УДК 534-141

О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде

Пожалостин А.А.*, Гончаров Д.А.**

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,

2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Россия

**e-mail: a.pozhalostin@mail.ru*

***e-mail: goncharov@bmstu.ru*

Аннотация

Рассматриваются параметрические колебания жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд. Показана возможность возбуждения малых симметричных колебаний в системе с демпфированием. Методом Ван дер Поля определяется численное значение коэффициента модуляции, определяются границы зоны неустойчивости.

Ключевые слова: параметрические колебания, жидкость, демпфирование, коэффициент модуляции.

В данной работе построено уравнение с учетом демпфирования осесимметричных колебаний жидкости, заполняющий абсолютно жесткий цилиндрический сосуд (рис. 1). Вообще говоря, исследования движения жидкости в сосудах и движения сосудов с жидкостью является весьма распространенной задачей, ввиду их практической важности и непосредственной связи с техническими проблемами, возникающими, например, в ракетно-космической технике [1].

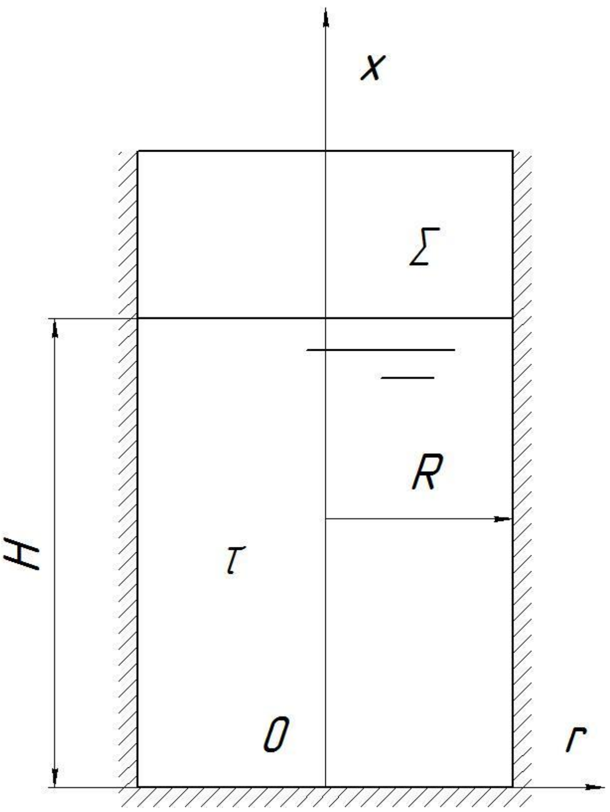

Рис. 1. Рисунок цилиндрического сосуда

При этом использован подход, изложенный в работах [2], [3].

В работе [2] рассмотрены параметрические колебания жидкости в прямоугольном сосуде.

Предполагается, что жидкость обладает свойством линейной вязкости.

Отличие этой работы состоит в том, что для маловязкой жидкости получена численная величина коэффициента затухания. В этом случае используется подход, изложенный в работах Кулона-Гельмгольца. Результаты этой работы основаны на данных, полученных при проведении частотного эксперимента [4]. Параметрический резонанс как метод возбуждения волн реализовывался в работах [5], [].

В связи с этим в МГТУ им. Н.Э. Баумана разработана и построена установка для проведения частотного эксперимента с сосудами, заполненными жидкостью. Использованы силовозбудители Prodera и его регистрирующая аппаратура.

Отличие от работы Нестерова и новизна полученных результатов состоит в том, что построено дифференциальное уравнение параметрического резонанса для области основного параметрического резонанса $\rho = 2\omega_0$ и получены численные значения всех величин, входящих в это уравнение.

Таким образом, показано, что при продольных симметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде возможно возбуждать малые колебания системы, при соответствующих величинах коэффициента модуляции ε. В этом случае область неустойчивости параметрического резонанса принципиально имеет вид рис. 2.

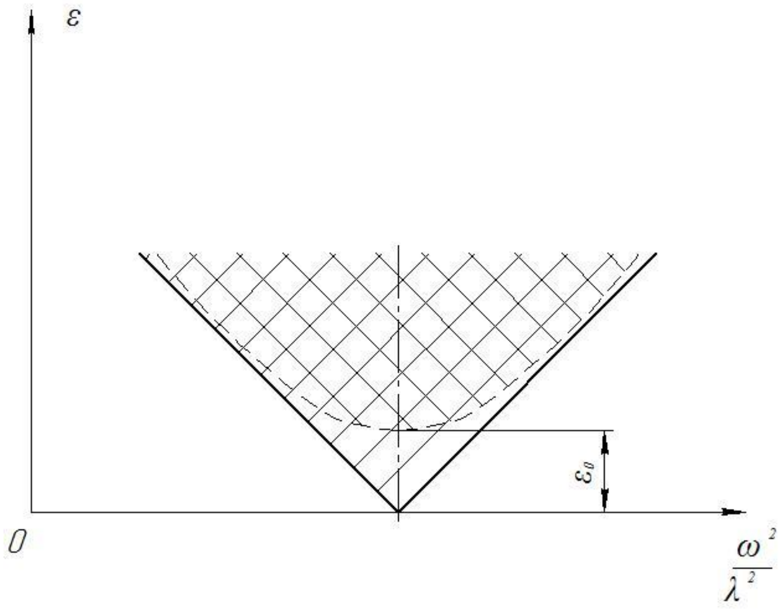

Рис. 2. Вид области неустойчивости

(заштриховано) основного параметрического резонанса системы

Основные допущения:

1. Жидкость считается маловязкой.
2. Жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение потенциальное.
3. Колебания считаются малыми осесимметричными.
4. Сосуд абсолютно жесткий, жидкость заполняет его на высоту h.

Потенциал скорости частиц жидкости $\Phi(x,r,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ в τ. τ = область, занятая жидкостью. R - радиус цилиндра.

Функция Φ имеет вид [6]

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0\left(\lambda_i \frac{r}{h}\right)\left[ch\left(\lambda_i \frac{x}{h}\right) + th(x_i)sh\left(\lambda_i \frac{x}{h}\right)\right]\dot{S}(t) \quad (1)$$

A_i - произвольные постоянные, J_0 - функция Бесселя первого рода, нулевого порядка, λ_i - собственные значения краевой задачи

$$J_1(\lambda_i) = 0 \quad (2)$$

Первое значение λ_1 трансцендентного уравнения (2):

$$\lambda_1 = 3{,}83{,}...$$

В дальнейшем рассматривается только один член ряда (1). Потенциал Φ (1) удовлетворяет краевому условию:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} = 0 \text{ на } S \quad (3)$$

S - смоченная поверхность сосуда, $\bar{n}$ - внешняя нормаль.

$S(t)$ - временной множитель.

Линеаризованное силовое условие на $\sum$ - свободной поверхности жидкости имеет вид [7]:

$$-g\omega^2\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ (рис. 1)} \quad (4)$$

g - ускорение свободного падения, ω - частоты свободных колебаний системы.

Подставим Φ - (1) в условие (4), получим:

$$\omega_0^2 = g\frac{\lambda_1}{h}th(\lambda_1) \quad (5)$$

ω_0 - собственная частота малых симметричных колебаний системы.

Полагая, как и в [6] ускорение свободного падения - g в виде

$$g_0(1+\varepsilon\cos pt) \qquad (6)$$

ε - малый параметр, величина 1-го порядка малости.

Построим уравнение параметрических колебаний вязкой жидкости для функции S.

Кинетическая энергия системы T имеет вид:

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(grad\Phi)^2 d\tau$$

Используя формулу Грина [8], [9]:

$$T=\frac{1}{2}\rho\oint_{S}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{n}}dS \qquad (6)$$

Так как $\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{n}}=0$ на S, то

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_{\Sigma}\Phi\Big|_{x=0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{x=0}rdr\cdot 2\pi \quad \text{и}$$

$$T=\frac{1}{2}m_1^0\rho\dot{S}^2, \qquad (7)$$

где

$$m_1^0=2\pi\int_0^R\Phi_{/x=0}\frac{\partial\Phi}{\partial x/_{x=0}}rdr \qquad (8)$$

Вязкость жидкости учтем, используя подход, изложенный в [2]; полагаем, что сила вязкого трения пропорциональна первой степени скорости –

$$\overline{F}_{сопр}=-\mu grad\Phi \qquad (9)$$

Воспользуемся представлениями теоретической механики, согласно которым силы линейного вязкого сопротивления можно учесть с помощью функции Рэлея R, которая в данном случае имеет вид:

$$R = \frac{1}{2}\mu 2\pi \int^{R} \Phi_{|x=0} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{x=0} r dr \tag{10}$$

или

$$R = \frac{\mu}{2} \cdot m_1^0 \dot{S}^2 \tag{11}$$

здесь μ - коэффициент линейно-вязкого сопротивления, величина которого будет определена ниже с помощью проведенного эксперимента [11].

Используем уравнение Лагранжа 2-го рода для составления дифференциального уравнения для функции S

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) - \frac{\partial T}{\partial S} = -\frac{\partial \Pi}{\partial S} + Q_{дисс.} \tag{12}$$

здесь Π - потенциальная энергия системы, $Q_{дисс.} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{S}}$ - обобщенные силы от диссипативных сил.

Согласно [7] функция Π будет:

$$\Pi = \frac{Sg}{2} \int_{\Sigma} \varsigma^2 d\Sigma \tag{13}$$

Здесь

$$\varsigma = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{|x=0}} dt$$

или

$$\varsigma = -A_1 J_0\left(\lambda_1 \frac{r}{n}\right)\frac{\lambda_1}{h} th(\lambda_1) S(t) \tag{14}$$

Так как [9]

$$\int_0^R J_0^2\left(\lambda_1 \frac{r}{h}\right) r dr = J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) \tag{15}$$

то функция Π будет [7]:

$$\Pi = \frac{\pi\rho}{2}\omega_0^2(1+\varepsilon \sin pt) J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) th(\lambda_1) S^2$$

Постоянная A_1 внесена в функцию S.

Коэффициент - $m_1^0 = J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right)\frac{\lambda_1}{h} th(\lambda_1)\frac{\pi}{2}$.

Вычисляя (12), получим:

$$\ddot{S} + \frac{\mu}{\rho}\dot{S} + \omega_0^2(1+\varepsilon \sin pt)S = 0 \tag{15}$$

Здесь μ некоторый коэффициент, равный удвоенной величине коэффициента затухания системы n.

Определим μ, используя метод Кулона-Гельмгольца, согласно которого $n^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2$. n - коэффициент затухания.

Здесь ω_0 – частота колебаний системы без вязкости. ω_1 - частота симметричных колебаний с учетом вязкости – определена по данным эксперимента [11, 12].

Отсюда $n_{дисс.} = n = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$, а коэффициент $\mu = 2n_{экс.}\rho$. Коэффициент модуляции ε_0 (рис. 2) равен $\varepsilon_0 = 2\mu\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$.

Величину ε_0 можно определить, если применить метод Ван-дер Поля.

В этом случае $p = 2\omega_0$ и решение ищем в виде

$$S = A\sin(pt+\alpha)$$

Согласно этого метода наложим условие:

$$\dot{A}\sin(pt+\alpha) + \dot{\alpha}A\cos(pt+\alpha) = 0.$$

После этого применяя метод осреднения за период 2π изменения фазы $pt+\alpha$ и несложных преобразований [10], получим уравнение границ зоны неустойчивости (рис. 2).

Координаты величины точки M (рис. 2)

$$Z_0 = \sqrt{1-\delta/2},\ \varepsilon_0 = 2\delta\sqrt{1-\left(\delta/2\right)^2},$$

$$Z_0 = P/\omega_0,\ \delta = \frac{2n}{\omega_0}.$$

Заключение

Таким образом, в работе определены величины коэффициента пульсации, при которой возможны симметричные параметрические колебания системы, для известного коэффициента демпфирования. Коэффициент демпфирования может быть определен экспериментально. Иными словами, показано, что малые колебания системы с трением можно получить при соответствующей величине коэффициента пульсации.

Библиографический список

1. Ай М.В., Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=55633

2. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофизические исследования. 1968. №3(45). С. 87 – 97.

3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Влияние диссипации на параметрические колебания // Доклады Академии наук. 2010. Т. 435. №2. С. 186 – 189.

4. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Колебание двухслойной жидкости в упругом баке // Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань, 20-24 августа 2015. С. 1012-1014.

5. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Экспериментальное исследование связанных колебаний сосуда с жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные Науки. 2015. № 1(58). С. 14 – 25.

6. Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров С.В., Со Аунг Наинг. Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 12(36). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1345.html

7. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1966. – 169 с.

8. Колесников К.С. Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 1990. - 375 с.

9. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа, 1962. 247 с.

10. Саратов Ю.С., Пожалостин А.А. Основы теории колебаний (линейная теория). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995. Ч. 2. – 52 с.

11. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Экспериментально-аналитический метод определения коэффициента сопротивления разделителя слоев жидкости в баке // Наука и образование. 2015. №4. С. 130 – 140.

12. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2014. №5(56). С. 109 – 116.