На правах рукописи

Артемова Елизавета Марковна

Исследование динамики точечных особенностей и их влияния на движение твердого тела в идеальной жидкости

Специальность 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2024

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая и экспериментальная физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель:	**Килин Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Теоретическая и экспериментальная физика» ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Официальные оппоненты:	**Рамоданов Сергей Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории прецизионной оптомехатроники ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт»
	Островская Ирина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт водных проблем Российской академии наук»

Защита состоится 27.12.2024 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182279

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.327.08.

Автореферат разослан «____» ______________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.08,
доктор физико-математических наук — Гидаспов В.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию ряда конечномерных динамических систем, возникающих при описании движения особенностей потока жидкости в двумерной постановке, а также движения твердых тел в их присутствии. Актуальность решаемых задач связана как с необходимостью общего развития теории динамических систем, так и с обобщением известных результатов на новые задачи теоретической механики и гидродинамики.

В теоретической гидродинамике отдельную область составляют модели, описывающие движение точечных особенностей потока (точечные вихри, источники, диполи, мультиполи и другие) и их влияние на движение твердых тел. Модель точечного вихря берет свое начало с основополагающей работы Гельмгольца по динамике вихрей[1]. Позднее в своих лекциях Кирхгофф указал общие уравнения, описывающие движение N точечных вихрей на плоскости[2]. В дальнейшем модель точечных вихрей была обобщена на случай их движения в ограниченных областях[3] и по криволинейным поверхностям[4].

Часть диссертационного исследования посвящена исследованию задач о движении точечных вихрей на так называемых «плоских» цилиндре и торе. Данные задачи возникают при описании динамики периодических вихревых структур на плоскости после редукции по соответствующей дискретной группе симметрий. При этом бесконечная последовательность вихрей заменяется на один вихрь, и добавляются периодические граничные условия. Исследования движения вихрей на «плоском» неограниченном цилиндре и торе проводились, например, в работах[5,6]. В силу сложности уравнений, описывающих движение вихрей на торе, данная задача до сих пор остается до конца неиссле-

[1] *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. – 1858.

[2] *Kirchhoff G.* Vorlesungen uber mathematische Physik. – Teubner, 1891.

[3] *Greenhill A. G.* Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.* – 1877/78. – Vol. 15, no. 58. – Pp. 10–27.

[4] *Dritschel D. G., Boatto S.* The motion of point vortices on closed surfaces // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* – 2015. – Vol. 471, no. 2176. – Pp. 20140890.

[5] *Stremler M.A., Aref H.* On the motion of three point vortices in a periodic strip // *J. Fluid Mech.* – 1996. – Vol. 314. – Pp. 1-25.

[6] *O'Neil K.A.* On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices // *J. Math. Phys.* – 1989. – Vol.30, no. 6. – Pp. 1373–1372.

дованной. Исследование движения вихрей на ограниченном «плоском» цилиндре на данный момент также остается открытой задачей. Таким образом, актуальным является построение и анализ математических моделей, описывающих движение вихрей в указанных областях с периодическими граничными условиями.

Модель точечного вихря также оказывается удобной для построения конечномерных уравнений совместного движения вихревых структур и твердого тела. Впервые уравнения движения уравновешенного кругового цилиндра в присутствии точечных вихрей были получены в работах[7,8]. Наряду с точечными вихрями рассматривается движение других точечных особенностей в жидкости, таких как источники, вихреисточники, диполи[9]. Исследований, посвященных изучению влияния точечных особенностей отличных от вихрей на движение твердого тела в жидкости, достаточно мало, даже в случае стационарных особенностей. Это связано со сложностями построения математических моделей. Поэтому изучение такого рода систем на настоящий момент остается открытой задачей.

Целью данной работы является исследование движения кругового профиля (уравновешенного и неуравновешенного) в поле неподвижной точечной особенности и движения периодических вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости на основе общих подходов, применяемых для анализа конечномерных математических моделей теоретической механики и гидродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать движение уравновешенного кругового профиля без собственной циркуляции в поле неподвижной точечной особенности.

2. Исследовать управляемое движение уравновешенного кругового профиля без собственной циркуляции за счет изменения интен-

[7] *Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // *Regular and chaotic dynamics.* – 2001. – Vol. 6, no. 1. – Pp. 33-38.

[8] *Shashikanth B. N. et al.* The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // *Physics of Fluids.* – 2002. – Vol. 14, no. 3. – Pp. 1214-1227.

[9] *Smith S. G. L.* How do singularities move in potential flow? // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* – 2011. – Vol. 240, no. 20. – Pp. 1644-1651.

сивности неподвижного точечного источника.

3. Исследовать влияние собственной циркуляции кругового профиля на его движение в поле неподвижной точечной особенности.

4. Исследовать движение неуравновешенного кругового профиля в поле неподвижной точечной особенности.

5. Исследовать движение двух и трех вихрей на «плоском» торе в зависимости от их интенсивности.

6. Исследовать движение четырех вихрей на центрально-симметричном инвариантном многообразии на «плоском» торе.

7. Исследовать движение двух вихрей на «плоском» цилиндре конечной длины в зависимости от начальных условий и параметров системы (длины образующей цилиндра и интенсивности вихрей).

Научная новизна:

1. Построена двумерная математическая модель, описывающая движение кругового профиля (в общем случае, со смещенным центром масс и собственной циркуляцией) в присуствии неподвижной точечной особенности.

2. Доказано, что при отсутствии у кругового профиля собственной циркуляции тип неподвижной точечной особенности качественно не влияет на динамику системы, а также что такая система является интегрируемой.

3. Впервые показано, что с помощью изменения интенсивности точечного источника можно стабилизировать периодическое движение уравновешенного кругового профиля (без собственной циркуляции) вокруг точечной особенности.

4. Доказано, что задача о движении уравновешенного кругового профиля с собственной циркуляцией в поле неподвижного точечного вихря является интегрируемой. Для задачи о движении профиля в поле неподвижного точечного источника указаны возможные типы движений.

5. Доказано, что система двух вихрей на торе является интегрируемой, а вид фазового портрета не зависит от интенсивности вихрей (за исключением случая вихревой пары). В случае суммарной ненулевой интенсивности задача о движении трех вихрей на торе, в отличие от движения вихрей на плоскости, неинтегрируема.

6. Впервые показано, что система четырех вихрей на торе допускает центрально-симметричное инвариантное многообразие. Доказано, что задача о движении вихрей на этом инвариантном многообразии является неинтегрируемой, в отличие от аналогичной задачи для вихрей на плоскости.

7. Построена модель, описывающая движение вихрей на «плоском» цилиндре конечной длины. Показано, что эта задача соответствует задаче о движении вихрей на торе на инвариантном многообразии. Для случая двух вихрей на конечном «плоском» цилиндре проведен полный бифуркационный анализ.

Научная и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы в теоретической механике и математической физике, а также в теоретической гидродинамике. Результаты диссертации, описанные в главе 1, могут быть использованы для разработки методов управления движением твердых частиц в жидкости. Результаты диссертации, полученные в главах 2 и 3, могут быть использованы для дальнейшего изучения динамики и устойчивости периодических структур в жидкости.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяются классические для конечномерных динамических систем и теоретической механики методы, такие как поиск неподвижных точек и анализ их устойчивости, нахождение эффективного потенциала, построение бифуркационных диаграмм и фазовых портретов. Также использовались методы численного анализа динамических систем: отображение Пуанкаре, построение карт зависимости типа траекторий от начальных условий или параметров системы. Помимо этого применялся математический аппарат работы с бесконечными рядами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: 1) использованием математического аппарата теоретической механики и теории динамических систем, 2) применением классических аналитических и численных методов исследования, 3) использованием верифицированных символьных и численных методов, реализованных в Maple, MatLAB, Mathematica.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) Семинаре «Уральского математического центра» (Ижевск, УдГУ, 2023, 2024), 2) Семинаре «Динамические системы и механика» (Москва, МАИ, 2024), 3) Международной конференции «Регулярная и хаотическая динамика» (Сочи, Сириус, 2023), 4) Международной конференции «Динамические системы. Теория и приложения» (Нижний Новгород, 2022), 5) Международной конференции «Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics» (Чебоксары, 2019), 6) VII Международной конференции «Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018» (Москва, Долгопрудный, 2018), 7) XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2018 г.).

Личный вклад. В совместных работах [1,2, 4–6] постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы вычислительные и аналитические программы в системах компьютерной алгебры и численного анализа Maple, MatLAB, Mathematica.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных работах, 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в WoS и Scopus [1–6], 6 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 108 страниц, включая 38 рисунков. Список литературы содержит 80 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, описаны задачи, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию плоскопараллельного движения кругового цилиндра (в общем случае неуравновешенного и с собственной циркуляцией) радиуса R в идеальной несжимаемой жидкости в присутствии неподвижной точечной особенности (рассмотрены случаи: вихря, источника и вихреисточника).

Относительно рассматриваемой системы принимаются следующие допущения: 1° Движение жидкости потенциальное, 2° Циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему профиль, постоянна.

В *первой части* главы рассмотрен случай уравновешенного профиля без собственной циркуляции. Показано, что в этом случае вид точечной особенности качественно не влияет на движение цилиндра, поэтому далее в качестве особенности рассматривается источник.

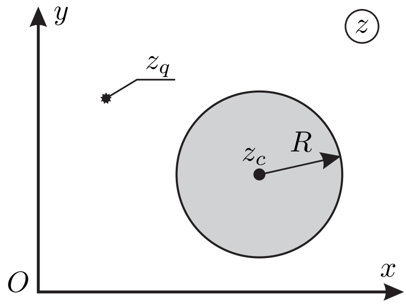

Рисунок 1 – Круговой профиль и источник в жидкости

Для описания движения системы вводится неподвижная (инерциальная) система координат Oxy, в которой жидкость покоится на бесконечности (см. рис. 1). Координатам $(x,\, y)$ ставится в соответствие комплексная переменная $z = x + iy$. Положение центра масс профиля задается как $z_c = x_c + iy_c$, а положение источника как $z_q = x_q + iy_q$.

Для построения уравнений движения кругового профиля необходимо определить силу, действующую на него со стороны жидкости. Для рассматриваемой системы эта сила может быть вычислена по методу, предложенному Седовым

$$F_x + iF_y = \overline{\frac{i\rho}{2}\int\limits_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz} + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{dSz_c}{dt} + i\rho\int\limits_C z\frac{dW}{dt}dz\right), \qquad (1)$$

где W — комплексный потенциал, описывающий движение жидкости, ρ — плотность жидкости, $S = \pi R^2$ — площадь профиля, F_x, F_y — проекции силы на оси Ox, Oy соответственно, а интегрирование выполняется по контуру профиля C. В силу допущения 2° в выражении (1) пропадают слагаемые связанные с циркуляцией.

Система, описывающая движение кругового профиля имеет вид

$$\dot{x}_c = \frac{p_x}{\mu}, \dot{p}_x = \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2|z_s|^4}\left(2\pi q\sigma^2 \mathrm{Re}\left[\dot{\overline{z_q}} z_s^2\right] - 2\sigma^2|z_s|^2\dot{q}\pi x_s - q^2|z_s|^2 x_s\right),$$
$$\dot{y}_c = \frac{p_y}{\mu}, \dot{p}_y = \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2|z_s|^4}\left(2\pi q\sigma^2 \mathrm{Im}\left[\dot{\overline{z_q}} z_s^2\right] - 2\sigma^2|z_s|^2\dot{q}\pi y_s - q^2|z_s|^2 y_s\right),$$

где $\mu = m + \rho\pi R^2$ — эффективная масса, m — масса единицы длины цилиндра, $z_s = z_q - z_c = x_s + iy_s$, $\sigma^2 = R^2 - |z_s|^2$.

Рассмотрено движение цилиндра в поле неподвижного источника постоянной интенсивности ($\dot{z}_q = 0$, $\dot{q} = 0$). В силу произвольности выбора начала системы координат Oxy считается, что источник расположен в точке $z_q = 0$. В этом случае положение профиля относительно источника удобнее описывать полярными координатами

$$r = |z_c| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad \varphi = \arg z_c, \quad r \in (R, +\infty), \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \tag{2}$$

При этом соответствующие координатам r, φ обобщенные импульсы определяются как

$$p_r = \mu\dot{r}, \quad p_\varphi = \mu r^2\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Рассматриваемая система допускает интеграл момента импульса

$$K = p_\varphi. \tag{4}$$

На фиксированном уровне $K = k$ интеграла (4) уравнения движения редуцируются к гамильтоновой системе с одной степенью свободы

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{k^2}{\mu r^3} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi r(r^2 - R^2)}, \tag{5}$$

где H — гамильтониан на фиксированном уровне интеграла $K = k$, который может быть представлен в виде

$$H = \frac{1}{2\mu}p_r^2 + U(r), \; U(r) = \frac{1}{2\mu}\frac{k^2}{r^2} + \frac{\rho q^2}{4\pi}\ln\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \tag{6}$$

В диссертационной работе исследованы бифуркации системы (5) в зависимости от значений первого интеграла K. Соответствующая бифуркационная диаграмма и возможные типы фазовых портретов приведены на рис. 2.

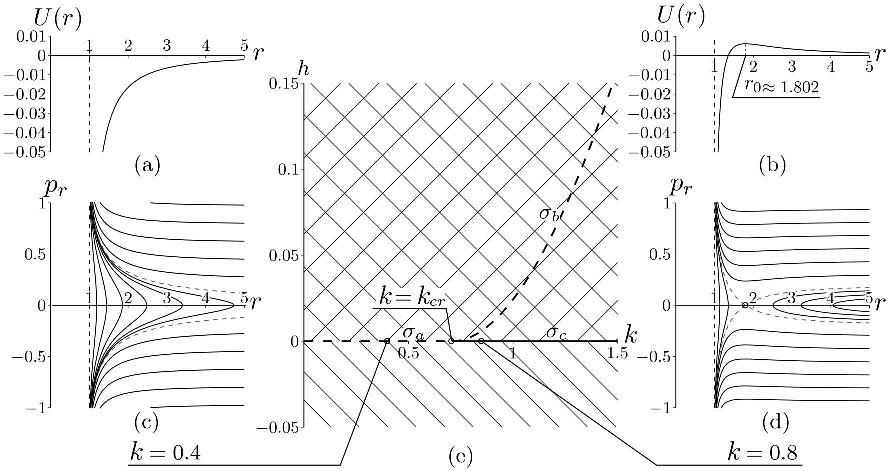

Рисунок 2 – Характерный вид a) потенциала (6) при $k < k_{cr}$, b) потенциала (6) при $k > k_{cr}$, c) фазового портрета системы при $k < k_{cr}$, d) фазового портрета системы при $k > k_{cr}$, e) бифуркационная диаграмма. Значения параметров $m = 1$, $R = 1$, $q = 1$, $\rho = 1$.

Далее в работе проведен анализ возможности стабилизации неподвижной точки системы (5) (соответствующей круговому движению профиля при $k > k_{cr}$) с помощью управления интенсивностью источника через обратную связь, то есть считая, что интенсивность источника зависит от фазовых переменных системы (5) $\dot{q} = u(r, p_r)$.

Уравнения управляемой системы можно представить в виде

$$\dot{r} = \frac{\mathcal{P}}{\mu r}, \quad \dot{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}^2 + k^2}{\mu r^2} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi(r^2 - R^2)} + \rho R^2 u, \quad \dot{q} = u, \tag{7}$$

где u — управляющее воздействие, а $\mathcal{P} = r p_r$. Система (7) задана в расширенном трехмерном фазовом пространстве $\mathcal{Q} = \{(r,\, \mathcal{P},\, q) \mid r > R\}$.

С помощью линеаризации уравнений (7) было построено управление в виде обратной связи

$$u = \frac{g_2}{2\alpha}(r - r_0) + \frac{g_2}{2\sqrt{\alpha\beta}}\mathcal{P} + \left(\frac{g_1}{\beta} + \frac{g_2\gamma}{2\alpha\beta}\right)(q - q_0), \tag{8}$$

где r_0 — значение r, соответствующее неподвижной точке при $q = q_0$, а g_1, g_2, α, β — константы, зависящие от параметров системы. Управление (8) при заданном q_0 гарантирует стабилизацию неподвижной точки лишь при малых отклонениях от нее. Тем не менее, численные эксперименты показывают, что обратная связь (8) позволяет стабилизировать круговое движение профиля и в некоторых случаях даже при существенных отклонениях.

Во *второй части* первой главы рассмотрен вопрос о влиянии собственной циркуляции Γ_0 на движение кругового профиля. Комплексное представление силы F в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} F = F_x + iF_y = -\rho\pi R^2\ddot{z}_c + i\rho\Gamma_0\dot{z}_c + \\ \frac{\rho(q^2+\Gamma^2)R^2}{2\pi}\frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2\big(|z_q - z_c|^2 - R^2\big)} + \rho(q + i\Gamma)R^2\frac{(z_q - z_c)^2}{|z_q - z_c|^4}\dot{\bar{z}}_q - \\ \rho\dot{q}R^2\frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2} - \frac{\rho\Gamma_0(\Gamma - iq)}{2\pi}\frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь сила записана для случая вихреисточника, с характеристикой $q + i\Gamma$.

В случае неподвижного точечного вихря ($\dot{z}_q = 0$, $q = 0$) задача о движении кругового профиля интегрируема. В работе найдены устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, построены бифуркационная диаграмма и фазовые портреты (см. рис. 3). Указано, что в отличие от профиля без собственной циркуляции в системе не существует траекторий, уходящих на бесконечность, а также существует устойчивое периодическое движение кругового профиля вокруг особенности (вихря).

В случае неподвижного источника ($\dot{z}_q = 0$, $\Gamma = 0$) показано, что система уравнений, описывающая движение профиля, сводится к системе двух неавтономных дифференциальных уравнений. Указано, что все траектории кругового профиля либо притягиваются к особенности, либо уходят на бесконечность. На рис. 4 приведена диаграмма времени падения на источник в зависимости от начальных условий.

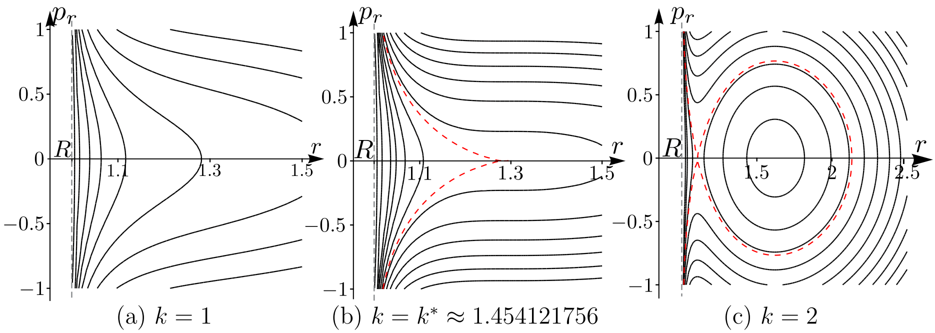

Рисунок 3 – Примеры фазовых портретов при $\rho = 1$, $R = 1$, $\Gamma_0 = 2$, $\Gamma = 0$, $\mu = 5$ и различных значения k.

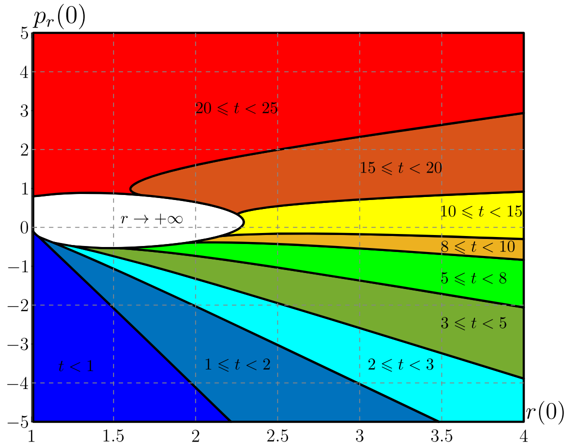

Рисунок 4 – Диаграмма времени падения на источник в зависимости от начальных условий.

В *третьей части* главы рассмотрено плоскопараллельное движение неуравновешенного (центр масс смещен на расстояние d от геометрического центра) кругового профиля в присутствии точечного источника в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости (рис. 5).

Положение профиля относительно неподвижной системы координат зададим радиус-вектором его геометрического центра $\boldsymbol{R}_c = (X_c, Y_c)$, а ориентацию профиля — углом ϑ между положительными направле-

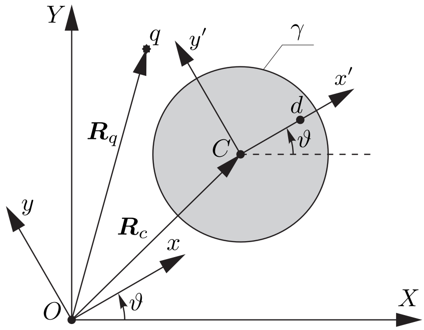

Рисунок 5 – Схематическое изображение неуравновешенного кругового профиля и точечного источника.

ниями осей OX и Cx'.

Уравнения движения кругового профиля имеют вид:

$$\begin{gathered}\dot{X}_c = \frac{\partial H}{\partial \Pi_x}, \quad \dot{Y}_c = \frac{\partial H}{\partial \Pi_y}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_\vartheta} \\ \dot{\Pi}_x = -\frac{\partial H}{\partial X_c}, \quad \dot{\Pi}_y = -\frac{\partial H}{\partial Y_c}, \quad \dot{\Pi}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\end{gathered} \tag{10}$$

где гамильтониан H задается следующим выражением

$$H = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{P}}\big) - \frac{\rho q^2}{4\pi}\Big(\ln\big(X_c^2 + Y_c^2\big) - \ln\big(X_c^2 + Y_c^2 - R^2\big)\Big), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \Pi_x + A_x \\ \Pi_y + A_y \\ \Pi_\vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -md\sin\vartheta \\ 0 & \mu & md\cos\vartheta \\ -md\sin\vartheta & md\cos\vartheta & I_c + md^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь Π_x, Π_y, Π_ϑ — обобщенные импульсы, m — масса профиля, I_c — центральный момент инерции профиля, $A_x = \frac{\rho q R^2 X_c}{X_c^2 + Y_c^2}$, $A_y = \frac{\rho q R^2 Y_c}{X_c^2 + Y_c^2}$.

Для рассматриваемой системы была предложена процедура редукции на фиксированный уровень первого интеграла $K = \Pi_\vartheta + \Pi_y X_c - \Pi_x Y_c$ и построен эффективный потенциал. Для этого была выполнена следующая замена переменных

$$x = X_c\cos\vartheta + Y_c\sin\vartheta, \quad y = -X_c\sin\vartheta + Y_c\cos\vartheta. \tag{12}$$

После которой эффективный потенциал принимает вид:

$$U(x,\, y) = \frac{k^2}{2\left(\mu(x^2+y^2)+2mdx+I_c+md^2\right)} + \frac{\rho q^2}{4\pi}\ln\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right), \tag{13}$$

где k — уровень интеграла углового момента K.

Анализ выражения (13) показал, что критические точки эффективного потенциала могут располагаться только в плоскости $y = 0$ и оказалось, что в зависимости от значения k можно выделить пять качественно различных ситуаций. Например, при $k_{cr} < |k|$ потенциал (13) имеет точку максимума на отрицательной части оси Ox и седловую на положительной части оси (см. рис. 6). Численный анализ показывает, что седловая точка уходит на плюс бесконечность при $|k| \to k_{cr} + 0$.

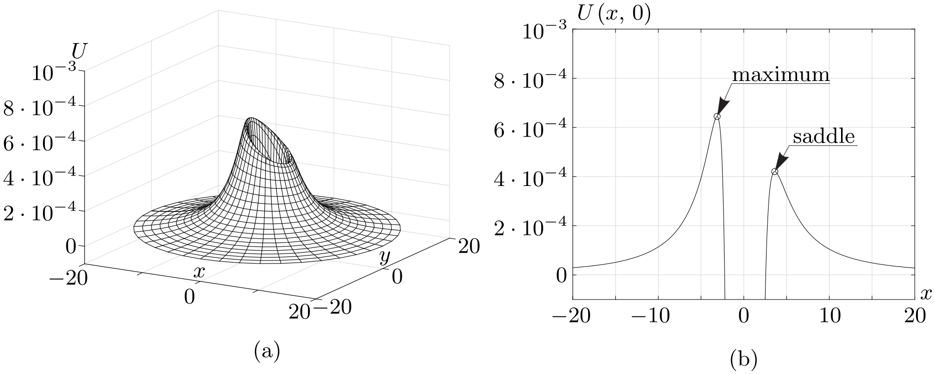

Рисунок 6 – Характерная форма (a) поверхности потенциала и (b) профиля функции $U(x,\, 0)$ при $|k| > k_{cr} \approx 0.81188$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$, $k \approx 0.86872$. Координаты седла $x_s \approx 3.62443$ и точки максимума $x_{max} \approx -3.11904$

Во второй главе исследовано движение вихревых решеток в идеальной несжимаемой жидкости. Под вихревой решеткой понимается набор точечных вихрей одинаковых интенсивностей Γ (рис. 7). Данная задача эквивалента движению точечных вихрей на «плоском» торе, то есть в прямоугольной области с периодическими граничными условиями.

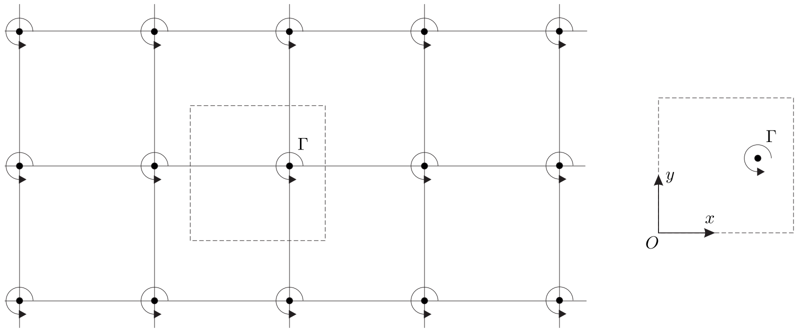

Рисунок 7 – Схематическое изображение квадратной вихревой решетки

Уравнения движения рассматриваемой системы N вихрей на торе (или N вихревых решеток) могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{x}_k = \frac{1}{\Gamma_k}\frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{1}{\Gamma_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}, \tag{14}$$

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k,n=1}^{N}{}' \Gamma_k \Gamma_n h(x_k - x_n, y_k - y_n), \tag{15}$$

$$h(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}(x-2\pi m) - \cos y}{\operatorname{ch}(2\pi m)}\right) - \frac{x^2}{2\pi},$$

где Γ_i – интенсивность i-ого вихря. Уравнения (14) помимо интеграла энергии (15), допускают еще два первых интеграла

$$Q = \sum_k \Gamma_k x_k, \quad P = \sum_k \Gamma_k y_k. \tag{16}$$

В случае двух вихрей задача является интегрируемой. При этом вид фазового портрета не зависит от интенсивностей вихрей. Показано, что рассматриваемая система обладает тремя неподвижными точками: две неустойчивые с координатами $(0,\ \pi)$, $(\pi,\ 0)$ (соответствующие им конфигурации вихревых решеток приведены на рис. 8), одна устойчивая с координатами $(\pi,\ \pi)$ (конфигурация вихревых решеток, соответствующая этой неподвижной точке, приведена на рис. 9).

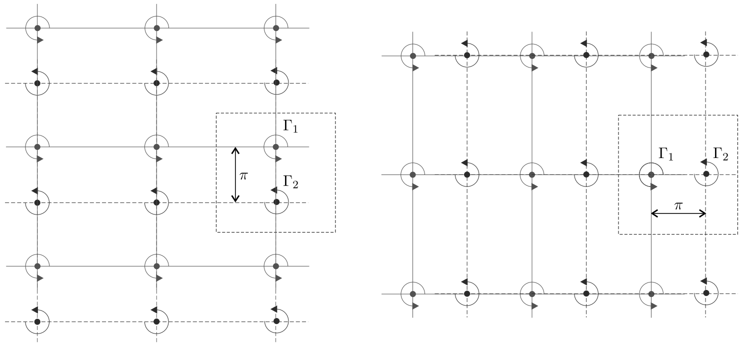

Рисунок 8 – Схематическое изображение неустойчивых конфигураций

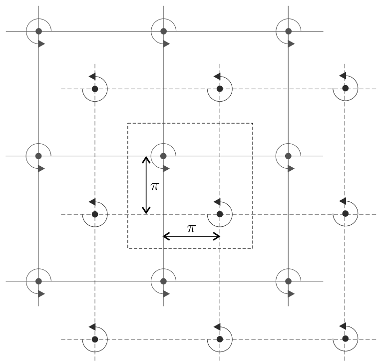

Рисунок 9 – Схематическое изображение устойчивой конфигурации

Для трех вихрей $N = 3$ с суммарной ненулевой интенсивностью $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \neq 0$ приведена процедура редукции на уровни первых интегралов. Для этого вводятся следующие переменные

$$\begin{aligned} Q &= \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \Gamma_3 x_3, \quad \xi_1 = x_1 - x_2, \quad \xi_2 = x_2 - x_3, \\ P &= \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 + \Gamma_3 y_3, \quad \eta_1 = y_1 - y_2, \quad \eta_2 = y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{17}$$

В новых переменных уравнения движения на фиксированном уровне первых интегралов Q, P, могут быть представлены в гамильтоновом виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \{\xi_1, H\}, \quad \dot{\xi}_2 = \{\xi_2, H\}, \\ \dot{\eta}_1 &= \{\eta_1, H\}, \quad \dot{\eta}_2 = \{\eta_2, H\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где H — гамильтониан (15), записанный в переменных (17), и скобками Пуассона, определяемыми соотношениями

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 0,$$
$$\{\xi_1, \eta_2\} = \{\xi_2, \eta_1\} = -\frac{1}{\Gamma_2}, \quad \{\xi_1, \eta_1\} = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}, \quad \{\xi_2, \eta_2\} = \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_3}.$$

Для исследования построено отображение Пуанкаре при различных значениях энергии $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. В качестве секущей выбрана плоскость $\eta_1 = 0$. На рис. 10 приведены отображения Пуанкаре (сверху) и соответствующие поверхности сечений уровня энергии выбранной плоскостью (снизу).

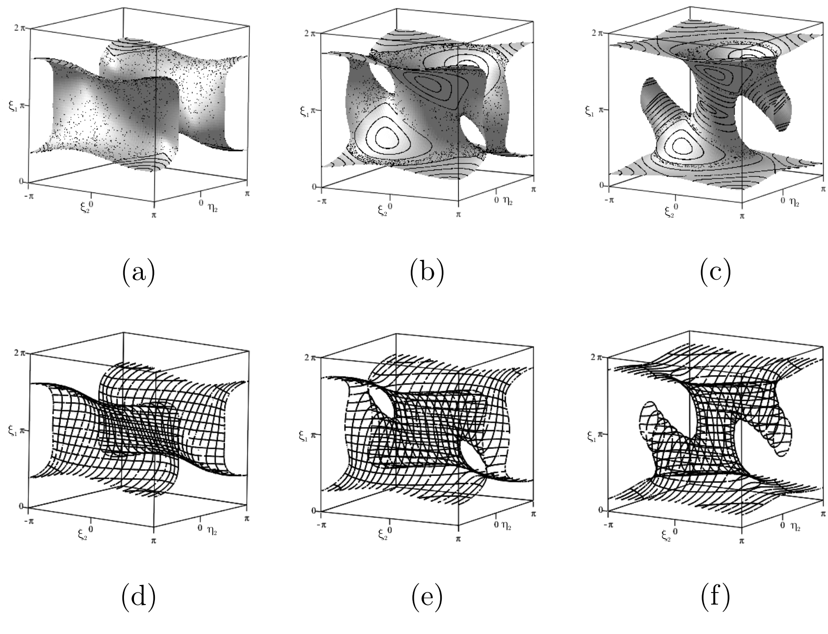

Рисунок 10 – Отображения (a – c) и поверхности равной энергии (d – f), при a, d) $E = -0.25$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$, b, e) $E = -0.15$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$, c, f) $E = 0$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$

На отображениях Пуанкаре (см. рис 10a–c) хорошо видны хаотические слои, что подтверждает неинтегрируемость задачи о движении трех вихрей на торе в случае ненулевой суммарной интенсивности.

Для четырех вихрей $N = 4$ доказано, что уравнения движения вихрей на торе при $\Gamma_1 = \Gamma_3$ и $\Gamma_2 = \Gamma_4$ допускают инвариантное многообразие, задаваемое соотношениями

$$x_1 - x_4 = x_2 - x_3, \quad y_1 - y_4 = y_2 - y_3. \tag{19}$$

Геометрический смысл соотношений (19) заключается в том, что конфигурация вихрей обладает центральной симметрией, т.е. в каждый момент времени представляет собой параллелограмм (см. рис. 11).

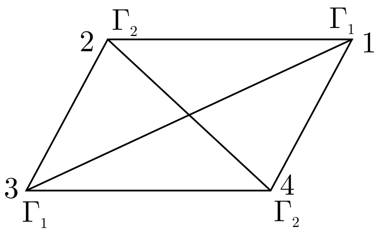

Рисунок 11 – Схематическое изображение начального положения вихрей

Выполнена редукция уравнений движения на уровень первых интегралов Q, P. Редуцирующие переменные, удобные для описания движения на инвариантном многообразии:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}((x_1 - x_3) - (x_2 - x_4)), \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}((x_1 - x_3) + (x_2 - x_4)),$$
$$\xi_3 = \frac{1}{2}((x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)), \quad \xi_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$
$$\eta_1 = \frac{1}{2}((y_1 - y_3) - (y_2 - y_4)), \quad \eta_2 = -\frac{1}{2}((y_1 - y_3) + (y_2 - y_4)),$$
$$\eta_3 = \frac{1}{2}((y_1 + y_3) - (y_2 + y_4)), \quad \eta_4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

В новых переменных инвариантное многообразие (19) задается равенствами $\xi_3 = 0$, $\eta_3 = 0$.

Редуцированные уравнения на инвариантном многообразии можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\}, \quad \dot{\eta}_i = \{\eta_i, H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\}, \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

где $H-$ ограничение гамильтониана (15) на инвариантное многообразие (19) и уровень первых интегралов, а скобка Пуассона определяется соотношениями

$$\{\xi_i,\, \xi_j\} = 0,\ \{\eta_i,\, \eta_j\} = 0,\ \{\xi_i,\, \eta_j\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{2\delta_{ij} - 1}{\Gamma_1}\right).$$

Для исследования системы построено отображение Пуанкаре при различных значениях энергии $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ и различных значениях параметра Γ_2. В качестве секущей выбрана плоскость $\eta_1 = 0$. Отображение Пуанкаре лучше рассматривать на сечении уровня энергии выбранной плоскостью $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1 = 0, \eta_2)$ вложенной в трехмерное пространство $(\xi_1,\, \xi_2,\, \eta_1)$. На рис. 12 изображены отображения Пуанкаре (сверху) и соответствующие поверхности сечений уровня энергии выбранной плоскостью (снизу).

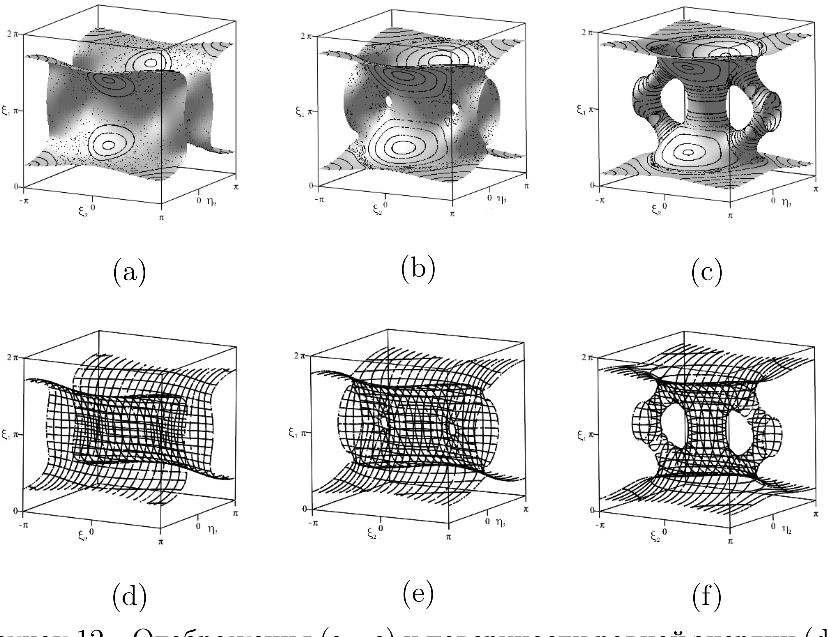

Рисунок 12 – Отображения (a – c) и поверхности равной энергии (d – f), при a, d) $E = -0.35$, $\Gamma_2 = 1$, b, e) $E = -0.21$, $\Gamma_2 = 1$, c, f) $E = 0$, $\Gamma_2 = 1$

Из рисунка 12 видно, что поверхности имеют сложную форму и их тип изменяется в зависимости от значений параметров E и Γ_2. Например, поверхность, изображенная на рис. 12b, является сферой с пятью ручками. На представленных отображениях Пуанкаре (рис. 12) хорошо видны хаотические слои, что говорит о неинтегрируемости системы (20).

В **третьей главе** исследована задача о движении двух точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на конечном «плоском» цилиндре (см. рис. 13). Показано, что задача о движении вихрей на «плоском» цилиндре эквивалентна задаче о движению вихрей на некотором инвариантном многообразии на «плоском» торе.

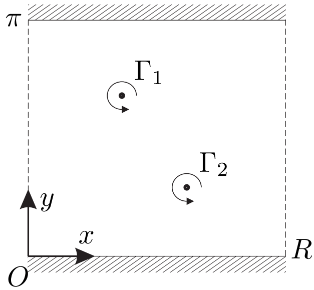

Рисунок 13 – Схематичное изображение вихрей на конечном цилиндре

Пусть координаты первого и второго вихрей обозначены как (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соотвественно. Тогда уравнения движения вихрей на плоском цилиндре для двух вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \dot{y}_1 = -\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad \dot{y}_2 = -\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial H}{\partial x_2}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln\frac{\cosh(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 + y_2)}{\cosh(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 - y_2)} +$$
$$\frac{\Gamma_1^2}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln\frac{\cosh(nR) - \cos(2y_1)}{\cosh(nR)} + \frac{\Gamma_2^2}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln\frac{\cosh(nR) - \cos(2y_2)}{\cosh(nR)}. \tag{21}$$

Дополнительный первый интеграл P для системы двух вихрей запишем в виде

$$P = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{2}. \tag{22}$$

В работе проведена редукция рассматриваемой системы на фиксированный уровень интеграла P. Для этого выполнен переход от переменных (x_1, y_1, x_2, y_2) к переменным (ξ, η, ζ, P) следующим образом

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = \frac{y_1 - \gamma y_2}{2}, \quad \zeta = x_1 + x_2, \quad p = \frac{y_1 + \gamma y_2}{2}, \tag{23}$$

где $\gamma = \Gamma_2/\Gamma_1 \in [-1, 1]/\{0\}$.

Далее в работе выполнен полный бифуркационный анализ редуцированной системы. Показано, что при фиксированном значении параметров γ, R система уравнений

$$\begin{cases} h = \mathcal{H}_0(p, \eta, R, \gamma) = \mathcal{H}\big|_{\xi=0}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

задает на плоскости первых интегралов (p, h) бифуркационные кривые, соответствующие неподвижным точкам приведенной системы, лежащим на прямой $\xi = 0$. Аналогичная система

$$\begin{cases} h = \mathcal{H}_{R/2}(p, \eta, R, \gamma) = \mathcal{H}\big|_{\xi=R/2}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta} = 0, \end{cases} \tag{25}$$

задает кривые, соответствующие неподвижным точкам лежащим на прямой $\xi = R/2$. Здесь $\mathcal{H}$ — гамильтониан (21), записанный в новых переменных (23). Бифуркационная диаграмма при $R = 3$, $\gamma = -0.8$ приведена на рис. 14.

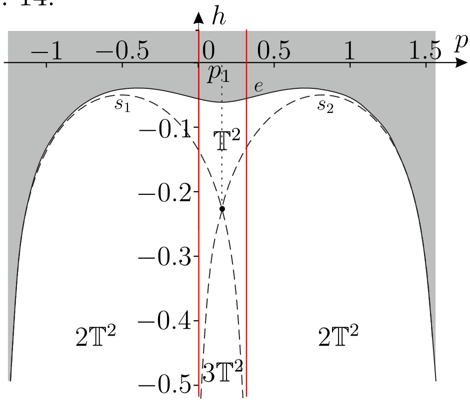

Рисунок 14 – Бифуркационная диаграмма при $R = 3$, $\gamma = -0.8$

На рис. 14 кривые обозначенные s_1, s_2 соответствуют неподвижным точкам при $\xi = 0$, кривая e — при $\xi = R/2$. Красными прямыми обозначены значения интеграла p, при которых в системе возникает (исчезает) особенность. Серым цветом обозначена область невозможных движений.

Также исследована зависимость вида бифуркационной диаграммы от параметров системы γ, R. Показано, что на плоскости параметров системы (γ, R) области с разными типами диаграмм разделяются кривыми, которым соответствует рождение (исчезновение) особых точек бифуркационных кривых. Данные кривые определяются двумя системами уравнений

$$\sigma_0 : \qquad \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \mathcal{H}_0}{\partial \eta^3} = 0, \tag{26}$$

$$\sigma_{R/2} : \qquad \frac{\partial \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta^3} = 0. \tag{27}$$

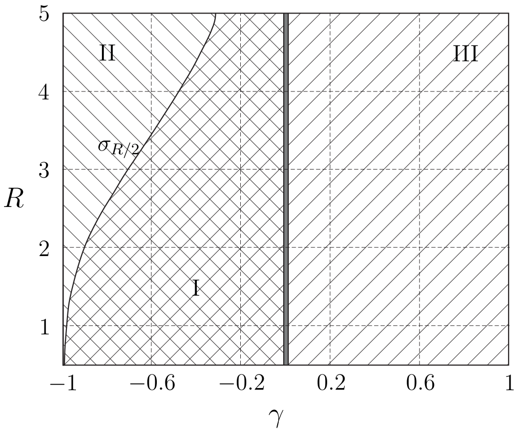

Рисунок 15 – Области, соответствующие разным количествам неподвижных точек приведенной системы, на плоскости параметров (γ, R)

С помощью численного решения системы (27) построена диаграмма, приведенная рис. 15. На этом же рисунке разной штриховкой обозначены области с различным числом особых точек либо различными асимптотиками:

1. Область с перекрестной штриховкой (обозначена цифрой I на рис. 15) — на бифуркационных кривых существует две особые точки (точки возврата) (то есть существует от одной до трех неподвижных точек при $\xi = R/2$), а также существует одна или две неподвижные точки при $\xi = 0$.

2. Область с левой штриховкой (обозначена цифрой II на рис. 15) — особых точек нет, при этом в системе всегда существует одна неподвижная точка при $\xi = R/2$, а также существует одна или две неподвижные точки при $\xi = 0$.

3. Область с правой штриховкой (обозначена цифрой III на рис. 15) — особых точек нет, в системе всегда существует одна неподвижная точка при $\xi = R/2$, при этом неподвижных точек при $\xi = 0$ не существует. Также в III области происходит смена асимптотики гамильтониана (по сравнению с областями I и II).

Для каждой из указанных областей в работе построена соответствующая бифуркационная диаграмма и все возможные типы фазовых портретов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследована динамика уравновешенного профиля без собственной циркуляции в присутствии неподвижной точечной особенности. Показано, что данная задача является интегрируемой. Указаны неподвижные точки, проведен бифуркационный анализ и построены фазовые портреты.

2. Построено управление за счет изменения интенсивности источника с помощью обратной связи, которое позволяет стабилизировать периодическое движение уравновешенного кругового профиля (без собственной циркуляции) вокруг особенности.

3. Исследовано влияние собственной циркуляции кругового профиля на его движение в поле неподвижной точечной особенности. Указано, что задача о движении кругового профиля в присутствии неподвижного точечного вихря интегрируема. Выполнен бифуркационный анализ, приведены фазовые портреты. Для движения профиля в присутствии неподвижного точечного источника указаны возможные типы движения профиля.

4. Исследована задача о движении неуравновешенного кругового профиля в поле неподвижной точечной особенности. Указаны возможные типы движения профиля, построен и проанализирован эффективный потенциал.

5. Показано, что задача о движении двух вихрей произвольных интенсивностей на «плоском» торе является интегрируемой, а вид фазового портрета не зависит от интенсивности рассматриваемых вихрей (за исключением случая вихревой пары). Показано, что задача о движении трех вихрей на «плоском» торе при суммарной ненулевой интенсивности является неинтегрируемой.

6. Построены уравнения движения четырех вихрей на центрально-симметричном инвариантном многообразии на «плоском» торе. Численно показана неинтегрируемость такой задачи.

7. Построены уравнения движения точечных вихрей на ограниченном «плоском» цилиндре. Указан первый интеграл, предложена процедура редукции. Для случая двух вихрей проведен полный бифуркационный анализ.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Артемова Е. М., Ветчанин Е. В.* Управление движением кругового цилиндра в идеальной жидкости с помощью источника // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2020. – Т. 30, №. 4. – С. 604-617.

2. *Kilin A. A., Artemova E. M.* Integrability and chaos in vortex lattice dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2019. – Vol. 24. – Pp. 101-113.

3. *Артемова Е. М.* Динамика двух вихрей на конечном плоском цилиндре // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2023. – Т. 33, №. 4. – Pp. 642-658.

4. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The Motion of an Unbalanced Circular Disk in the Field of a Point Source // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2022. – Vol. 27, no. 1. – Pp. 24-42.

5. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior // *Physics of Fluids.* – 2024. – Vol. 36, no. 027139. – Pp 13.

6. *Kilin A. A., Artemova E. M.* Bifurcation Analysis of the Problem of Two Vortices on a Finite Flat Cylinder // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* – 2024. – Vol. 20, no. 1. – Pp. 95-111.

7. *Kilin A. A., Artemova E. M.* Qualitative analysis of the dynamics of two vortex lattices // *The Seventh International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018»*, 5–9 June 2018, Dolgoprudny, Russia.

8. *Артемова Е. М., Килин А. А.* Качественный анализ динамики двух вихревых решеток // *Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика*, XIII Всерос. конф. молодых ученых (Саратов, 4-6 сент. 2018 г.),

9. *Artemova E. M., Kilin A. A.* Dynamics of vortex lattices // *ANS Conference Series: Scientific Heritage of Sergey A.Chaplygin* (Nonholonomic Mechanics, Vortex Structures and Hydrodynamics): 2–6 June 2019, Cheboksary, Russia,

10. *Артемова Е. М.* Движение цилиндра в присутствии источника // *XLVIII итоговая студенческая научная конференция Удмуртского государственного университета* (Ижевск, Апрель, 2020).

11. *Артемова Е. М., Ветчанин Е. В.* Движение уравновешенного цилиндра в поле неподвижной точечной особенности // *Международная конференция «Динамические системы. Теория и приложения.»* (Нижний Новгород, 26-29 июня 2022 г.)

12. *Артемова Е. М., Ветчанин Е. В.* Движение твердых тел в поле точечной особенности // *XIII Междунар. летней науч. шк.-конф., посвящен. 160-летию со дня рождения акад. А.Н. Крылова* (21-23 июня 2023 г., Чебоксары)