^s U_n^{*\prime\prime}(t) &= 2^4\sum_{k=0}^{(n-s-2)/2}\sum_{p=0}^{2s}(k+1)(n-k)[n-(2k+1)]C_{2s}^p U_{p-r}^*(t) + \\ &+2^4\sum_{k=(n-s)/2}^{[(n-2)/2]}(k+1)(n-k)[n-(2k+1)]\Big[-\sum_{q=2}^{r} C_{2s}^{q-2}\,U_{r-q}^*(t) + \sum_{p=r}^{2s} C_{2s}^p\,U_{p-r}^*(t)\Big] \\ & r = 2k+2+s-n, \quad n \geq 2,\ n-s=2l,\ l \geq 0,\ s \geq 0, \end{aligned}\tag{2.7}$$

Здесь $a = n-1-2\big[(n-1)/2\big]$, $[x]$ — целая часть числа x, а C_m^n — биномиальные коэффициенты. Следует заметить, что все соотношения (2.2) – (2.7), справедливые, за исключением (2.3), и для системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, можно доказать методом математической индукции. Для системы ортонормированных полиномов (2.3) имеет вид

$$2^{2s}t^s \hat{U}_m^*(t)\hat{U}_n^*(t) = \hat{U}_0^*\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q \hat{U}_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n-m-s \geq 0. \tag{2.8}$$

Приведем еще соотношения, которые применяются при представлении в моментах уравнений и ОС для неоднородного относительно x^3 материала. Они имеют вид [43, 50]

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{M}\big[2^{2s}(x^3)^s fg\big] = \hat{U}_0^*\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{2s}\sum_{p=0}^{k-s+q} C_{2s}^q \overset{(n+p)}{f}\overset{(n+k-s-p+q)}{g},\ k-s \geq 0,\ s \geq 0, \\ &\overset{(k)}{M}\big[2^{2(k+1)}(x^3)^{k+1} fg\big] = \hat{U}_0^*\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{2(k+1)}\sum_{p=0}^{q-1} C_{2k+2}^q \overset{(n+p)}{f}\overset{(n-p-1+q)}{g},\ k \geq 0, \\ &\overset{(k)}{M}\big[2^{2(k+s)}(x^3)^{k+s} fg\big] = \\ &=\hat{U}_0^*\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\sum_{q=2}^{s}\sum_{p=0}^{s-q} C_{2(k+s)}^{q-2}\overset{(n+p)}{f}\overset{(n+s-p-q)}{g} + \sum_{q=s}^{2(k+s)}\sum_{p=0}^{q-s} C_{2(k+s)}^q \overset{(n+p)}{f}\overset{(n-s-p+q)}{g}\Big),\ s \geq 2,\ k \geq 0, \\ &\overset{(p)}{\mathbf{M}}{}'(fg) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k}\Big(\overset{(n+q)}{f}{}'\overset{(n+k-q)}{g} + \overset{(n+k-q)}{f}\overset{(n+q)}{g}{}'\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k}\Big(\overset{(n)}{f}{}'\overset{(n+k-2q)}{g} + \overset{(n+k-2q)}{f}\overset{(n)}{g}{}'\Big). \end{aligned}\tag{2.9}$$

Здесь $f(x', x^3)$, $g(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V), m \geq 1$.

2.3 Моменты тензорного поля относительно смещенных полиномов Чебышева второго рода. Рассматривается некоторое тензорное поле $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$, которое зависит от координат x^1, x^2, x^3 области тела при ее новой параметризации [1, 18]. С целью сокращения письма часто вместо $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$ будем писать $\mathbb{F}(x', x^3)$, где $x' = (x^1, x^2)$, а $x^3 \in [0, 1]$. Кроме того, будем полагать, что рассматриваемые тензорные поля в достаточной степени гладки. Например, $\mathbb{F}(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$, где V – область, занимаемая тонким телом, а ∂V – ее граница. Тогда тензорное поле $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно координаты $x^3 \in [0, 1]$ для каждой фиксированной точки $x' \in \overset{(-)}{S}$ можно разлагать в ряд [92] по системе смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}^*_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x')\hat{U}^*_k(x^3), \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad x^3 \in [0, 1], \tag{2.10}$$

где $\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x')$ называется коэффициентом с номером k при разложении $\mathbb{F}(x', x^3)$ в ряд по системе полиномов $\{\hat{U}^*_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$.

Введено определение момента k-го порядка произвольного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода (аналогично определяется момент k-го порядка любой величины относительно произвольной системы полиномов).

Определение 2.1. Моментом k-го порядка какого-нибудь тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно полиномов $\{\hat{U}^*_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$, обозначаемым через $\mathbb{M}_{\hat{U}^*_k}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}_{\hat{U}^*_k}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.11}$$

Здесь $h^*(x^3) = 2\sqrt{x^3(1 - x^3)}$ — весовая функция для системы полиномов $\{\hat{U}^*_k\}_{k=0}^{\infty}$.

В дальнейшем, если специально не будет оговорено, речь пойдет в основном о моментах относительно системы смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода. Поэтому с целью сокращения письма вместо $\mathbb{M}_{\hat{U}^*_k}(\mathbb{F})$, будем пользоваться обозначением $\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F})$ (конечно, следовало обозначение $\overset{(k)}{\mathbb{M}}{}^*(\mathbb{F})$).

Нетрудно доказать, что имеют место предложения.

Утверждение 2.1. (Свойство обобщенной линейности) Для любых тензорных полей $\mathbb{F}(x', x^3)$ и $\mathbb{G}(x', x^3)$ и любых функций $\alpha(x')$ и $\beta(x')$ справедливо соотношение

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] = \alpha(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + \beta(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{G}). \tag{2.12}$$

Следствие 2.1. *Оператор моментов* $\overset{(k)}{\mathbb{M}}$, $k \in \mathbb{N}_0$ — *линейный оператор.*

Утверждение 2.2. Момент k-го порядка тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{\hat{U}^*_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ равен коэффициенту с номером k при разложении $F(x', x^3)$ относительно x^3 по этой системе полиномов, т.е.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) = \int\limits_0^1 \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.13}$$

2.4 Моменты производных $\partial_i\mathbb{F}(x', x^3)$, $\partial_i\partial_j\mathbb{F}(x', x^3)$ *и* $\partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}(x', x^3)$ *относительно смещенных полиномов Чебышева второго рода.* В силу определения (2.11), утверждения (2.13) и рекуррентного соотношения (2.4) доказывается справедливость теоремы

Теорема 2.2.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i\mathbb{F}) = \int\limits_0^1 \partial_i\mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \left[\begin{array}{ll} \partial_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), & i = I, \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x'), & i = 3, \end{array}\right. \tag{2.14}$$

где введено обозначение

$$\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x') = 2^2(k+1)\sum_{p=0}^{\infty} \overset{(k+2p+1)}{\mathbb{F}}(x') = 2(k+1)\sum_{p=k}^{\infty}[1-(-1)^{k+p}]\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

называемое в дальнейшем оператором «штрих».

Последнее соотношение можно записать в удобной форме

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x') = 2(k+1)\left[\sum_{p=k}^{N}\left(1-(-1)^{k+p}\right)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x') + \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'(x') - (-1)^k\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}'(x')\right], \\ &\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'), \quad \overset{(-)}{\mathbb{F}}{}'(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Нетрудно видеть, для оператора «штрих» имеет место утверждение.

Утверждение 2.3. (Свойство обобщенной линейности) Для любых тензорных полей $\mathbb{F}(x', x^3)$ и $\mathbb{G}(x', x^3)$ и любых функций $\alpha(x')$ и $\beta(x')$ имеем

$$\overset{(k)}{\Big(\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}\Big)'} = \alpha(x')\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}' + \beta(x')\overset{(k)}{\mathbb{G}}{}'.$$

Следствие 2.3. *Оператор «штрих» — линейный оператор.*

Теорема 2.4.

$$\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(n)} = \big(\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(n-m)}\big)^{(m)}, \quad n \geq m, \tag{2.16}$$

где $\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(p)}$ *означает, что оператор «штрих» применяется* p *раз, а* $\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(0)} = \overset{(k)}{\mathbb{F}}$.

На основании определения (2.11), утверждения (2.13), теоремы (2.14) и рекуррентного соотношения (2.5) доказывается теорема.

Теорема 2.5.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i\partial_j\mathbb{F}) = \int\limits_0^1 \partial_i\partial_j\mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \left[\begin{array}{ll} \partial_I\partial_J\overset{(k)}{\mathbb{F}}, & i=I, j=J, \\ \partial_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}', & i=I, j=3, \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'', & i=j=3, \end{array}\right. \tag{2.17}$$

где $\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'$ *определяется с помощью* (2.14), *а*

$$\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'' = 2^4(k+1)\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(k+p+2)\overset{(k+2p+2)}{\mathbb{F}}(x') =$$

$$= 2(k+1)\sum_{p=k}^{\infty}[1+(-1)^{k+p}](p-k+2)(k+p+4)\overset{(p+2)}{\mathbb{F}}(x').$$

Заметим, что последняя формула аналогично (2.15) можно представить в форме

$$\begin{gathered} \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}''(x') = 2(k+1)\left[\sum_{p=k}^{N}(p-k)(k+p+2)\big(1+(-1)^{k+p}\big)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x') + \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}''(x') + (-1)^k\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}''(x')\right], \\ \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}''(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(p-k)(k+p+2)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'),\ \overset{(-)}{\mathbb{F}}{}''(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p(p-k)(k+p+2)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'). \end{gathered} \tag{2.18}$$

Применяя последовательно оператор «штрих», легко доказываются формулы

$$\begin{gathered} \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'''(x') = 2^6(k+1)\sum_{p=0}^{\infty}C_{p+2}^2(k+p+2)(k+p+3)\overset{(k+2p+3)}{\mathbb{F}}(x'), \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{IV}(x') = 2^8(k+1)\sum_{p=0}^{\infty}C_{p+3}^3(k+p+2)(k+p+3)(k+p+4)\overset{(k+2p+4)}{\mathbb{F}}(x'), \end{gathered} \tag{2.19}$$

Здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а C_n^m — биномиальные коэффициенты. При необходимости аналогично (2.19) можно получить выражения и для производных более высокого порядка [81–83].

Более общая теорема, чем (2.17) и (2.16) формулируется в виде

Теорема 2.6.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}) = \int\limits_0^1 \partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \left[\begin{array}{ll} \partial_I^p\partial_J^q\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), & i=I, j=J, \\ \partial_I^p\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(q)}(x'), & i=I, j=3, \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}^{(p+q)}(x'), & i=j=3,\ \ p,\, q\in\mathbb{N}_0. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

2.5 Моменты некоторых выражений относительно смещенных полиномов Чебышева второго рода. Найдены моменты k-го порядка выражений $(x^3)^s\mathbb{F}$, $(x^3)^s\partial_3^m\mathbb{F}$, $P_s(x^3)\mathbb{F}$ и $P_s(x^3)\partial_3^m\mathbb{F}$, где $P_s(x^3)$ — полином степени $s\in\mathbb{N}_0$. С помощью рекуррентных соотношений (2.2) можно доказать, что для $P_s(x^3) = \sum_{n=0}^{s} c_n(x^3)^s$ имеют место теоремы:

Теорема 2.7.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\partial_3^m\mathbb{F}\big]=\sum_{n=0}^{s} c_n\overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^n\partial_3^m\mathbb{F}] = \sum_{n=0}^{s}\sum_{p=0}^{2n} 2^{-2n}c_nC_{2n}^{p}\overset{(k-n+p)}{\mathbb{F}}{}^{(m)},\ k\geq s\geq 0,$$

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\partial_3^m\mathbb{F}\big]=\sum_{n=0}^{k}\sum_{p=0}^{2n} 2^{-2n}c_nC_{2n}^{p}\overset{(k-n+p)}{\mathbb{F}}{}^{(m)} + c_{k+1}\sum_{p=1}^{2(k+1)}2^{-2(k+1)}C_{2(k+1)}^{p}\overset{(p-1)}{\mathbb{F}}{}^{(m)}+$$
$$+\sum_{n=k+2}^{s}c_n\Big[-\sum_{q=2}^{n-k}2^{-2n}C_{2n}^{q-2}\overset{(n-k-q)}{\mathbb{F}}{}^{(m)}+\sum_{p=n-k}^{2n}2^{-2n}C_{2n}^{p}\overset{(k-n+p)}{\mathbb{F}}{}^{(m)}\Big],\ s\geq k+2,\ k\geq 0, \quad (2.21)$$

Теорема 2.8.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}\big] = \left[\begin{array}{ll} \partial_I^p\partial_J^q\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\mathbb{F}\big], & i=I,\ j=J, \\ \partial_I^p\big\{\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\mathbb{F}\big]\big\}^{(q)}, & i=I,\ j=3, \\ \big\{\overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[P_s(x^3)\mathbb{F}\big]\big\}^{(p+q)}, & i=j=3,\ \ k,s,p,q\in\mathbb{N}_0. \end{array}\right. \quad (2.22)$$

Конечно, в (2.22) вместо $P_s(x^3)$ можно рассматривать любую функцию от x^3.

Укажем еще, что для повторных ковариантных производных от компонент тензора второго ранга справедлива теорема.

Теорема 2.9.

$$\overset{(k)}{M}\big[(x^3)^s\nabla_t^m\nabla_l^nP_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}\big] = \begin{cases} \nabla_T^m\nabla_L^n\overset{(k)}{M}\big((x^3)^sP_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}\big), & t=T,\, l=L, \\ \nabla_T^m\big\{\overset{(k)}{M}\big((x^3)^sP_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}\big)\big\}^{(n)}, & t=T,\, l=3, \\ \big\{\overset{(k)}{M}\big((x^3)^sP_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}\big)\big\}^{(m+n)}, & t=l=3, \\ \sim\smile\in\{-,\emptyset,+\}, & k,\, s,\, n,\, m\in\mathbb{N}_0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь $\nabla_t^m = \underbrace{\nabla_t\nabla_t\ldots\nabla_t}_{m}$, а $\nabla_t^0P_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot} = P_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}$. Следовательно, теорема (2.23) справедлива для любого тензора и его компонент.

2.6 Представления и момент k-го порядка градиента и повторного градиента от тензора. В силу определения градиента (набла-оператора) от тензора при НПОТТ имеем

$$\overset{(\sim)}{\nabla}\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\tilde{p}}\partial_p\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\tilde{p}}\nabla_p\mathbb{F}, \quad \sim\in\{-,\emptyset,+\}. \quad (2.24)$$

Отсюда при $\sim=\emptyset$, учитывая соотношения

$$\mathbf{r}^P = g_{\underset{M}{-}}^{P}\mathbf{r}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = g_{\underset{M}{-}}^{3}\mathbf{r}^{\bar{M}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{P}^{\bar{3}}\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{P}^{\bar{3}}g_{\underset{M}{-}}^{P}\mathbf{r}^{\bar{M}},$$

получаемые из первой формулы (1.14) и вводя дифференциальный оператор

$$N_p = \partial_p - g_p^{\bar{3}}\partial_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}^pN_p = \mathbf{r}^PN_P = \mathbf{r}^{\bar{M}}g_{\underset{M}{-}}^{P}N_P, \quad N_3 = 0$$

находим искомое представление градиента в виде [43, 50]

$$\mathrm{grad}\mathbb{F} = \nabla\mathbb{F} = \mathbf{N}\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^PN_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}}g_{\underset{M}{-}}^{P}N_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F}. \quad (2.25)$$

Применяя к (2.25) набла-оператор ∇, получим выражение для повторного градиента тензора [43, 50]

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\mathbb{F} &= \mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^{P} g_{\bar{N}}^{Q} N_P N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{P} N_P \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^{Q} \nabla_3 N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2 \mathbb{F} = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^{P} g_{\bar{N}}^{Q} [\nabla_P\nabla_Q - (g_P^{\bar{3}}\nabla_3\nabla_Q + g_Q^{\bar{3}}\nabla_P\nabla_3) + g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}}\nabla_3\nabla_3]\mathbb{F} + \\ &\quad + [\mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{P} N_P \nabla_3 + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^{Q} \nabla_3 N_Q + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{3}}\nabla_3\nabla_3]\mathbb{F}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь $g_P^{\bar{3}} = x^3 g_{\overset{+}{P}}^{\bar{3}}$ (см. вторую формулу (1.10), а $g_{\overset{+}{P}}^{\bar{3}} = (1/h)\partial_P h$ при $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$, где h — толщина тонкого тела. Для того, чтобы найти моменты k-го порядка от (2.25) и (2.26) следует использовать представления компонент ЕТВР (1.17), утверждения (2.12), теорему (2.23) и соотношения (2.21) при соответствующих значениях s, m, n. Выпишем здесь, например, момент k-го порядка от (2.25). Будем иметь [43, 50]

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbb{M}}}(\nabla\mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{M}}\Big\{\sum_{s=0}^{k}\sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} C_{2s}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-u)}{\mathbb{F}} + \underset{(k+1)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \sum_{p=1}^{2k+2} 2^{-2(k+1)} C_{2k+2}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-1)}{\mathbb{F}} + \\ &+ \sum_{s=k+2}^{\infty} 2^{-2s} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \Big(-\sum_{q=2}^{u} C_{2s}^{q-2} \nabla_{P}\overset{(u-q)}{\mathbb{F}} + \sum_{p=u}^{2s} C_{2s}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-u)}{\mathbb{F}}\Big) - \\ &- g_{\overset{+}{P}}^{\bar{3}}\Big[\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} C_{2s+2}^{p} \overset{(p-v)}{\mathbb{F}'} + \underset{(k)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \sum_{p=1}^{2k+2} 2^{-2(k+1)} C_{2k+2}^{p} \overset{(p-1)}{\mathbb{F}'} + \\ &+ \sum_{s=k+1}^{\infty} 2^{-2(s+1)} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \Big(-\sum_{q=2}^{v} C_{2s+2}^{q-2} \overset{(v-q)}{\mathbb{F}'} + \sum_{p=v}^{2s+2} C_{2s+2}^{p} \overset{(p-v)}{\mathbb{F}'}\Big)\Big]\Big\} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x'), \\ &u = s-k,\ v = u+1,\ k \in \mathbb{N}_0;\end{aligned} \tag{2.27}$$

Заметим, что почти во всех соотношениях механики деформируемого твердого тела (МДТТ) при НПОТТ участвует выражение вида $g_{\bar{M}}^{P} N_P \mathbb{F}$, момент k-го порядка которого имеет форму

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^{P} N_P \mathbb{F}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} C_{2s}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-u)}{\mathbb{F}} + \underset{(k+1)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \sum_{p=1}^{2k+2} 2^{-2(k+1)} C_{2k+2}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-1)}{\mathbb{F}} + \\ &+ \sum_{s=k+2}^{\infty} 2^{-2s} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \Big(-\sum_{q=2}^{u} C_{2s}^{q-2} \nabla_{P}\overset{(u-q)}{\mathbb{F}} + \sum_{p=u}^{2s} C_{2s}^{p} \nabla_{P}\overset{(p-u)}{\mathbb{F}}\Big) - \\ &- g_{\overset{+}{P}}^{\bar{3}}\Big[\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} C_{2s+2}^{p} \overset{(p-v)}{\mathbb{F}'} + \underset{(k)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \sum_{p=1}^{2k+2} 2^{-2(k+1)} C_{2k+2}^{p} \overset{(p-1)}{\mathbb{F}'} + \\ &+ \sum_{s=k+1}^{\infty} 2^{-2(s+1)} \underset{(s)}{A}{}_{\overset{+}{M}}^{\bar{P}} \Big(-\sum_{q=2}^{v} C_{2s+2}^{q-2} \overset{(v-q)}{\mathbb{F}'} + \sum_{p=v}^{2s+2} C_{2s+2}^{p} \overset{(p-v)}{\mathbb{F}'}\Big)\Big],\ \ u = s-k,\ v = u+1,\ k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Нетрудно получить моменты k-го порядка и для выражений $g_{\bar{M}}^{P} g_{\bar{N}}^{Q} N_P N_Q \mathbb{F}$, $g_{\bar{N}}^{Q} \nabla_3 N_Q \mathbb{F}$ и $g_{\bar{M}}^{P} N_P \partial_3 \mathbb{F}$. Они даны в диссертации (см. еще [50]). Здесь с целью сокращения письма их выписывать не будем.

Имея представления операторов градиента (2.25), повторного градиента (2.26) и моментов k-го порядка от них (см., например, (2.27)), не доставляет труда из них получить соответствующие представления для дивергенции, лапласиана, повторной дивергенции и других дифференциальных операторов, упомянутых вначале этого раздела [50].

3 В третьей главе «Представления основных уравнений и определяющих соотношений для теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач» приведены различные представления уравнений и определяющих соотношений (ОС) физического содержания МДТТ как для классической, так и для микрополярной (среды Коссера) теории тонких тел при новой параметризации области тонкого тела, а также уравнения притока тепла и закона теплопроводности Фурье (ОС теплового содержания). Получены трехмерные постановки задач при НПОТТ. Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) для тел с одним малым размером микрополярной термомеханики деформируемого твердого тонкого тела (ТМДТТТ), нестационарной температурной задачи в моментах аналогичных приближений микрополярной ТМДТТТ, а также классическая и новая постановки задач в тензорах напряжений и моментных напряжений. Рассмотрены частные случаи постановок задач. Построены корректирующие слагаемые, обеспечивающие выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях, а также при постановках задач в тензорах напряжений и моментных напряжений.

3.1 Различные представления уравнений движения и притока тепла механики деформируемого твердого тела при НПОТТ. Из уравнений движения трехмерной теории получены их представления в виде

$$\begin{aligned}
&\Big(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}}\Big)\partial_P\Big(\sqrt{\overset{(-)}{g}}\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{P}^P\Big) + \partial_3\big(\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{P}^3\big) + \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{F} = \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\partial_t^2\mathbf{u},\\
&\Big(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}}\Big)\partial_P\Big(\sqrt{\overset{(-)}{g}}\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\boldsymbol{\mu}^P\Big) + \partial_3\big(\overset{(-)}{\vartheta}\,\boldsymbol{\mu}^3\big) + \underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\big(\overset{(-)}{\vartheta}\,\underset{\sim}{\mathbf{P}}\big) + \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{m} = \overset{(-)}{\vartheta}\,\underset{\sim}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\boldsymbol{\varphi};
\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$g^{P}_{\underset{M}{-}}N_P\mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3\mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad g^{P}_{\underset{M}{-}}N_P\boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\boldsymbol{\varphi};\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&A^{P}_{\underset{M}{-}}N_P\mathbf{P}^{\bar{M}} + \overset{(-)}{\vartheta}\,\partial_3\mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{F} = \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\partial_t^2\mathbf{u}, \quad A^{P}_{\underset{M}{-}} \equiv g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}} + x^3 a^{P}_{\underset{M}{+}},\\
&A^{P}_{\underset{M}{-}}N_P\boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \overset{(-)}{\vartheta}\,\partial_3\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\big(\overset{(-)}{\vartheta}\,\underset{\sim}{\mathbf{P}}\big) + \rho\,\overset{(-)}{\vartheta}\,\mathbf{m} = \overset{(-)}{\vartheta}\,\underset{\sim}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\boldsymbol{\varphi}, \quad a^{P}_{\underset{M}{+}} \equiv \big(g^{\bar{I}}_{\underset{I}{+}} - 1\big)g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Для уравнения притока тепла имеем представление

$$-g^{P}_{\underset{M}{-}}N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T\frac{d}{dt}\big(\underset{\sim}{\mathbf{a}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{d}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\big) + W^* = \rho c_p\partial_t T.\tag{3.4}$$

В (3.1) – (3.4) имеем следующие обозначения: $\underset{\sim}{\mathbf{P}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{P}}^T$ — тензор напряжений, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^T$ — тензор моментных напряжений, $\mathbf{P}^{\tilde{p}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, $\boldsymbol{\mu}^{\tilde{p}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$, $\sim\,\in\{\widetilde{-,\emptyset}\}$, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор, $\mathbf{q}$ — вектор внешнего потока тепла, $q^{\bar{p}} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}^{\bar{p}}$, q — массовый приток тепла, T — температура, $\underset{\sim}{\mathbf{a}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{d}}$

— тензоры теплового расширения, W^* — функция рассеивания, ρ — плотность среды, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\overset{2}{\otimes}$ — внутреннее 2-произведение [47, 50, 59, 79, 84].

Приведем и уравнения движения в перемещениях и вращениях

$$
\begin{gathered}
\big[\underset{\approx}{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} g^{P}_{\bar{M}} g^{Q}_{\bar{N}} N_P N_Q + \underset{\approx}{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} g^{P}_{\bar{M}} (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underset{\approx}{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2\big] \cdot \mathbf{u} + \\
+ 2\alpha\big[C^{\bar{L}\bar{M}}\big(g^{P}_{\bar{M}} N_P \varphi_{\bar{3}} - \nabla_3 \varphi_{\bar{M}}\big)\mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g^{P}_{\bar{M}} N_P \varphi_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}\big] - \\
- b\big(\mathbf{r}^{\bar{M}} g^{P}_{\bar{M}} N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3\big)\, \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho\, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{gathered}
\big[\underset{\approx}{\mathbf{L}}^{\bar{M}\bar{N}} g^{P}_{\bar{M}} g^{Q}_{\bar{N}} N_P N_Q + \underset{\approx}{\mathbf{L}}^{\bar{M}\bar{3}} g^{P}_{\bar{M}} (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underset{\approx}{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2\big] \cdot \boldsymbol{\varphi} + \\
+ 2\alpha\big[C^{\bar{L}\bar{M}}\big(g^{P}_{\bar{M}} N_P u_{\bar{3}} - \nabla_3 u_{\bar{M}}\big)\mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g^{P}_{\bar{M}} N_P u_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}\big] - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2},
\end{gathered}
$$

где введены следующие обозначения: $b = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$, $C^{\bar{M}\bar{N}} = C^{\bar{M}\bar{N}\bar{3}}$,

$$
\begin{aligned}
\underset{\approx}{\mathbf{M}} &= \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \alpha)\big(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{II} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{III}\big) + (\mu + \alpha)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{I}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{M}}^{\bar{m}\bar{n}} = \underset{\approx}{\mathbf{M}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}^{\bar{n}}, \\
\underset{\approx}{\mathbf{L}} &= \frac{1}{2}(\gamma + \delta - \beta)\big(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{II} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{III}\big) + (\delta + \beta)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{I}, \qquad \underset{\sim}{\mathbf{L}}^{\bar{m}\bar{n}} = \underset{\approx}{\mathbf{L}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}^{\bar{n}}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \delta$ и β — материальные константы упругого изотропного микрополярного материала.

3.2 Представления законов Гука и теплопроводности Фурье при НПОТТ. В линейной микрополярной теории упругости закон Гука при неизотермических процессах в силу обобщенного принципа Дюгамеля–Неймана [87, 88, 90, 91] можно представить в виде

$$
\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} - \underset{\sim}{\mathbf{a}}\vartheta) + \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} - \underset{\sim}{\mathbf{a}}\vartheta), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} - \underset{\sim}{\mathbf{a}}\vartheta) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} - \underset{\sim}{\mathbf{d}}\vartheta), \tag{3.6}
$$

где $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ — тензор деформаций вмикрополярной теории [87], $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — тензор кручения-изгиба, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ — материальные тензоры четвертого ранга, ϑ — перепад температуры.

Учитывая выражение для $\boldsymbol{\gamma}$, (3.6), а также представление градиента (2.25), из (3.6) и теплопроводности Фурье $\mathbf{q} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \nabla T$ ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}$ — тензор теплопроводности) получены искомые представления закона Гука (ОС физического содержания) и закона теплопроводности Фурье (ОС теплового содержания) [43, 50, 81, 83]

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g^{P}_{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g^{P}_{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}}\vartheta, \\
&\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g^{P}_{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g^{P}_{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \underset{\approx}{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\vartheta, \\
&\underset{\approx}{\mathbf{C}}^{\bar{m}\cdot} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \underset{\approx}{\mathbf{E}}, \ \underset{\approx}{\mathbf{A}}^{\bar{m}\cdot} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \underset{\approx}{\mathbf{E}}, \ \underset{\approx}{\mathbf{D}}^{\bar{m}\cdot} = \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \underset{\approx}{\mathbf{E}}, \ \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{m}\cdot} = \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{r}^{\bar{m}} \underset{\approx}{\mathbf{E}}, \\
&\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}, \ \ \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}}; \\
&\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{M}} g^{P}_{\bar{M}} N_P T - \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}} \partial_3 T, \ \ \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{m}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

На основании представления компонент переноса (1.17) ЕТВР заключаем, что уравнения движения (3.2), уравнение притока тепла (3.4) и ОС физического и теплового содержаний (3.7) содержат бесконечное множество слагаемых и ими пользоваться на практике не целесообразно. Следует рассматривать приближенные соотношения. В этой связи введены определения.

Определение 3.1. *Соотношения, которые получается из уравнения движения* (3.2), *уравнения притока тепла* (3.4) *и ОС физического и теплового содержаний* (3.7), *если в разложении* $g^{P}_{\underset{M}{-}}$ *сохранены первые* $r+1$ *членов, называются соответственно уравнениями движения, уравнением притока тепла и ОС физического и теплового содержаний приближения порядка* r $(r\in\mathbb{N}_0)$.

Вводя обозначение $\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\underset{M}{-}}=\sum\limits_{k=0}^{r}\underset{(k)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}(x^3)^k$, из любого соотношения, содержащего $g^{P}_{\underset{M}{-}}$, соответствующее соотношение приближения порядка r получим, если в нем $g^{P}_{\underset{M}{-}}$ заменить на $\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\underset{M}{-}}$, а в левых частях (3.7) $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{q}}$ — на $\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(r)}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{q}}_{(r)}$ соответственно.

Далее уравнения и ОС представлены в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Ниже обсуждается, как получить уравнения движения и ОС в моментах приближения порядка r и приближения (r,N). Однако с целью сокращения письма они выписаны в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода только для приближений (0,N) и (1,N).

Следует заметить, что в автореферате с целью сокращения письма в основном речь идет о НПОТТ и полиномах Чебышева второго рода, в диссертации же, конечно, рассмотрены полиномы Лежандра и Чебышева первого рода, а также приведены некоторые соотношения при других параметризациях [81–83].

Для получения искомых уравнений и ОС приближения порядка r (см. [43, 50,81–83]) можно использовать соотношение такого же приближения, которое получается из (2.28) простыми выкладками, если в левой части $g^{P}_{\underset{M}{-}}$ заменить на $\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\underset{M}{-}}$, а в правой части предел суммы ∞ заменить на r. Если при этом учесть (2.15), то будем иметь

$$\begin{aligned}
\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\underset{M}{-}}N_P\mathbb{F})=&\sum_{m=0}^{k+1}\sum_{p=0}^{2m}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}2^{-2m}C^{p}_{2m}\overset{(k-m+p)}{\partial_P \mathbb{F}}+\\
&+\sum_{m=k+2}^{r}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}\left(-\sum_{p=2}^{m-k}2^{-2m}C^{p-2}_{2m}\overset{(m-k-p)}{\partial_P \mathbb{F}}+\sum_{p=m-k}^{2m}2^{-2m}C^{p}_{2m}\overset{(k-m+p)}{\partial_P \mathbb{F}}\right)-\\
&-g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}\left\{\sum_{m=0}^{k}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}\sum_{p=0}^{2m+2}\sum_{q=l-1}^{N}2^{-(2m+1)}C^{p}_{2m+2}l\Big(1+(-1)^{l+q}\Big)\overset{(q)}{\mathbb{F}}(x')+\right.
\end{aligned}$$

$$
+\sum_{m=k+1}^{r}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\overset{+}{M}}\Big[-\sum_{p=0}^{m-k-1}\sum_{q=p}^{N}2^{-(2m+1)}C_{2m+2}^{m-k-1-p}(p+1)\Big(1-(-1)^{p+q}\Big)\overset{(q)}{\mathbb{F}}(x')+ \tag{3.8}
$$

$$
+\sum_{p=m+1-k}^{m+k+1}\sum_{q=p}^{N}2^{-(2m+1)}C_{2m+2}^{m+1-k+p}(p+1)\Big(1-(-1)^{p+q}\Big)\overset{(q)}{\mathbb{F}}(x')\Big]\Bigg\}-
$$

$$
-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}\left\{\left(\sum_{m=k+1}^{r}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\overset{+}{M}}a_{(m,k)}\right)\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}'+\left[\sum_{m=0}^{k}(2k-m+1)\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\overset{+}{M}}+\sum_{m=k+1}^{r}\underset{(m)}{A}{}^{\bar{P}}_{\overset{+}{M}}b_{(m,k)}\right]\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\right\},
$$

$$
l\equiv k-m+p,\ N\geq r+k+1,\ k\geq 0,\ r\geq 0;
$$

$$
a_{(m,k)}=2^{-(2m+1)}\Big[-\sum_{p=0}^{m-k-1}C_{2m+2}^{m-k-1-p}(p+1)(-1)^{p+1}+\sum_{p=m+1-k}^{m+k+1}C_{2m+2}^{m+1-k+p}(p+1)(-1)^{p+1}\Big],
$$

$$
b_{(m,k)}=2^{-(2m+1)}\Big[-\sum_{p=0}^{m-k-1}C_{2m+2}^{m-k-1-p}(p+1)+\sum_{p=m+1-k}^{m+k+1}C_{2m+2}^{m+1-k+p}(p+1)\Big],\ \ m\geq k+1.
$$

Подобно (3.8) можно получить моменты k-го порядка для выражений $\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\overset{-}{M}}\underset{(r)}{g}{}^{Q}_{\overset{-}{N}}N_P N_Q\mathbb{F}$, $\underset{(r)}{g}{}^{Q}_{\overset{-}{N}}\nabla_3 N_Q\mathbb{F}$ и $\underset{(r)}{g}{}^{P}_{\overset{-}{M}}N_P\partial_3\mathbb{F}$ [50]. В силу (2.15) видно, что, так как $k\in\mathbb{N}_0$, то число соотношений (3.8) бесконечно и каждое соотношение при фиксированном k содержит бесконечное множество слагаемых. Следовательно, получаемые с помощью (3.8) искомые соотношения также будут обладать аналогичными свойствами. Такими соотношениями на практике пользоваться не целесообразно, поэтому следует их редуцировать к конечным соотношениям с конечным числом слагаемых. Существует в основном три схемы редукции: упрощенная, неупрощенная [85], а также частично упрощенная схема в случае тонких тел с двумя малыми размерами. Они заключаются в следующем: наряду с r (у Векуа И.Н. $r=0$) фиксируем и $N\in\mathbb{N}_0$ и при неупрощенной схеме редукции из бесконечных систем соотношений (уравнений, ОС и др.) с нормированными моментами выбираем совокупность первых $N+1$ соотношений при $h=\text{const}$, а если $h\neq\text{const}$, то выбираем совокупность первых $N+1$ соотношений и кроме того, в каждом из них моментами искомых величин, порядок которых превосходит N, пренебрегаем. При упрощенной схеме редукции из бесконечных систем соотношений (уравнений, ОС и др.) с ненормированными моментами рассматриваем первые $N+1$ соотношений и кроме того, в каждом из них моментами искомых величин, порядок которых превосходит N, пренебрегаем. При частично упрощенной схеме в случае тонких тел с двумя малыми размерами по одной координате применяется неупрощенная схема, а по другой упрощенная.

Из (3.8) при $r=0$ и $r=1$ будем иметь

$$
\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(0)}{g}{}^{J}_{\overset{-}{I}}N_J\mathbb{F})=\overset{(k)}{\mathbb{M}}(N_I\mathbb{F})=\nabla_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{I}}\left[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\left(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\right)\right],\ k\geq 0,
$$

$$
\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(1)}{g}{}^{J}_{\overset{-}{I}}N_J\mathbb{F})=\overset{(k)}{\mathbb{M}}[(g^{\bar{J}}_{\overset{-}{I}}+x^3A^{\bar{J}}_{\overset{+}{I}})N_P\mathbb{F}]=\nabla_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\frac{1}{4}A^{\bar{J}}_{\overset{+}{I}}\nabla_J\big(\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}+2\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}\big)- \tag{3.9}
$$

$$
-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{J}}\Big\{g^{\bar{J}}_{\overset{-}{I}}\Big[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\Big)\Big]+
$$

$$+\frac{1}{4}A_{\underset{I}{+}}^{\bar{J}}\Big[(k-1)\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}-4(k+2)\overset{(k)}{\mathbb{F}}-(k+3)\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}+8(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}'\Big)\Big]\Big\},\ k\geq 0.$$

3.3 Уравнения движения микрополярной теории тонких тел в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода приближений (0,N) и (1,N). На основании первого и второго соотношений (3.9) и теоремы (2.14) из уравнений нулевого и первого приближений, получаемых из (3.2) при замене $g_{\underset{M}{-}}^{P}$ на $\underset{(0)}{g}{}_{\underset{M}{-}}^{P}$ и $\underset{(1)}{g}{}_{\underset{M}{-}}^{P}$ соответственно, найдем системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода, откуда в свою очередь пренебрежением моментами искомых величин, порядок которых больше N, получим систему уравнений микрополярной теории тонких тел приближений $(0,N)$ и $(1,N)$

$$\begin{gathered}\Big\{\nabla_{I}\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}-g_{\underset{P}{+}}^{\bar{3}}\Big[k\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}+2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}-\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}\Big)\Big]+2(k+1)\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{3}}\Big\}+\rho\overset{(k)}{\mathbf{F}}=\rho\partial_t^2\overset{(k)}{\mathbf{u}},\\ \Big\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\Big\}+\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\mathbf{P}}}+\rho\overset{(k)}{\mathbf{m}}=\underset{\approx}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}},\quad k=\overline{0,N};\end{gathered}\tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}\nabla_{I}\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}+\frac{1}{4}\big(g_{\underset{I}{-}}^{\bar{J}}-g_{\underset{I}{+}}^{\bar{J}}\big)\nabla_{J}\big(\overset{(k-1)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}+2\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}+\overset{(k+1)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{I}}\big)-\\ -g_{\underset{I}{+}}^{\bar{3}}\big\{g_{\underset{J}{-}}^{\bar{I}}\big[k\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}-\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}\big)\big]+\frac{1}{4}\big(g_{\underset{J}{-}}^{\bar{I}}-g_{\underset{J}{+}}^{\bar{I}}\big)\big[(k-1)\overset{(k-1)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}-\\ -4(k+2)\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}-(k+3)\overset{(k+1)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}+8(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}}\big)\big]\big\}+\\ +2(k+1)\big[\sum_{p=k}^{N}(1-(-1)^{k+p})\overset{(p)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{3}}\big]+\rho\overset{(k)}{\mathbf{F}}=\rho\,\partial_t^2\overset{(k)}{\mathbf{u}},\\ \Big\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\Big\}+\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\mathbf{P}}}+\rho\overset{(k)}{\mathbf{m}}=\underset{\approx}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}},\quad k=\overline{0,N}.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Здесь запись вида $\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\}$ означает, что выражения в этих фигурных скобках получается из выражения в фигурных скобках предыдущего соотношения, если букву $\mathbf{P}$ заменить на букву $\boldsymbol{\mu}$. Аналогичная запись применяется и в дальнейшем.

Аналогично (3.10) и (3.11) системы уравнений притока тепла микрополярной теории тонких тел в моментах приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ представляются соответственно в форме

$$\begin{gathered}-\nabla_{I}\overset{(k)}{q}{}^{\bar{I}}+g_{\underset{I}{+}}^{\bar{3}}\Big[k\overset{(k)}{q}{}^{\bar{I}}+2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{q}{}^{\bar{I}}-\overset{(k)}{q}{}^{\bar{I}}\Big)\Big]-2(k+1)\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{q}{}^{\bar{3}}+\\ +\rho\overset{(k)}{q}-T_0\frac{d}{dt}\Big(\underset{\approx}{\mathbf{a}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\mathbf{P}}}+\underset{\approx}{\mathbf{d}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\boldsymbol{\mu}}}\Big)+\overset{(k)}{W}{}^{*}=\rho c_p\partial_t\overset{(k)}{T},\quad k=\overline{0,N};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\nabla_{I}\overset{(k)}{q}{}^{\bar{I}}-\frac{1}{4}A_{\underset{I}{+}}^{\bar{J}}N_J\big(\overset{(k-1)}{q}{}^{\bar{I}}+2\overset{(k)}{q}{}^{\bar{I}}+\overset{(k+1)}{q}{}^{\bar{I}}\big)+g_{\underset{I}{+}}^{\bar{3}}\big\{g_{\underset{J}{-}}^{\bar{I}}\big[k\overset{(k)}{q}{}^{\bar{J}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{q}{}^{\bar{J}}-\overset{(k)}{q}{}^{\bar{J}}\big)\big]+\\ +\frac{1}{4}A_{\underset{J}{+}}^{\bar{I}}\big[(k-1)\overset{(k-1)}{q}{}^{\bar{J}}-4(k+2)\overset{(k)}{q}{}^{\bar{J}}-(k+3)\overset{(k+1)}{q}{}^{\bar{J}}+8(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{q}{}^{\bar{J}}\big)\big]\big\}-\\ -2(k+1)\sum_{p=k}^{N}\big[1-(-1)^{k+p}\big]\overset{(p)}{q}{}^{\bar{3}}+\rho\overset{(k)}{q}-T_0\frac{d}{dt}\Big(\underset{\approx}{\mathbf{a}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\mathbf{P}}}{}_{(1)}+\underset{\approx}{\mathbf{d}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\approx}{\boldsymbol{\mu}}}{}_{(1)}\Big)+\overset{(k)}{W}{}^{*}=\rho c_p\frac{d\overset{(k)}{T}}{dt},\quad k=\overline{0,N}.\end{gathered}$$

Следовательно, с помощью (3.8) и теоремы (2.14) из уравнений движения и притока тепла приближения порядка r, получим системы уравнений движения и притока тепла в моментах приближения порядка r, из которых пренебрежением моментами искомых величин, порядок которых больше N, найдем соответствующие системы уравнений приближения (r,N) микрополярной теории тонких тел. В дальнейшем, считая эти системы известными [50], будем на них ссылаться при рассмотрении постановок задач.

3.4 Определяющие соотношения микрополярной теории упругости в моментах относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода. Подобно системам уравнений движения и притока тепла в моментах приближения порядка r и приближения (r,N) ОС в моментах тех же приближений получены из (3.7) с помощью (3.8) и теоремы (2.14) как для однородного относительно x^3, так и для неоднородного материала [50]. При этом рассмотрены различные случаи в зависимости от значений порядков приближения r и операторов моментов k. Следует отметить, что формы записей ОС во всех рассмотренных случаях одинаковы [50]. ОС в моментах выведены также из их других представлений, в зависимости от представлений соответствующих уравнений. Ниже выписаны только системы законов Гука и теплопроводности Фурье микрополярной теории тонких тел в моментах нулевого и первого приближений.

3.4.1 Системы законов Гука микрополярной теории тонких тел в моментах нулевого и первого приближений. В силу первого соотношения (3.9) и теоремы (2.14) из ОС нулевого приближения, получаемых из первых двух формул (3.7), если в них $g^{P}_{\ \bar{M}}$ заменить на $\underset{(0)}{g}{}^{P}_{\ \bar{M}}$, находим следующую систему законов Гука в моментах нулевого приближения:

$$
\begin{aligned}
\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)} &= \overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0,N)} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{C}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{A}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{A}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}',\\
\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)} &= \overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0,N)} + \underset{\approx}{\mathbf{B}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{B}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{D}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}' + \underset{\approx}{\mathbf{D}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}',\ \ k\in\mathbb{N}_0;
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0,N)} = {}& \underset{\approx}{\mathbf{C}}{}^{\bar{M}\cdot}\cdot\Big\{\nabla_{M}\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x') - \underset{M}{g}{}^{\bar{3}}_{+}\Big[k\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x') + 2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(k)}{\mathbf{u}}(x')\Big)\Big]\Big\}+\\
&+2(k+1)\underset{\approx}{\mathbf{C}}{}^{\bar{3}\cdot}\cdot\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x')+\\
&+\underset{\approx}{\mathbf{A}}{}^{\bar{M}\cdot}\cdot\Big\{\nabla_{M}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underset{M}{g}{}^{\bar{3}}_{+}\Big[k\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') + 2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x')\Big)\Big]\Big\}+\\
&+2(k+1)\underset{\approx}{\mathbf{A}}{}^{\bar{3}\cdot}\cdot\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underset{\approx}{\mathbf{b}}\overset{(k)}{\vartheta},\\
\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0,N)} = {}& \underset{\approx}{\mathbf{D}}{}^{\bar{M}\cdot}\cdot\Big\{\nabla_{M}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underset{M}{g}{}^{\bar{3}}_{+}\Big[k\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') + 2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x')\Big)\Big]\Big\}+\\
&+2(k+1)\underset{\approx}{\mathbf{D}}{}^{\bar{3}\cdot}\cdot\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x')+\\
&+\underset{\approx}{\mathbf{B}}{}^{\bar{M}\cdot}\cdot\Big\{\nabla_{M}\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x') - \underset{M}{g}{}^{\bar{3}}_{+}\Big[k\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x') + 2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(k)}{\mathbf{u}}(x')\Big)\Big]\Big\}+
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$+2(k+1)\underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot}\cdot\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x')-\underset{\approx}{\mathbf{B}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x')-\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\overset{(k)}{\vartheta}(x'),\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Здесь введены обозначения

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}=2(k+1)\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}(\mathbf{r}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{\underset{M}{+}}\mathbf{r}^{\bar{M}})\underset{\approx}{\mathbf{E}},\quad \underset{\approx}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}=2(k+1)(-1)^{k+1}\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{3}}\underset{\approx}{\mathbf{E}},\ k\in\mathbb{N}_0. \tag{3.14}$$

Подобные соотношения для $\underset{\approx}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}$, $\underset{\approx}{\mathbf{A}}^{\bar{3}}_{(k)}$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}$, и $\underset{\approx}{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)}$ получим из (3.14), если $\mathbf{C}$ заменить на $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ соответственно. Кроме того, аналогично последним двум формулам (2.15) имеем

$$\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x'),\quad \overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^{p}\overset{(p)}{\mathbf{u}}(x'),\quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x'),\quad \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^{p}\overset{(p)}{\boldsymbol{\varphi}}(x').$$

Аналогично (3.12) и (3.13) получается система законов Гука микрополярной теории тонких тел в моментах первого приближения [50, 81, 83]. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

3.4.2 Системы законов теплопроводности Фурье микрополярной теории тонких тел в моментах нулевого и первого приближений. Нетрудно получить системы законов теплопроводности Фурье в моментах нулевого и первого приближений. В самом деле, аналогично (3.12) из закона теплопроводности нулевого приближения (см. (3.7)), теоремы (2.15) и первого соотношения (3.9) находим систему законов теплопроводности Фурье в моментах нулевого приближения

$$\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(0)}=\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(0,N)}+\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(0,k)}\overset{(+)}{T}{}'+\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(k)}\overset{(-)}{T}{}'; \tag{3.15}$$

$$\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(0,N)}=-\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{M}}\Big\{\partial_M\overset{(k)}{T}-g^{\bar{3}}_{\underset{M}{+}}\Big[k\overset{(k)}{T}+2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{T}-\overset{(k)}{T}\Big)\Big]\Big\}-2(k+1)\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{T}, \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(0,k)}=-2(k+1)\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot(\mathbf{r}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{\underset{M}{+}}\mathbf{r}^{\bar{M}}),\quad \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(k)}=2(k+1)(-1)^{k}\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\mathbf{r}^{\bar{3}},$$

$$\overset{(+)}{T}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}\overset{(p)}{T}(x'),\quad \overset{(-)}{T}{}'(x')=\sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^{p}\overset{(p)}{T}(x').$$

Далее из закона теплопроводности Фурье первого приближения получим систему законов теплопроводности Фурье в моментах первого приближения в форме

$$\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(1)}=\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(1,N)}+\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(1,k)}\overset{(+)}{T}{}'+\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(k)}\overset{(-)}{T}{}'; \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\overset{(k)}{\mathbf{q}}_{(1,N)}=-\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{M}}\Big\{&\partial_M\overset{(k)}{T}+\frac{1}{4}A^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}\partial_P\Big(\overset{(k-1)}{T}+2\overset{(k)}{T}+\overset{(k+1)}{T}\Big)-g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}\Big[g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}}\Big(k\overset{(k)}{T}+2(k+1)\Big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{T}-\overset{(k)}{T}\Big)\Big)+\\&+\frac{1}{4}A^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}\Big((k-1)\overset{(k-1)}{T}-4(k+2)\overset{(k)}{T}-(k+3)\overset{(k+1)}{T}+8(k+1)\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{T}\Big)\Big]\Big\}-\\&-2(k+1)\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}\sum_{p=k}^{N}\Big[1-(-1)^{k+p}\Big]\overset{(p)}{T},\quad \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}}_{(1,k)}=-2(k+1)\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\big[\mathbf{r}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}(g^{\bar{P}}_{\underset{M}{-}}+A^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}})\mathbf{r}^{\bar{M}}\big],\ k\in\mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Следует отметить, что, фиксируя N, из (3.12), (3.13), (3.15) – (3.18) рассматриваются первые $N+1$ соотношений, т.е. выбираются конечные системы соотношений. При этом конечные системы соотношений, получающиеся из (3.12), (3.15) и (3.17), используются при неупрощенной схеме редукции. В этом случае векторы-функции $\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ определяются из граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях [43, 50]. Аналогично функции $\overset{(-)}{T}{}'$ и $\overset{(+)}{T}{}'$ находятся с помощью граничных условий теплового содержания второго или третьего рода. Ниже выписаны системы уравнений для нахождения этих функций. Конечные системы соотношений, получающиеся из (3.13), (3.16) и (3.18), используются при упрощенной схеме редукции.

3.5 Представления граничных и начальных условий при НПОТТ.

3.5.1 Граничные и начальные условия на лицевых поверхностях. a) Кинематические граничные условия на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ *и* $\overset{(+)}{S}$. Эти условия задаются в виде

$$\mathbf{u}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0} = \overset{(-)}{\mathbf{u}}(x',t), \quad \boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t),$$
$$\mathbf{u}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1} = \overset{(+)}{\mathbf{u}}(x',t), \quad \boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1} = \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t), \;\; x' \in \overset{(-)}{S}.$$

Здесь $\overset{(-)}{\mathbf{u}}(x',t)$ и $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t)$ $\big(\overset{(+)}{\mathbf{u}}(x',t)$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t)\big)$ — заданные на $\overset{(-)}{S}$ $(\overset{(+)}{S})$ функции.

b) Граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ *и* $\overset{(+)}{S}$. Пусть $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$ — заданные векторы напряжений на лицевых поверхностях $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно. Обозначим через $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ орты внешних нормалей к $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно. Тогда для $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ при новой параметризации имеем

$$\overset{(-)}{\mathbf{n}} = -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\mathbf{r}^{\bar{3}}, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}} = (1/\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}})\mathbf{r}^{\overset{+}{3}} = (1/\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}})\left(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}} g^{\overset{+}{P}}_{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}}\right)$$

и искомые граничные условия представляются в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\,\overset{(-)}{\mathbf{P}}, \quad \left(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}} g^{\overset{+}{P}}_{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}}\right) \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\,\overset{(+)}{\mathbf{P}}, \\ \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\,\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}, \quad \left(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}} g^{\overset{+}{P}}_{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}}\right) \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}} = \sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\,\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}, \;\; x' \in \overset{(-)}{S},\end{gathered} \tag{3.19}$$

$$\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}}\Big|_{x^3=0}, \quad \overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}}\Big|_{x^3=1}, \quad \overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\Big|_{x^3=0}, \quad \overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\Big|_{x^3=1}.$$

c) Начальные условия кинематического содержания на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ *и* $\overset{(+)}{S}$. Эти условия имеют форму

$$\mathbf{u}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0,\,t=0} = \overset{(-)}{\mathbf{u}}_0(x'), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(x',x^3,t)}{\partial t}\Big|_{x^3=0,\,t=0} = \overset{(-)}{\mathbf{v}}_0(x'),$$
$$\boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0,\,t=0} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_0(x'), \quad \frac{\boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)}{\partial t}\Big|_{x^3=0,\,t=0} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\omega}}_0(x'),$$

$$\mathbf{u}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1,\,t=0} = \overset{(+)}{\mathbf{u}}_0(x'), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(x',x^3,t)}{\partial t}\Big|_{x^3=1,\,t=0} = \overset{(+)}{\mathbf{v}}_0(x'),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1,\,t=0} = \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_0(x'), \quad \frac{\boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)}{\partial t}\Big|_{x^3=1,\,t=0} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\omega}}_0(x'), \;\; x' \in \overset{(-)}{S}.$$

d) Граничные условия теплового содержания первого рода (условия типа Дирихле) на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$. В этом случае на поверхностях задается температура

$$T(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0} = \overset{(-)}{T}(x',t), \quad T(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1} = \overset{(+)}{T}(x',t), \;\; x' \in \overset{(-)}{S}.$$

e) Граничные условия теплового содержания второго рода (условия типа Неймана) на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$. При неизотермических процессах на лицевых поверхностях могут быть заданы нормальные составляющие $\overset{(+)}{q}$ и $\overset{(-)}{q}$ вектора потока тепла $\mathbf{q}$. В этом случае имеем граничные условия

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{q}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\,\overset{(-)}{q}, \;\; \big(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}} g^{\overset{+}{P}}_{\underset{M}{-}} \mathbf{r}^{\bar{M}}\big) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{q}} = \sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\,\overset{(+)}{q}; \quad \overset{(-)}{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\Big|_{x^3=0}, \;\; \overset{(+)}{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\Big|_{x^3=1}. \qquad (3.20)$$

f) Граничные условия теплового содержания третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона) на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$. В этом случае граничные условия можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{q}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\,\overset{(-)}{\beta}\big(\overset{(-)}{T_c} - \overset{(-)}{T}\big), \quad \big(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}} g^{\overset{+}{P}}_{\underset{M}{-}} \mathbf{r}^{\bar{M}}\big) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{q}} = \sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\,\overset{(+)}{\beta}\big(\overset{(+)}{T_c} - \overset{(+)}{T}\big), \;\; x' \in \overset{(-)}{S}, \qquad (3.21)$$

где T_c — заданная температура окружающей среды, β — коэффициент теплоотдачи,

$$\overset{(-)}{\beta} = \beta\Big|_{x^3=0}, \;\; \overset{(+)}{\beta} = \beta\Big|_{x^3=1}, \;\; \overset{(-)}{T} = T\Big|_{x^3=0}, \;\; \overset{(+)}{T} = T\Big|_{x^3=1} \;\; \overset{(-)}{T_c} = T_c\Big|_{x^3=0}, \;\; \overset{(+)}{T_c} = T_c\Big|_{x^3=1}.$$

g) Начальные условия теплового содержания на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$. В случае нестационарной задачи нужно задать и начальные условия:

$$T(x',x^3,t)\Big|_{x^3=0,\,t=0} = \overset{(-)}{T}_0(x'), \quad T(x',x^3,t)\Big|_{x^3=1,\,t=0} = \overset{(+)}{T}_0(x'), \;\; x' \in \overset{(-)}{S}.$$

3.5.2 Граничные и начальные условия на боковой грани Σ. Для корректной постановки задач в теории тонких тел к любой системе уравнений, кроме приведенных выше граничных и начальных условий на лицевых поверхностях, следует присоединить те же самые на контуре $\partial \overset{(-)}{S}$ основной базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$.

Итак, на боковой грани Σ могут быть заданы условия кинематического содержания (векторы перемещения и вращения) или физического содержания (векторы напряжения и моментного напряжения), или на одной ее части Σ_1 могут быть заданы условия кинематического содержания, а на другой части Σ_2 — физического содержания; $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. При неизотермических процессах на некоторой части боковой грани еще задаются граничные условия теплового содержания первого рода (типа Дирихле) или второго рода (типа Неймана), или же третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона). При этом на одной части боковой грани можно задать один тип из этих условий, на другой — другой, а на третьей — третий. При рассмотрении нестационарной задачи нужно задать и начальные условия кинематического и теплового содержаний. Ниже, предполагая, что боковая грань Σ состоит из линейчатых поверхностей, рассмотрены эти граничные условия. При этом, фиксируя некоторые неотрицательные целые числа r и N, получены соответствующие граничные условия в моментах на граничном контуре основной базовой поверхности. Задание числа N, как было сказано выше, означает, что из каждой получаемой ниже бесконечной системы уравнений рассматривается только совокупность первых $N+1$ уравнений. Тогда, очевидно, неизвестными будут моменты $\overset{(m)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}$, $\overset{(m)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}$, $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\overset{(m)}{T}$, $m = \overline{0, N}$, и, например, для микрополярной теории тонких тел при неизотермических процессах задача будет корректно поставлена, если на граничном контуре $\partial \overset{(-)}{S}$ базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ заданы $2N+2$ векторных граничных условий кинематического содержания, а на его части $\partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}$ $N+1$ граничных условий теплового содержания (в случае первой краевой задачи), или на $\partial \overset{(-)}{S}$ заданы $2N+2$ векторных граничных условий физического содержания, а на $\partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}$ $N+1$ граничных условий теплового содержания (в случае второй краевой задачи), или на одной его части $\partial \overset{(-)}{S}_1$ могут быть заданы $2N+2$ векторных граничных условий кинематического содержания, на остальной части $\partial \overset{(-)}{S}_2$ ($\partial \overset{(-)}{S}_1 \cup \partial \overset{(-)}{S}_2 = \partial \overset{(-)}{S}$, $\partial \overset{(-)}{S}_1 \cap \partial \overset{(-)}{S}_2 = \emptyset$) — $2N+2$ векторных граничных условий физического содержания, а на $\partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}$ $N+1$ граничных условий теплового содержания (в случае смешанной краевой задачи). Заметим, что в случае нестационарных задач к граничным условиям следует присоединять начальные условия в моментах, о которых речь пойдет ниже.

3.5.3 Кинематические граничные условия в моментах. Пусть на боковой грани Σ заданы кинематические граничные условия

$$\mathbf{u}(x', x^3, t)\Big|_{\Sigma} = \mathbf{f}(x', x^3, t), \quad \boldsymbol{\varphi}(x', x^3, t)\Big|_{\Sigma} = \mathbf{g}(x', x^3, t).$$

Тогда кинематические граничные условия в моментах относительно ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода представляются в виде

$$\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x',t) = \int\limits_0^1 \mathbf{u}(x',x^3,t)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \overset{(k)}{\mathbf{f}}(x',t),$$
$$\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t) = \int\limits_0^1 \boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \overset{(k)}{\mathbf{g}}(x',t), \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}, \tag{3.22}$$

Здесь $\overset{(k)}{\mathbf{f}}(x',t)$ и $\overset{(k)}{\mathbf{g}}(x',t)$, $k = \overline{0,N}$ — известные векторные поля на $\partial\overset{(-)}{S}$ как моменты известных векторных полей $\mathbf{f}(x',x^3,t)$ и $\mathbf{g}(x',x^3,t)$ соответственно.

3.5.4 Граничные условия физического содержания в моментах. До получия этих условий, выведены некоторые геометрические соотношения на боковой грани при НПОТТ. Введены следующие обозначения: $\partial\overset{(-)}{S}$, ∂S и $\partial\overset{(+)}{S}$ — граничные контуры поверхностей $\overset{(-)}{S}$, S и $\overset{(+)}{S}$ соответственно; $\overset{(\sim)}{\mathbf{m}}$, $\overset{(\sim)}{\mathbf{s}}$ и $\overset{(\sim)}{\mathbf{l}}$, $\sim \in \{-,\emptyset,+\}$ — единичный вектор нормали к боковой грани, единичный вектор касательной к контуру $\partial\overset{(\sim)}{S}$ и единичный вектор тангенциальной нормали к контуру $\partial\overset{(\sim)}{S}$ в точке $\overset{(\sim)}{M}$, $\sim \in \{-,\emptyset,+\}$; $d\Sigma$ — элементарная площадка одной вершиной в точке M с координатами (x^1,x^2,x^3) и со сторонами $d\mathbf{r} = ds\mathbf{s} = \mathbf{r}_I dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $d\overset{(+)}{\Sigma}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке $\overset{(+)}{M}$ с координатами $(x^1,x^2,1)$ и со сторонами $d\overset{(+)}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{\overset{+}{I}}dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $d\overset{(-)}{\Sigma}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке $\overset{(-)}{M}$ с координатами $(x^1,x^2,0)$ и со сторонами $d\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{\overset{-}{I}}dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $\overset{(-)}{\mathbf{n}} = |\mathbf{h}|^{-1}\mathbf{h}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\overset{(-)}{S}$ в точке $\overset{(-)}{M}$. Имеют место доказуемые легко соотношения

$$d\Sigma m_I = \overset{(+)}{\vartheta}\, d\overset{(+)}{\Sigma}\overset{(+)}{m}_{\overset{+}{I}} = \overset{(-)}{\vartheta}\, d\overset{(-)}{\Sigma}\overset{(-)}{m}_{\overset{-}{I}}, \quad a(x',x^3) \equiv b(x',x^3)\overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1},$$
$$b(x',x^3) \equiv d\Sigma/d\overset{(-)}{\Sigma} = \sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}}\epsilon_{MK}\epsilon_{NL}g_I^{\bar{K}}g_J^{\bar{L}}dx^I dx^J}\Big/\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}}\epsilon_{KI}\epsilon_{LJ}dx^I dx^J}. \tag{3.23}$$

Следовательно, $a(x',x^3)$ можно представить в виде ряда относительно x^3

$$a(x',x^3) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x')(x^3)^s, \quad A_s(x') = \frac{1}{s!}\Big(\frac{\partial^s a}{\partial(x^3)^s}\Big)_{x^3=0}. \tag{3.24}$$

Пусть на боковой грани Σ заданы векторы напряжения $\mathbf{P}(x',x^3,t)$ и моментного напряжения $\boldsymbol{\mu}(x',x^3,t)$. Тогда граничные условия в силу формул Коши на боковой грани представляются в виде

$$m_I\mathbf{P}^I(x',x^3,t) = \mathbf{P}(x',x^3,t), \quad m_I\boldsymbol{\mu}^I(x',x^3,t) = \boldsymbol{\mu}(x',x^3,t) \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{3.25}$$

Умножая каждое соотношение из (3.25) на $d\Sigma$ и учитывая (3.23), находим

$$\overset{(-)}{m}_{\overset{-}{I}}\big(\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{P}^I\big) = b(x',x^3)\mathbf{P}(x',x^3,t), \quad \overset{(-)}{m}_{\overset{-}{I}}\big(\overset{(-)}{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^I\big) = b(x',x^3)\boldsymbol{\mu}(x',x^3,t) \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{3.26}$$

Вводя обозначения $\underline{\mathbf{P}}^I = \overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{P}^I$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}^I = \overset{(-)}{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^I$, соотношения (3.26) представятся в виде

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underline{\mathbf{P}}^I = b(x', x^3)\mathbf{P}(x', x^3, .t), \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underline{\boldsymbol{\mu}}^I = b(x', x^3)\boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{3.27}$$

Найдя моменты от обеих частей соотношений (3.27) относительно системы полиномов Чебышева второго рода, получим искомые граничные условия в моментах в следующей форме:

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}} = \mathbf{P}^{(k)}(x', t), \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\overset{(k)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}{}^{\bar{I}} = \boldsymbol{\mu}^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}, \\
\overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}} = \int\limits_0^1 \underline{\mathbf{P}}^I \hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3, \quad \overset{(k)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}{}^{\bar{I}} = \int\limits_0^1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^I \hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3, \\
\mathbf{P}^{(k)} = \int\limits_0^1 \mathbf{P}b\hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3, \quad \boldsymbol{\mu}^{(k)} = \int\limits_0^1 \boldsymbol{\mu}b\hat{U}^*_k(x^3)h^*(x^3)dx^3, \ \ k = \overline{0, N}.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Граничные условия (3.28) применяются при применении уравнений (3.1) и (3.3).

Получим теперь граничные условия физического содержания в моментах в другой форме. Умножая каждое соотношение (3.25) на $d\Sigma$ и учитывая (3.23), находим

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}g^I_{\bar{J}}\mathbf{P}^{\bar{J}} = a(x', x^3)\mathbf{P}(x', x^3, t), \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}g^I_{\bar{J}}\boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = a(x', x^3)\boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}. \tag{3.29}$$

В силу (3.24) и первого соотношения (1.17), из (3.29) получим граничные условия приближения порядка r

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(r)}{g}{}^I_{\bar{J}}\mathbf{P}^{\bar{J}} = a_{(r)}(x', x^3)\mathbf{P}, \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(r)}{g}{}^I_{\bar{J}}\boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = a_{(r)}(x', x^3)\boldsymbol{\mu}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}, \\
a_{(r)}(x', x^3) = \sum_{s=0}^{r} A_s(x')(x^3)^s, \quad r \in \mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Учитывая первые соотношения (1.17) и (3.24) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^3 в правых и левых частях, из (3.29) будем иметь

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}}\mathbf{P}^{\bar{J}} = A_{(s)}(x', x^3)\mathbf{P}, \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}}\boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = A_{(s)}(x', x^3)\boldsymbol{\mu}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}. \tag{3.31}$$

Соотношения (3.29) и (3.31) эквивалентны, а соотношения (3.30) эквивалентны первым $r+1$ равенствам (3.31). Применяя оператор моментов k-го порядка к (3.30), в силу (2.12) находим

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\underset{(r)}{g}{}^I_{\bar{J}}\mathbf{P}^{\bar{J}}) = \overset{(k)}{\mathbf{M}}(a_{(r)}\mathbf{P}), \ \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\underset{(r)}{g}{}^I_{\bar{J}}\boldsymbol{\mu}^{\bar{J}}) = \overset{(k)}{\mathbf{M}}(a_{(r)}\boldsymbol{\mu}), \ r \in \mathbb{N}_0, \ k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}. \tag{3.32}$$

Учитывая (3.31), из (3.32) придем к соотношениям

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}}\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{J}} = A_{(s)}\overset{(k)}{\mathbf{P}}, \quad \overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}}\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\bar{J}} = A_{(s)}\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}, \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial\overset{(-)}{S}, \tag{3.33}$$

которые можно еще получить, применяя оператор моментов k-го порядка к (3.31).

Заметим, что на основании (3.31) из (3.32) можно исключить моменты искомых и известных величин, порядок которых превосходит N. Тогда получим соотношения, которые назовем статическими граничными условиями (граничными условиями физического содержания) в моментах приближения (r, N). Они эквивалентны (3.33), поэтому в качестве статических граничных условий в моментах приближения (r, N) целесообразно рассматривать соотношения (3.33).

3.6 Граничные условия теплового содержания в моментах. Рассмотрены граничные условия первого (типа Дирихле), второго (типа Неймана) и третьего (теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона) родов[3] [90] и из них получены соответствующие граничные условия в моментах.

3.6.1 Граничные условия первого рода в моментах. В этом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани Σ задается температура

$$T(x', x^3, t)\Big|_{\Sigma_q} = T_0(x', x^3, t).$$

Отсюда аналогично (3.22) искомые граничные условия первого рода в моментах будут иметь вид

$$\overset{(k)}{T}(x', t) = \overset{(k)}{T}_0(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на} \quad \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}, \tag{3.34}$$

где $\overset{(k)}{T}_0(x', t)$, $k = \overline{0, N}$, — известные моменты на $\partial \overset{(-)}{S}_q$ известной функции $T_0(x', x^3, t)$.

3.6.2 Граничные условия второго рода в моментах. Нетрудно получить эти условия. В самом деле, в рассматриваемом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани Σ выполняется условие

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}(x', x^3, t)\Big|_{\Sigma_q} = q_0(x', x^3, t).$$

Отсюда, не останавливаясь на выводе, аналогично (3.28) получим граничные условия в форме

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}} \overset{(k)}{\underline{q}}{}^{\bar{I}}(x', t) = q_0^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на} \quad \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}, \tag{3.35}$$

$$\overset{(k)}{\underline{q}}{}^{\bar{I}}(x', t) = \int\limits_0^1 \underline{q}^I \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \;\; q_0^{(k)}(x', t) = \int\limits_0^1 q_0 b(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k = \overline{0, N}, \;\; \underline{q}^I = \overset{(-)}{\vartheta} q^I.$$

В другой форме подобно (3.33) будем иметь

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}} \underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}} \overset{(k)}{q}{}^{\bar{J}}(x', t) = A_{(s)} \overset{(k)}{q}_0(x', t), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}. \tag{3.36}$$

Соотношения (3.36) назовем граничными условиями теплового содержания второго рода в моментах приближения (r, N).

3.6.3 Граничные условия третьего рода в моментах. В рассматриваемом случае граничные условия представляются в виде

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{q}(x',x^3,t)\Big|_{\Sigma_q}=\beta(T_c-T\Big|_{\Sigma_q}). \tag{3.37}$$

Тогда искомые граничные условия аналогично (3.35) имеют вид

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\overset{(k)}{\underset{-}{q}}{}^{\bar{I}}(x',t)=\beta\big(T_c^{(k)}-T^{(k)}\big),\quad k=\overline{0,N},\quad \text{на}\quad \partial\overset{(-)}{S}_q\subseteq\partial\overset{(-)}{S}, \tag{3.38}$$

$$T_c^{(k)}(x',t)=\int\limits_0^1 T_c b(x',x^3)\hat{U}_k^*(x^3)dx^3,\quad T^{(k)}(x',t)=\int\limits_0^1 T(x',x^3)b(x',x^3)\hat{U}_k^*(x^3)dx^3,\quad k=\overline{0,N}.$$

Аналогично (3.33) и (3.36) и в этом случае граничные условия можно записать в форме

$$\overset{(-)}{m}_{\bar{I}}\underset{(s)}{A}{}^{\bar{I}}_{\overset{+}{J}}\overset{(k)}{q}{}^{\bar{J}}(x',t)=A_{(s)}\beta(\overset{(k)}{T}_c-\overset{(k)}{T}),\quad s=\overline{0,r},\quad k=\overline{0,N},\quad x'\in\partial\overset{(-)}{S}_q\subseteq\partial\overset{(-)}{S}. \tag{3.39}$$

Соотношения (3.39) назовем граничными условиями теплового содержания третьего рода в моментах приближения (r,N).

Заметим, что при получении (3.38) и (3.39) предполагалось, что коэффициент теплоотдачи β не зависит от x^3. Если β зависит от x^3, то для нахождения момента k-го порядка правой части (3.37) надо использовать первое соотношение (2.9) при $s=0$.

3.7 Начальные условия в моментах. При рассмотрении нестационарных задач в некоторый момент времени $t=t_0$ должны быть заданы начальные условия. Пусть для нестационарной (динамической) задачи микрополярной МДТТ начальные условия представлены в виде

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}(x',x^3,t)\Big|_{t=t_0}=\mathbf{u}_0(x',x^3),\quad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\mathbf{v}(x',x^3),\\&\boldsymbol{\varphi}(x',x^3,t)\Big|_{t=t_0}=\boldsymbol{\varphi}_0(x',x^3),\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\boldsymbol{\omega}(x',x^3),\end{aligned} \tag{3.40}$$

а для нестационарной задачи теплопроводности начальное условие представлено в форме

$$T(x',x^3,t)\Big|_{t=t_0}=T^0(x',x^3). \tag{3.41}$$

В силу (3.40) для искомых начальных условий в моментах будем иметь

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x',t)\Big|_{t=t_0}=\overset{(k)}{\mathbf{u}}_0(x'),\quad \frac{\partial\overset{(k)}{\mathbf{u}}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\overset{(k)}{\mathbf{v}}(x'),\\&\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x',t)\Big|_{t=t_0}=\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_0(x'),\quad \frac{\partial\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\overset{(k)}{\boldsymbol{\omega}}(x'),\quad k=\overline{0,N},\quad \text{на}\quad \overset{(-)}{S}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Из (3.41) для нестационарной задачи теплопроводности получим начальные условия в моментах

$$\overset{(k)}{T}(x',t)\Big|_{t=t_0}=\overset{(k)}{T}{}^0(x')\quad k=\overline{0,N},\quad \text{на}\quad \overset{(-)}{S}. \tag{3.43}$$

3.8 Определение векторов-функций $\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ *и функций* $\overset{(-)}{T}{}'$, $\overset{(+)}{T}{}'$.

Пусть тензоры напряжений и моментных напряжений (приближенной задачи, о которой речь пойдет ниже) представляются соответственно формулами

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(0)}(x',x^3)=\sum_{k=0}^{N}\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)}(x')\hat{U}^*_k(x^3),\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}(x',x^3)=\sum_{k=0}^{N}\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}(x')\hat{U}^*_k(x^3) \tag{3.44}$$

Тогда граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях (3.19) в силу (3.44) можно записать в форме

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}^{\bar{3}}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)}=-\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\overset{(-)}{\mathbf{P}},\quad (\mathbf{r}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}})\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)}=\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\overset{(+)}{\mathbf{P}},\\
\mathbf{r}^{\bar{3}}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}=-\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}},\quad (\mathbf{r}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}})\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}=\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}},\ \ x'\in\overset{(-)}{S}.
\end{gathered} \tag{3.45}$$

Учитывая значения на концах сегмента [0,1] полиномов Чебышева второго рода $\hat{U}^*_k(0)=(-1)^k(2/\sqrt{\pi})(k+1)$, $\hat{U}^*_k(0)=(2/\sqrt{\pi})(k+1)$ из (3.44) получим

$$\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)}=\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(0)}\Big|_{x^3=0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)},\quad \overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)}=\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(0)}\Big|_{x^3=1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N}(k+1)\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0)},$$

$$\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}=\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}\Big|_{x^3=0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)},\quad \overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}=\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}\Big|_{x^3=1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N}(k+1)\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)}.$$

С помощью (3.12), (3.14), (3.45) и последних формул простыми выкладками приходим к искомым уравнениям [43, 50]

$$\begin{aligned}
&\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'=\overset{(-)}{\mathbf{A}}_{(0,N)},\\
&\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'=\overset{(+)}{\mathbf{A}}_{(0,N)},\\
&\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}'_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'=\overset{(-)}{\mathbf{B}}_{(0,N)},\\
&\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'+\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'+\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}''_{(0,N)}\cdot\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'=\overset{(+)}{\mathbf{B}}_{(0,N)}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}=b_{(N)}\Big(\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{M}}\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot}\Big),\quad \overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}=-a_{(N)}\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot},$$

$$\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}=a_{(N)}\Big[\Big(\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{M}}\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot}\Big)-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{K}}\Big(\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{M}}\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{M}\cdot}\Big)\Big],$$

$$\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}=-b_{(N)}\Big(\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{K}}\underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot}\Big),\quad \overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{m}\cdot}_{(0,N)}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{(0,N)},\quad \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\bar{m}\cdot}_{(0,N)}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{(0,N)},$$

$$\overset{(-)}{\mathbf{A}}_{(0,N)}=-\Big[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\overset{(-)}{\mathbf{P}}+\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,N)}\Big],\quad \underset{\sim}{\mathbf{A}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{A}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{n}}\underset{\sim}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{(+)}{\mathbf{A}}_{(0,N)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\overset{(+)}{\mathbf{P}}-\sum_{k=0}^{N}(k+1)\Big(\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,N)}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{K}}\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{K}\cdot}_{(0,N)}\Big),\quad \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{n}}\underset{\sim}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{(+)}{\mathbf{A}}_{(0,N)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\overset{(+)}{\mathbf{P}}-\sum_{k=0}^{N}(k+1)\Big(\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,N)}-g^{\bar{3}}_{\overset{+}{P}}g^{\overset{+}{P}}_{\overset{-}{K}}\overset{(k)}{\mathbf{P}}{}^{\bar{K}\cdot}_{(0,N)}\Big),\quad \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{n}}\underset{\sim}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{(-)}{\mathbf{B}}_{(0,N)}=-\Big[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}+\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,N)}\Big],\quad \underset{\sim}{\mathbf{C}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{n}}\underset{\sim}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{(+)}{\mathbf{B}}_{(0,N)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{g^{\overset{+}{3}\overset{+}{3}}}\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}-\sum_{k=0}^{N}(k+1)\Big(\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\bar{3}\cdot}_{(0,N)}-g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}g^{\overset{+}{P}}_{\underset{K}{-}}\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\bar{K}\cdot}_{(0,N)}\Big), \quad \underset{\sim}{\mathbf{D}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot}=\mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{r}^{\bar{n}}\underset{\sim}{\mathbf{E}},$$

$$a_{(N)}=2\sum_{k=0}^{N}(k+1)^2=\frac{1}{3}(N+1)(N+2)(2N+3), \quad b_{(N)}=2\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)^2.$$

Выражения для $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}''_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}{}''_{(0,N)}$ ($\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}''_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}''_{(0,N)}$) и $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}''_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{D}}}{}''_{(0,N)}$ получаются из выражений для $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}'_{(0,N)}$, $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}$, $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}{}''_{(0,N)}$ заменой буквы $\mathbf{C}$ на буквы $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$) и $\mathbf{D}$ соответственно.

Соотношения (3.46) — алгебраическая система из двенадцати уравнений относительно двенадцати неизвестных $\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ и $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ (четырех векторов). Разрешая эту систему, получим векторы $\overset{(+)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(-)}{\mathbf{u}}{}'$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$ и $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'$, выраженные при помощи моментов $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\partial_I\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m=\overline{0,N}$ и граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях. Если учесть полученные выражения для искомых векторов в первых $N+1$ соотношениях (3.12), найдем ОС (систему законов Гука) в моментах для нулевого приближения тензоров напряжений и моментных напряжений (аналогично получаются ОС для любого приближения этих тензоров). При этом $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}{}_{(0)}$ и $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}{}_{(0)}$ представляют линейные формы относительно $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\partial_I\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m=\overline{0,N}$. Подставляя $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}{}_{(0)}$ и $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}{}_{(0)}$ в (3.44), получим приближенные выражения для тензоров напряжений и моментных напряжений, удовлетворяющие граничным условиям на лицевых поверхностях для любых векторных полей $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$ и скалярных полей $\overset{(m)}{\vartheta}$; $m=\overline{0,N}$, являющихся моментами искомых векторных полей $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ и скалярного поля ϑ. Следуя И.Н.Векуа, выражения для $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}{}_{(0)}$ и $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}{}_{(0)}$, согласованные с краевыми условиями на лицевых поверхностях, назовем нормированными моментами k-го порядка полей тензоров напряжений и моментных напряжений нулевого приближения (аналогично определяются нормированные моменты k-го порядка полей тензоров напряжений и моментных напряжений любого приближения).

Аналогично (3.46) получаются уравнения для определения функций $\overset{(+)}{T}{}'$ и $\overset{(-)}{T}{}'$ [81,83]. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

Следует заметить, что при упрощенной схеме редукции к конечной системе уравнений, как и выше, в качестве системы уравнений (движения, притока тепла) рассматривается система уравнений (движения, притока тепла) в моментах приближения *(r,N)*, где r и N — некоторые фиксированные неотрицательные целые числа, а затем в законах Гука и теплопроводности Фурье в моментах приближения порядка r полагается, что

$$\overset{(k)}{\mathbf{u}}=0, \quad \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}=0, \quad \overset{(k)}{\vartheta}=0 \quad \text{и} \quad \overset{(k)}{T}=0, \quad \text{если} \quad k>N.$$

Далее отметим, что при упрощенной схеме редукции для каждого приближенного решения краевой задачи, аналогично тому как это делается в [85] для классического варианта теории с применением полиномов Лежандра, строится корректирующее слагаемое, обеспечивающее выполнение граничных условий на лицевых поверхностях [50, 81–83].

Из изложенного выше видно, что трехмерные законы Гука и теплопроводности Фурье в теории тонких тел заменяются соответствующими бесконечными системами законов в моментах. При этом каждый закон содержит бесконечное число слагаемых. Поэтому аналогично системам уравнений движения и притока тепла в моментах следует их редуцировать к конечным системам законов в моментах, каждый закон которых будет содержать конечное число слагаемых. Редукция производится следующим образом: фиксируем некоторые (в частности, те же самые числа, что при редукции систем уравнений) неотрицательные целые числа r и N, а затем из бесконечной системы законов в моментах приближения r выбираем совокупность первых $N+1$ законов и получаем систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения порядка r. При упрощенной схеме редукции из бесконечной системы законов в моментах приближения порядка r выбираем совокупность первых $N + 1$ законов, в каждом законе которой пренебрегаем моментами искомых величин, порядок которых больше N. В этой связи целесообразно вводить определения.

Определение 3.2. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N + 1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений порядка r, назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений (вектора потока тепла) приближения (r,N).

Определение 3.3. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N+1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах порядка r и каждый закон которой не содержит моментов искомых величин, порядок которых больше N, назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах приближения (r,N).

3.9 Классификация и постановка задач в теории тонких тел. Классификация и постановка задач как в микрополярной, так и в классической теории тонких тел осуществляются так же, как в МДТТ [90].

В отличие от МДТТ в рассматриваемом случае как для однородного, так и для неоднородного тела рассматриваются приближенные ОС, системы уравнений движения и уравнений теплопроводности в моментах. При этом и граничные условия ставятся на части граничного контура базовой поверхности в моментах.

Для граничных условий и соответствующих краевых задач в микрополярной теории принимается такая классификация.

Определение 3.4. Если на граничном контуре $\partial \overset{(-)}{S}$ заданы только моменты векторов перемещения и вращения (кинематические граничные условия) (3.22), то такие условия называются граничными условиями первого рода, а задача МДТТТ, использующая эти условия — первой краевой задачей.

Определение 3.5. Если на граничном контуре $\partial \overset{(-)}{S}$ заданы только граничные условия физического содержания в моментах (3.33), то такие граничные условия называются граничными условиями второго рода, а соответствующая задача МДТТТ — второй краевой задачей.

Определение 3.6. Если на одной части граничного контура $\partial \overset{(-)}{S}_1$ заданы кинематические граничные условия (3.22), а на остальной его части $\partial \overset{(-)}{S}_2$ — граничные условия физического содержания (3.33), $\partial \overset{(-)}{S}_1 \cup \partial \overset{(-)}{S}_2 = \partial \overset{(-)}{S}$, $\partial \overset{(-)}{S}_1 \cap \partial \overset{(-)}{S}_2 = \emptyset$, то такие граничные условия называются смешанными граничными условиями, а задача МДТТТ, использующая их — смешанной краевой задачей.

Следует заметить, что в случае динамических задач в некоторый момент времени $t = t_0$ должны быть заданы и начальные условия в моментах (3.42). Если тонкое тело не ограничено, то должны быть заданы условия на бесконечности в моментах. Заметим также, что исключая из приведенных выше определений характеристики микрополярной теории, получим соответствующие определения для классической МДТТТ.

3.9.1 Постановки задач микрополярной теории термо-упругости тонких тел в моментах. Рассматриваются постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной теории термо-упругости тонких тел (ТУТТ), а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) и обсуждаются вопросы получения из них некоторых других частных случаев постановок задач.

Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ;

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r,N) микрополярной ТМДТТТ;

3) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ или систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ при упрощенной схеме редукции;

4) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, N) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенной схеме редукции;

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.22) для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.34), (3.36) или (3.39);

5b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.33) для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.34), (3.36) или (3.39);

5c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.22) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.33) на другой (остальной) части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.34), (3.36) или (3.39);

6) системы начальных условий кинематического (3.42) и теплового (3.43) содержаний в моментах приближения N.

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) не входят механические характеристики (моменты тензоров напряжений $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}$ и моментных напряжений $\overset{(k)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}$), то динамическая задача в моментах приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ разделяется на две задачи: нестационарную температурную задачу в моментах приближения (r, N), решением которой определяется температурное поле, в дальнейшем считающееся известным и динамическую задачу в моментах приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ при неизотермических процессах с известным температурным полем. Постанивки этих задач приведены в диссертации, а также в [50, 81–83] при различных параметризациях для различных тонких тел. Здесь с целью сокращения письма их не приводим.

Задачи при неизотермических процессах, которые разделяются на температурную задачу и задачу ТМДТТ с известным температурным полем, называются несвязанными задачами ТМДТТ [90].

Таким образом, даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной теории ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N). Из этих постановок задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r и N, постановки задач в моментах желаемых приближений. Кроме того, можно получить постановки задач при изотермических процессах. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, N) классических теорий ТУТТ и УТТ. Постановки задач микрополярной теории для произвольного анизотропного материала при классической параметризации и параметризации посредством произвольной базовой поверхности области тонкого тела с применением полиномов Лежандра рассмотрены также в [34] и [53] соответственно (см. также [81–83]).

В четвертой главе «Применение метода ортогональных полиномов в теории многослойных тонких конструкций» рассмотрена эффективная параметризация многослойной трехмерной тонкой области, заключающаяся в использовании в отличие от классических подходов нескольких базовых поверхностей. Здесь дополнительно введены в рассмотрение компоненты контакта единичного тензора второго ранга. Получены различные варианты системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Выписаны межслойные условия при различных связях соседних слоев многослойного тела. Даны постановки задач. Далее аналогично многослойной трехмерной тонкой области [66] и работе [5, 7] рассматривается параметризация многослойной плоской криволинейной области на основе нескольких базовых кривых [51]. Далее получены системы уравнений, ОС, статические граничные условия приближения (0,N) для классического упругого материала, а также кинематические граничные условия и начальные условия приближения N. Выписаны межслойные контактные условия.

В пятой главе «Вариационные принципы микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов» выведены необходимые интегральные соотношения для формулировок вариационных принципов, приведены вариационные принципы виртуальной работы и дополнительной виртуальной работы как для непрерывных, так и для разрывных полей. Сформулированы вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера для трехмерной микрополярной теории, из которых получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из последних выведены аналогичные вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно полиномов Лежандра и Чебышева. Для микрополярной теории многослойных тонких тел как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера, так как из них легко выводятся остальные (Лагранжа, Кастильяно).

В шестой главе «Варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и пластин, аналитические решения в теориях тонких тел, примеры решения задач» из трехмерных уравнений микрополярного твердого тела получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Выведены граничные условия. Приведены уравнения классической моментной теории оболочек и некоторые уравнения тонких тел. Даны сравнения уравнений различных теорий. Сформулирована гипотеза о жесткости в поперечном направлении тонких тел. Найдены обратные операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях как для изотропных однородных материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии и получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Например, в случае квазистатики эти уравнения для материалов, обладающих центром симметрии, имеют вид

$$\begin{aligned}
&Q_1^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{u} + \mathbf{S}^* = 0,\ \ Q_3^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* = 0;\ \ Q_1^* = (b+d)\Delta,\\
&Q_2^* = b\Delta,\ \ Q_4^* = g\Delta - l,\ \ \mathbf{S}^* = 2\alpha Q_1^*(\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{m}) + [\underset{\approx}{\mathbf{E}}Q_1^*Q_4^* - (dQ_4^* - 4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{F}),\\
&Q_3^* = (g+m)\Delta - l,\ \ \mathbf{H}^* = 2\alpha Q_3^*(\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{F}) + [\underset{\approx}{\mathbf{E}}Q_2^*Q_3^* - (mQ_2^* - 4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{m}),\\
&\Delta = \nabla\cdot\nabla,\ \ d = \lambda + \mu - \alpha,\quad l = 4\alpha,\quad b = \mu + \alpha,\quad m = \gamma + \delta - \beta,\quad g = \delta + \beta.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Расщепленные уравнения, содержащие уравнения классической теории, получены и для редуцированной среды (при отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала, что наводит на мысль, что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды). Построен также обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды. Выявлены случаи, при которых можно легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения.

Из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения квазистатической задачи теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае, а в перемещениях и вращениях в микрополярном. Например, уравнения квазистатической задач микрополярной теории призматических тел постоянной толщины $2h$ в перемещениях и вращениях при классической параметризации в силу (3.47) представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&[\bar\Delta^3 + A\bar\Delta^2 + h^{-2}(3\bar\Delta + 2A)\bar\Delta\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar\Delta + A)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\mathbf{u} + \mathbf{S}^{**} = 0,\\
&[\bar\Delta^3 + (B\bar\Delta + A)\bar\Delta + h^{-2}[(3\bar\Delta + 2B)\bar\Delta + C]\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar\Delta + B)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^{**} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

$$
\mathbf{S}^{**} = \frac{\mathbf{S}^*}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad \mathbf{H}^{**} = \frac{\mathbf{H}^*}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad A = -\frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\delta + \beta)},
$$

$$
B = -\frac{4\alpha[\mu(\gamma + 2\delta) + (\mu + \alpha)(\delta + \beta)]}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad C = \frac{16\alpha^2\mu}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad \bar\Delta = g^{PQ}\nabla_P\nabla_Q.
$$

Применяя к уравнениям (3.48) оператор моментов k-го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), получим для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следуюшие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$
\begin{aligned}
&[\bar\Delta^3 + (B\bar\Delta + A)\bar\Delta]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}} + h^{-2}[(3\bar\Delta + 2B)\bar\Delta + C]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'' + h^{-4}(3\bar\Delta + B)\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}^{IV} + h^{-6}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}^{VI} + \overset{(k)}{\mathbf{H}}{}^{**} = 0,\\
&[\bar\Delta^3 + A\bar\Delta^2]\overset{(k)}{\mathbf{u}} + h^{-2}(3\bar\Delta + 2A)\bar\Delta\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}'' + h^{-4}(3\bar\Delta + A)\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}^{IV} + h^{-6}\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}^{VI} + \overset{(k)}{\mathbf{S}}{}^{**} = 0, \ k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Далее получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с их учетом. Начиная с первого приближения системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них — система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функций. На основании найденного обратного оператора к оператору любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Используя метод И.Н.Векуа для решения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение.

Выведены расщепленные системы уравнений квазистатической задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений (для этого достаточно входящие в (3.48) и (3.49) буквы снабжать снизу индексом s, обозначающим номер слоя и менять его от 1 до K, где K — число слоев), из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Используя метод Векуа, для этих систем, а также для уравнений редуцированной среды можно выписать аналитические решения.

Приведены численные решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с защемленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с защемленными краями.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Предложены различные параметризации областей однослойного и многослойного тонких тел. Создан новый тензорный аппарат для полного описания предложенных параметризаций и введен аппарат дифференциальных операторов для теорий тонких тел. Сформулированы фундаментальные теоремы для областей тонких тел при рассмотренных параметризациях;

2. Получены некоторые рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева, применяемые при моделировании деформирования тонких тел;

3. Построена теория моментов относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Даны представления уравнений движения и притока тепла и ОС физического и теплового содержаний при рассматриваемых параметризациях, а также в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах;

4. На основании развитого метода ортогональных полиномов (Лежандра и Чебышева) построены новые варианты теорий упругих тонких тел при различных параметризациях областей этих тел, среди которых новая параметризация более доступная к экспериментальному изучению;

5. Из вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенных вариационных принципов типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из последних выведены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. При этом для микрополярной теории многослойных тонких тел, как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии, получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера, так как из них легко выводятся остальные (Лагранжа, Кастильяно). Доказаны теоремы о минимуме стационарной точки лагранжиана и максимуме стационарной точки кастильяниана, а также теорема о единственности обобщенного решения краевых задач;

6. Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах для тонких тел. Построены корректирующие слагаемые, позволяющие удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях. По способу В.В. Понятовского найдены различные выражения для компонент тензора напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям. Доказано, что способ В.В. Понятовского эквивалентен способу разложения всех компо-

нент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов;

7. Исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Выведены граничные условия. Даны сравнения уравнений некоторых теорий. Сформулирована кинематическая гипотеза для теории тонких тел;

8. Найдены обратные тензоры-операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях как для изотропных однородных материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии. В этих случаях получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды. При отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала, что наводит на мысль, что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды. Построен также обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды с кусочно-гладкой плоской границей. Выявлены случаи, для которых легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения;

9. Из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения квазистатической задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае, а в перемещениях и вращениях в микрополярном. Из последних уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных вектор-функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них — система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функций. На основании найденного обратного оператора к оператору любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Используя метод И.Н.Векуа для ре-

шения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение;

10. Получены расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника, а также для редуцированной среды, содержащие уравнение классической теории;

11. Выведены расщепленные системы уравнений квазистатической задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений;

12. Приведены численные решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с защемленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с защемленными краями.

Список основных публикаций автора по теме диссертации и цитируемой литературы

1. *Никабадзе М.У.* Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей// Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 12.07.88. №5588-В88. 30 с.
2. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей// Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 16.11.1988. №8149-В88. 45 с.
3. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей// Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 04.04.90. №1859-В90. 21 с.
4. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей// Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 16.05.1990. №2676-В90. 12 с.
5. *Никабадзе М.У.* Плоские криволинейные стержни// Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 07.08.1990. №4509-В90. 52 с.
6. *Никабадзе М.У.* Моделирование нелинейного деформирования упругих оболочек// Дис. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. М: МГУ им. М.В.Ломоносова. 1990. 201 с.
7. *Никабадзе М.У.* Новая кинематическая гипотеза и новые уравнения движения и равновесия теорий оболочек и плоских криволинейных стержней// Вестн. МГУ. Сер. Матем. Механ. 1991. №6. С. 54–61.
8. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения новой линейной теории термоупругих оболочек/Актуалные проблемы механики оболочек// Тр. междунар. конф., посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова. Казань: УНИПРЕСС, 9–11 сентября 1998 (278 с.). С. 158–162.

9. *Никабадзе М.У.* Различные представления тензора деформаций Коши-Грина и линейного тензора деформаций и их компонент в новой теории оболочек// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов."Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1998. №6. С. 59–65.
10. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы класической механики на языке тензорного анализа// Деп. в ВИНИТИ РАН. 12.01.1999. №15-В99. 14 с.
11. *Никабадзе М.У.* Пространственные реперы, связанные с линией и порожденные ими параметризации области трехмерного евклидова пространства// Деп. в ВИНИТИ РАН. 12.05.1999. №1518-В99. 25 с.
12. *Никабадзе М.У.* Новая параметрзация пространства стержня// Деп. в ВИНИТИ РАН. 27.05.1999. №1663-В99. 32 с.
13. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения и уравнения движения и равновесия новой линейной теории термоупругих оболочек класса TS// Thesis of international conference reports "Dynamical systems modelling and stability investigation". Mechanical Systems. Kyiv, May 25–29 1999. S. 1.
14. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения новой линейной теории термоупругих оболочек класса TS// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1999. №7. С. 52–56.
15. *Никабадзе М.У.* Различные формы записи уравнений движения и граничных условий новой теории оболочек// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1999. №7. С. 49–51.
16. *Никабадзе М.У.* Новая теория стержней// Тез. док-ов 16-ой межреспуб. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, вторая половина июня 1999. 1 с.
17. *Никабадзе М.У.* О символах Кристоффеля и втором тензоре поверхности при новой параметризации пространства оболочки// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. №3. С. 41–45.
18. *Никабадзе М.У.* Некоторые геометрические соотношения теории оболочек с двумя базовыми поверхностями// Изв. РАН. МТТ. 2000. №4. С. 129–139.
19. *Никабадзе М.У.* К параметризации многослойной оболочечной области трехмерного пространства// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 2000. №8. С. 63–68.
20. *Никабадзе М.У.* О единичных тензорах второго и четвертого ранга при новой параметризации пространства оболочки// Вест. Моск. ун-та. Математ. Механ. 2000. №6. С. 25–28.
21. *Никабадзе М.У.* Уравнения движения и граничные условия теории стержней с несколькими базовыми кривыми// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. №3. С. 35–39.

22. *Никабадзе М.У.* К варианту теории многослойных конструкций// Изв. РАН. МТТ. 2001. №1. С. 143–158.
23. *Nikabadze M.U.* To a version of the theory of multilayer structures// Mech. Solids. 2001, Vol. 36, № 1, pp 119-129.
24. *Никабадзе М.У.* Динамические уравнения теории многослойных оболочечных конструкций при новой кинематической гипотезе// Сб. науч. тр. "Упругость и неупругость". Из-во МГУ. 2001. №1. С. 389–395.
25. *Никабадзе М.У.* К градиентам мест в теории оболочек с двумя базовыми поверхностями// Изв. РАН. МТТ. 2001. №4. С. 80–90.
26. *Nikabadze M.U.* Location gradients in the theory of shells with two basic surfaces// Mech. Solids. 2001, Vol. 36, № 4, pp 64-69.
27. *Никабадзе М.У.* Уравнения движения и граничные условия варианта теории многослойных плоских криволинейных стержней// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2002. №6. С. 41-46.
28. *Никабадзе М.У.* Современное состояние многослойных оболочечных конструкций// Деп. в ВИНИТИ РАН. 30.12.2002. №2289-В2002. 81 с.
29. *Никабадзе М.У.* Вариант теории пологих оболочек// Ломоносовские чтения. Тез. док-ов науч. конф. Секция механики. 17-27 апреля 2003, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. 1 с.
30. *Никабадзе М.У.* Варианты теории оболочек с применением разложений по полиномам Лежандра// Ломоносовские чтения. Тез. док-ов науч. конф. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. 1 с.
31. *Никабадзе М.У.* Обобщение теоремы Гюйгенса-Штейнера и формулы Бура и некоторые их применения// Изв. РАН. МТТ. 2004. №3. С. 64-73.
32. *Nikabadze M.U.* Generalizations of the Huygens-Steiner theorem and Bour formula and some their applications// Mech. Solids. 2004, Vol. 93, № 3, pp 49-57.
33. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для оболочечной области по трехмерным теориям// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.01.2005. №83-В2005. 7 с.
34. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для тонкого деформируемого трехмерного тела// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2005. №5. С. 43-49.
35. *Никабадзе М.У.* К варианту теории многослойных криволинейных стержней// Изв. РАН. МТТ. 2005. №6. С. 145–156.
36. *Nikabadze M.U.* A version of the theory of multilayer curvilinear rods// Mech. Solids. 2005, Vol. 40, №6, pp 107-116.
37. *Никабадзе М.У.* Вариант системы уравнений теории тонких тел// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2006. №1. С. 30-35.

38. *Никабадзе М.У.* Применение классических ортогональных полиномов для построения теории тонких тел. Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научн. симпоз. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 19–20 января 2006 года). М.: ЛЕНАНД, 2006. 480 с. (С. 218-228.).
39. *Никабадзе М.У.* Постановки задач моментной термомнханики деформируемого твердого тонкого тела/Ломоносовские чтения. Тез. док-ов науч. конф. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2007. 1 с.
40. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения нулевого, первого и второго приближений в моментах моментной теории упругого стержня// Ломоносовские чтения. Тез. док-ов науч. конф. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2007. 1 с.
41. *Никабадзе М.У.* Уравнения теории оболочек, согласованные с граничными условиями на лицевых поверхностях// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. №2. С. 72-76.
42. *Nikabadze M.U.* Shell theory equations consistent with boundary conditions at face surfaces// Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2007, Vol. 62 , №, 2, pp. 59-63.
43. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы варианта теории тонких тел с применением разложения по системе многочленов Чебышева второго рода// Изв. РАН. МТТ. 2007. №5. С. 73-106.
44. *Nikabadze M.U.* Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind// Mech. Solids. 2007, Vol. 42, № 3, pp 391-421.
45. *Никабадзе М.У.* Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. №5. С. 54-60.
46. *Nikabadze M.U.* Application of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies// Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2007, Vol. 62, № 5, pp 141-148.
47. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть I. М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ. 2007. 86 с.
48. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть II. М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ. 2007. 93 с.
49. *Никабадзе М.У.* К теориям тонких тел. Труды международной конференции "Неклассические задачи механики". Том I. Кутаиси. 25-27.10.2007. С. 225-242.
50. *Никабадзе М.У.* Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №720–В2008. 287 с.
51. *Никабадзе М.У.* Варианты математических теорий многослойных конструкций с несколькими базовыми поверхностями// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №721–В2008. 127 с.

52. *Никабадзе М.У.* Математическое моделирование упругих тонких тел с двумя малыми размерами с применением систем ортогональных полиномов// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №722–В2008. 107 с.
53. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Математическое моделирование упругих тонких тел с одним малым размером с помощью систем ортогональных полиномов// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №723–В2008. 64 с.
54. *Никабадзе М.У.* Применение систем ортогональных полиномов при математическом моделировании упругих плоских тонких тел// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №724–В2008. 44 с.
55. *Никабадзе М.У.* К задаче о нахождении у тензора четного ранга собственных значений и собственных тензоров// Изв.РАН. МТТ. 2008. №4. С. 77–94.
56. *Nikabadze M.U.* On the Eigenvalue and Eigentensor Problem for a Tensor of Even Rank // Mech. of Solids. 2008, Vol. 43, №. 4, pp. 586-599.
57. *Никабадзе М.У.* К построению линейно независимых тензоров// Изв. РАН. МТТ. 2009. №1. С. 17–36.
58. *Nikabadze M.U.* On the Construction of Linearly Independent Tensors // Mech. of Solids. 2009, Vol. 44, №. 1, pp. 14-30.
59. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. I// Journal of Mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 668-697.
60. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. II// Journal of Mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 698-733.
61. *Никабадзе М.У.* К теории многослойных тонких тел с применением систем ортогональных полиномов// Современные проблемы математики и механики. М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ. 2009. Т. II. Механика. Вып. 2. С. 69–96./ Сб. нуч. трудов, посвященный 70 летию академика В.А.Садовничего, ректора МГУ имени М.В.Ломоносова.
62. *Никабадзе М.У.* О некоторых вариационных принципах в трехмерных микрополярных теориях деформируемого твердого тела и однослойных и многослойных тонких тел// Ломоносовские чтения. Тез. док-ов науч. конф. Секция механики. М.: Изд-во Моск. у-та. Апрель 2009. 1 с.
63. *Никабадзе М.У.* К условиям совместности в линейной микрополярной теории//Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. №5.
64. *Nikabadze M.U.* Compatibility Conditions in the Linear Micropolar Theory // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2010, Vol. 65, № 5, pp. 110-113.
65. *Никабадзе М.У., Кантор М.М., Улуханян А.Р.* К математическому моделированию упругих тонких тел и численная реализация некоторых задач о полосе// Деп. в ВИНИТИ РАН. 29.04.2011. №204–В2011. 207 с.
66. *Nikabadze M.U.* Mathematical Modeling of Multilayer Thin Body Deformation// Journal of Mathematical sciences. V. 187, No 3, 2012. P. 300-336.

67. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами при применении системы ортогональных полиномов. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 года). М.: Изд-во Моск. у-та. 2011. 490 с. (С. 418-423.).
68. *Никабадзе М.У.* Формулы общего комплексного представления в плоской микрополярной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. №4. С. 69-72.
69. *Nikabadze M.U.* Formulas for the General Complex Representation in the Plane Micropolar Theory of Elasticity // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2011, Vol. 66, № 4, pp. 95-98.
70. *Никабадзе М.У.* О связи тензоров напряжений и моментных напряжений в микроконтинуальной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. №6. С.59-62.
71. *Nikabadze M.U.* Relation between the stress and couple-stress tensors in the microcontinuum theory of elasticity // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2011, Vol. 66, № 6, pp. 141-143.
72. *Кантор М.М., Никабадзе М.У.* О теории тонких микрополярных тел с двумя малыми размерами// Вестн. Нижегородского у-та им. Н.И. Лобачевского. Материалы X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н.Новгород, 24-30 августа 2011 г.). Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, №4. Ч. 5. 2011. 1223 с. (С. 454-455.).
73. *Никабадзе М.У.* К условиям совместности и уравнениям движения в микрополярной линейной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. №1. С. 63-66.
74. *Nikabadze M.U.* Compatibility conditions and equations of motion in the linear micropolar theory of elasticity // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2012, Vol. 67, № 1, pp. 18-22.
75. *Никабадзе М.У.* Анизотропия в линейной микрополярной теории упругости/ Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2012. 1 с.
76. *Никабадзе М.У.* К выводу формул комплексного представления в плоской микрополярной теории упругости// Труды II Международной конференции "Неклассические задачи механики". Кутаиси. 06-08.10. 2012. С. 62-70.
77. *Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами// Изв. РАН. МТТ. 2013. №3. С. 96–110.

78. *Kantor M.M., Nikabadze M.U., Ulukhanian A.R.* Equations of Motion and Boundary Conditions of Physical Meaning of Micropolar Theory of Thin Bodies with Two Small Cuts// Mech. Solids. 2013, Vol. 48, № 3, pp 317-328.
79. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления с приложениями к механике//Деп. в ВИНИТИ РАН. 05.08.2013. № 231-B2013. 242 с.
80. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. №1. С. 30-39.
81. *Никабадзе М.У.* Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. I// Деп. в ВИНИТИ РАН. 20.05.14. №135 – B2014. 278 с.
82. *Никабадзе М.У.* Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. II Деп. в ВИНИТИ РАН. 20.05.14.№136 – B2014. 218 с.
83. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел// М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ. 2014. 515 с.
84. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
85. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
86. *Димитриенко Ю.И.* Тензорое исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
87. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
88. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
89. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
90. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-ое изд. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
91. *Победря Б.Е.* Теория термомеханических процессов// Сб. науч. тр.: Упругость и неупругость. Изд-во МГУ, 2006. С. 70–85.
92. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.