

531.384

## **О движении твердого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде**

**Панёв А.С.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: a.s.panev@gmail.com*

### **Аннотация**

Рассматривается движение твердого тела, несущего подвижную материальную точку. Предполагается, что тело находится на горизонтальной плоскости, а точка движется внутри него против часовой стрелки по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела, причем угловая скорость кругового движения точки постоянна. Между телом и горизонтальной плоскостью действуют силы сухого кулонова и вязкого трения. В начальный момент времени скорость корпуса равна нулю, а материальная точка занимает нижнее положение.

Изучен характер движения тела без отрыва от горизонтальной плоскости. В зависимости от параметров задачи найдены различные режимы движения и дано их полное качественное описание.

**Ключевые слова:** периодическое движение, трение, твердое тело, мобильные роботы.

## Введение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из корпуса – твердого тела массой  $M$ , находящегося на горизонтальной шероховатой плоскости, и внутренней массы – материальной точки массой  $m$ , движущейся внутри тела по окружности радиуса  $R$  против часовой стрелки, центр которой совпадает с центром масс корпуса. Во все время движения внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, а угловая скорость  $\omega$  её относительного кругового движения постоянна.

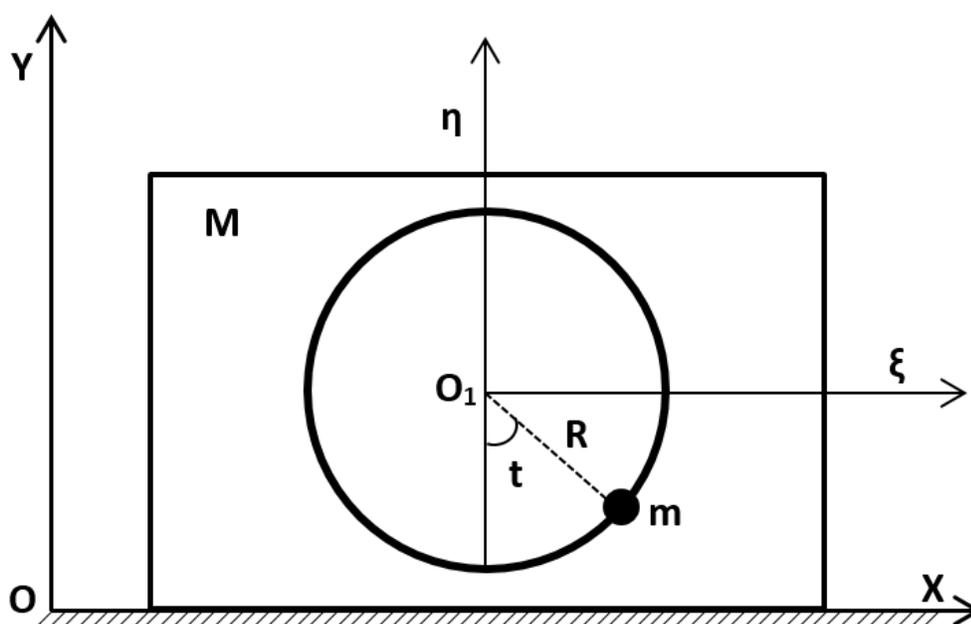


Рисунок 1: Механическая система

Движение системы будем рассматривать в вертикальной плоскости, в которой введем абсолютную систему координат  $OXY$  (Рис. 1). Между корпусом и плоскостью опоры действуют силы сухого (кулонова) и вязкого трения, а параметры системы

выбраны так, что относительное движение внутренней массы может вывести корпус из состояния покоя, причем в момент начала движения и после него корпус движется поступательно без отрыва от горизонтальной плоскости. Положение корпуса будем задавать координатами  $X$  и  $Y$  его центра масс  $O_1$ .

Помимо теоретического интереса исследование механических систем такого типа может иметь и прикладное значение, например, в качестве создания вибрационных роботов, движущихся за счет сил инерции, возникающих при перемещении внутренних масс. Ключевым преимуществом таких устройств является то, что они не требуют специальных движителей (колес, гусениц и т.д.) и могут быть конструктивно выполнены в форме запаянных капсул. Это делает возможным применение вибрационных роботов в агрессивных средах как на твердых поверхностях, так и в жидкостях. В частности, они представляют интерес для космических проектов, при исследовании поверхностей небесных тел или в качестве роботов, обслуживающих беспилотные летательные аппараты [1]

Систематическое исследование динамики механических систем, движущихся за счет перемещения внутренних масс, было начато в работах [2] - [4]. Работы [5] - [17], посвящены поиску оптимального управления такими системами с целью максимизации средней скорости корпуса при различных ограничениях, наложенных на скорости и ускорения внутренних масс. В статье [18] представлены результаты исследования возможности маневрирования (поворотов) мобильных систем с внутренними массами. В работе [19] рассматривается двумерное плоское движение твердого тела с

внутренними подвижными массами. В [20] рассматривается возможность отрыва корпуса, несущего подвижные массы, от плоскости.

Целью данной работы является полное качественное исследование динамики описанной выше механической системы в случае комбинированной модели сил сухого и вязкого трения, действующих между корпусом и поверхностью, при нулевой начальной скорости. Исследование динамики корпуса в случае сухого кулоновского трения при нулевой начальной скорости было выполнено в [21], некоторые режимы движения при отличной от нуля начальной скорости освещены в работе [22].

### Уравнения движения

Следуя [7], введем безразмерные координату  $x$ , время  $t'$  и параметр  $\mu$

$$x = \frac{RmX}{M+m}; \quad t' = \frac{t}{\omega}; \quad \mu = \frac{(M+m)g}{Rm\omega^2}, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Далее штрих, обозначающий безразмерное время будем опускать. Тогда уравнение движения корпуса примет вид

$$\dot{u} + \frac{\nu}{(M+m)\omega} \cdot u = \sin t + f_c, \quad (2)$$

где  $u = \dot{x}$  – безразмерная скорость корпуса,  $\nu$  – коэффициент вязкого трения, а функция  $f_c$  задается следующим образом

$$f_c = \begin{cases} -k(\mu + \cos t)\text{sign}(u), & u \neq 0 \\ -\sin t, & u = 0 \text{ и } |\sin t| \leq k(\mu + \cos t) \\ -k(\mu + \cos t)\text{sign}(\sin t), & u = 0 \text{ и } |\sin t| > k(\mu + \cos t) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь и далее  $k$  – коэффициент сухого трения, теперь, вводя обозначение  $\alpha = \frac{v}{(M+m)\omega}$ ,

уравнение (2) можно переписать в виде

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t + f_c, \quad (4)$$

Тогда, согласно (3) и (4) движение корпуса в положительном направлении описывается уравнением

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t - k(\mu + \cos t), \quad (5)$$

а в отрицательном

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t + k(\mu + \cos t). \quad (6)$$

Отметим, что безразмерное время введено так, что период относительного движения материальной точки равен  $2\pi$ . Без ограничения общности будем считать, что в момент времени  $t = 0$  внутренняя масса, двигаясь против часовой стрелки, проходит нижнюю точку окружности, тогда время  $t$  можно рассматривать как угол, определяющий положение материальной точки в жестко связанной с корпусом системе координат  $O_1\xi\eta$  (см. Рис. 1).

### Зоны замедления трением

Далее будем считать, что параметры системы удовлетворяют следующим неравенствам

$$k^2 < \frac{1}{\mu^2 - 1}; \quad \mu > 1. \quad (7)$$

Первое неравенство гарантирует, что существует такой момент времени, при котором горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к материальной точке, по абсолютной величине превзойдет модуль силы сухого трения [7], т.е. относительное движение внутренней массы может вывести корпус из состояния покоя. Второе неравенство означает, что во всё время движения вертикальная составляющая силы инерции по абсолютной величине не превосходит силы тяжести, приложенной в центре масс системы, т.е. тело будет двигаться без отрыва от горизонтальной плоскости [7]. Кроме того, будем считать, что геометрия корпуса такова, что он не опрокидывается во время движения.

Исследование динамики корпуса начнем с определения моментов времени, когда правая часть уравнения (4) обращается в ноль, т.е. решим уравнение

$$\sin t = \pm k(\mu + \cos t). \quad (8)$$

На интервале  $t \in (0, 2\pi)$  данное уравнение имеет следующие корни

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right); \\ t_2 &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right); \\ t_3 &= 2\pi - t_2; \quad t_4 = 2\pi - t_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) задают интервалы  $(t_2, t_3)$  и  $(t_4, t_1 + 2\pi)$ , на

которых ускорение тела противоположно направлению скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов материальная точка находится в верхней части траектории движения, при прохождении второго – в нижней части. Указанные интервалы назовем соответственно верхней и нижней зонами замедления (Рис. 2). Они играют важную роль в анализе характера движения корпуса. В частности, из уравнения (4) следует, что если корпус остановится в момент прохождения материальной точкой зоны замедления, то он будет оставаться в состоянии покоя до тех пор, пока точка не покинет зону замедления. Такое явление называют залипанием корпуса [3].

Заметим, что моменты времени  $t_i$  не зависят от  $\alpha$  т.е., наличие или отсутствие сил вязкого трения между корпусом и поверхностью не влияет на особенности движения тела внутри зон замедления. Однако коэффициент вязкого трения будет влиять на условия остановок корпуса в этих зонах. Предельный случай остановок в зонах замедления, при отсутствии вязкого трения ( $\alpha = 0$ ) был подробно исследован в [7]

Отметим еще, что имеет место следующее равенство

$$\cos t_1 + k \cdot \sin t_1 = -(\cos t_2 - k \cdot \sin t_2), \quad (10)$$

которым мы воспользуемся ниже.

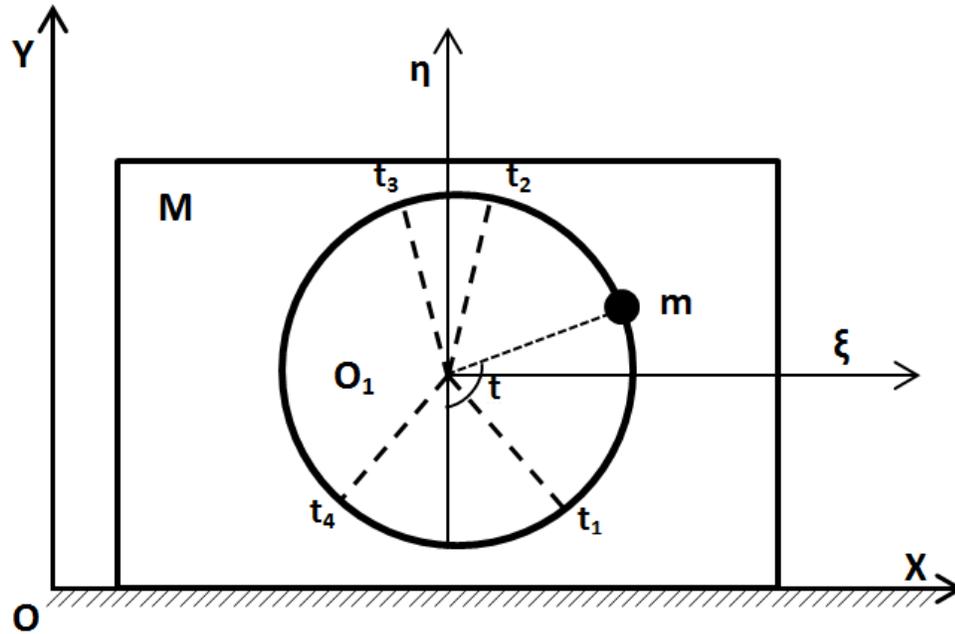


Рисунок 2: Зоны замедления

### Периодические режимы движения

**Движение с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.** Также как и в работе [7] будем классифицировать типы движения в зависимости от поведения корпуса в зонах замедления. Рассмотрим случай остановки корпуса в верхней зоне замедления в некоторый момент времени  $t_1 + \Delta t^* \in (t_2, t_3)$ . Определим при каких условиях возможен такой режим движения. Поскольку на интервале времени  $(t_1, t_1 + \Delta t^*)$  скорость корпуса сохраняет положительное значение, решая уравнение (5) с начальным условием  $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{0}$ , получим выражение для скорости тела в момент прохождения точкой границы зоны замедления  $t_3$

$$u(t_3) = \frac{k\mu}{\alpha} (\exp[-\alpha t_3] \cdot \exp[\alpha t_1] - 1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin t_3 + \alpha \cos t_3) + \frac{k \cdot \exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{(1 + \alpha^2)} \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) + \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_3 - \cos t_3) - \frac{\exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_1 - \cos t_1) \quad (11)$$

Если на интервале  $(t_2, t_3)$  произойдет остановка корпуса, то функция  $u(t)$ , вычисленная по формуле (11) изменит знак так, что будет выполняться неравенство  $u(t_3) \leq 0$ . Подставив в него выражение для скорости из (11), получим необходимое и достаточное условие остановки корпуса в верхней зоне замедления

$$\frac{k\mu}{\alpha} (\exp[-\alpha t_3] \cdot \exp[\alpha t_1] - 1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin t_3 + \alpha \cos t_3) + \frac{k \cdot \exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{(1 + \alpha^2)} \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) + \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_3 - \cos t_3) - \frac{\exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_1 - \cos t_1) \leq 0. \quad (12)$$

Таким образом, если параметры задачи  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  удовлетворяют неравенствам (12) и (7), то корпус будет совершать движение с остановкой в верхней зоне замедления. В момент времени  $t_1$  корпус начинает движение и, перемещаясь в положительном направлении оси  $Ox$ , останавливается в некоторый момент времени  $t_1 + \Delta t^* \in (t_2, t_3)$ . Далее на промежутке  $(t_1 + \Delta t^*, t_3)$  корпус будет находиться в состоянии покоя, а затем начнет движение в противоположном (отрицательном) направлении. С момента времени  $t_3$  до следующей остановки движение корпуса описывается уравнением (6). Покажем что, если корпус остановится в верхней зоне замедления, то далее при движении в отрицательном направлении он также остановится и в нижней зоне замедления, причем перемещение корпуса за период будет нулевым. Сначала докажем справедливость равенства  $u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau)$ , где  $0 < \tau < \Delta t_*$ .

$$\begin{aligned}
u(t_1 + \tau) = & k\mu \frac{1}{\alpha} (\exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha(t_1 + \tau)] - 1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin(t_1 + \tau) + \alpha \cos(t_1 + \tau)) + \\
& + \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot \exp[-\alpha\tau] \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) + \frac{1}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin(t_1 + \tau) - \cos(t_1 + \tau)) - \\
& - \exp[-\alpha\tau] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_1 - \cos t_1)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
u(t_3 + \tau) = & -k\mu \frac{1}{\alpha} (\exp[\alpha t_3] \cdot \exp[-\alpha(t_3 + \tau)] - 1) + \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin(t_3 + \tau) + \alpha \cos(t_3 + \tau)) - \\
& - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot \exp[-\alpha\tau] \cdot (\sin t_3 + \alpha \cos t_3) + \frac{1}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin(t_3 + \tau) - \cos(t_3 + \tau)) - \\
& - \exp[-\alpha\tau] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \sin t_3 - \cos t_3)
\end{aligned} \tag{14}$$

Принимая во внимание (8), (9) и (10), выражения (13) и (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
u(t_1 + \tau) = & k\mu \frac{1}{\alpha} (\exp[-\alpha\tau] - 1) + \exp[-\alpha\tau] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (k \sin t_1 + \cos t_1 - \alpha k\mu) \\
& - \frac{1}{1 + \alpha^2} (\cos \tau \cdot (k \sin t_1 + \cos t_1 - \alpha k\mu) + \sin \tau (-k\mu - \alpha(k \sin t_1 + \cos t_1)))
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
u(t_3 + \tau) = & -k\mu \frac{1}{\alpha} (\exp[-\alpha\tau] - 1) + \exp[-\alpha\tau] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (-(k \sin t_1 + \cos t_1) + \alpha k\mu) \\
& - \frac{1}{1 + \alpha^2} (\cos \tau \cdot (-(k \sin t_1 + \cos t_1) + \alpha k\mu) + \sin \tau (k\mu + \alpha(k \sin t_1 + \cos t_1)))
\end{aligned} \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что  $u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau)$ , поэтому будет справедливым следующее равенство

$$u(t_1 + \Delta t^*) = -u(t_3 + \Delta t^*) = 0. \tag{17}$$

Это означает, что корпус совершит остановки в верхней и нижней зонах замедления в моменты времени  $t = t_1 + \Delta t^*$  и  $t = t_3 + \Delta t^*$ , т.е. как в положительном, так и в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение одного и того же периода

времени  $\Delta t^*$ . Величина  $\Delta t^*$  определяется из уравнения  $u(t_1 + \Delta t^*) = 0$ . Поскольку  $u = \dot{x}$ , то, интегрируя обе части равенства (17) по  $\tau$  на интервале времени от 0 до  $\Delta t^*$ , имеем

$$x(t_1 + \Delta t^*) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t^*) + x(t_3) \quad (18)$$

Последнее равенство означает, что перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине. Т.е. корпус совершает  $2\pi$ -периодическое возвратно-поступательное движение.

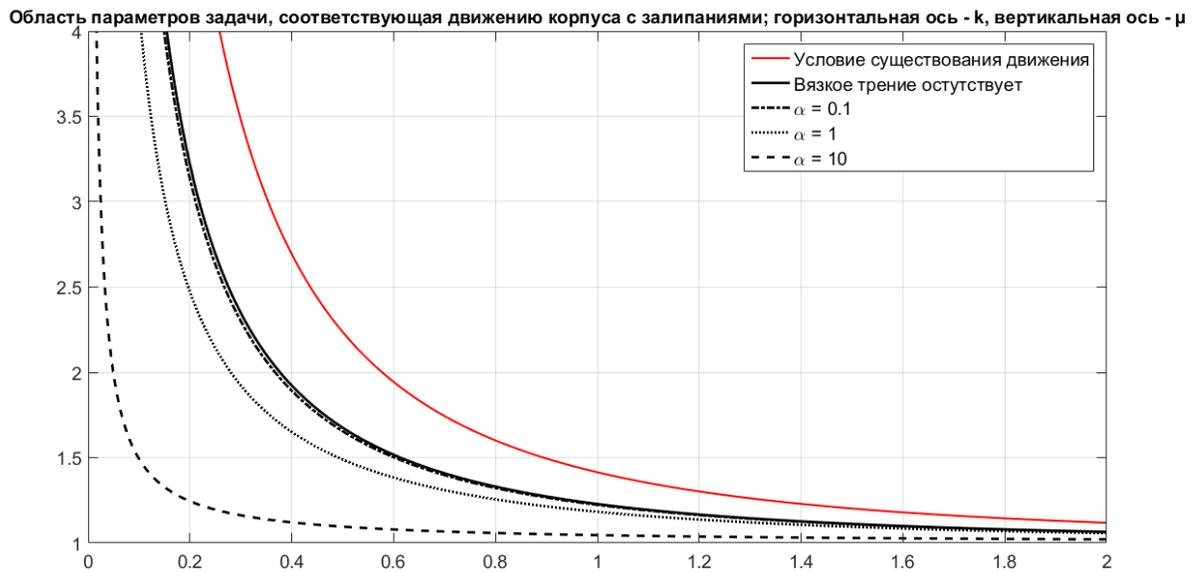


Рисунок 3: Область значений параметров  $k$  и  $\mu$  соответствующая движению корпуса с залипаниями в верхней и нижней зонах замедления

Таким образом, неравенства (7) и (12) определяют в пространстве параметров  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  область, в которой корпус совершает возвратно-поступательное движение с залипаниями в верхней и нижней зонах замедления. Причем, т.к. условие (7) не зависит от  $\alpha$  (Рис 3, крайняя правая кривая, выделенная красным цветом), то при различных

значениях  $\alpha$  будет изменяться только одна из границ области. На рисунке 3 черным цветом выделены возможные положения этой границы при различных значениях  $\alpha$ .

**Движение с залипанием только в нижней зоне замедления** В предыдущем параграфе было показано, что если корпус остановится в верхней зоне замедления, то он обязательно остановится и в нижней. Пусть теперь условие (12) не выполнено, т.е. имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{k\mu}{\alpha} (\exp[-\alpha t_3] \cdot \exp[\alpha t_1] - 1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\text{син}t_3 + \alpha \text{кос}t_3) + \frac{k \cdot \exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{(1 + \alpha^2)} \cdot (\text{син}t_1 + \\ & + \alpha \text{кос}t_1) + \frac{1}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \text{син}t_3 - \text{кос}t_3) - \frac{\exp[\alpha t_1] \cdot \exp[-\alpha t_3]}{1 + \alpha^2} \cdot (\alpha \text{син}t_1 - \text{кос}t_1) > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае корпус остановится в некоторый момент времени  $t_3 + \Delta t_* \in (t_3, t_4)$ , т.е. после того как внутренняя масса пройдет верхнюю зону замедления и до её попадания в нижнюю зону замедления. Это нетрудно доказать от противного. Действительно, пусть  $t_3 + \Delta t_* > t_4$ , тогда  $u(t_4) > 0$ . С другой стороны, решая уравнение (5) на интервале  $(t_1, t_4)$  с нулевым начальным условием, имеем

$$u(t_4) = c(t_4) \cdot \exp[-\alpha t_4], \quad (20)$$

где

$$c(t_4) = - \int_{t_1}^{t_4} (\mu + \text{кос}t) \exp[\alpha t] dt + \int_{t_1}^{t_4} \text{син}t \exp[\alpha t] dt \quad (21)$$

Очевидно, что первое слагаемое будет отрицательным. Учитывая (9), запишем второе слагаемое в виде

$$\int_{t_1}^{t_4} \sin t \exp[\alpha t] dt = - \int_{t_1}^{\pi} \sin t \exp[\alpha t] \left(1 - \frac{\exp[2\pi\alpha]}{\exp[2t\alpha]}\right) dt \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что подинтегральное выражение в правой части (22) может принимать только положительные значения, поэтому  $u(t_4) < 0$ . Т.е., если корпус не остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то остановка обязательно произойдет на интервале времени  $(t_3, t_4)$ . Таким образом, при  $t = t_3 + \Delta t_*$  корпус остановится, а затем, изменив направление, будет двигаться в отрицательном направлении до новой остановки. Выясним, при каких условиях на параметры задачи  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  эта остановка произойдет в нижней зоне замедления. От момента времени  $t_3 + \Delta t_*$  до новой остановки корпус будет двигаться с отрицательной скоростью, величина которой определяется в результате решения уравнения (6) с начальным условием  $u(t_3 + \Delta t_*) = 0$ . В момент времени  $t_4$  величина  $u(t)$  достигнет своего минимального значения, а затем будет монотонно возрастать. Следовательно, для того чтобы выражение для скорости обратилось в ноль на интервале  $(t_4, t_1 + 2\pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $t_1 + 2\pi$  это выражение было неотрицательным, т.е. выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} & -\frac{k\mu}{\alpha} (\exp[\alpha(t_3 + \Delta t_* - t_1 - 2\pi)] - 1) + \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot \exp[\alpha(t_3 + \Delta t_* - \\ & - t_1 - 2\pi)] \cdot (\sin(t_3 + \Delta t_*) + \alpha \cos(t_3 + \Delta t_*)) + \frac{1}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin t_1 - \cos t_1) - \frac{1}{1 + \alpha^2} \exp[\alpha(t_3 + \\ & + \Delta t_* - t_1 - 2\pi)] (\alpha \sin(t_3 + \Delta t_*) - \cos(t_3 + \Delta t_*)) \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, если параметры  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$ , удовлетворяют неравенствам (19) и (23), то в момент времени  $t_1$  корпус начнет движение в положительном направлении, пройдет

без остановки верхнюю зону замедления и остановится в некоторый момент времени  $t_3 + \Delta t_* \in (t_3, t_4]$ . Затем корпус изменит направление движения и будет перемещаться до новой остановки, которая произойдет в некоторый момент времени  $t_3 + \Delta t_{**} \in (t_4, t_1 + 2\pi]$ , когда внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления. После остановки корпус будет оставаться в состоянии покоя до момента времени  $t_1 + 2\pi$ . Это означает, что корпус будет совершать движение с  $2\pi$ -периодически меняющейся скоростью. Покажем, что при движении с остановкой только в нижней зоне замедления за период корпус перемещается в положительном направлении. Отметим, что как и в рассмотренном выше случае движения с остановкой в верхней и нижней зонах замедления, справедливо равенство

$$\dot{u}(t_1 + \tilde{t}) = -\dot{u}(t_3 + \tilde{t}) \quad (24)$$

Обозначим через  $t_3 + \tilde{t}_*$  момент остановки корпуса при движении в положительном направлении, а через  $t_3 + \tilde{t}_{**}$  момент его остановки при движении в отрицательном направлении. Тогда вычислим  $u(t_3 + \tilde{t})$

$$u(t_3 + \tilde{t}) = \int_{t_3 + \tilde{t}_*}^{t_3 + \tilde{t}} \dot{u} dt \quad (25)$$

Выполнив замену переменных  $\begin{matrix} t = t_3 + \tau \\ \tau = t - t_3 \end{matrix}$  в интеграле (25) имеем

$$u(t_3 + \tilde{t}) = \int_{\tilde{t}_*}^{\tilde{t}} \dot{u}(t_3 + \tau) d\tau = - \int_{\tilde{t}_*}^{\tilde{t}} \dot{u}(t_1 + \tau) d\tau = -u(t_1 + \tilde{t}) + u(t_1 + \tilde{t}_*) \quad (26)$$

Следовательно

$$u(t_3 + \tilde{t}) = -u(t_1 + \tilde{t}) + u(t_1 + \tilde{t}_*) \quad (27)$$

Из этого, в частности, имеем

$$u(t_1 + \tilde{t}_{**}) = u(t_1 + \tilde{t}_*) > 0 \quad (28)$$

Таким образом, учитывая монотонность функции  $u(t)$  на интервале  $(t_2, t_3 + \tilde{t}_*)$  (убывание) и на интервале  $(t_4, t_3 + \tilde{t}_{**})$  (возрастание), а также тот факт, что  $u(t_1 + \tilde{t}_{**}) > 0$ , тогда как  $u(t_3 + \tilde{t}_{**}) = 0$ , можно утверждать, что  $t_1 + \tilde{t}_{**} < t_3 + \tilde{t}_*$ , или

$$\tilde{t}_{**} < t_3 + \tilde{t}_* - t_1, \quad (29)$$

причем в правой части неравенства (29) записано выражение для времени движения в положительном направлении. Запишем выражение для времени, в течение которого тело будет двигаться в отрицательном направлении

$$t_3 + \tilde{t}_{**} - t_3 - \tilde{t}_* = \tilde{t}_{**} - \tilde{t}_* \quad (30)$$

Из уравнений (29) и (30) очевидно, что время движения в положительном направлении превосходит время движения в отрицательном направлении.

Теперь найдем путь, пройденный корпусом за период  $2\pi$

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = x(t_3 + \tilde{t}_{**}) - x(t_1) \quad (31)$$

С этой целью вычислим

$$x(t_3 + \tilde{t}_{**}) = \int_{t_1}^{t_3 + \tilde{t}_{**}} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \tilde{t}_*} u(t) dt + \int_{t_1 + \tilde{t}_*}^{t_1 + \tilde{t}_{**}} u(t) dt + \int_{t_1 + \tilde{t}_{**}}^{t_3 + \tilde{t}_*} u(t) dt + \int_{t_3 + \tilde{t}_*}^{t_3 + \tilde{t}_{**}} u(t) dt \quad (32)$$

Выполнив замену переменной интегрирования по формуле  $\begin{matrix} t = t_1 + \tilde{t} \\ t = t_3 + \tilde{t}' \end{matrix}$  выражение (32)

можно переписать в виде

$$x(t_3 + \tilde{t}_{**}) = \int_{t_1}^{t_3 + \tilde{t}_{**}} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \tilde{t}_*} u(t) dt + \int_{t_1 + \tilde{t}_{**}}^{t_3 + \tilde{t}_*} u(t) dt + \int_{\tilde{t}_*}^{\tilde{t}_{**}} u(t_1 + \tilde{t}) d\tilde{t} + \int_{\tilde{t}_*}^{\tilde{t}_{**}} u(t_3 + \tilde{t}') d\tilde{t}' \quad (33)$$

После упрощения имеем

$$x(t_3 + \tilde{t}_{**}) = \int_{t_1}^{t_3 + \tilde{t}_{**}} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \tilde{t}_*} u(t) dt + \int_{t_1 + \tilde{t}_{**}}^{t_3 + \tilde{t}_*} u(t) dt + u(t_1 + \tilde{t}_*)(\tilde{t}_{**} - \tilde{t}_*) > 0 \quad (34)$$

Таким образом, в данном случае корпус будет совершать периодическое движение с залипанием только в нижней зоне замедления, а перемещение корпуса за период будет положительным.

### В общем случае неперiodический режим движения

Теперь предположим, что неравенство (23) выполняется с обратным знаком, т.е.

справедливо следующее

$$\begin{aligned} & -\frac{k\mu}{\alpha} (\exp[\alpha(t_3 + \Delta t_* - t_1 - 2\pi)] - 1) + \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \frac{k}{1 + \alpha^2} \cdot \exp[\alpha(t_3 + \Delta t_* - \\ & - t_1 - 2\pi)] \cdot (\sin(t_3 + \Delta t_*) + \alpha \cos(t_3 + \Delta t_*)) + \frac{1}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin t_1 - \cos t_1) - \frac{1}{1 + \alpha^2} \exp[\alpha(t_3 + \\ & + \Delta t_* - t_1 - 2\pi)] (\alpha \sin(t_3 + \Delta t_*) - \cos(t_3 + \Delta t_*)) < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

В этом случае начав движение в момент времени  $t_1$  корпус не остановится ни в верхней ни в нижней зонах замедления, т.е. начав движение в момент времени  $t_1$  в

положительном направлении, он остановится на промежутке  $(t_3, t_4)$ , начнет движение в отрицательном направлении и, пройдя нижнюю зону замедления, остановится на промежутке  $(t_1 + 2\pi, t_2 + 2\pi)$ .

Численные исследования показали, что при выполнении условия (35) движение корпуса не будет периодическим. Однако на каждом интервале времени  $(t_1 + 2\pi n, t_1 + 2\pi n + 1, n \in \mathbb{Z}$  корпус дважды изменит направление движения на противоположное, останавливаясь вне зон замедления. Изменение направления движения с положительного на отрицательное будет происходить в моменты времени  $2\pi n + t_*^{(n)}$ , а с отрицательного на положительное – в моменты времени  $2\pi n + t_{**}^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При заданных  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  величины  $t_*^{(n)}$  и  $t_{**}^{(n)}$  определяются численно путем последовательного решения уравнений системы.

$$\begin{aligned}
 & \frac{k\mu}{\alpha} [\exp[\alpha(t_*^{(i)} - t_{**}^{(i)})] - 1] + \exp[\alpha(t_*^{(i)} - t_{**}^{(i)})] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} (k(\sin t_*^{(i)} + \alpha \cos t_*^{(i)}) - (\alpha \sin t_*^{(i)} - \\
 & - \cos t_*^{(i)})) - \frac{1}{1 + \alpha^2} (k(\sin t_{**}^{(i)} + \alpha \cos t_{**}^{(i)}) - (\alpha \sin t_{**}^{(i)} - \cos t_{**}^{(i)})) = 0 \\
 & \frac{k\mu}{\alpha} [\exp[\alpha(t_{**}^{(i)} - t_*^{(i)})] - 1] - \exp[\alpha(t_{**}^{(i)} - t_*^{(i)} - 2\pi)] \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} (k(\sin t_{**}^{(i)} + \alpha \cos t_{**}^{(i)}) + (\alpha \sin t_{**}^{(i)} - \\
 & - \cos t_{**}^{(i)})) + \frac{1}{1 + \alpha^2} (k(\sin t_*^{(i)} + \alpha \cos t_*^{(i)}) + (\alpha \sin t_*^{(i)} - \cos t_*^{(i)})) = 0
 \end{aligned} \tag{36}$$

Исследования на больших интервалах времени показали, что движение корпуса приближается к некоторому периодическому режиму движения без залипаний в зонах замедления.

Таким образом, при выполнении неравенства (35) движение корпуса будет иметь асимптотический характер приближаясь к некоторому предельному периодическому

режиму движения.

### **Выводы.**

Таким образом в работе дано полное качественное исследование динамики тела, движущегося посредством перемещения внутренней массы в случае существования сил вязкого трения между корпусом и поверхностью. Для каждого фиксированного значения  $\alpha$  плоскость параметров  $k$  и  $\mu$  можно разделить на три подобласти, в которых движение корпуса имеет принципиально различный характер. Если значения параметров удовлетворяют неравенствам (7) и (12), то тело совершает  $2\pi$ -периодическое возвратно-поступательное движение. В этом случае при прохождении материальной точкой зон замедления происходит залипание тела, т.е. в течении конечного интервала времени оно покоится, а затем продолжает движение, но уже в противоположном направлении. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам (19) и (23), тело движется с  $2\pi$ -периодически меняющейся скоростью. За один период корпус совершает перемещение в положительном направлении, при этом он дважды меняет направление движения, а залипание происходит только при прохождении материальной точкой нижней зоны замедления. Если же значения параметров удовлетворяют неравенству (35), то движение корпуса происходит без залипания и имеет асимптотический характер, т.е. приближается к некоторому предельному режиму. В предельном режиме скорость меняется  $2\pi$ -периодически, а тело совершает перемещение в положительном направлении.

*Автор выражает признательность научному руководителю Бардину Б.С. за постановку задачи и ряд важных замечаний.*

### **Библиографический список**

1. Нго К.Т., Соленая О.Я., Ронжин А.Л. Анализ подвижных роботизированных платформ для обслуживания аккумуляторов беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84444>
2. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Доклады РАН. 2005. № 1. С. 56 – 60.
3. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 6. С. 915 – 941.
4. Ramsey G and Rahnejat H. Fundamentals of tribology, London, Imperial College Press, 2008, 391 p.
5. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Мобильные роботы управляемые движением внутренних тел // Труды института математики и механики Уральского Отделения РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 213 – 222.
6. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. Т. 70. № 5. С. 157 – 167.

7. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 2. С. 216 – 229.
8. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф., Лупехина И.В. Исследование движения трехмассового виброробота по криволинейной траектории // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (5). С. 2088 – 2090.
9. Егоров А.Г., Захарова О.С. Об энергетически оптимальном движении виброробота в сопротивляющейся среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1 (3). С. 258 - 264.
10. Panagiotis Vartholomeos, Evangelos Papadopoulos. Analysis, Design and Control of a Planar Micro-robot Driven by two Centripetal-force Actuators // International Conference on Robotics and Automation – ICRA, Orlando, USA, 2006, pp. 649 - 654.
11. Xiong Zhan, Jian Xu. Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration-controlled internal masses // Advances in Mechanical Engineering, 2015, vol. 7, no. 3, available at: <http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1687814015573766>
12. Golitsyna M. Comparison of energy costs for different control laws of a vibratory robot // AIP Conference Proceedings 1798, 2017. DOI: 10.1063/1.4972679
13. Breguet J.-M., Clavel R. Stick and Slip Actuators: Design, Control, Performances and Applications // Proc. International Symposium Micromechatronics and Human Science (MHS), Nagoya, 1998, pp. 89 – 95.

14. Schmoeckel F., Worn H. Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs) // Proc. Intern. Conf. Robotics and Autom. New York, 2001, vol. 4, pp. 3903 – 3913.
15. Vartholomeos P., Papadopoulos E. Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators // Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Measurement, and Control, 2006, vol. 128, no. 1, pp. 122 – 133.
16. Li H., Firuta K., Chernousko F.L. Motion generation of the Capsubot using internal force and static friction // Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego (CA), 2006, pp. 6575 – 6580.
17. Fang HB and Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // Journal of Sound and Vibration, 2011, vol. 330, no.16, pp. 4002 – 4018.
18. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. №4. С. 763 – 772.
19. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 4. С. 406 – 410.
20. Бардин Б.С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» DYVIS-2015, Москва, 2015, С. 42 – 49.

21. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62995>
22. Bardin B., Panev A. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // Vibroengineering Procedia, 2016, no. 8, pp. 135 – 141.