

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



**Короленко Владимир Алексеевич**

**Исследование масштабных эффектов в задачах с концентрацией напряжений на основе  
моделей градиентной теории упругости**

Специальность 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

Соляев Ю.О.

Москва – 2024

## Оглавление

Введение .....	4
1. Формулировка градиентной теории упругости и представление общего решения 15	
1.1 Энергия деформаций и определяющие соотношения .....	15
1.2 Постановка краевой задачи.....	16
1.3 Модели с упрощенными определяющими соотношениями .....	17
1.4 Общее решение уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера .....	19
1.4.1 Представление решения.....	19
1.4.2 Представления для потенциалов в плоских задачах.....	23
1.4.3 Представления для потенциалов в пространственных задачах.....	26
1.5 Методика построения численных решений.....	28
2. Масштабные эффекты в плоских задачах с концентраторами напряжений .....	30
2.1 Задача Кирша .....	30
2.1.1 Постановка задачи и решение .....	30
2.1.2 Результаты расчетов.....	34
2.2 Задача о трещине .....	43
2.2.1 Постановка задачи .....	43
2.2.2 Классическое асимптотическое решение.....	49
2.2.3 Асимптотическое решение в рамках упрощенной ГТУ .....	51
3. Масштабные эффекты в пространственных задачах с концентраторами напряжений .....	60
3.1 Задача о сферическом включении.....	60
3.1.1 Концентрация напряжений в условиях всестороннего растяжения/сжатия 60	
3.1.2 Концентрация напряжений в условиях чистого сдвига .....	63
3.1.3 Результаты расчетов.....	67
3.2 Задача о сфере, нагруженной по экватору .....	76
3.2.1 Задание нагрузки через дельта-функцию .....	77
3.2.2 Задание нагрузки на кромке полусферы с учетом симметрии .....	79
3.2.3 Результаты численных расчетов.....	83
4. Моделирование экспериментальных данных по испытанию образцов с отверстиями различного размера.....	92

4.1	Метод корреляции цифровых изображений .....	92
4.2	Концентрация деформаций в образцах с отверстиями .....	93
4.2.1	Изготовление образцов .....	93
4.2.2	Методика испытаний .....	94
4.2.3	Результаты эксперимента и моделирования.....	97
5.	Заключение .....	105
	Список литературы.....	107

## **Введение**

Решение задач о концентрации напряжений в рамках классической теории упругости (ТУ) предполагает одинаковый характер распределения напряжений и деформаций вблизи концентраторов, не зависящий от размеров концентраторов. Однако, известны экспериментальные данные, из которых следует, что при уменьшении диаметра отверстия в испытываемых образцах, происходит повышение разрушающих нагрузок при статическом и усталостном нагружении [1, 24], что свидетельствует о снижении уровня концентрации напряжений в некоторых материалах вблизи малоразмерных отверстий. Кроме того, для таких концентраторов, как трещина или острый вырез, решение в рамках линейной ТУ оказывается сингулярным в малой окрестности вершины трещины. Коэффициент концентрации напряжений оказывается бесконечно большим при любом размере трещины, что противоречит известным экспериментальным результатам для размерного эффекта прочности квази-хрупких материалов [21]. Для описания подобных эффектов в настоящее время привлекаются специальные подходы, основанные, например на теории размерного эффекта Базанта, на моделях с критическими коэффициентами интенсивности напряжений, зависящими от длины трещины, или на теории критических расстояний [1, 21]. Модели обобщенных конитнуумов также все больше привлекаются для уточненного моделирования характера концентрации напряжений и размерных эффектов в задачах прочности тел с концентраторами [10, 16, 17].

Предпринимаются попытки построить модели дефектов и трещин без сингулярностей. Для этого привлекаются неклассические теории, например, теория сред Коссера [2], теория упругости с поверхностными эффектами [3], и градиентные теории упругости (ГТУ) [4]. Известные в этих теориях решения для задач о трещинах позволяют описать возникновение размерных эффектов, а, например, для задачи Кирша прогнозируют снижение уровня концентрации напряжений вблизи отверстий малого размера, по сравнению с классическим решением [2-7].

Формулировка ГТУ, рассматриваемой в данной диссертации, впервые была представлена в 1960-х годах в работах Р. Миндлина и Р. Тупина [8, 14]. В работе Р. Миндлина и Н. Эшела [35] были выделены три альтернативные формулировки ГТУ,

отличающиеся различными группировками восемнадцати дополнительных переменных в потенциальной плотности энергии деформаций. Первая включает восемнадцать компонент второго градиента от перемещений, вторая — восемнадцать компонент первого градиента деформаций, и третья, которая содержит восемь компонент градиентов поворотов и десять компонент полностью симметричной части второго градиента перемещений. Эти теории были названы Формой I, Формой II и Формой III, соответственно. Для них была показана единственность решения с соответствующими ограничениями на значения материальных констант, была показана возможность альтернативной формулировки ГТУ как на основе вариационного подхода, так и на основе расширенной записи уравнений баланса импульса и момента импульса.

Исследованиям в области градиентных теорий применительно к механике деформируемого твердого тела было посвящено большое количество работ. В России это работы В.В. Васильева и С.А. Лурье [16,17], И.Ф. Образцова, С.А. Лурье и П.А. Белова [31–34], Д.Б. Волкова-Богородского и С.А. Лурье [37–39], Е.В. Ломакина, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинского и Ю.О. Соляева [36, 40], В.И. Ерофеева [41, 42], А.О. Ватуляна, С.А. Нестерова [82, 83] и др.

В общем случае, для изотропного материала определяющие соотношения ГТУ помимо двух классических параметров Ламе содержат 5 дополнительных материальных констант [8]. Дополнительные константы материала отличаются по размерности на квадрат длины ( $\text{Па}\cdot\text{м}^2$ ), и их присутствие позволяет описывать масштабные эффекты, возникающие вблизи малоразмерных дефектов, и прогнозировать влияние размера включений на эффективные свойства композитов [29, 30, 45, 63, 64, 77]. Градиентные решения позволяют уточнить характер распределения напряжений в зонах закрепления и приложения нагрузки [36]. Также, в задачах ГТУ о трещинах и острых вырезах в линейно упругой постановке реализуются несингулярные решения для полей деформаций и напряжений, что может быть использовано для оценки прочности тела с трещинами [15-18]. В целом, учет градиентных эффектов оказываются существенным в задачах с высокой

концентрацией напряжений и деформаций [5, 7, 15, 29]. Ряд таких задач и новых решений представлен в данной диссертации.

### **Актуальность темы исследования**

Исследование несущей способности тел с концентраторами напряжений является одной из наиболее актуальных проблем современной механики деформируемого твердого тела. Градиентные теории упругости позволяют учитывать масштабные эффекты, возникающие в окрестности малоразмерных концентраторов, и позволяют регуляризовать классические сингулярные решения линейной теории упругости. Повышенный порядок уравнений и наличие дополнительных материальных констант усложняет решение и требует учета дополнительных граничных условий в ГТУ. Для практического применения градиентных теорий требуется разработка достоверных методов идентификации дополнительных материальных констант, которые можно реализовать на основе анализа масштабных эффектов, возникающих в испытаниях образцов с концентраторами напряжений. Применение аналитических решений является удобным подходом для быстрого анализа и обработки результатов экспериментальных данных, а также необходимым этапом при тестировании более универсальных численных методов.

### **Степень разработанности темы исследования**

За последние 20 лет большое количество исследований было посвящено проблемам, связанным с градиентными теориями упругости. Предложены различные методики для идентификации дополнительных физических констант градиентных теорий упругости. Например, в работе С.А. Лурье, Ю.О. Соляева и М.А. Посыпкина [46] сформулирована методика определения масштабных параметров ГТУ неоднородных композитных структур применительно к двумерным неоднородным структурам на основе молекулярно-динамического моделирования. Другой метод определения масштабных параметров в ГТУ, реализованный в работе В.В. Васильева, С.А. Лурье и В.А. Салова [16], заключается в испытании образцов с различной длиной трещин.

В работах В.В. Васильева и С.А. Лурье [16,17] рассмотрены несингулярные решения задачи о прочности пластины с трещиной нормального отрыва, полученные на основе обобщенной теории упругости. В работе Е.В. Ломакина, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинского и Ю.О. Соляева [36] предлагается использовать фундаментальное свойство ГТУ переводить в класс регулярных классические сингулярные решения теории упругости, не только в задачах микромеханики, где масштабный параметр оказывается порядка характерного размера микроструктуры материала, но и в задачах макромеханики в целях учета особенностей концентрации напряжений в зонах краевого эффекта в задачах балочной теории.

Задачи с сосредоточенными силами в ГТУ (задача Фламана, Буссинеска, Кельвина и др.) рассматривались, например, в работах [48, 81], где было показано, что получаемые решения также оказываются регулярными вблизи приложений нагрузки. Однако такого рода решения ранее были получены либо в неограниченных областях, либо на основе асимптотического подхода. В данной диссертации впервые рассматривается решение для задачи с сосредоточенной нагрузкой в ограниченной области (задача о сфере под нагрузкой, распределенной по экватору). Демонстрируются особенности такого рода задач в ГТУ и доказывается сходимость построенного в рядах численно-аналитического решения.

Решение задачи о бесконечной пластине с цилиндрическим отверстием (задачи Кирша) рассматривалось в работах N. Eshel и G. Rosenfeld в общей ГТУ [4] и S. Khakalo и J. Niiranen в теории Айфантиса [5]. В последней работе использовалось общее решение ГТУ в форме, предложенной Миндлиным, которое предполагается введение потенциалов, удовлетворяющих уравнениям четвертого порядка. В данной диссертации показано, что аналогичное решение может быть построено на основе более простого представления общего решения, предложенного в работах [48, 50]. Анализ масштабных эффектов на основе ГТУ также были посвящены работы С.А. Лурье, П.А. Белова, Д.Б. Волкова-Богородского, Л.Н. Рабинского, в которых рассматривались масштабозависимые балочные теории и задачи микромеханики [33, 34, 37].

Исследованию влияния градиентных эффектов на структуру сингулярных решений в смешанных задачах теории упругости и электроупругости в окрестности разрыва граничных условий посвящена работа А. О. Ватуляна, С. А. Нестерова, В. О. Юрова и О. В. Явруян [44].

Заметим, что помимо общей формулировки ГТУ с пятью дополнительными материальными константами (или масштабными параметрами), к настоящему времени предложено большое количество упрощенных градиентных теорий, содержащих редуцированное число масштабных параметров [9]. В работе Гусева А.А. и Лурье С.А. [13] рассмотрена вариационная формулировка упрощенной модели ГТУ изотропного материала, содержащая только четыре константы материала, включая константы Ламе. Одним из наиболее распространенных вариантов упрощенных теорий является ГТУ в форме Айфантиса, содержащая единственный дополнительный масштабный параметр [10], а наиболее ранним известным упрощенным вариантом ГТУ является моментная теория (couple stress, псевдоконтинуум Коссера).

Идея идентификации масштабных параметров ГТУ на основе испытаний образцов с концентраторами была предложена относительно недавно [15-17]. Одним из подходов для выявления размерных эффектов и дальнейшей идентификации масштабных параметров ГТУ может быть непосредственное измерение поля деформаций вблизи отверстий. Такие измерения в настоящее время могут быть выполнены с использованием метода корреляции цифровых изображений, для реализации которого на микроуровне необходимо использование микроскопии или, по крайней мере, техники макросъемки (см., например, [24, 79]). Метод корреляции цифровых изображений представляет собой оптический метод, используемый для измерения изменения двумерного или трехмерного поля координат на поверхности образца. Измеренные поля координат можно использовать для расчета перемещений, скоростей, деформаций и скоростей деформаций [9]. На основе такого подхода недавно для образцов с отверстиями и для размерозависимых результатов индентирования образцов оргстекла была проведена идентификация масштабного параметра упрощенного варианта ГТУ в работе [72], где его порядок составил 1.1 мм.



В последней главе данной диссертации на основе эксперимента по измерению деформаций вблизи отверстий различного размера установлено, что для рассматриваемого варианта оргстекла (ПММА) масштабный параметр в теории Айфантиса может составлять около 0.13 мм. Различие идентифицированных значений можно объяснить разными марками материала и несколько различными формулировками упрощенных определяющих соотношений ГТУ. Также возможно влияние погрешностей экспериментальных измерений. Заметим, что цифровые фотоаппараты широко используются для измерительных целей, но нужно учитывать факторы, влияющие на точность таких измерений. В [47, 65] приведены исследования точности определения корреляционных сдвигов при варьировании различных параметров изображений и параметров вычисления корреляции и даны рекомендации для выбора параметров изображений и корреляционного алгоритма, которые, в том числе, учитывались в данной работе.

### **Цели и задачи**

Целью диссертации является развитие аналитических методов построения решений в рамках градиентной теории упругости для достоверной оценки концентрации напряжений вблизи отверстий, включений и зон приложения сосредоточенных нагрузок. В настоящей работе рассматриваются одно/двухпараметрические градиентные теории упругости – упрощенная теория Айфантиса [10], моментная теория упругости [11], дилатационная теория упругости [12] и полностью симметричная теория Гусева-Лурье [13], которые являются частным случаем общей ГТУ.

Задачи диссертации:

1. Развитие аналитических подходов к построению решений задач в рамках ГТУ, в том числе, с помощью метода представления решения в форме Папковича-Нейбера.
2. Построение аналитических и численных решений в рамках упрощенной ГТУ для плоских задач с концентраторами напряжений: задачи Кирша и задачи о трещине. Применение полученного решения для идентификации

дополнительных масштабных параметров ГТУ на основе испытания образцов с малоразмерными отверстиями с использованием метода корреляции цифровых изображений.

3. Построение трехмерных решений в рамках ГТУ для задачи о сферическом включении и задачи о сфере, нагруженной нагрузкой, распределенной вдоль линии экватора.
4. Анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенных моделях ГТУ для задач с концентраторами напряжений или с сосредоточенными нагрузками.

### **Научная новизна**

Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. Предложены новые аналитические методы построения решений в упрощенной теории Айфантиса. Проведен анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенной модели ГТУ для задач с концентраторами напряжений и с сосредоточенными нагрузками. Построены новые масштабозависимые решения для задачи Кирша и задачи о сферическом включении. Впервые построено решение ГТУ для случая действия сосредоточенной нагрузки в ограниченной области на примере задачи о сфере, нагруженной нагрузкой, распределенной вдоль экватора. Впервые показано, что общее решение в форме Папковича-Нейбера позволяет восстановить известные асимптотические решения ГТУ для трещин в форме, полученной в работе [56]. Проведено исследование особенностей концентрации напряжений и деформаций вблизи малоразмерных концентраторов на основе аналитических и численных моделей градиентной теории упругости и выполнена их валидация на основе экспериментальных данных, получаемых с использованием метода корреляции цифровых изображений в испытаниях образцов с малоразмерными отверстиями.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы определяется построенными аналитическими решениями, которые могут быть использованы, как для

тестирования прикладных моделей (численных решателей), так и для упрощенной и быстрой обработки экспериментальных данных. Практическая значимость работы определяется возможностью описывать масштабные эффекты, возникающие при уменьшении характерного размера концентратора и возможностью получения регулярных решений для задач с сосредоточенными нагрузками. Практическая значимость также определяется развитием методов идентификации масштабных параметров градиентных теорий, в том числе на основе обработки результатов испытаний образцов с различными концентраторами, полученных с помощью метода корреляции цифровых изображений.

### **Методы исследования**

Для решения рассмотренных в диссертации задач с концентраторами напряжений использованы аналитические и численные методы построения решений в рамках градиентной теории упругости. Аналитические методы решения были построены, а их результаты получены с использованием системы символьных вычислений Wolfram Mathematica. В численном моделировании использовался метод конечных элементов в программном комплексе COMSOL Multiphysics. Для определения физико-механических характеристик, исследования особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий и валидации аналитических и численных моделей градиентной теории упругости были разработаны экспериментальные методы в испытаниях на растяжение образцов с отверстиями диаметром 0.3...2.5 мм. Для получения экспериментальных данных по концентрации деформаций в образцах с отверстиями, использован метод корреляции цифровых изображений. Экспериментальные исследования были проведены с использованием универсальной испытательной машины Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill 3.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Решения градиентной теории упругости позволяют описывать масштабные эффекты в зависимости концентрации напряжений от размера дефектов

(концентраторов, включений, отверстий), присутствующих в материале. Причиной возникновения масштабных эффектов в ГТУ является присутствие материальных констант разной размерности в определяющих соотношениях теории.

2. Общее решение в форме Папковича-Нейбера, обобщенное на случай уравнений равновесия ГТУ, позволяет получать аналитические и численно-аналитические (в рядах) решения для задач с концентрацией напряжений в бесконечных и ограниченных плоских и трехмерных областях, и оценивать масштабные эффекты, связанные с влиянием размеров концентраторов.

3. Общее решение в форме Папковича-Нейбера, обобщенное на случай уравнений равновесия ГТУ, содержит как частный случай, известное асимптотическое решение ГТУ для полу-бесконечной трещины, прогнозирующее регулярное поле напряжений в ее вершине.

4. Построенное численно-аналитическое решение для задачи о сфере, нагруженной по экватору, демонстрирует возможность получения регулярных решений ГТУ для сосредоточенных нагрузок в ограниченных областях, которые ранее рассматривались только для бесконечных областей (в задаче Фламана, Буссинеска и др.).

5. Показано, что прогнозируемые ГТУ масштабные эффекты сводятся к снижению прогнозируемого уровня концентрации напряжений при уменьшении размера концентратора. Если концентратор оказывается существенно меньше масштабного параметра, присутствующего в определяющих соотношениях ГТУ, то его присутствие не оказывает влияние на разрушающую нагрузку, что качественно подтверждается известными экспериментальными данными.

6. На основе решения задачи Кирша проведена обработка экспериментальных данных по испытанию образцов оргстекла с малоразмерными отверстиями. Показано, что для отверстий диаметром менее 500 мкм, решения ГТУ лучше согласуются с экспериментальными данными, по сравнению с классическим решением задачи Кирша.

**Апробация работы и публикации по теме диссертации**

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в шести научных печатных работах, пять из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus. Одна работа опубликована в издании, рекомендуемом Перечнем ВАК РФ [66-69, 80]:

Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2019. – Т. 78. – С. 103853.

Короленко В., Соляев Ю. О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости //Труды МАИ. – 2021. – №. 121. – С. 4.

Korolenko V. A., Babaytsev A. V. Experimental assessments on the strain concentration around small-sized holes in PMMA //Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2024. – Т. 15. – №. 1. – С. 55-64.

dell’Isola F. et al. Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2023. – С. 105153.

Solyaev Y. O., Korolenko V. A. Application of Papkovitch–Neuber General Solution for Crack Problems in Strain Gradient Elasticity //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Т. 44. – №. 6. – С. 2469-2479.

Основные результаты были представлены на конференциях и опубликованы в сборниках трудов конференций:

Соляев Ю. О., Короленко В. А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел в рамках градиентной теории упругости //XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – С. 1127-1129.

Международная конференция “XLVII International summer school conference advanced problems in mechanics — 2019” доклад “Numerical solutions of crack problems in second gradient elasticity”.

Конференция «XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике — 2023» доклад «Исследование особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий».

### **Объем и структура диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Она содержит 115 страниц, из них 8 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 86 наименований.

Структура диссертации следующая. В первой главе приведены определяющие отношения и постановка краевой задачи градиентной теории упругости. Перечислены некоторые модели ГТУ с упрощенными определяющими отношениями. Дано представление решения уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера и описан использованный метод численного моделирования.

Во второй главе исследуются плоские задачи с концентраторами напряжений. Приведены решения задачи Кирша и задачи о трещине в рамках упрощенной градиентной теории упругости.

В третьей главе рассмотрены пространственные задачи с концентраторами напряжений, в частности задача о сферическом включении в бесконечном пространстве в условиях заданного на бесконечности всестороннего сжатия или чистого сдвига, и задача о сфере, нагруженной силой, распределенной вдоль экватора.

В четвертой главе приведено описание экспериментальной части и моделирование экспериментальных данных. Дано описание метода корреляции цифровых изображений. Описано изготовление образцов с отверстиями, приведена методика испытаний и результаты эксперимента и моделирования.

# 1. Формулировка градиентной теории упругости и представление общего решения

## 1.1 Энергия деформаций и определяющие соотношения

В градиентной теории упругости предполагается, что плотность энергии деформаций среды зависит не только от самих деформаций, но и от их градиентов [8]:

$$w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

где  $C_{ijkl}$  – тензоры модулей упругости четвертого ранга,  $A_{ijklmn}$  – тензор градиентных модулей шестого ранга;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций,  $\varepsilon_{ij,k}$  – тензор градиентов деформаций,  $u_i$  – вектор перемещений. Запятой обозначены производные по координатам, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Определяющие соотношения для классических напряжений  $\tau_{ij}$  (тензор второго ранга) и для градиентных напряжений  $\mu_{ijk}$  (тензор третьего ранга) имеют вид:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \mu_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n} \quad (2)$$

Компоненты тензоров модулей упругости и градиентных модулей в общем случае изотропного тела могут быть представлены в следующем виде [8]:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

$$A_{ijklmn} = A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk}$$

$$= a_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm})$$

$$+ a_2 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm}$$

$$+ a_3 (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn})$$

$$+ a_4 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn})$$

$$+ a_5 (\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}) \quad (4)$$

где  $\lambda, \mu$  – классические константы Ламе [Па],  $a_i$  ( $i = 1 \dots 5$ ) дополнительные константы материала [Па м<sup>2</sup>];  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера.

Подставляя соотношения (3), (4) в определяющие соотношения (2), получаем классический обобщенный закон Гука для вычисления компонент классических напряжений и дополнительный набор соотношений для вычисления градиентных напряжений:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = \mu_{jik} = & a_1 (2\delta_{ij} \varepsilon_{kl,l} + \delta_{ik} \theta_{,j} + \delta_{jk} \theta_{,i}) + a_2 (\delta_{ij} \theta_{,k}) \\ & + 2a_3 (\delta_{jk} \varepsilon_{il,l} + \delta_{ik} \varepsilon_{jl,l}) + 2a_4 \varepsilon_{ij,k} + 2a_5 (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) \end{aligned} \quad (6)$$

## 1.2 Постановка краевой задачи

Постановка краевой задачи ГТУ может быть получена на основе вариационного принципа Лагранжа с учетом записанной структуры плотности энергии деформаций (1). Для тела, занимающего объем  $\Omega$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ , с заданными только статическими граничными условиями, эта постановка в отсутствие объемных сил имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \quad x_i \in \Omega \\ \sigma_{ij} n_j - \mu_{ijk,l} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_k - 2H \mu_{ijk} n_j n_k &= \bar{t}_i \quad \text{или} \quad u_i = \bar{u}_i \quad x_i \in \partial\Omega \\ \mu_{ijk} n_j n_k &= \bar{m}_i \quad \text{или} \quad u_{i,l} n_l = \bar{g}_i \quad x_i \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$  – тензор полных напряжений, входящий в уравнения равновесия ГТУ,  $\bar{t}_i, \bar{m}_i$  – заданные поверхностные нагрузки (классические и моментные напряжения на поверхности),  $H = -\frac{1}{2} n_{i,l} (\delta_{il} - n_i n_l)$  – средняя кривизна поверхности  $\partial\Omega$ ,  $n_i$  – вектор внешней единичной нормали к поверхности тела.

С использованием (5), (6) и определений для тензора деформаций, уравнения равновесия в (7) могут быть записаны в терминах перемещений в следующем инвариантном виде:



$$(\lambda + \mu)(u_{k,ki} - l_1^2 u_{k,kjji}) - \mu(u_{k,ki} - u_{i,kk} - l_2^2(u_{k,kjji} - u_{i,kkjj})) = 0 \quad (8)$$

или в безиндексной записи:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

где в общем случае возникает два масштабных параметра, которые имеют размерность длины и определяются через градиентные модули следующим образом:

$$l_1^2 = \frac{4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5}{\lambda + 2\mu}, \quad l_2^2 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{\mu}. \quad (10)$$

### 1.3 Модели с упрощенными определяющими соотношениями

Для прикладных расчетов удобным является использование моделей ГТУ с минимальным набором дополнительных материальных констант (хотя в настоящее время теоретически или экспериментально не доказано, что для реальных материалов это является допустимым для любых вариантов нагружения). Поэтому в ГТУ были предложены разнообразные варианты упрощенных теорий, содержащих 1...3 дополнительных параметра и отличающихся формой записи определяющих соотношений для градиентных напряжений (6). Наиболее часто используемой является модель Айфантиса, которая может быть получена из общей формулировки ГТУ с использованием следующих предположений [10]:

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0 \quad a_2 = \lambda l^2 \quad a_4 = \mu l^2 \quad l_1 = l_2 = l \quad (11)$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = l^2 \tau_{ij,k} = \lambda l^2 \delta_{ij} \varepsilon_{ij,k} + 2\mu l^2 \varepsilon_{ij,k}$$

где  $l$  [м] – это единственный масштабный параметр модели.

Компоненты тензоров градиентных модулей примут вид:

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} &= A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk} \\ &= l^2 C_{ijlm} \delta_{kn} = l^2 (\lambda \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn})) \end{aligned} \quad (12)$$

Другим распространенным частным случаем ГТУ, который был предложен даже раньше общей формулировки, является моментная теория упругости [11].

Формулировка этой теории может быть получена из (6) с использованием следующих предположений [18]:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2l^2\eta\mu, & a_2 &= -4l^2\eta\mu, & a_3 &= -l^2\eta\mu, \\
a_4 &= 2l^2(\eta + 1)\mu, & a_5 &= -l^2(\eta + 1)\mu, & l_1 &= 0 & l_2 &= l
\end{aligned}
\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2 &\left( 2\eta(2\delta_{ij}\omega_{kp,p} - \delta_{ik}\omega_{jp,p} - \delta_{jk}\omega_{ip,p}) \right. \\
&\left. + (1 + \eta)(\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i}) \right),
\end{aligned}$$

где  $\omega_{ij} = \frac{(u_{i,j} - u_{j,i})}{2}$  – тензор малых поворотов, и  $\eta \in [-1, 1]$  – второй неклассический параметр модели.

Далее будем рассматривать упрощенный вариант моментной теории упругости, в котором предполагается, что тензор градиентных напряжений определяется только через симметричную часть тензора градиентов поворотов ( $\eta = 0$ , *modified couple stress theory*):

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2(\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i}) \tag{14}$$

Следующий вариант модели – это дилатационная теория упругости [12]. Ее определяющие соотношения следуют из (6), если предположить:

$$\begin{aligned}
a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, & \quad a_2 = (\lambda + 2\mu)l^2 \\
\mu_{ijk} = \mu_{jik} = (\lambda + 2\mu)l^2 &\delta_{ij}\varepsilon_{ll,k}
\end{aligned}
\tag{15}$$

Последним рассматриваемым вариантом определяющих соотношений является полностью симметричная теория [13], которую получим из (6), предполагая, что:

$$\begin{aligned}
a_1 = a_2 = a_3 = \lambda l^2, & \quad a_4 = a_5 = \mu l^2 \\
\mu_{ijk} = \mu_{jik} = \mu_{ikj} \\
= \lambda l^2 &\left( 2\delta_{ij}\varepsilon_{kl,l} + \delta_{ik}\theta_{,j} + \delta_{jk}\theta_{,i} + \delta_{ij}\theta_{,k} + 2\delta_{jk}\varepsilon_{ji,l} \right) \\
+ 2\mu l^2 &\left( \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} \right)
\end{aligned}
\tag{16}$$

Заметим, что полностью симметричная теория может быть получена из общей ГТУ, записанной, в так называемой, форме III Миндлина [8], в предположении, что в среде отсутствуют моментные напряжения. Кроме этого, заметим, что все

рассматриваемые неклассические теории сводятся к классической теории упругости, если положить равным нулю масштабный параметр  $l$ .

## 1.4 Общее решение уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера

### 1.4.1 Представление решения

Решение для уравнений равновесия ГТУ в перемещениях (8), (9) может быть представлено в форме Папковича-Нейбера, обобщенной на случай рассматриваемой системы уравнений повышенного (четвертого) порядка. В работе Р. Миндлина [8] был предложен вариант такого представления с использованием потенциалов, удовлетворяющих уравнениям четвертого порядка. С использованием этого представления решение для задачи Кирша в общей формулировке ГТУ и для упрощенной теории Айфантиса было построено в работах [4,5]. Позднее была предложена запись решения в форме Папковича-Нейбера для ГТУ через потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям Лапласа и Гельмгольца, то есть уравнениям второго порядка [48, 50]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g, \\ \mathbf{u}_c &= \Phi - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi + \varphi), \\ \mathbf{u}_g &= \Psi + \nabla\psi \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\kappa = \frac{1}{4(1-\nu)}$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\mathbf{r}$  – радиус вектор.

Потенциалы должны удовлетворять уравнениям Лапласа и модифицированным уравнениям Гельмгольца следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \\ (1 - l_2^2 \nabla^2) \Psi &= 0, \quad \nabla \cdot \Psi = 0, \quad (1 - l_1^2 \nabla^2) \psi = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

В рассматриваемой записи решения (17) поле перемещений разложено на, так называемую, классическую часть ( $\mathbf{u}_c$ ) и градиентную часть ( $\mathbf{u}_g$ ). Для классической части использовано стандартное представление Папковича-Нейбера (см., например, [49]) с гармоническим скалярным ( $\varphi$ ) и векторным ( $\Phi$ ) потенциалами. Градиентная

часть поля перемещений также представлена скалярным ( $\psi$ ) и бездивергентным векторным ( $\Psi$ ) потенциалами, которые подчиняются модифицированным уравнениям Гельмгольца. В случае упрощенной теории Айфантиса (12) представление градиентной части  $\mathbf{u}_g$  сводится к стандартному разложению Гельмгольца. Представление (17) было предложено недавно в работе [48], и его формальный вывод вместе с вариантом доказательства его полноты был установлен в работе [50]. Другие варианты определения решения Папковича-Нейбера в рамках ГТУ были рассмотрены в работах Р. Миндлина [35]; Лурье и др. [31], [33]; Khakalo S., Niiranen J [32]; Соляева, Лурье, Короленко [22]; A. Charalambopoulos, T. Gortsas и D. Polyzos [51].

Прямой подстановкой решения (17) с учетом (18) можно проверить, что оно удовлетворяет уравнениям равновесия (9). Не используя пока представление решения через потенциалы, из (9) получаем:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g) - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g) = 0 \quad (19)$$

Здесь поле перемещений разложено на классическую часть ( $\mathbf{u}_c$ ) и градиентную часть ( $\mathbf{u}_g$ ) и, очевидно, что в следствие линейности всех операторов, эти части можно рассматривать отдельно. Рассмотрим классическую часть уравнений равновесия (19), то есть те слагаемые, которые содержат  $\mathbf{u}_c$ :

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_c - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_c = 0 \quad (20)$$

Раскрыв скобки в (20), получим классическое уравнение равновесия и дополнительные слагаемые, которые содержат масштабные параметры  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_c - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_c \\ - ((\lambda + 2\mu) l_1^2 \nabla^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_c - \mu l_2^2 \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_c) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Первые два слагаемых представляют собой классические уравнения равновесия, которые будут удовлетворены вследствие использования классического представления для  $\mathbf{u}_c$  в (18).

Затем, рассмотрим оставшиеся слагаемые, связанные с масштабными параметрами, в (21):

$$-(\lambda + 2\mu)l_1^2 \nabla^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_c - \mu l_2^2 \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_c = 0 \quad (22)$$

После подстановки  $\mathbf{u}_c$  из (17) получаем:

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu)l_1^2 \nabla^2 \nabla \nabla \cdot (\Phi - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi + \varphi)) - \mu l_2^2 \nabla^2 \nabla \times \nabla \right. \\ & \left. \times (\Phi - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi + \varphi)) \right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Эта часть решения для перемещений определяется скалярным ( $\varphi$ ) и векторным ( $\Phi$ ) потенциалами и удовлетворяется исходя из того, что эти потенциалы должны удовлетворять уравнениям Лапласа (18):

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu)l_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \Phi - \kappa \nabla \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \Phi) - \kappa \nabla \nabla^2 \varphi) \right. \\ & \left. - \mu l_2^2 (\nabla \times \nabla \times \nabla^2 \Phi - \kappa \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi + \varphi)) \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Представим оставшийся член решения для перемещений в (24) следующим образом [28]:

$$-\kappa(\lambda + 2\mu)l_1^2 \nabla \nabla \cdot \nabla \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla^2 \Phi + 2 \nabla \cdot \Phi) = 0 \quad (25)$$

Оставшаяся часть решения для перемещений удовлетворяется исходя из того, что векторный потенциал ( $\Phi$ ) должен удовлетворять уравнению Лапласа (18):

$$-\kappa(\lambda + 2\mu)l_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \Phi) = 0 \quad (26)$$

Рассмотрим теперь градиентную часть уравнений равновесия (19), записанную относительно  $\mathbf{u}_g$ . Используя для  $\mathbf{u}_g$  представление через градиентные потенциалы (17), получим:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot (\Psi + \nabla \psi) - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times (\Psi + \nabla \psi) = 0 \quad (27)$$

Ротор градиента тождественно равен нулевому вектору ( $\nabla \times (\nabla \psi) = 0$ ), поэтому получаем

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot (\Psi + \nabla \psi) - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \Psi = 0 \quad (28)$$

Оставшаяся часть решения для градиентной части перемещений удовлетворяется исходя из того, что потенциалы ( $\Psi$ ) и ( $\psi$ ) должны удовлетворять

модифицированным уравнениям Гельмгольца (18) и  $\Psi$  является вихревым полем. Переставляя последовательность операторов, получаем:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot (\Psi + \nabla \psi) - \mu \nabla \times \nabla \times (1 - l_2^2 \nabla^2) \Psi = 0 \quad (29)$$

Оставшийся скалярный потенциал ( $\psi$ ) удовлетворяется исходя из условия  $(1 - l_1^2 \nabla^2) \psi = 0$  (18):

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \nabla (1 - l_1^2 \nabla^2) \psi \equiv 0 \quad (30)$$

Таким образом, показано, что представление Папковича-Нейбера (17) удовлетворяет уравнениям равновесия градиентной теории упругости в общем случае. Для частных случаев упрощенных определяющих соотношений градиентной теории уравнения равновесия будут также удовлетворяться с учетом соответствующих значений масштабных параметров  $l_1, l_2$  (см. раздел 1.2).

Можно отметить, что для ортогональных криволинейных координат, допускающих разделение переменных в модифицированном уравнении Гельмгольца, удовлетворяющее ему вихревое поле  $\Psi(\mathbf{r})$  можно представить через два скалярных потенциала, подчиняющиеся скалярным уравнениям Гельмгольца [52]. В частности, для сферической и полярной цилиндрической систем координат справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \Psi &= \nabla \times (r \bar{\chi} \mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times (r \chi \mathbf{e}_r) \\ \bar{\chi} - l_2^2 \nabla^2 \bar{\chi} &= 0, \quad \chi - l_2^2 \nabla^2 \chi = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\bar{\chi}(\mathbf{r})$  определяет деформации из плоскости (антиплоские), а  $\chi(\mathbf{r})$  определяет деформации в плоскости (плоское напряженное или плоское деформированное состояния),  $r = |\mathbf{r}|$  — радиальная координата,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор вдоль радиального направления.

Представление решения (31) является удобным, так как позволяет универсальным образом получить представление для векторного поля через два скалярных потенциала, для которых решения (скалярного) уравнения Гельмгольца в различных системах координат хорошо изучены.

В следующем подразделе будет рассмотрена компонентная запись для представления решения (17) в случае плоской постановки в цилиндрической полярной системе координат и в случае трехмерной постановки для общего случая сферических координат, а также для случая осесимметричной задачи в сферических координатах. Эти представления будут использованы далее в соответствующих разделах диссертации.

Заметим, что классический скалярный потенциал ( $\varphi$ ) может быть исключен из рассмотрения (или одна из компонент векторного классического потенциала  $\Phi$ ), если коэффициент Пуассона материала не равен  $1/4$  (то есть  $\lambda \neq \mu$ ). Подробно это обсуждалось в классической монографии А.И. Лурье [27]. В большинстве рассматриваемых далее задач этот скалярный потенциал использован не будет.

#### 1.4.2 Представления для потенциалов в плоских задачах

Для задач в полярной системе координат запись решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g, \\ \mathbf{u}_c &= \Phi - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi), \\ \mathbf{u}_g &= \nabla\psi + \nabla \times \nabla \times (r\chi\mathbf{e}_r) \end{aligned} \tag{32}$$

Покомпонентная запись (32) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_r &= (1 - \kappa)\Phi_r - kr \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \\ u_\theta &= \Phi_\theta - \kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \tag{33}$$

где предполагается, что коэффициент Пуассона материала не равен  $1/4$  и поэтому классический скалярный потенциал не используется.

Полные представления для классического векторного потенциала  $\Phi$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, и для скалярных потенциалов  $\psi$  и  $\chi$ , подчиняющихся модифицированным уравнениям Гельмгольца в полярной системе

координат, хорошо известны (соответствующие доказательства полноты разработаны в рамках метода Треффца, см. [53]):

для случая симметричного нагружения (относительно  $\theta = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \Phi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} + b_n r^{k-1}) \cos k\theta, \\
 \Phi_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1}) \sin k\theta, \\
 \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n I_k(\bar{r}) + \hat{c}_n K_k(\bar{r})) \cos k\theta, \\
 \chi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n I_k(\bar{r}) + \hat{d}_n K_k(\bar{r})) \cos k\theta
 \end{aligned} \tag{34}$$

и для случая антисимметричного нагружения:

$$\begin{aligned}
 \Phi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} + b_n r^{k-1}) \sin k\theta, \\
 \Phi_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1}) \cos k\theta, \\
 \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n I_k(\bar{r}) + \hat{c}_n K_k(\bar{r})) \sin k\theta, \\
 \chi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n I_k(\bar{r}) + \hat{d}_n K_k(\bar{r})) \sin k\theta
 \end{aligned} \tag{35}$$

где  $k = n + \xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) – это, в общем случае, дробный порядок слагаемых в общем решении;  $a_n, b_n, c_n, d_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n$  – неизвестные константы, которые могут быть найдены через граничные условия. При этом, константы  $\hat{c}_n$  и  $\hat{d}_n$  стоят перед членами затухающими на бесконечности  $r \rightarrow \infty$ , а  $c_n$  и  $d_n$  перед членами, конечными в начале координат  $r = 0$ ;  $I_k$  и  $K_k$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго



рода;  $\bar{r} = \frac{r}{l}$  – нормированная радиальная координата. В общем случае нагружения следует рассматривать комбинацию решений (34) и (35).

Коэффициент  $n$  в суммах (34) и (35), может принимать любое целое значение ( $n \in Z$ ), однако возможность наличия членов с отрицательным  $n$  в рамках ГТУ следует тщательно проверять с учетом условий регулярности поля перемещений и ограниченной плотности энергии деформаций (в задачах о трещинах и острых вырезах). Примечательно, что в рамках классической теории упругости члены с отрицательным порядком ( $r^{-1}$  и т. д.) могут возникать только во внешних областях, не содержащих начало системы координат  $r = 0$ . В ГТУ некоторые члены отрицательного порядка могут возникать даже на ограниченной области, хотя они исчезают из-за сочетания классической и градиентной частей решения с одинаковым асимптотическим поведением. Такое решение ГТУ для обобщенной задачи Фламана было представлено в [48]. Аналогичный анализ для задач о трещинах представлен в разделе 2.2, где показано, что некоторые члены отрицательного дробного порядка необходимы для получения градиентных асимптотических решений для полей вершины трещины на основе общего решения в форме Папковича-Нейбера. Сами эти члены исключаются из решения благодаря комбинации классической и градиентной части решений, однако ненулевые амплитуды при этих членах оказываются важны для определения составляющих асимптотического решения более высокого порядка.

Логарифмические составляющие общего решения исключены из представлений (34) и (35), так как они не возникают в рассматриваемых далее классах задач. В общем случае, эти части решения соответствуют поведению классической части поля перемещений в плоских задачах вблизи сосредоточенных нагрузок.

### 1.4.3 Представления для потенциалов в пространственных задачах

Для задач в сферической системе координат запись решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_g, \\ \mathbf{u}_c &= \Phi - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \Phi), \\ \mathbf{u}_g &= \nabla\psi + \nabla \times (r\bar{\chi}e_r) + \nabla \times \nabla \times (r\chi e_r)\end{aligned}\tag{36}$$

Запись представления для классического векторного потенциала  $\Phi$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, в криволинейных координатах в пространственных задачах в общем случае затруднительна. Поэтому в рассматриваемых далее соответствующих задачах (в задачах о включениях, раздел 3.1) используется известная классическая часть поля перемещений, полученная ранее в классической теории упругости (что является допустимым, см. [22], [49]). Для скалярных потенциалов  $\bar{\chi}$ ,  $\chi$  и  $\psi$ , подчиняющихся модифицированным уравнениям Гельмгольца в сферической системе координат, имеет место следующее полное представление [53, 54]:

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( a_{n,m} i_n(\bar{r}) + b_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi), \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( c_{n,m} i_n(\bar{r}) + d_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi), \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( e_{n,m} i_n(\bar{r}) + f_{n,m} k_n(\bar{r}) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi)\end{aligned}\tag{37}$$

где  $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}, e_{n,m}, f_{n,m}$  – неизвестные константы, которые могут быть найдены из граничных условий,  $i_n$  и  $k_n$  – модифицированные сферические функции Бесселя первого и второго рода,  $\bar{r} = \frac{r}{l}$  – нормированная радиальная координата,  $Y_{n,m}(\theta, \phi)$  – сферические гармоники.

В сферической системе координат также будет рассмотрен случай осесимметричного нагружения. В этом случае в решении (36) должен использоваться

оператор набла для осесимметричного нагружения, в котором нет зависимости от угла  $\phi$  ( $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, 0 \right\}$ ), компонента перемещений  $u_\phi = 0$ , а антиплоские деформации отсутствуют  $\bar{\chi} \equiv 0$ .

Покомпонентное представление для поля перемещений для случая осесимметричной задачи в сферической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} u_r &= 4(1-\nu)\Phi_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r + \varphi + \psi) - \frac{\cot\theta}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}, \\ u_\theta &= 4(1-\nu)\Phi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}(r\Phi_r + \varphi + \psi) + \frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\theta} \end{aligned} \quad (38)$$

где потенциалы  $\Phi(r, \theta)$  и  $\varphi(r, \theta)$  для внутренних областей можно определить следующим образом [27]:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(n+1)r^{n+1}P_n(\cos\theta), \\ \Phi_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+1} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}, \\ \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (39)$$

здесь  $A_n$  и  $B_n$  – неизвестные константы, которые могут быть найдены через граничные условия,  $P_n(\dots)$  – многочлены Лежандра.

Потенциалы для градиентной части решения  $\psi(r, \theta)$  и  $\chi(r, \theta)$ , которые подчиняются модифицированным уравнениям Гельмгольца, могут быть выражены следующим образом в ограниченных областях (см., например, А.Р. Zielinski, О.С. Zienkiewicz [54]):

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n i_n \left( \frac{r}{l_1} \right) P_n(\cos\theta), \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n i_n \left( \frac{r}{l_2} \right) P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (40)$$

где  $i_n(\dots)$  — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода, ограниченная во внутренней области.

## 1.5 Методика построения численных решений

Численное моделирование выполнено смешанным методом конечных элементов в пакете Comsol Multiphysics. Стандартных интерфейсов для построения решений в рамках градиентных теорий в этой системе в настоящее время нет, как и в других системах конечно-элементного моделирования. Однако Comsol предоставляет универсальные интерфейсы для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка, что соответствует "слабой" формулировке краевых задач в терминах первых производных от основных переменных модели. Уравнения равновесия рассматриваемых в диссертации градиентных теорий обладают четвертым порядком, а "слабая" формулировка краевых задач содержит вторые производные от перемещений в ГТУ. Поэтому для использования интерфейсов Comsol требуется применение метода понижения порядка уравнений теории с введением дополнительных промежуточных переменных для повышенных производных. С точки зрения конечно-элементной реализации это означает использование отдельной аппроксимации как для основных переменных модели, так и для их производных. Такой подход носит названия смешанного МКЭ (mixed FEM). В классической теории упругости смешанный МКЭ применяется, например, для задач с почти несжимаемыми материалами (с коэффициентом Пуассона близким к 0.5), в которых стандартная аппроксимация приводит к недостаточной устойчивости решений. Такой подход в том числе реализован в Comsol в модуле Solid Mechanics. Однако для рассматриваемых в данной диссертации задач необходимо непосредственное программирование уравнений теории, и это было выполнено в модуле Weak Form PDE для формулировки задач в "слабой" форме.

Формулировка МКЭ для градиентных теорий в модуле Weak Form PDE требует только записи энергии деформаций среды в терминах узловых переменных и введения дополнительных промежуточных переменных (для понижения порядка производных) на множителях Лагранжа. Необходимая расширенная форма записи плотности энергии деформаций имеет вид:

$$w(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \kappa_{ij,k} \kappa_{lm,n} + \frac{1}{2} \Lambda_{ij} (\kappa_{ij} - \varepsilon_{ij}) \quad (41)$$

где компоненты тензора второго ранга  $\kappa_{ij}$  являются самостоятельными переменными, для которых вводится отдельная аппроксимация, и имеют место соотношения  $\kappa_{ij} = \varepsilon_{ij}$ , вводимые на множителях Лагранжа  $\Lambda_{ij}$  в виде дополнительных кинематических ограничений во всех области построения решения.

Построение решения также требует задания определений для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  через перемещения в узлах модели и структуры тензоров материальных констант  $C_{ijkl}$  и  $A_{ijklmn}$ . Вся последующая процедура получения слабой формулировки модели, сборки матрицы жесткости и ее обращение проводятся стандартными средствами Comsol Multiphysics в автоматическом режиме. Аппроксимация для основных узловых переменных и множителей Лагранжа в объеме задается с использованием эрмитовых полиномов третьего порядка. Кинематические граничные условия на поверхности тела задаются с использованием множителей Лагранжа, для которых используется аппроксимация полиномами Лагранжа второго порядка. Детальное описание реализуемого подхода было представлено в работах [73-76].

## 2. Масштабные эффекты в плоских задачах с концентраторами напряжений

### 2.1 Задача Кирша

Рассматривается задача о деформациях бесконечного пространства (или достаточно большого образца), содержащего цилиндрическое отверстие радиусом  $R$ . На бесконечности задано однородное напряженное состояние, соответствующее одноосному или двухосному растяжению, либо чистому сдвигу. Поверхность отверстия свободна от нагрузки.

#### 2.1.1 Постановка задачи и решение

Постановка рассматриваемой задачи в ГТУ может быть представлена в следующем виде [5]:

$$\begin{cases} r \geq R: & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ r = R: & t_r = 0, t_\theta = 0, m_r = 0, m_\theta = 0, \\ r \rightarrow \infty: & t_r = \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \cos 2\theta, t_\theta = -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \sin 2\theta, m_r = 0, m_\theta = 0 \end{cases} \quad (42)$$

где  $\bar{t}$  – это заданный уровень внешней нагрузки, и одноосное растяжение реализуется при  $\xi = 0$ , двухосное растяжение – при  $\xi = 1$ , и чистый сдвиг (под углом 45 градусов) – при  $\xi = -1$  (см. рис. 1).

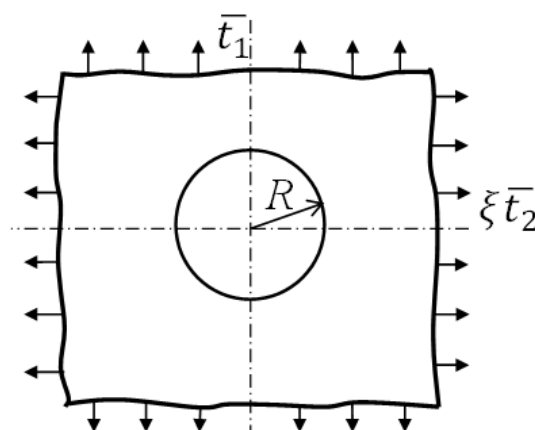


Рис. 1. Рассматриваемая схема нагружения

Решение для перемещений в аналогичной задаче классической теории упругости имеет вид:

$$\begin{aligned} u_r^{clas} &= \frac{\sigma}{8Gr} \left( (\xi + 1) \left( (\kappa + 1)r^2 + 2R^2 \right) - 2(\xi - 1) \left( r^2 + (\kappa + 1)R^2 - \frac{R^4}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right), \\ u_\theta^{clas} &= \frac{\sigma}{4Gr} (\xi - 1) \left( r^2 + (\kappa - 1)R^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (43)$$

Это решение может быть получено из классического представления в форме Папковича-Нейбера (38), в котором векторный потенциал должен быть определен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= c_{21}r^{-1} + c_{41}r + (c_{51}r^{-1} + c_{71}r + c_{23}r^{-3}) \cos 2\theta, \\ \Phi_\theta &= -(c_{51}r^{-1} + c_{71}r - c_{23}r^{-3}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (44)$$

где  $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}$  – это константы, определяемые из граничных условий задачи.

Решение (44) для компонент потенциала  $\Phi$  может быть получено из общей записи его компонент в полярной системе координат (39) если в ней рассматривать только слагаемые в суммах при  $n = 1$  и  $n = 3$ , а остальные слагаемые исключить, полагая равными нулю соответствующие константы. После использования стандартных тригонометрических преобразований и переобозначения констант можно получить (44).

Учитывая представление решения (33), в котором можно отдельно выделить классическую и градиентную части поля перемещений, в решение для задачи Кирша в ГТУ включаем те же классические слагаемые, которые присутствуют в (44). Предполагается, что никаких других дополнительных классических составляющих в решении ГТУ не возникает. Для рассматриваемой задачи это предположение оказывается верным, так как оно позволяет удовлетворить всем граничным условиям.

Градиентную часть поля перемещений определим с использованием двух введенных скалярных потенциалов (см. (33)). Для задания этих потенциалов оставляем в рядах только те слагаемые, которые соответствуют четности и периодичности классического решения (44). При этом также учтено, что задание

однородного поля напряжений на бесконечности требует исключения модифицированных функций Бесселя первого рода. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\psi &= b_{10}K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + b_{12}K_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\cos 2\theta \\ \chi &= d_{12}K_2\left(\frac{r}{l_2}\right)\cos 2\theta\end{aligned}\tag{45}$$

где  $b_{10}, b_{12}, d_{12}$  – это дополнительные константы решения, которые должны определяться с учетом наличия расширенного набора граничных условий в ГТУ.

Выбранная запись для потенциалов (44), (45) содержит всего 8 констант. В постановке (42) присутствует 8 граничных условий, из которых два удовлетворяются тривиальным образом – на бесконечности моментные напряжения будут равны нулю, так как все градиентные составляющие решения затухают, что обеспечено выбором затухающих модифицированных функций Бесселя в (45). Для решения задачи необходимо учесть, что в решении присутствуют составляющие разной периодичности (осесимметричные и  $\pi$ -периодические), поэтому граничные условия относительно радиальной компоненты вектора перемещений будут распадаться на два отдельных уравнения. В итоге, в задаче будет присутствовать восемь независимых граничных условий для определения восьми констант:  $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}, b_{10}, b_{12}, d_{12}$ . Для записи этих условий необходимо использовать выражения для потенциалов (44), (45) и определить перемещения в форме (33). Далее необходимо использовать стандартные соотношения в полярной системе координат для вычисления компонент тензора деформаций и тензора градиентов деформаций. Далее классические напряжения должны определяться на основе соотношений (5), а градиентные напряжения – с использованием определяющих соотношений одной из упрощенных теорий (11)-(15). Запись граничных условий относительно вектора напряжений на границе отверстия может быть представлена через компоненты классических и градиентных напряжений в следующем виде (формулировку ГТУ в криволинейных системах координат см., например, в [22]):



$r = R$ :

$$\begin{aligned} t_r &= -\tau_{rr} + \frac{\partial \mu_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \mu_{rrr} - 3\mu_{r\theta\theta} - \mu_{\theta\theta r} + \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0, \\ t_\theta &= -\tau_{r\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \mu_{r\theta\theta} + 2\mu_{r\theta r} - 2\mu_{\theta\theta\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Граничные условия для моментных напряжений имеют более простую структуру:

$r = R$ :

$$\begin{aligned} m_r &= \mu_{rrr} = 0, \\ m_\theta &= \mu_{\theta rr} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Граничные условия на бесконечности, с учетом затухания градиентных эффектов, могут быть записаны только относительно классических напряжений в следующем виде:

$r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (48)$$

При записи общего решения для дилатационной и для моментной теории упругости необходимо учитывать, что некоторые из граничных условий относительно градиентных напряжений будут удовлетворяться тривиальным образом (вследствие их отсутствия в этих моделях), а соответствующие константы будут исключаться из структуры общего решения вследствие применения гипотез этих теорий. В частности, в дилатационной теории упругости следует считать, что тождественно равен нулю скалярный потенциал  $\chi \equiv 0$ , а в моментной –  $\psi \equiv 0$ .

В результате, решение задачи сводится к решению системы из 8 алгебраических уравнений, которое легко находится в замкнутом виде, но является достаточно громоздким и поэтому здесь не приводится. Это решение строилось в системе символьных вычислений Wolfram Mathematica.

В следующем разделе представлены примеры результатов расчетов и оценки изменения уровня концентрации напряжений  $\tau_{ij}$  вблизи отверстий различного размера, которое прогнозируется различными упрощенными моделями ГТУ для различных случаев нагружения. Решение для напряжений при этом определяется путем подстановки найденных констант в потенциалы (44), (45), вычисления перемещений (33), деформаций и использования определяющих соотношений (5). Важно отметить, что форма решения в перемещениях для упрощенной теории Афантиса при этом полностью совпадает с той, которая ранее рассматривалась, например, в работе [5], что говорит о том, что предложенная форма записи общего решения (33) оказывается эквивалентной той, которая использовалась ранее в [4, 5, 8], и предполагала использование потенциалов, удовлетворяющих более сложным уравнениям четвертого порядка.

### 2.1.2 Результаты расчетов

В качестве материала рассматривается оргстекло с модулем упругости 3.2 ГПа и коэффициентом Пуассона 0.3. Все последующие результаты будут представлены в терминах параметров концентрации, поэтому значение модуля Юнга материала, вообще говоря, является не принципиальным. Распределение нормированных значений напряжений  $\tau_{ij}/\bar{t}$  и деформаций  $\hat{\varepsilon}_{ij} = E\varepsilon_{ij}/(\bar{t}(1 - \nu^2))$  определяется только коэффициентом Пуассона материала и отношением радиуса отверстия к масштабному параметру материала  $\frac{R}{l}$ .

В решениях ГТУ, так же, как и в классическом решении для задачи Кирша, нормальные напряжения  $\tau_{\theta\theta}$  принимают максимальные значения на границе отверстия в точке  $\theta = \pi/2$  [26]. Максимальная концентрация этих напряжений в классическом решении при одноосном растяжении составляет 3, при двухосном 2, а при чистом сдвиге 4. Зависимость максимального уровня концентрации этих напряжений от нормированной величины радиуса отверстия, рассчитанная в ГТУ, представлена на рис. 2.

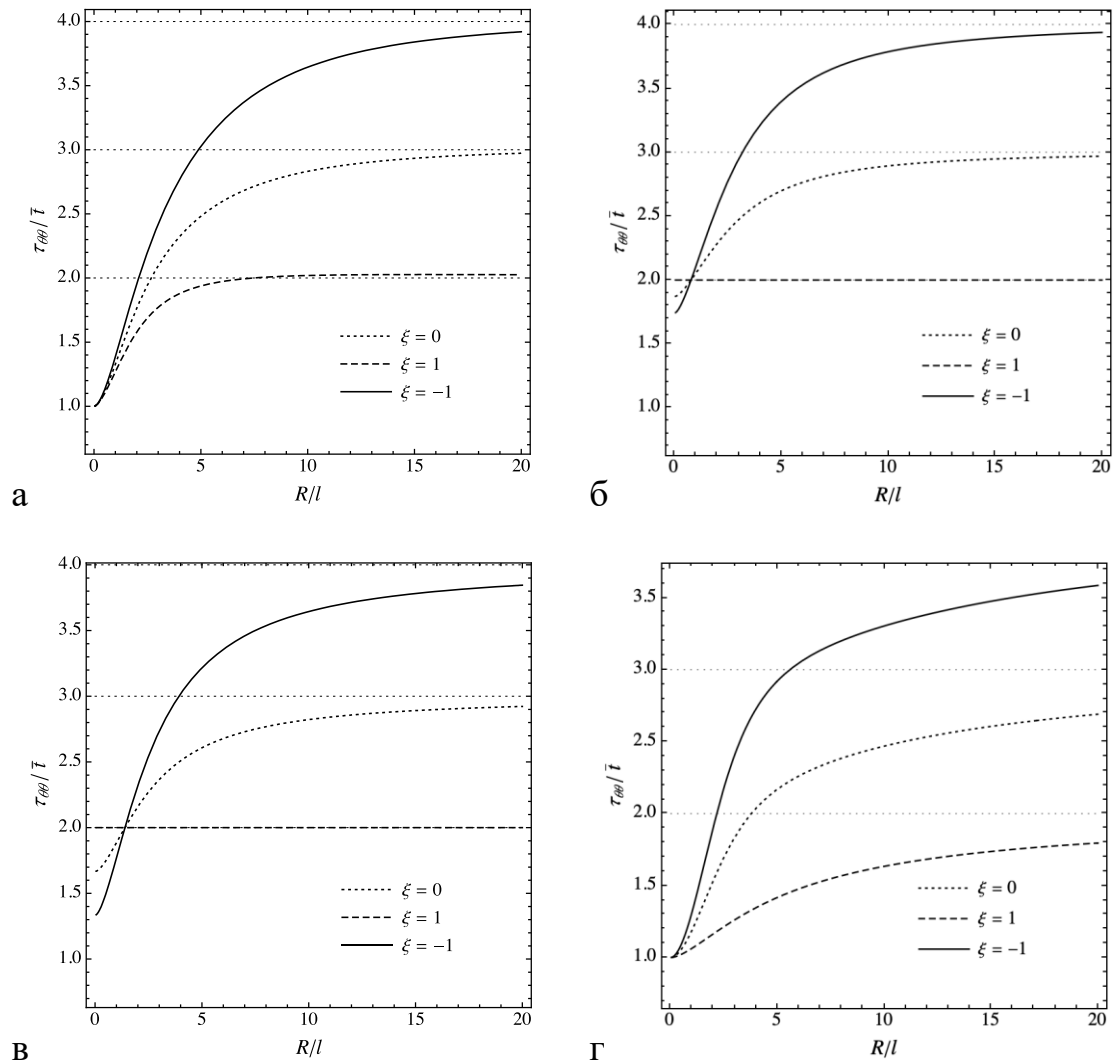


Рис. 2. Зависимость максимальной концентрации напряжений  $\tau_{\theta\theta}$  от размера отверстия в упрощенной ГТУ (а), в моментной теории упругости (б), в дилатационной теории (в) и в полностью симметричной теории (г).

На рисунке 2 видно, что упрощенная (рис. 2 а) и полностью симметричная (рис. 2 г) теории прогнозируют снижение уровня концентрации во всех испытаниях, при этом в последней реализуется значительно более протяженный масштабный эффект, то есть неклассические уровни концентрации напряжений возникают даже вблизи относительно крупных отверстий. Наблюдение такого рода эффектов в экспериментах может позволить, в частности, сделать выбор между этими двумя теориями. Также заметим, что в указанных теориях для случая очень малых отверстий уровень концентрации выходит на единичное значение, то есть прогнозируется, что

микроскопические отверстия, размер которых меньше масштабного параметра материала, не будут снижать прочности образца.

Спецификой дилатационной (рис. 2 б) и моментной (рис. 2 в) теорий является то, что при двухосном растяжении в этих теориях не возникает масштабного эффекта. Поэтому, если в эксперименте наблюдается присутствие размерных эффектов для уровня концентрации напряжений при сдвиге и растяжении образцов с отверстиями, но эти эффекты не возникают при двухосном растяжении, то это говорит о том, что рассматриваемый материал должен быть описан моделью типа дилатационной или моментной теории упругости. Выбор между этими двумя теориями может быть сделан с учетом реализующегося в них различного минимального уровня концентрации напряжений для малых отверстий. Обе теории прогнозируют, что даже для очень малых размеров отверстий на их границе будет реализовываться повышенный уровень напряжений по сравнению с заданной на бесконечности однородной нагрузкой. Снижение концентрации в дилатационной теории оказывается несколько более значительным, по сравнению с моментной теорией.

Для рассматриваемого модельного материала (оргстекло) более естественным может быть определение не момента разрушения с учетом максимальной концентрации напряжений, представленной на рис. 2, но момента начала образования пластических деформаций. Например, вариант такого описания экспериментов для металлических образцов с трещинами был представлен в работе [23]. В случае возникновения пластических эффектов, целесообразно оценивать изменение уровня концентрации эквивалентных напряжений по Мизесу. Соответствующие результаты расчетов представлены на рис. 3.

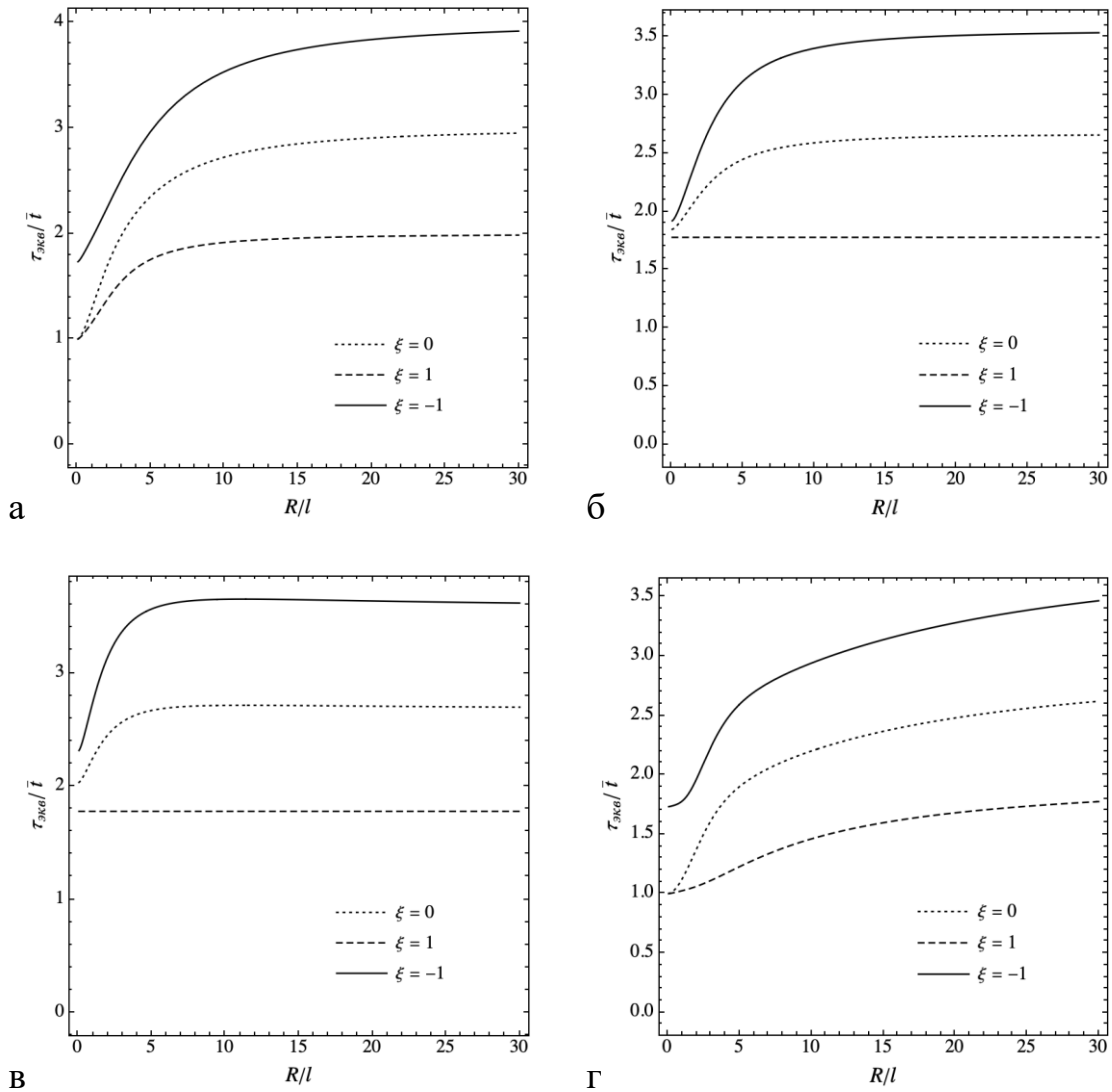


Рис. 3. Зависимость максимальной концентрации эквивалентных напряжений по Мизесу от размера отверстия в упрощенной ГТУ (а), в моментной теории упругости (б), в дилатационной теории (в) и в полностью симметричной теории (г).

В зависимостях на рис. 3 возникают аналогичные эффекты, как и на рис.2. В частности, упрощенная и полностью симметричная теория отличаются диапазоном реализующегося масштабного эффекта, а моментная и дилатационная теории не содержат размерной зависимости для случая двухосного растяжения. В дилатационной теории (рис. 3 в) в отличие от других теорий реализуется наиболее короткий масштабный эффект для эквивалентных напряжений – только в области очень малых размеров отверстий.

Представленные зависимости на рис. 2 и рис. 3 могут быть использованы для обработки результатов измерения разрушающих нагрузок образцов материалов, содержащих отверстия различного диаметра. Для однопараметрической теории Айфантиса было показано [15], что масштабный параметр  $l$  в этой теории по своему порядку для различных материалов имеет значения, близкие к известной оценке для протяженности пластической зоны (или для критического размера трещины):  $l \sim \frac{1}{2\pi} \frac{K_{Ic}^2}{\bar{\sigma}^2}$ , где  $K_{Ic}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений,  $\bar{\sigma}$  – предел прочности или предел текучести материала. На этих рисунках рассмотрен диапазон диаметров от 0.1 до 15 масштабных параметров, что в абсолютных значениях для рассматриваемого материала соответствует, приблизительно, диапазону от 0.02 до 2.7 мм, причем существенное влияние размера отверстий на уровень концентрации напряжений прогнозируется при диаметрах  $< 1$  мм.

Оценка начала образования пластических деформаций по диаграммам, получаемым в процессе макроскопических испытаний, может быть недостаточно чувствительным методом, для выявления размерных эффектов и дальнейшей идентификации масштабных параметров ГТУ. Альтернативным подходом может быть непосредственное измерение поля деформаций вблизи отверстий. Такие измерения в настоящее время могут быть выполнены с использованием метода корреляции цифровых изображений, для реализации которого на микроуровне необходимо использование микроскопии или, по крайней мере, техники макросъемки (см., например, [79]).

На рис. 4 и 5 представлен прогнозируемый характер распределения деформаций вблизи отверстий, который найден на основе различных упрощенных моделей градиентной теории упругости для условий одноосного растяжения (рис. 4) и сдвига (рис. 5). Рисунки представлены для компонент тензора деформаций в безразмерных декартовых координатах, нормированных на величину радиуса отверстия, который в решении ГТУ задавался равным двум масштабным параметрам (то есть диаметр отверстия равен  $4l$ ). Классические решения для рассматриваемых задач представлены на рис. 4 а и 5 а. На остальных рисунках показаны прогнозы, которые дают упрощенные градиентные теории. Из представленных результатов

видно, что поля деформаций вблизи отверстий значительно различаются, как между классическим решением и решениями градиентной теории упругости, так и между различными упрощенными градиентными моделями. При этом изменяется не только уровень максимальных и минимальных деформаций, но и характер их распределения. Наиболее сильные изменения возникают в решении полностью симметричной модели (рис. 4 д, 5 д), в которой возникает самый низкий уровень концентрации максимальных деформаций и специфические картины распределения полей. Минимальные изменения по сравнению с классическим решением дает дилатационная теория (рис. 4 г, 5 г), хотя и в этой теории уровень максимальных деформаций существенно отличается от классического.

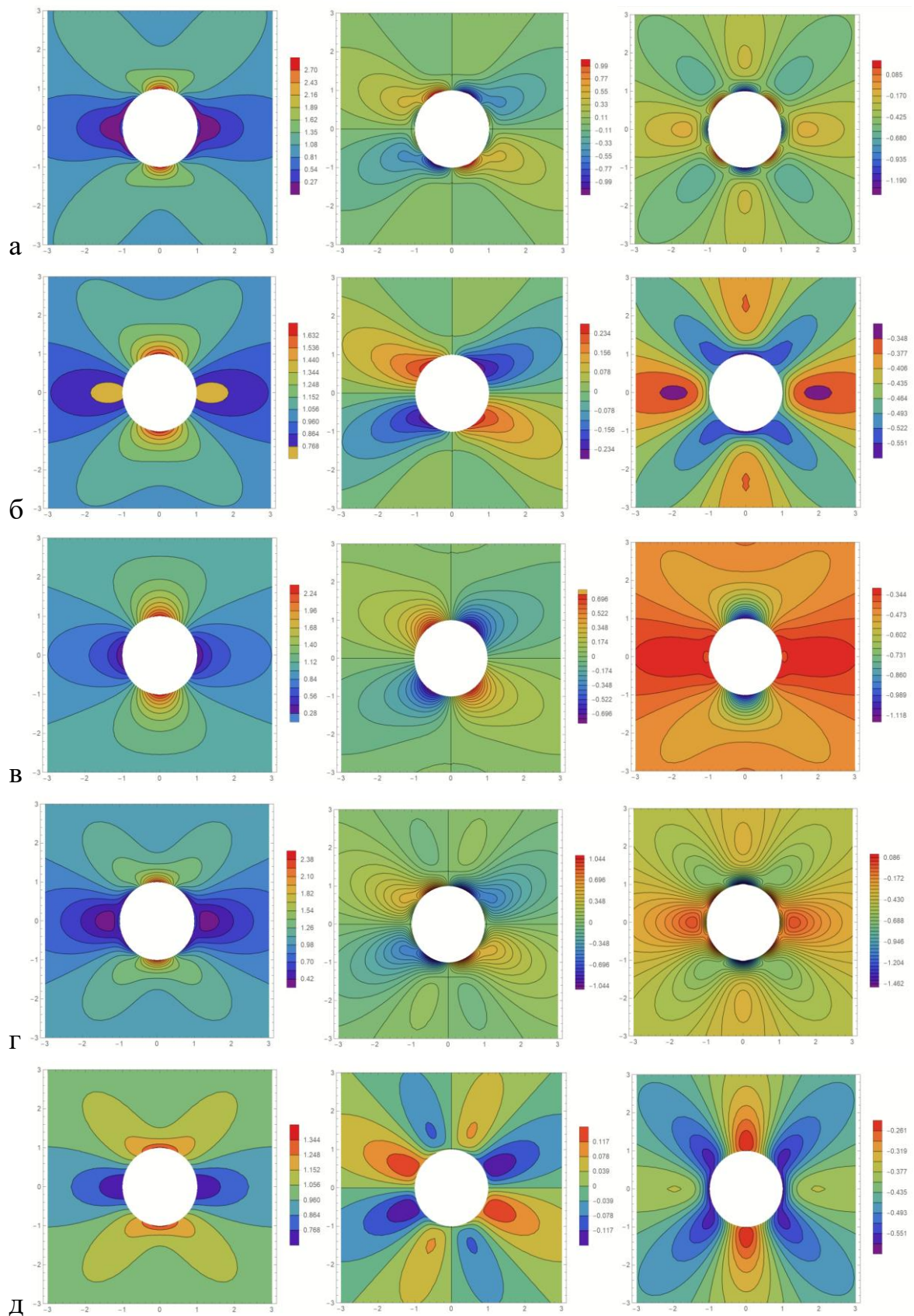


Рис. 4. Деформации  $\hat{\varepsilon}_{xx}$  (слева),  $\hat{\varepsilon}_{xy}$  (по центру),  $\hat{\varepsilon}_{yy}$  (справа), вблизи отверстия в классическом решении (а) в упрощенной (б), в моментной (в), в дилатационной (г) и в полностью симметричной (д) ГТУ. Растяжение.



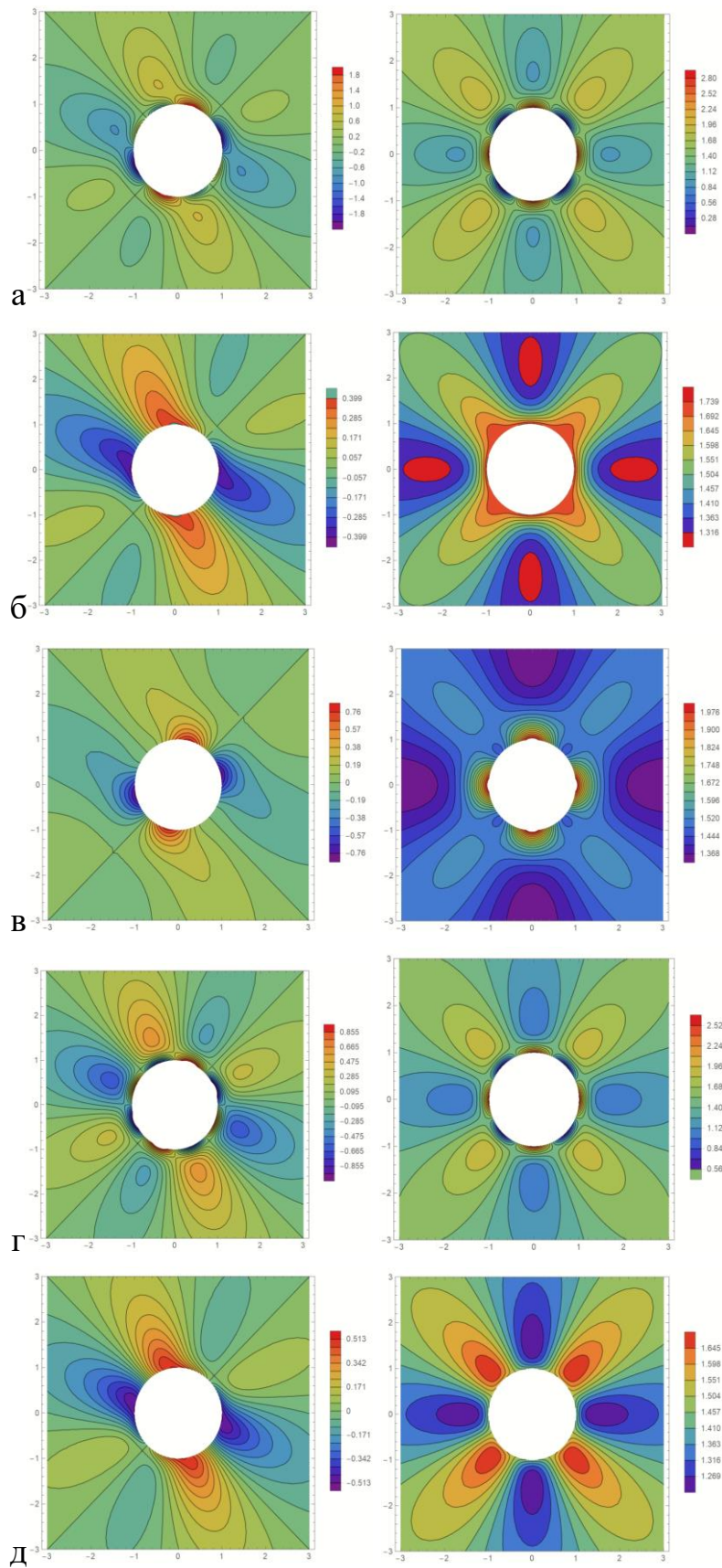


Рис. 5. Деформации  $\hat{\varepsilon}_{xx}$  (слева) и  $\hat{\varepsilon}_{xy}$  (справа), вблизи отверстия в классическом решении (а) и в упрощенной (б), в моментной (в), в дилатационной (г) и в полностью симметричной (д) ГТУ. Сдвиг под углом 45 градусов.

В целом, все представленные на рис. 4 и 5 решения ГТУ содержат более однородные поля деформаций вблизи отверстия, по сравнению с классическим решением (то есть с меньшими градиентами и большей протяженностью краевых эффектов). Прогнозируемый характер отклонения распределения деформаций от классического решения вполне может быть измерен экспериментально (при реализации этого отклонения). В частности, для уровня средних деформаций  $\sim 0.3\%$ , прогнозируемая максимальная концентрация, например, в упрощенной ГТУ при одноосном растяжении (рис. 4 (б)), снижается почти в 2 раза по сравнению с классическим решением. То есть прогнозируемый уровень деформаций вблизи отверстия составляет  $\sim 0.5\%$  вместо  $\sim 0.9\%$ . При этом прогнозируемая амплитуда изменения деформаций в рассматриваемой области, имеющей размер  $\sim 1 \times 1$  мм, составляет  $\sim 0.25\%$ . Измерение такого уровня деформаций с достаточно высоким уровнем точности является вполне достижимой задачей при использовании современных методов бесконтактной тензометрии.

Заметим, что важность решаемой задачи определяется не только возможностью уточненного описания прочности образцов, ослабленных малоразмерными отверстиями. Важность рассматриваемой задачи также заключается в том, что предлагаемый вид испытаний образцов с малоразмерными отверстиями является дополнительным подходом к проверке значений масштабных параметров ГТУ для конкретных типов материалов. Эти параметры, при описании прочности образцов с трещинами или любыми другими видами концентраторов, играют ключевую роль в оценке уровня разрушающих нагрузок в ГТУ. Поэтому разработка дополнительных методов идентификации масштабных параметров, помимо испытания образцов с трещинами [15-17], позволит, во-первых, проверить, что эти параметры являются материальными константами, не зависящими от вида нагружения и геометрии образцов, и, во-вторых, их идентифицированные значения могут быть использованы в расчетах для изделий с произвольной геометрией, содержащей другие виды концентраторов.

## 2.2 Задача о трещине

### 2.2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача построения асимптотического решения для напряженно-деформированного состояния упругого тела с полубесконечной трещиной в рамках задачи плоской деформации градиентной теории упругости.

Для решения будут использованы представления для классического векторного потенциала  $\Phi$  и для скалярных потенциалов  $\psi$  и  $\chi$ , полученные из (34) и (35): для случая симметричного нагружения (относительно  $\theta = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Phi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} + b_n r^{k-1}) \cos k\theta, \\ \Phi_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1}) \sin k\theta, \\ \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n I_k(\bar{r})) \cos k\theta, \\ \chi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n I_k(\bar{r})) \cos k\theta\end{aligned}\tag{49}$$

и для случая антисимметричного нагружения:

$$\begin{aligned}\Phi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} + b_n r^{k-1}) \sin k\theta, \\ \Phi_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^{k+1} - b_n r^{k-1}) \cos k\theta, \\ \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n I_k(\bar{r})) \sin k\theta, \\ \chi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n I_k(\bar{r})) \sin k\theta\end{aligned}\tag{50}$$

Коэффициент  $n$  в рядах (49), (50), вообще говоря, может принимать любое целое значение ( $n \in \mathbb{Z}$ ), хотя возможность существования слагаемых с отрицательным  $n$  должна быть тщательно проверена в рамках ГТУ с учетом условий регулярности поля перемещений и ограниченной плотности энергии деформации. Примечательно, что в рамках классической теории упругости члены отрицательного порядка ( $r^{-1}$  и т. д.) могут возникать только во внешних областях, не содержащих начала системы координат  $r = 0$ . В ГТУ некоторые члены отрицательного порядка могут возникать даже для ограниченных областей, хотя непосредственно в нуле, они и исчезают из-за совмещения классической и градиентной частей решения с одинаковой асимптотикой. Такое решение в рамках ГТУ для обобщенной задачи Фламана было представлено в [48]. Аналогичный анализ задач о трещинах представлен в следующем подразделе, где показано, что некоторые члены отрицательного дробного порядка необходимы для получения градиентных асимптотических решений для полей вершины трещины на основе общего решения в форме Папковича-Нейбера.

Заметим, что в рядах (49), (50) в определения потенциалов  $\psi$  и  $\chi$  не входят модифицированные функции Бесселя второго рода ( $K_k(\bar{r})$ ), а также исключены классические члены с логарифмическим поведением (типа  $\ln r \cos \theta$  и т. д.), поскольку эти члены возникают только в задачах с внешними областями и с сосредоточенными нагрузками (см., например, классическое решение задачи Фламана или его обобщение в рамках ГТУ [48] и т. д.)

Подставив (49), (50) в определение поля перемещений (33) можно получить следующий вид общего решения ГТУ для задач плоской деформации в ограниченных областях:

для случая симметричного нагружения (относительно  $\theta = 0$ ):

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( u_r^{(n)} \right) \cos k\theta, \quad (51)$$

$$u_{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{\theta}^{(n)}) \sin k\theta$$

и для случая антисимметричного нагружения:

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_r^{(n)}) \sin k\theta, \quad (52)$$

$$u_{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{\theta}^{(n)}) \cos k\theta$$

где члены ряда определяются выражениями, зависящими от радиальной координаты:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= \hat{a}_n \beta_n r^{k+1} + \hat{b}_n r^{k-1} + \hat{c}_n I_{k+1}(\bar{r}) + \hat{d}_n I_{k-1}(\bar{r}), \\ u_{\theta}^{(n)} &= \hat{a}_n r^{k+1} - \hat{b}_n r^{k-1} + \hat{c}_n I_{k+1}(\bar{r}) - \hat{d}_n I_{k-1}(\bar{r}), \end{aligned} \quad (53)$$

$$(k = n + \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z})$$

здесь  $\bar{r} = \frac{r}{l}$  – нормированная радиальная координата, использованы переопределённые значения констант  $\hat{a}_n = (1 + \kappa k)a_n$ ,  $\hat{b}_n = (1 - \kappa k)b_n$ ,  $\hat{c}_n = (c_n - \kappa d_n)/(2l)$ ,  $\hat{d}_n = (c_n + \kappa d_n)/(2l)$  и введен коэффициент:

$$\beta_n = \frac{1 - \kappa(k + 2)}{1 + \kappa k} = \frac{1 - \kappa(n + \xi + 2)}{1 + \kappa(n + \xi)} \quad (54)$$

Решение в форме Папковича-Нейбера для перемещений (51)-(53) для плоских задач ГТУ обобщает классические представления для полей перемещений в областях с острыми углами и трещинами для членов дробного порядка.

Используя разложение в ряд модифицированных функций Бесселя, определение  $n$ -го члена решения в форме Папковича-Нейбера (53) можно записать в следующем виде:

$$u_{r,\theta}^{(n)} = \hat{a}_n \beta_n r^{k+1} + \hat{b}_n r^{k-1} + \hat{c}_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n+1),s} r^{k+1+2s} + \hat{d}_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n-1),s} r^{k-1+2s} \quad (55)$$

$$u_{\theta}^{(n)} = \hat{a}_n r^{k+1} - \hat{b}_n r^{k-1} + \hat{c}_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n+1),s} r^{k+1+2s} - \hat{d}_n \sum_{s=0}^{\infty} g_{(n-1),s} r^{k-1+2s}$$

где введены обозначения для коэффициентов в рядах для функций Бесселя:

$$g_{n,s} = \left( (2l)^{n+\xi+2s} s! \Gamma(n + \xi + s + 1) \right)^{-1} \quad (56)$$

Видно, что классическая и градиентная части решения в форме Папковича-Нейбера (55) имеют члены с одинаковым асимптотическим поведением вблизи  $r = 0$ . А именно, функция  $r^{k-1}$  возникает во втором ряду с константами  $\hat{d}_n$  (при  $s = 0$ ), а функция  $r^{k+1}$  возникает как в ряду с константами  $\hat{c}_n$  (при  $s = 0$ ), так и с константами  $\hat{d}_n$  (при  $s = 1$ ). Из анализа представления рядов (55) следует, что в рамках ГТУ всегда есть возможность избежать классических членов дробного порядка ( $r^{k+1}$  и  $r^{k-1}$ ,  $k = n + \xi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), предполагая следующие соотношения между константами  $\hat{a}_n$ ,  $\hat{b}_n$ ,  $\hat{c}_n$  и  $\hat{d}_n$ :

$$\text{для } r^{k+1}: \begin{cases} \hat{a}_n = -\frac{2g_{(n+1),0}}{1 + \beta_n} \hat{c}_n \\ \hat{b}_n = \frac{(\beta_n - 1)g_{(n+1),0}}{(\beta_n + 1)g_{(n-1),0}} \hat{c}_n = \frac{1}{4\nu - 3} \hat{c}_n \end{cases} \quad (57)$$

$$\text{для } r^{k-1}: \hat{b}_n = -\hat{d}_n g_{(n-1),0} \quad (58)$$

Применение соотношений (57), (58) приводит к уменьшению числа независимых амплитуд в (55) так, что для данного  $n$ -го члена решения в форме Папковича-Нейбера остается только градиентная часть повышенного порядка. Заметим, что эти соотношения (57), (58) обеспечивают исчезновение классических асимптотик дробного порядка (особенностей) при  $r = 0$  не только для поля перемещений, но и во всех его градиентах, включая и градиенты деформаций и т. д. В то же время для регуляризации асимптотики целого порядка необходимо включить функции  $K_k(\bar{r})$  в общее решение в форме Папковича-Нейбера, хотя такие задачи в настоящей работе не рассматриваются.

Представление в форме Папковича-Нейбера для компонент тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  (5) можно найти, используя (51)-(53) и стандартные соотношения. В полярных координатах эти представления будут иметь следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \tau_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)$$

Тогда решение в рядах для ненулевых компонент тензора градиентных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$  в рамках рассматриваемой упрощенной градиентной теории можно найти с помощью соотношений (6), которые в полярных координатах принимают следующий вид [56]:

$$\begin{aligned} \mu_{rrr} &= l^2 \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}, \quad \mu_{r\theta r} = l^2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}, \quad \mu_{\theta\theta r} = l^2 \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r}, \quad \mu_{rr\theta} = \frac{l^2}{r} \left( \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} - 2\tau_{r\theta} \right), \\ \mu_{r\theta\theta} &= \frac{l^2}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \right), \quad \mu_{r\theta\theta} = \frac{l^2}{r} \left( \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\tau_{r\theta} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

Определения для заданного вектора напряжений (7.2) и моментных напряжений (7.3) на плоской поверхности  $\theta = \text{const}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta$  (граница трещины) имеют вид [56]:

$$t_r = \tau_{\theta r} - \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \mu_{rr\theta} - \frac{1}{r} \mu_{r\theta r} + \frac{1}{r} \mu_{\theta\theta\theta}, \quad (62)$$

$$t_\theta = \tau_{\theta\theta} - \frac{\partial \mu_{\theta r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \mu_{\theta\theta r} - \frac{2}{r} \mu_{\theta r\theta}$$

$$m_r = \mu_{r\theta\theta}, \quad m_\theta = \mu_{\theta\theta\theta} \quad (63)$$

Асимптотическое решение в малой области вблизи вершины трещины ищем в полярных координатах  $(r, \theta)$  с началом в вершине трещины (рис. 6). Рассмотрим граничные условия отсутствия нагрузки на поверхности трещины:

$$\theta = \pm\pi: t_r = 0, t_\theta = 0, m_r = 0, m_\theta = 0 \quad (64)$$

определения которых даны в (62), (63).

Асимптотические решения таких задач в рамках ГТУ ранее были получены с использованием метода Вильямса, т.е. с использованием представления с разделением переменных вида  $\mathbf{u} = r^p \mathbf{U}(\theta)$  с неизвестным порядком  $p$  и угловым распределением  $\mathbf{U}(\theta)$  [56, 57]. Было установлено, что в рамках ГТУ регуляризованное решение реализуется с асимптотическим поведением  $\sim r^{3/2}$  вместо классического решения  $\sim r^{1/2}$ .

Для построения решения с использованием рассматриваемого подхода требуется выбрать члены  $u_r^{(n)}$ ,  $u_\theta^{(n)}$  и дробный коэффициент  $\xi$  в рядах (51)–(53). В отличие от метода Вильямса, использование общего решения в форме Папковича-Нейбера (51)–(53) обеспечивает автоматическое выполнение уравнений равновесия упрощённой градиентной теории упругости (8). Поэтому все последующие рассуждения сводятся к анализу граничных условий на берегах трещины (64) и дополнительного условия ограниченности полной энергии деформации.

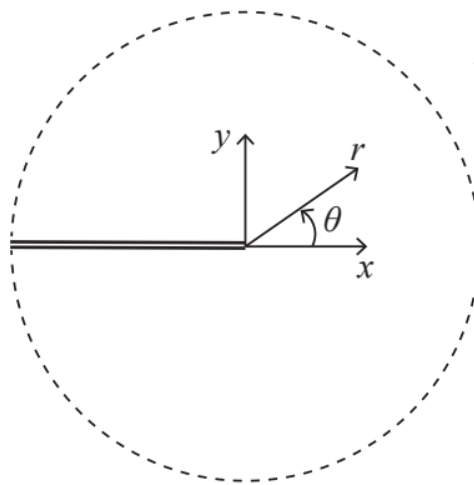


Рис. 6. Декартовые и полярные координаты для задачи об определении напряженно-деформированного состояния в вершине трещины.



Отметим, что граничные условия ГТУ на острых кромках (ребрах) в решении для трещины не используются, поскольку эти условия становятся тривиальными в вершине прямой трещины, а других ребер в рассматриваемых областях не будет [56].

### 2.2.2 Классическое асимптотическое решение

В качестве иллюстративного примера покажем, что классическое решение Вестергаарда-Вильямса-Ирвина для полей в вершине трещины можно получить, используя представленную форму решения в форме Папковича-Нейбера (51)–(53). Это можно сделать, пренебрегая градиентными потенциалами  $\varphi$ ,  $\chi$  в решении в форме Папковича-Нейбера (32), т.е. полагая, что  $\hat{c}_n = c_n = 0$  и  $\hat{d}_n = d_n = 0$  в (51), (53), так что  $\varphi \equiv 0, \chi \equiv 0$  [80].

Классическое асимптотическое решение для поля перемещений вокруг вершины трещины содержит члены  $\sim r^{1/2}$ . Эти члены можно найти в рядах (51)–(53), считая  $n = \pm 1$  и используя дробный коэффициент  $\xi = 1/2$  (так что дробный множитель  $k = n + \xi$  принимает значения  $-1/2$  и  $3/2$ ).

Следовательно, для симметричного нагружения (51), (53) имеем:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^{(-1)} \cos \frac{\theta}{2} + u_r^{(1)} \cos \frac{3\theta}{2} = r^{1/2} \left( a_{-1} \frac{3\kappa - 2}{\kappa - 2} \cos \frac{\theta}{2} + b_1 \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= -u_\theta^{(-1)} \sin \frac{\theta}{2} + u_\theta^{(1)} \sin \frac{3\theta}{2} = -r^{1/2} \left( a_{-1} \sin \frac{\theta}{2} + b_1 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

и для антисимметричного нагружения (52), (53):

$$\begin{aligned} u_r &= -u_\theta^{(-1)} \sin \frac{\theta}{2} + u_\theta^{(1)} \sin \frac{3\theta}{2} = r^{1/2} \left( -a_{-1} \frac{3\kappa - 2}{\kappa - 2} \sin \frac{\theta}{2} + b_1 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= -u_\theta^{(-1)} \cos \frac{\theta}{2} - u_\theta^{(1)} \cos \frac{3\theta}{2} = r^{1/2} \left( -a_{-1} \cos \frac{\theta}{2} + b_1 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

где использованы  $c_1 = d_1 = c_{-1} = d_{-1} = 0$ , поскольку рассматривается классическая теория, а также принято  $b_{-1} = 0$  и  $a_1 = 0$ , чтобы избежать сингулярного члена  $r^{-3/2}$  и члена высокого порядка  $r^{5/2}$ , соответственно.

Хорошо известное классическое решение для трещины моды I (трещина нормального отрыва) можно получить, используя следующие значения коэффициентов в решении в форме Папковича-Нейбера (65):

$$a_{-1} = \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}}(1 + 2\eta), \quad b_1 = -\frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \quad (67)$$

где введено стандартное обозначение для коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$ , а также часто используемый в задачах о трещинах коэффициент Колосова  $\eta = (1 - \kappa)/k = 3 - 4\nu$  [61].

Подставив (67) в (65), получим классическое решение в полярных координатах:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{1/2} \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left( (2\eta - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= r^{1/2} \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left( -(2\eta + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

Аналогично, для антисимметричного нагружения классическое решение задачи о трещине моды II (поперечный сдвиг) можно получить, используя следующие значения констант решения в форме Папковича-Нейбера (66):

$$a_{-1} = \frac{K_{II}}{4\mu\sqrt{2\pi}}(1 + 2\eta), \quad b_1 = \frac{3K_{II}}{4\mu\sqrt{2\pi}} \quad (69)$$

$$c_1 = d_1 = c_{-1} = d_{-1} = b_{-1} = a_1 = 0$$

тогда в полярных координатах получим:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{1/2} \frac{K_{II}}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left( (1 - 2\eta) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= r^{1/2} \frac{K_{II}}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left( -(1 + 2\eta) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Таким образом, классические решения для плоских полей в вершине трещины включены в общее решение в форме Папковича-Нейбера (51)–(53) (без градиентных потенциалов) и связаны с членами порядка  $n = \pm 1$ .

Важно отметить, что классические решения (68), (70) удовлетворяют классическим граничным условиям на берегах трещины по отсутствию напряжений  $\sigma_{r\theta} = 0$  и  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ , однако они не удовлетворяют граничным условиям упрощённой ГТУ об отсутствии нагрузки на поверхности трещины (64) ни тождественно, ни в асимптотическом смысле, поскольку градиентные напряжения  $\mu$  (61), полученные для классических полей (68), (70), становятся сингулярными вокруг вершины трещины и создают соответствующие сингулярные члены в представлении для классических напряжений на поверхности (62). Таким образом, при построении решения в рамках ГТУ необходимо исключить классические поля (68), (70) в целях выполнения условия по ограниченности полной энергии деформации вблизи вершины трещины [56].

### 2.2.3 Асимптотическое решение в рамках упрощенной ГТУ

Теперь воспользуемся представлением в форме Папковича-Нейбера (51)–(53) для восстановления асимптотического решения упрощённой ГТУ для полей в вершине трещины. Подставив  $n$ -й член решения в форме Папковича-Нейбера (53) в определения напряжений (60) и градиентных напряжений (61) и результат в определения для заданных поверхностных нагрузок (62), (63), можно получить систему четырех однородных линейных уравнений относительно коэффициентов общего решения  $a_n, b_n, c_n, d_n$ . Чтобы существовало решение, определитель этой системы должен обращаться в нуль. Можно показать, что полученное собственное уравнение в упрощённой ГТУ имеет вид:

$$R(r, k, \kappa, l) \sin^2 2k\pi = 0 \quad (71)$$

где  $R(r, k, \kappa, l)$  — функция от радиальной координаты  $r$ , дробного порядка  $k$  и констант материала, явная форма которой для краткости не представлена и которая не дает дополнительных корней для этого уравнения.

Соотношение (71) определяет следующие возможные собственные значения дробного порядка  $k = n + \xi$  для членов в решении в форме Папковича-Нейбера:

$$k = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2 \dots \quad (72)$$

тогда порядок  $n$  и дробный индекс  $\xi$  могут принимать значения:

$$n \in \mathbb{Z}, \quad \xi = \frac{1}{2} \text{ или } \xi = 0 \quad (73)$$

Выбор порядка  $n$  для первых членов асимптотического решения следует осуществлять с учетом условия ограниченности полной энергии деформации, которую можно оценить как  $W \sim \int_{\Omega} w r dr$  ( $w$  – плотность энергии деформации (1),  $\Omega$  – малая область вблизи вершины трещины). Далее будет проведён этот анализ отдельно для случаев дробного ( $\xi = \frac{1}{2}$ ) и целого ( $\xi = 0$ ) порядка членов в решении в форме Папковича-Нейбера.

Составляющие асимптотического решения дробного порядка

В общем случае ГТУ наиболее сингулярные члены в плотности энергии деформации зависят от квадратов градиентов деформации, то есть  $w \sim (\nabla \nabla \mathbf{u})^2$  (см. (1)). Поэтому конечные значения полной энергии деформации будут гарантированы, если поле перемещений  $\mathbf{u}$  затухает быстрее, чем  $r^1$  при  $r \rightarrow 0$ . Тогда на основе определения решения в форме Папковича-Нейбера (53) и найденного набора допустимых дробных значений  $k$  (72) можно заметить, что главные члены в решении для перемещений в рамках упрощённой ГТУ должны иметь порядок  $r^{3/2}$ . Этот результат был впервые установлен на основе метода Вильямса в работах [56, 57].

Таким образом, необходимо найти все слагаемые порядка  $\sim r^{3/2}$  в общем решении (51)–(55) при  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\xi = \frac{1}{2}$ . Следует обратить внимание на то, что такие члены возникают только для четных значений  $n$ , поэтому можно начать анализ с  $n = 0$  ( $k = 1/2$ ) и из определения (55) можно получить:

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= (a_0 \beta_0 + c_0 g_{1,0} + d_0 g_{-1,1}) r^{3/2} + (b_0 + d_0 g_{-1,0}) r^{-1/2} + O(r^{7/2}) \\ u_{\theta}^{(0)} &= (a_0 + c_0 g_{1,0} - d_0 g_{-1,1}) r^{3/2} - (b_0 + d_0 g_{-1,0}) r^{-1/2} + O(r^{7/2}) \end{aligned} \quad (74)$$

Далее рассмотрим  $n = 2$  ( $k = 5/2$ ) и из определения (55) получим:

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= (b_2 + d_2 g_{1,0}) r^{3/2} + O(r^{7/2}) \\ u_\theta^{(2)} &= -(b_2 + d_2 g_{1,0}) r^{3/2} + O(r^{7/2}) \end{aligned} \quad (75)$$

Остальные члены более высокого порядка с положительными значениями  $n > 2$  не содержат асимптотики  $r^{3/2}$ . Поэтому теперь нам следует проверить отрицательные значения  $n$ . Рассмотрим  $n = -2$  ( $k = -3/2$ ) и из определения (55) находим:

$$\begin{aligned} u_r^{(-2)} &= (a_{-2} \beta_{-2} + c_{-2} g_{-1,0} + d_{-2} g_{-3,1}) r^{-1/2} + (b_{-2} + d_{-2} g_{-3,0}) r^{-5/2} \\ &\quad + (c_{-2} g_{-1,1} + d_{-2} g_{-3,2}) r^{3/2} + O(r^{7/2}) \\ u_\theta^{(-2)} &= (a_{-2} + c_{-2} g_{-1,0} + d_{-2} g_{-3,1}) r^{-1/2} - (b_{-2} + d_{-2} g_{-3,0}) r^{-5/2} \\ &\quad + (c_{-2} g_{-1,1} - d_{-2} g_{-3,2}) r^{3/2} + O(r^{7/2}) \end{aligned} \quad (76)$$

Видно, что полученные соотношения (74) и (76) содержат сингулярные члены. Чтобы избежать этих членов, можно использовать условия регуляризации (57), (58). А именно, в (74) можно использовать единственное соотношение (58) для  $b_0$ , чтобы исключить функцию  $r^{-1/2}$ . В (75) нужно использовать все три соотношения (57), (58), чтобы определить  $a_{-2}, b_{-2}, d_{-2}$  так, чтобы группы коэффициентов при сингулярных членах  $r^{-1/2}$  и  $r^{-5/2}$  были равны нулю в радиальной и угловой компонентах поля перемещений при  $r = 0$ . В результате можно установить следующие соотношения между константами:

$$\begin{aligned} b_0 &= -g_{-1,0} d_0, \quad a_{-2} = -\frac{2g_{-1,0}}{1+\beta_{-2}} c_{-2}, \\ b_{-2} &= -g_{-3,0} d_{-2}, \quad d_{-2} = -\frac{c_{-2}}{4\nu - 3} \end{aligned} \quad (77)$$

Примечательно, что такая регуляризация будет невозможна для членов отрицательного порядка  $n < -2$  решения в форме Папковича-Нейбера. Например, при  $n = -4$  из (55) можно найти, что компоненты поля перемещений будут

содержать функции  $r^{-9/2}, r^{-5/2}$  и  $r^{-1/2}$  и лишь тривиальный набор констант  $a_{-4} = b_{-4} = c_{-4} = d_{-4} = 0$  позволяет избежать этих особенностей в поле перемещений.

Таким образом, следует исключить все отрицательные члены  $n < -2$  решения в форме Папковича-Нейбера и окончательную форму асимптотического решения для полей вершины трещины в рамках упрощённой ГТУ следует получать в виде комбинации трех членов (74)-(76). Учитывая угловую зависимость решения в представлении в рядах (51) и (52), получаем:

для случая симметричного нагружения:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^{(-2)} \cos \frac{3\theta}{2} + u_r^{(0)} \cos \frac{\theta}{2} + u_r^{(2)} \cos \frac{5\theta}{2}, \\ u_\theta &= -u_\theta^{(-2)} \sin \frac{3\theta}{2} + u_\theta^{(0)} \sin \frac{\theta}{2} + u_\theta^{(2)} \sin \frac{5\theta}{2} \end{aligned} \quad (78)$$

и для случая антисимметричного нагружения:

$$\begin{aligned} u_r &= -u_r^{(-2)} \sin \frac{3\theta}{2} + u_r^{(0)} \sin \frac{\theta}{2} + u_r^{(2)} \sin \frac{5\theta}{2}, \\ u_\theta &= -u_\theta^{(-2)} \cos \frac{3\theta}{2} - u_\theta^{(0)} \cos \frac{\theta}{2} - u_\theta^{(2)} \cos \frac{5\theta}{2} \end{aligned} \quad (79)$$

где члены  $u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}$  ( $n = -2, 0, 2$ ) определяются формулами (74)-(76).

Подставив (74)-(76) в (78) с использованием условий регуляризации (77) и пренебрегая членами высокого порядка  $O(r^{7/2})$ , можно получить следующее решение для симметричного нагружения:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{3/2} \left( (c_{-2}g_{-1,1} + d_{-2}g_{-3,2}) \cos \frac{3\theta}{2} + (a_0\beta_0 + c_0g_{1,0} + d_0g_{-1,1}) \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + (b_2 + d_2g_{1,0}) \cos \frac{5\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} u_\theta &= r^{3/2} \left( -(c_{-2}g_{-1,1} - d_{-2}g_{-3,2}) \sin \frac{3\theta}{2} + (a_0 + c_0g_{1,0} - d_0g_{-1,1}) \sin \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. - (b_2 + d_2g_{1,0}) \sin \frac{5\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

где  $\beta_0$  определяется формулой (54),  $g_{n,s}$  определяется формулой (56),  $c_{-2}, a_0, c_0, d_0, b_2$  и  $d_2$  шесть независимых констант, а  $d_{-2}$  не является независимой и определяется формулой (77).

Полученный теперь результат (80) можно сравнить с известными асимптотическими решениями упрощённой ГТУ Айфантиса, полученными с использованием техники Вильямса. Для задачи о трещине моды I такое решение дается выражением [56]:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{3/2} \left( 3(A_1 - A_2) \frac{11 - 16\nu}{41 - 32\nu} \cos \frac{3\theta}{2} + A_1(3 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + A_2 \cos \frac{5\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= r^{3/2} \left( -3(A_1 - A_2) \frac{13 - 16\nu}{41 - 32\nu} \sin \frac{3\theta}{2} + A_1(9 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} - A_2 \sin \frac{5\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

где  $A_1, A_2$  — два независимых амплитудных множителя, и приведены только члены дробного порядка ( $r^{3/2}$ ), а члены целого порядка ( $r^1$ ) рассматриваются в следующем подразделе 2.2.6.

Вид решения, полученного с использованием потенциалов Папковича-Нейбера (80), можно свести к известному решению (81), используя следующие значения констант:

$$a_0 = (9 - 8\nu) \left( A_1 + \frac{1}{3} g_{-1,1} d_0 \right), \quad c_0 = (4\nu - 3) d_0, \quad b_2 = A_2 - g_{1,0} d_2 \quad (82)$$

$$c_{-2} = 12(A_1 - A_2) l^{3/2} \sqrt{2\pi} \frac{3 - 4\nu}{41 - 32\nu} \quad (83)$$

Три соотношения (82) обеспечивают согласование членов с угловым распределением  $\frac{\theta}{2}$  и  $\frac{5\theta}{2}$  в (80) и (81). Эти соотношения приводят к неединственным определениям пяти констант  $a_0, c_0, d_0, b_2, d_2$  решения в форме Папковича-Нейбера. Например, для упрощения изложения можно использовать  $d_0 = d_2 = 0$ , хотя, в общем случае, эти константы следует находить с учетом членов решения в форме Папковича-Нейбера высокого порядка ( $r^{7/2}$  и т. д.).

Другая ситуация возникает для константы  $c_{-2}$  (83) и связанных с ней членов с распределением  $\frac{3\theta}{2}$ . Равенство коэффициентов при этих членах в (80) и (81) приводит

к переопределенной системе уравнений относительно одной независимой константы  $c_{-2}$ . Тем не менее, приведенное значение  $c_{-2}$  (83) позволяет единственным образом удовлетворить этой системе. Таким образом, возможность получения известного асимптотического решения, полученного ранее методом Вильямса (81), с использованием предложенного подхода на основе представления Папковича-Нейбера (51)-(53) является нетривиальным результатом. Полученное соответствие решений, полученных разными методами, показывает достаточную полноту представления Папковича-Нейбера, включающего в себя и решения задач о трещинах (как следует из построенных решений это требует рассмотрения членов дробного порядка).

Аналогичным образом можно получить решение в рамках упрощённой ГТУ для членов дробного порядка в задаче о трещинах моды II, которое определяется формулой [56]:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{3/2} \left( -3B_2 \frac{11 - 16v}{37 - 32v} \sin \frac{3\theta}{2} + B_1 \sin \frac{\theta}{2} + B_2 \cos \frac{5\theta}{2} \right), \\ u_\theta &= r^{3/2} \left( -3B_2 \frac{13 - 16v}{37 - 32v} \cos \frac{3\theta}{2} - \left( B_1 - B_2 \frac{12}{37 - 32v} \right) \cos \frac{\theta}{2} + B_2 \cos \frac{5\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — две независимые амплитуды антисимметричного асимптотического решения.

Антисимметричное решение в форме Папковича-Нейбера (74)-(76), (79), в котором следует использовать условия регуляризации (77) и исключать члены высокого порядка  $O(r^{7/2})$ , можно привести к виду (84), используя следующие значения констант:

$$\begin{aligned} a_0 &= (9 - 8v) \left( \frac{2}{32v - 37} B_1 + \frac{1}{3} g_{-1,1} d_0 \right), \quad b_2 = B_2 - g_{1,0} d_2, \\ c_0 &= \frac{1}{g_{1,0}} \left( B_1 - B_2 \frac{2(3 - 8v)}{37 - 32v} + \frac{2(4v - 3)}{3} g_{-1,1} d_0 \right) \end{aligned} \quad (85)$$

$$c_{-2} = B_2 l^{3/2} \sqrt{2\pi} \frac{12(3 - 4v)}{37 - 32v} \quad (86)$$



Как и в случае симметричного нагружения, константы  $a_0, c_0, d_0, b_2, d_2$  в (85) связаны с членами с угловым распределением  $\frac{\theta}{2}$  и  $\frac{5\theta}{2}$  в (79). Эти константы не могут быть однозначно определены в рамках проведенного асимптотического анализа, и для простоты изложения можно положить две из них равными нулю (например,  $d_0 = d_2 = 0$ ). При этом константа  $c_{-2}$  (86) используется для обеспечения согласования двух независимых соотношений, возникающих для радиальных и угловых перемещений в условиях с угловым распределением  $\frac{3\theta}{2}$  в (79) и (84). Возможность такого совпадения подтверждает правильность представления решения в форме Папковича-Нейбера (52), (53) для антисимметричной формы деформаций.

Заметим, что решения (81), (84) удовлетворяют уравнениям равновесия упрощённой градиентной теории упругости (8) только в асимптотическом смысле, т. е. для высших производных четвертого порядка, тогда как большей точности можно достичь только с учетом старших членов асимптотического ряда. Напротив, уравнения равновесия упрощённой градиентной теории упругости будут выполняться именно решением в форме Папковича-Нейбера (51)-(53), в котором можно использовать члены с соответствующей периодичностью (78), (79) и соответствующим асимптотическим поведением, обеспечиваемым значениями констант (79), (80), (85), (86). Используя определения напряжений и заданных поверхностных нагрузок (60)–(63), можно показать, что оба решения будут удовлетворять граничным условиям упрощённой ГТУ для заданных классических и моментных напряжений на поверхности (64) с точностью до членов, затухающих при  $r \rightarrow 0$ , таких как  $O(r^{1/2})$ . Указанные особенности асимптотических решений в ГТУ обсуждались ранее в работе [56].

Поле деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и напряжений  $\boldsymbol{\tau}$ , соответствующие перемещениям (78), (81), изменяются как  $r^{1/2}$  вокруг вершины трещины и принимают нулевые значения именно при  $r = 0$ . Очевидно, что этот результат не согласуется с известными решениями, полученными численно [60, 62] и с использованием метода преобразования Фурье [56]. В этих решениях упрощённой ГТУ деформация и напряжение конечны и имеют максимальную концентрацию в вершине трещины.

Присутствие этих неисчезающих полей в вершине трещины невозможно оценить с помощью рядов дробного порядка, хотя они сохраняются в членах целого порядка, которые рассмотрены в следующем подразделе.

Составляющие асимптотического решения целого порядка

Как было установлено в [18, 56, 57], в асимптотическом решении упрощённой ГТУ важно учитывать члены младшего порядка с асимптотическим поведением  $r^1$ . В представлении в форме Папковича-Нейбера (51)-(53) эти слагаемые допустимы (см. (72)) и могут быть получены в предположении  $\xi = 0$ ,  $k = n \in \mathbb{Z}$ . Среди этих слагаемых существует решение, соответствующее однородному деформированному состоянию: которое удовлетворяет уравнениям равновесия (8) и изменяется как  $r^1$  (перемещения) и  $r^0$  (деформации) вблизи вершины трещины. Эти члены низкого порядка не создают градиентов деформаций и, как было показано, они не вносят вклада в скорость высвобождения энергии деформаций [56]. Их можно получить в рамках представления в форме Папковича-Нейбера (55), рассматривая следующие члены при  $n = k = 0$  и  $n = k = 2$ :

для случая симметричного нагружения:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^{(0)} + u_r^{(2)} \cos 2\theta, \\ u_\theta &= u_\theta^{(2)} \sin 2\theta \end{aligned} \tag{87}$$

для случая антисимметричного нагружения:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^{(2)} \sin 2\theta, \\ u_\theta &= -u_\theta^{(0)} - u_\theta^{(2)} \cos 2\theta \end{aligned} \tag{88}$$

где радиальные функции  $u_r^{(n)}$ ,  $u_\theta^{(n)}$  можно получить, используя соотношения (55):

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= b_0 r^{-1} + \frac{2l\beta_0 a_0 + (c_0 + d_0)}{2l} r + O(r^3), \quad u_\theta^{(0)} \equiv 0 \\ u_r^{(2)} &= \left(b_2 + \frac{d_0}{2l}\right) r + O(r^3), \quad u_\theta^{(2)} = -\left(b_2 + \frac{d_0}{2l}\right) r + O(r^3) \end{aligned} \tag{89}$$

Обеспечивая регуляризацию с  $b_0 = 0$  и пренебрегая членами высокого порядка  $O(r^3)$ , можно привести (89) к следующему виду:

$$u_r^{(0)} = C_0 r, \quad u_\theta^{(0)} = 0, \quad u_r^{(2)} = C_1 r, \quad u_\theta^{(2)} = -C_1 r \quad (90)$$

здесь амплитуды  $C_0 = \beta_0 a_0 + \frac{c_0 + d_0}{2l}$  и  $C_1 = b_2 + \frac{d_0}{2l}$  могут быть связаны с однородным полем деформаций при симметричном нагружении ( $\varepsilon_{11} = C_0 + C_1$ ,  $\varepsilon_{22} = C_0 - C_1$ ,  $\varepsilon_{12} = 0$ ) и при антисимметричном нагружении ( $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = C_1$ ) посредством стандартных соотношений между полярными и декартовыми координатами.

Решение (87), (88), (90) совпадает с младшими членами известного асимптотического решения упрощённой ГТУ, полученного ранее в [56]. Примечательно, что эти члены целого порядка удовлетворяют граничным условиям (64) только с точностью до констант ( $\sim r^0$ ), соответствующих однородному напряженному состоянию  $\boldsymbol{\tau}$  (5). Эти исчезающие решения низшего порядка имеют физический смысл обобщенных Т-напряжений (Т-stress) и когезионных сил (на берегах трещины) и должны уравниваться в граничных условиях градиентными напряжениями, которые могут быть учтены только при рассмотрении членов асимптотического решения более высокого порядка (обсуждение см. [18, 57, 62]).

Таким образом, в данном разделе диссертации получено общее решение в форме Папковича-Нейбера для плоских задач упрощённой ГТУ в ограниченных областях. Показано, что, используя функции дробного порядка в этом общем решении, можно получать решения задач с трещинами и, в более общем случае, – с острыми вырезами. В качестве примера показано, что представленная форма общего решения содержит в качестве частного случая известные асимптотические решения упрощённой ГТУ для задач о трещинах с основными членами порядка  $r^{3/2}$  и с членами, соответствующими обобщенному полю Т-напряжений порядка  $r^1$ . Установленный метод можно легко обобщить для вывода членов высокого порядка в задачах о полях в вершине трещины, а также для более общих определяющих уравнений ГТУ.

### 3. Масштабные эффекты в пространственных задачах с концентраторами напряжений

#### 3.1 Задача о сферическом включении

Рассматривается задача об изолированном сферическом включении радиусом  $r_0$  в бесконечной матрице (рис. 7) при заданных на бесконечности однородных граничных условиях (однородных деформациях). В отличие от задачи, рассмотренной в диссертации Соляева Ю.О. [85], где решалась задача для трехфазной модели и определялись эффективные упругие свойства, в данном случае рассматривается задача изолированного включения и проводится анализ реализующейся концентрации напряжений.

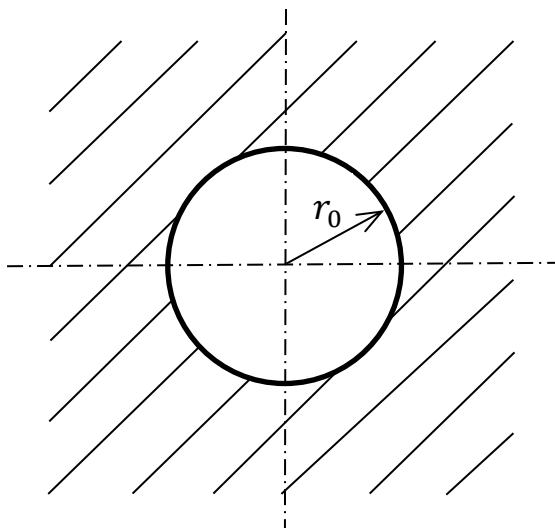


Рис. 7. Рассматриваемая модель сферического включения.

#### 3.1.1 Концентрация напряжений в условиях всестороннего растяжения/сжатия

Рассматривается гидростатическая нагрузка, заданная на бесконечности и обеспечивающая однородное расширение материала матрицы  $\varepsilon^0$ . Ввиду сферической симметрии решение сводится к определению радиальной составляющей поля перемещений и радиальных напряжений и деформаций. Эта задача становится одномерной и может быть решена без использования решения в форме Папковича-

Нейбера (31); однако оно будет использовано, чтобы показать общий подход, который можно использовать в ГТУ.

Классическая часть решения для перемещений задается в соответствии с известным решением классической теории упругости в сферически симметричной задаче (см. [52, 71]):

$$\mathbf{u}_c = \{Ar + Br^{-2}, 0, 0\} \quad (91)$$

здесь  $A$  и  $B$  – неизвестные константы, которые могут быть определены через граничные условия задачи.

Для определения градиентной части общего решения достаточно использовать только первые члены  $n = 0, m = 0$  рядов (37), считая остальные члены равными нулю:

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= a_{0,0} i_0(\bar{r}) + b_{0,0} k_0(\bar{r}), \\ \chi &= c_{0,0} i_0(\bar{r}) + d_{0,0} k_0(\bar{r}), \\ \psi &= e_{0,0} i_0(\bar{r}) + f_{0,0} k_0(\bar{r}) \end{aligned} \quad (92)$$

Подставив (92) в решение ГТУ в форме Папковича-Нейбера (36) можно после упрощений получить выражение для градиентной части перемещений в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g &= \nabla\psi + \nabla \times (r\bar{\chi}e_r) + \nabla \times \nabla \times (r\chi e_r) = \\ &= \{C(\sinh \bar{r} - \bar{r} \cosh \bar{r})r^{-2} + D(1 + \bar{r})e^{-\bar{r}}r^{-2}, 0, 0\} \end{aligned} \quad (93)$$

Для определения поля перемещений внутри включения нужно в (91) и (93) оставить только постоянную часть и члены, затухающие в начале координат ( $r = 0$ ). Для определения поля перемещений в матрице нужно оставить постоянную часть и члены, затухающие на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ). Таким образом, обеспечивая ограниченность решения в начале координат и на бесконечности, получим следующие функции перемещений внутри включения и матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(\text{вкл})} &= \{Ar + C(\sinh \bar{r} - \bar{r} \cosh \bar{r})r^{-2}, 0, 0\} \\ \mathbf{u}^{(\text{матр})} &= \{\varepsilon^0 r + Br^{-2} + D(1 + \bar{r})e^{-\bar{r}}r^{-2}, 0, 0\} \end{aligned} \quad (94)$$

здесь  $\bar{r} = \frac{r}{l}$  – нормированная радиальная координата;

Далее, для нахождения неизвестных констант  $A, B, C, D$  необходимо потребовать выполнение контактных условий на границе раздела включение/матрица и на бесконечности. В градиентной теории к требованию непрерывности на контакте фаз компонент вектора напряжений и вектора перемещений прибавляются требования непрерывности для градиентных напряжений и нормальных градиентов от перемещений. Общее число независимых условий для задачи всестороннего растяжения/сжатия в градиентной теории оказывается равным шести.

Граничные условия на границе раздела включение/матрица имеют вид:

$$u_r^{(\text{вкл})} = u_r^{(\text{матр})}, \varepsilon_{rr}^{(\text{вкл})} = \varepsilon_{rr}^{(\text{матр})}, t_r^{(\text{вкл})} = t_r^{(\text{матр})}, \mu_{rrr}^{(\text{вкл})} = \mu_{rrr}^{(\text{матр})} \quad (95)$$

Граничные условия на бесконечности имеют вид:

$$\varepsilon_{rr}^{(\text{матр})} = \varepsilon^0, \quad \mu_{rrr}^{(\text{матр})} = 0 \quad (96)$$

Подставив выражения для перемещений (94) в (1), получим выражения для радиальных деформаций внутри включения и в матрице:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(\text{вкл})} &= A + \frac{2Clr \cosh \bar{r} - C(2l^2 + r^2) \sinh \bar{r}}{l^2 r^3} \\ \varepsilon_{rr}^{(\text{матр})} &= \varepsilon^0 - \frac{2B + De^{-\bar{r}}(\bar{r}^2 + 2\bar{r} + r^2 l^{-2})}{r^3} \end{aligned} \quad (97)$$

Затем, подставив выражения для радиальных деформаций (97) в закон Гука (5) можно получить выражения для классических радиальных напряжений внутри включения и в матрице:

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{(\text{вкл})} &= A(3\lambda + 2\mu) + \frac{4Cl\mu r \cosh \bar{r} - C(4l^2\mu + (\lambda + 2\mu)r^2) \sinh \bar{r}}{l^2 r^3} \\ \tau_{rr}^{(\text{матр})} &= -4B\mu + \varepsilon^0(3\lambda + 2\mu) - \frac{De^{-\bar{r}}(4l^2\mu + 4l\mu r + (\lambda + 2\mu)r^2)}{l^2 r^3} \end{aligned} \quad (98)$$

Выражения для радиальных градиентных напряжений в рамках упрощённой ГТУ внутри включения и в матрице можно получить подстановкой (98) в (11):

$$\begin{aligned} \mu_{rrr}^{(\text{вкл})} = \frac{1}{lr^4} C(-r(12l^2\mu + (\lambda + 2\mu)r^2) \cosh \bar{r} \\ + l(12l^2\mu + (\lambda + 6\mu)r^2) \sinh \bar{r}) \end{aligned} \quad (99)$$

$$\mu_{rrr}^{(\text{матр})} = \frac{1}{lr^4} \left( 12Bl^3\mu + De^{-\bar{r}}(12\mu(l^3 + l^2r) + l(\lambda + 6\mu)r^2 + (\lambda + 2\mu)r^3) \right)$$

Выражения для радиальной компоненты вектора напряжений на поверхности сферы можно получить, подставив выражения для классических и градиентных радиальных напряжений (98) и (99) в постановку краевой задачи ГТУ (7):

$$\begin{aligned} t_r^{(\text{вкл})} = A(3\lambda + 2\mu) + C \left( \frac{24l\mu}{r^4} - \frac{2\lambda}{lr^2} \right) \cosh \bar{r} \\ + \frac{1}{r^5} 2C(\lambda r^2 - 4\mu(3l^2 + r^2)) \sinh \bar{r} \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} t_r^{(\text{матр})} = \varepsilon^0(3\lambda + 2\mu) - 4B\mu(6l^2r^{-5} + r^3) \\ + 2De^{-\bar{r}}(-12l^2\mu r^{-5} - 12l\mu r^{-4} + (\lambda - 4\mu)r^{-3} + \lambda l^{-1}r^{-2}) \end{aligned}$$

Используя (94), (97), (99), (100) в (95) получаем систему четырех алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных  $A, B, C, D$ , которая решалась аналитически в системе Wolfram Mathematica. При этом условия на не бесконечности (96) выполняются автоматически вследствие выбранного вида решения (94). Примеры результатов расчетов представлены в разделе 3.1.3.

### 3.1.2 Концентрация напряжений в условиях чистого сдвига

Рассматривается задача о включении в бесконечной матрице (см. рис. 7) в условиях чистого сдвига. В декартовой системе координат перемещения на бесконечности имеют вид:

$$r \rightarrow \infty: \quad u_1^{(\text{матр})} = \gamma x_1, \quad u_2^{(\text{матр})} = -\gamma x_2, \quad u_3^{(\text{матр})} = 0 \quad (101)$$

где  $\gamma$  — однородная деформация сдвига в плоскости  $x_1x_2$ .

Используя формулы перехода от декартовых координат в сферические из (101) получим:

$$\begin{aligned}
r \rightarrow \infty: \quad u_r^{(\text{матр})} &= \gamma r \sin^2 \theta \cos 2\phi, \\
u_\theta^{(\text{матр})} &= -\gamma r \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\
u_\phi^{(\text{матр})} &= -\gamma r \sin \theta \sin 2\phi
\end{aligned} \tag{102}$$

Общее решение для классической части поля перемещений в условиях чистого сдвига, известное из классической теории упругости, имеет вид [71]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_c = \{ & \left( Ar - \frac{3\lambda}{\mu} Br^3 + \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu} Cr^{-2} - 3Dr^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \\
& \left( Ar - \frac{5\lambda + 7\mu}{\mu} Br^3 + 2Cr^{-2} - 2Dr^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\
& - \left( Ar - \frac{5\lambda + 7\mu}{\mu} Br^3 + 2Cr^{-2} - 2Dr^{-4} \right) \sin \theta \sin 2\phi \}
\end{aligned} \tag{103}$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  классические параметры Ламе.

Градиентную часть общего решения можно получить из рядов (37), оставив члены  $n = 2, m = 2$  и предполагая, что остальные коэффициенты имеют нулевые значения:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left( a_{2,2} i_2(\bar{r}) + b_{2,2} k_2(\bar{r}) \right) e^{2i\phi} \sin^2 \theta, \\
\chi &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left( c_{2,2} i_2(\bar{r}) + d_{2,2} k_2(\bar{r}) \right) e^{2i\phi} \sin^2 \theta, \\
\psi &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left( e_{2,2} i_2(\bar{r}) + f_{2,2} k_2(\bar{r}) \right) e^{2i\phi} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{104}$$

Чтобы обеспечить соответствующую угловую зависимость решения для граничного условия (102), необходимо в (104) положить  $a_{2,2} = b_{2,2} = 0$  и поэтому  $\bar{\chi} = 0$ . После подстановки (104) в (36), переопределения констант и упрощений можно получить следующий вид градиентной части общего решения:



$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_g = & \left\{ \sum_{k=1}^2 (E_k(R_{k1} \sinh \bar{r}_k - R_{k2} \cosh \bar{r}_k) + F_k R_{k3} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \right. \\
& \sum_{k=1}^2 (E_k(R_{k4} \sinh \bar{r}_k - R_{k5} \cosh \bar{r}_k) + F_k R_{k6} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \quad (105) \\
& \left. \sum_{k=1}^2 -(E_k(R_{k4} \sinh \bar{r}_k - R_{k5} \cosh \bar{r}_k) + F_k R_{k6} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \sin \theta \sin 2\phi \right\}
\end{aligned}$$

где  $E_k, F_k$  ( $k = 1, 2$ ) — неизвестные константы, стоящие перед членами, стремящимися к нулю в начале системы координат  $r = 0$  и на бесконечности  $r \rightarrow \infty$ , соответственно;  $\bar{r}_k = \frac{r}{l_k}$  — нормированная радиальная координата;  $R_{kn} = R_{kn}(r, l_k)$  — полиномиальные функции радиальной координаты, коэффициенты которых зависят только от масштабного параметра:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 4l_1 r^2 + 9l_1^3, & R_{12} &= r^3 + 9l_1^2 r, & R_{13} &= R_{11} + R_{12}, \\
R_{14} &= -2l_1 r^2 - 6l_1^3, & R_{15} &= -6l_1^2 r, & R_{16} &= R_{14} + R_{15}, \\
R_{21} &= -6l_2^2 r^2 - 18l_2^4, & R_{22} &= -18l_2^3 r, & R_{23} &= -R_{21} - R_{22}, \\
R_{24} &= 6l_2^2 r^2 + 12l_2^4, & R_{25} &= 2l_2 r^3 + 12l_2^3 r, & R_{26} &= -R_{24} - R_{25}
\end{aligned} \quad (106)$$

В результате общее решение для функций перемещений можно представить как сумму классической и градиентной частей (103) и (105). Исключая сингулярные части общего решения в центре включения и на бесконечности, можно найти перемещения во включении и матрице:

$$\begin{aligned}
u_r^{(\text{вкл})} &= \left( A_1 r - \frac{3\lambda_1}{\mu_1} B_1 r^3 \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^2 (E_{1k}(R_{k1} \sinh \bar{r}_k - R_{k2} \cosh \bar{r}_k)) r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad (107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(\text{вкл})} &= \left( A_1 r - \frac{5\lambda_1 + 7\mu_1}{\mu_1} B_1 r^3 \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^2 (E_{1k}(R_{k4} \sinh \bar{r}_k - R_{k5} \cosh \bar{r}_k)) r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\
u_r^{(\text{матр})} &= \left( \gamma r + \frac{3\lambda_2 + 5\mu_2}{\mu_2} C_2 r^{-2} + 3D_2 r^{-4} \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^2 (F_{2k} R_{k3} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \\
u_{\theta}^{(\text{матр})} &= \left( \gamma r + 2C_2 r^{-2} - 2D_2 r^{-4} \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^2 (F_{2k} R_{k6} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi
\end{aligned}$$

где нормированная радиальная координата оценивается внутри соответствующей  $n$ -ой фазы  $\bar{r}_k = \frac{r}{l_k^{(n)}}$  ( $n=1,2$ ); а перемещения в азимутальном направлении не являются независимыми функциями и определяются как  $u_{\phi}^{(n)} = -u_{\theta}^{(n)} \tan 2\phi / \cos \theta$ , ( $n = 1,2$ ).

В (107) имеем восемь неизвестных констант:  $A_1, B_1, C_2, D_2, E_{11}, E_{12}, F_{21}, F_{22}$ . Их можно определить из условий непрерывности на границе включение/матрица. В случае чистого сдвига все компоненты напряжений и градиентных напряжений будут ненулевыми, и для определения условий непрерывности следует использовать общий вид граничных условий (7). В классической задаче условия непрерывности задаются по отношению к компонентам вектора напряжений на поверхности  $t_r = \tau_{rr}, t_{\theta} = \tau_{r\theta}, t_{\phi} = \tau_{r\phi}$  и перемещениям  $u_r, u_{\theta}, u_{\phi}$ , из которых только четыре являются независимыми. Условия непрерывности в градиентной теории включают обобщенный вариант упомянутых условий для перемещений и вектора напряжений на поверхности и дополнительные условия для градиентных напряжений и для градиента перемещений в направлении нормали к контактной поверхности. Общее количество независимых условий непрерывности в градиентной теории равно восьми:

$$u_r^{(\text{вкл})} = u_r^{(\text{матр})}, u_\theta^{(\text{вкл})} = u_\theta^{(\text{матр})}, \frac{\partial u_r^{(\text{вкл})}}{\partial r} = \frac{\partial u_r^{(\text{матр})}}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta^{(\text{вкл})}}{\partial r} = \frac{\partial u_\theta^{(\text{матр})}}{\partial r}, \quad (108)$$

$$t_r^{(\text{вкл})} = t_r^{(\text{матр})}, t_\theta^{(\text{вкл})} = t_\theta^{(\text{матр})}, \mu_{rrr}^{(\text{вкл})} = \mu_{rrr}^{(\text{матр})}, \mu_{\theta rr}^{(\text{вкл})} = \mu_{\theta rr}^{(\text{матр})}$$

где компоненты вектора напряжений на поверхности определены следующим образом:

$$t_r^{(k)} = \tau_{rr}^{(k)} - \frac{\partial \mu_{rrr}^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \mu_{rr\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \mu_{rr\phi}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mu_{r\phi r}^{(k)}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \left( 3\mu_{r\phi\phi}^{(k)} + \mu_{\phi\phi r}^{(k)} + 3\mu_{r\theta\theta}^{(k)} + \mu_{\theta\theta r}^{(k)} - \mu_{rr\theta}^{(k)} \cot \theta \right) \quad (109)$$

$$t_\theta^{(k)} = \tau_{\theta r}^{(k)} - \frac{\partial \mu_{\theta rr}^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \mu_{\theta r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \mu_{\theta r\phi}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mu_{\theta\phi r}^{(k)}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \left( 2\mu_{\theta\theta\theta}^{(k)} + 2\mu_{\theta\phi\phi}^{(k)} - \mu_{rr\theta}^{(k)} + \cot \theta \left( \mu_{r\phi\phi}^{(k)} + \mu_{\phi\phi r}^{(k)} - \mu_{r\theta\theta}^{(k)} - \mu_{\theta\theta r}^{(k)} \right) \right)$$

Подстановка решения (107) в систему граничных условий (108) позволяет получить систему алгебраических уравнения для нахождения всех неизвестных коэффициентов. Решение этой системы выполнялось в системе Wolfram Mathematica. Примеры вычислений представлены в следующем подразделе.

### 3.1.3 Результаты расчетов

Далее приведены результаты аналитических решений для задач гидростатического давления и чистого сдвига в рамках решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера. В качестве материала рассматривается пример композита, состоящего из матрицы со сферическими включениями, в котором отношение модуля упругости материала включения к модулю упругости матрицы  $\frac{E^{(\text{вкл})}}{E^{(\text{матр})}} = 100$ . Коэффициент Пуассона материала включения  $\nu^{(\text{вкл})} = 0.3$ , а материала матрицы  $\nu^{(\text{матр})} = 0.35$ . Значения деформаций, заданных на бесконечности в рассматриваемых задачах, составляло 1%.

На рисунках 8 и 9 приведены результаты аналитического решения задач гидростатического давления и чистого сдвига, соответственно. Результаты приведены при равных значениях масштабного параметра для включения и матрицы  $l^{(\text{вкл})} = l^{(\text{матр})} = l$ . Значения масштабного параметра варьируются в диапазоне от  $\frac{r_0}{l} = 2$  (малоразмерные включения и наиболее сильные градиентные эффекты) до  $\frac{r_0}{l} = 100$  (крупные включения и незначительные градиентные эффекты, что означает, что это почти классическое решение линейной теории упругости).

На рис. 10 приведены результаты расчета при разных значениях масштабного параметра для включения и матрицы. Рассмотрены варианты, когда значения масштабного параметра для включения и матрицы равны  $\frac{r_0}{l^{(\text{вкл})}} = \frac{r_0}{l^{(\text{матр})}} = 2$ , и когда значение масштабного параметра для включения или для матрицы на порядок меньше, т.е.  $\frac{r_0}{l^{(\text{вкл})}} = 2$ ,  $\frac{r_0}{l^{(\text{матр})}} = 20$  или  $\frac{r_0}{l^{(\text{вкл})}} = 20$ ,  $\frac{r_0}{l^{(\text{матр})}} = 2$ .

На рис. 11 показаны максимальные концентрации радиальных напряжений  $\tau_{rr}$  в зависимости от размера включения  $\frac{r_0}{l}$  для задач гидростатического давления (а) и чистого сдвига (б). На рис. 12 показаны максимальные концентрации касательных напряжения  $\tau_{r\theta}$  (а) и максимальные концентрации эквивалентных напряжений по Мизесу  $\tau_J$  (б) для задачи чистого сдвига в зависимости от значения масштабного параметра  $\frac{r_0}{l}$ . На рис. 11 и рис. 12 принято  $l^{(\text{вкл})} = l^{(\text{матр})} = l$ , и  $\tau_{rr0}$ ,  $\tau_{r\theta0}$  и  $\tau_{J0}$  – значения радиальных напряжений, касательных напряжений и эквивалентных напряжений по Мизесу, возникающих на бесконечности, соответственно.

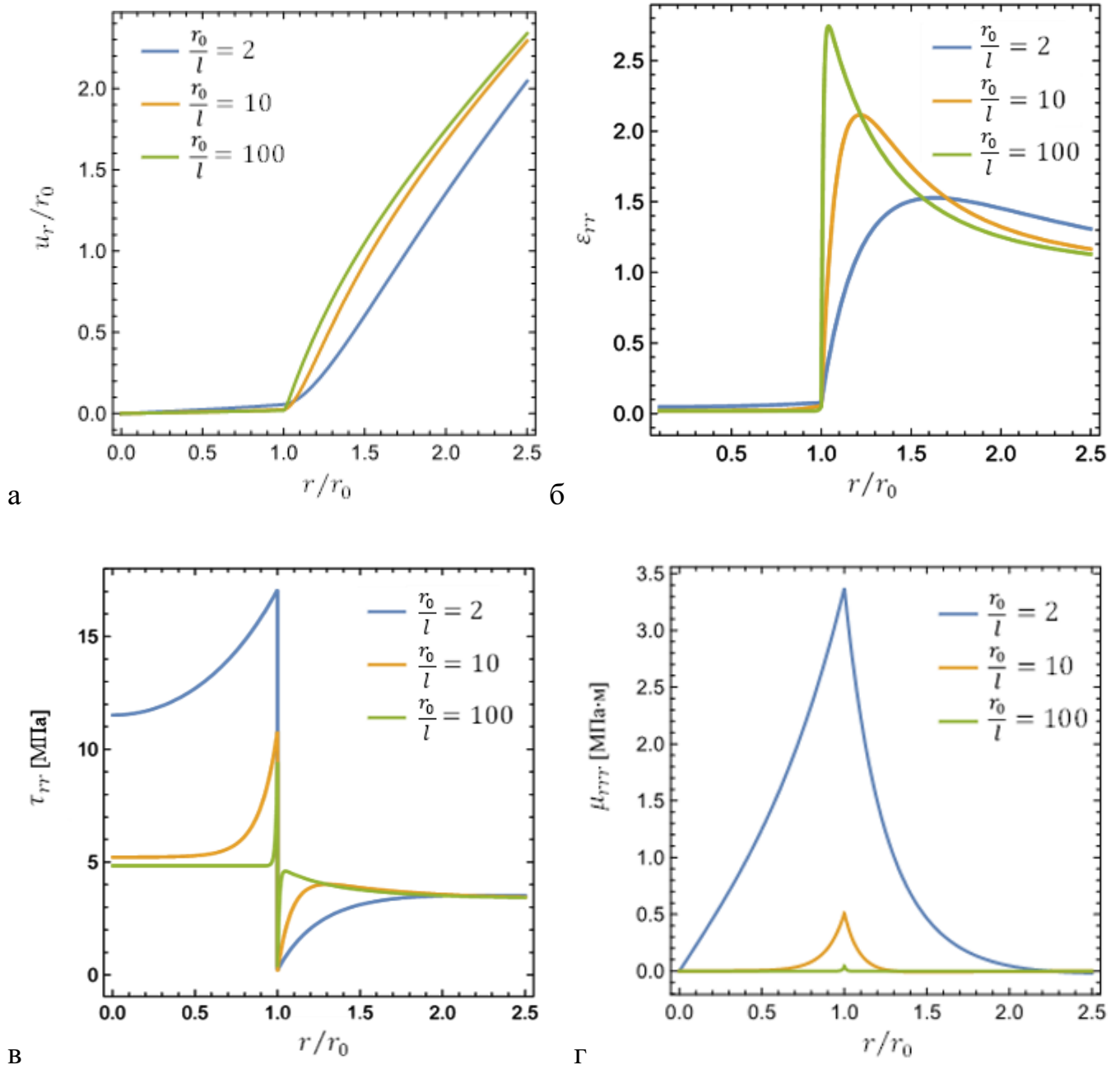


Рис. 8. Результаты решения для случая нагружения **гидростатическим давлением** для различных размеров включений  $\frac{r_0}{l}$ : нормированные радиальные перемещения  $\frac{u_r}{r_0}$  (а), радиальные деформации  $\epsilon_{rr}$  (б), радиальные напряжения  $\tau_{rr}$  (в) и радиальные градиентные напряжения  $\mu_{rrr}$  (г).

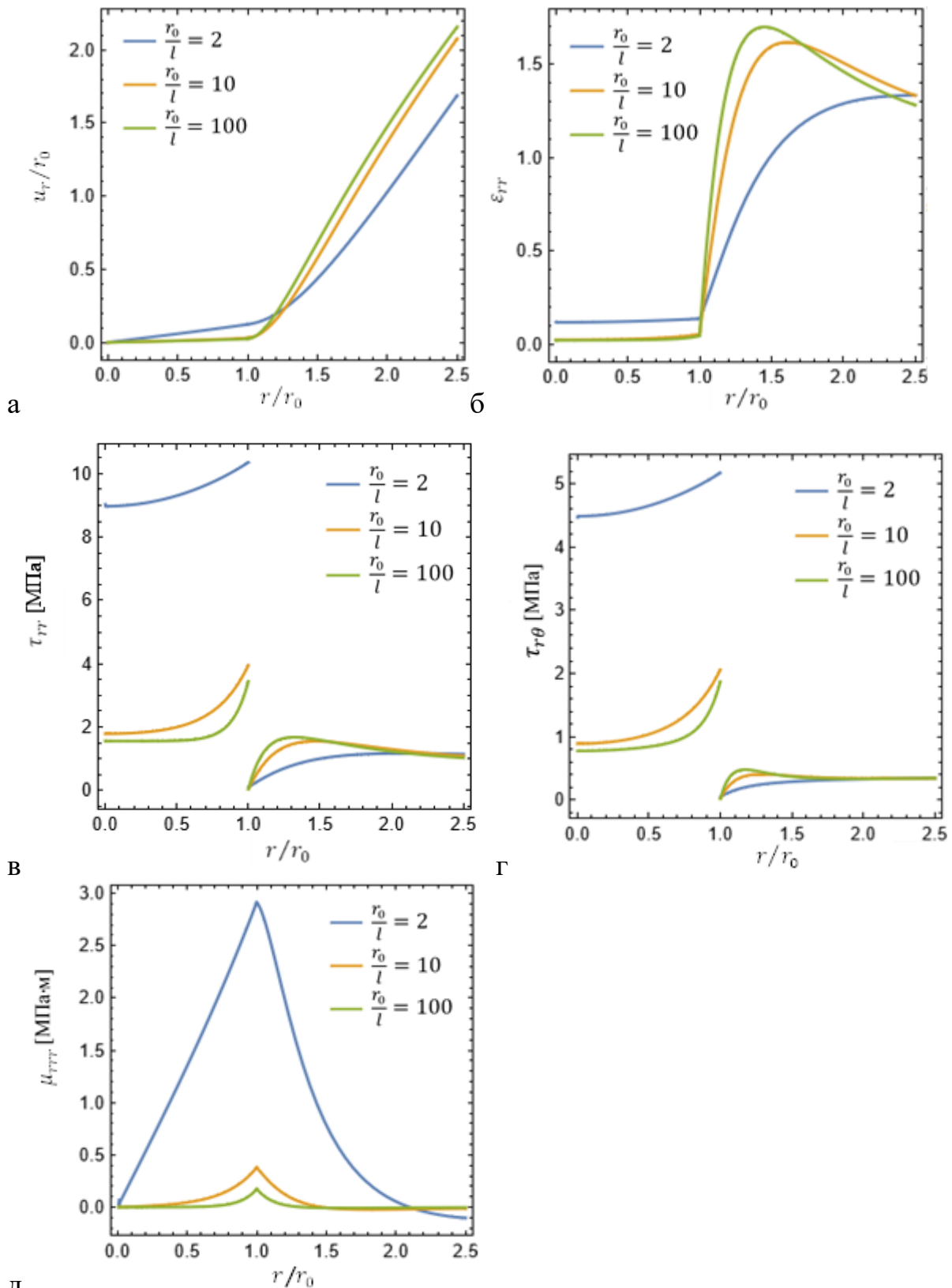


Рис. 9. Результаты решения для случая **чистого сдвига** для различных размеров включений  $\frac{r_0}{l}$ : нормированные радиальные перемещения  $\frac{u_r}{r_0}$  (а), радиальные деформации  $\varepsilon_{rr}$  (б), радиальные напряжения  $\tau_{rr}$  (в), касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  (г) и радиальные градиентные напряжения  $\mu_{rrr}$  (д).

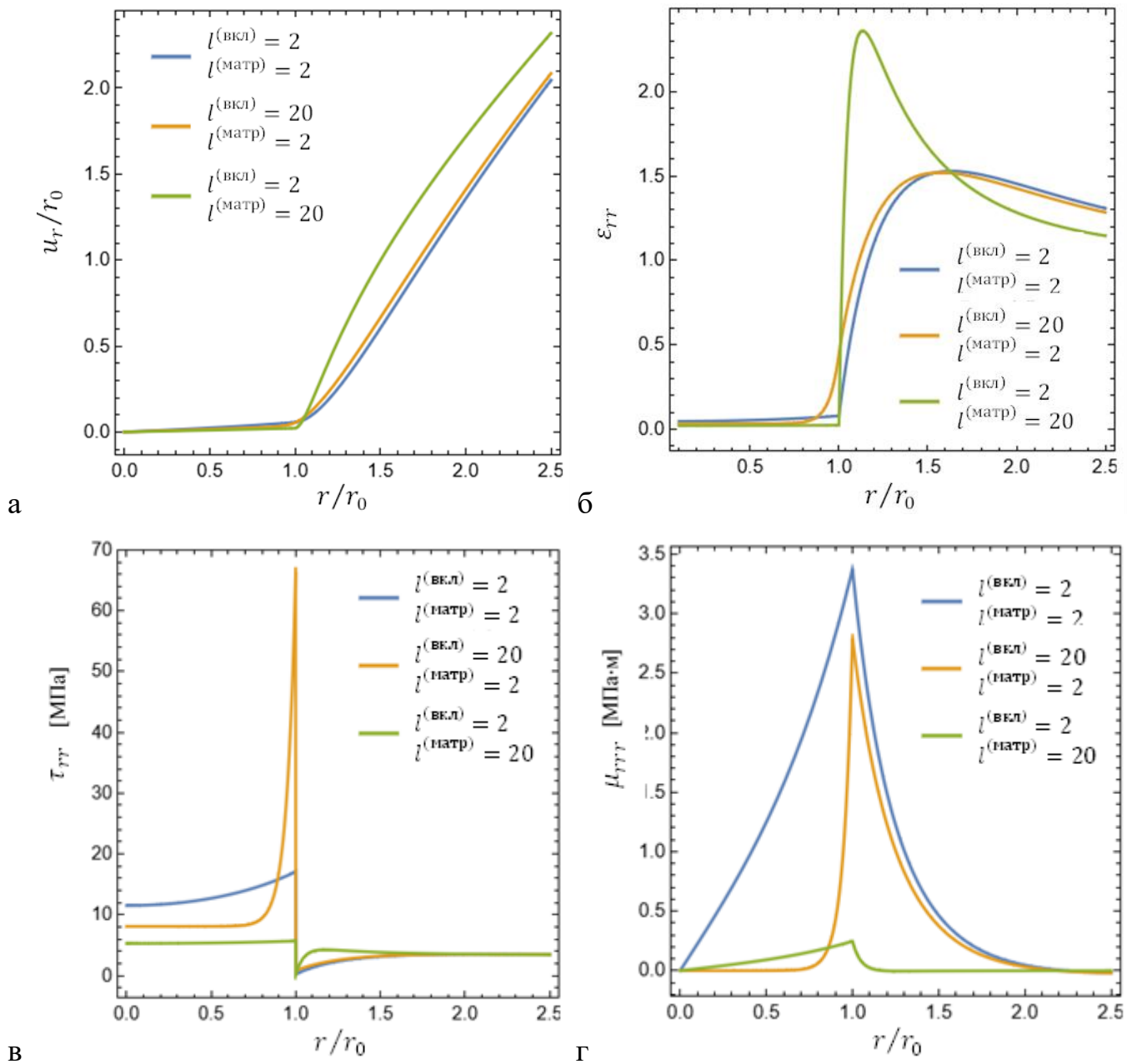
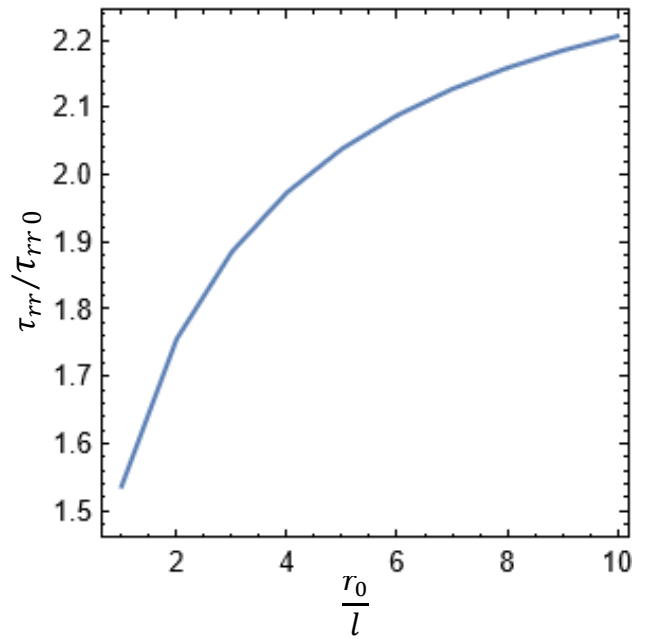
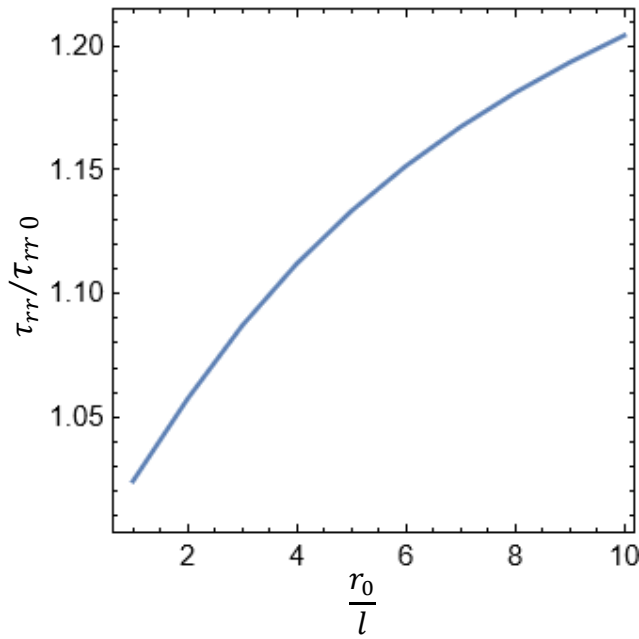


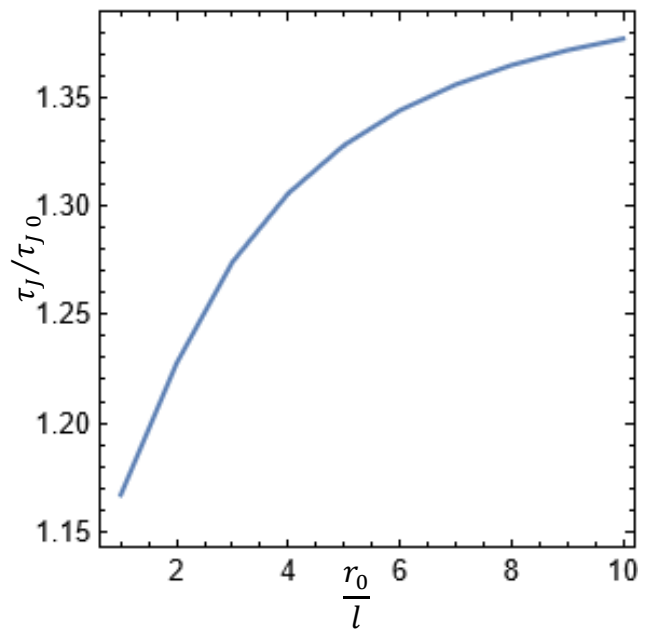
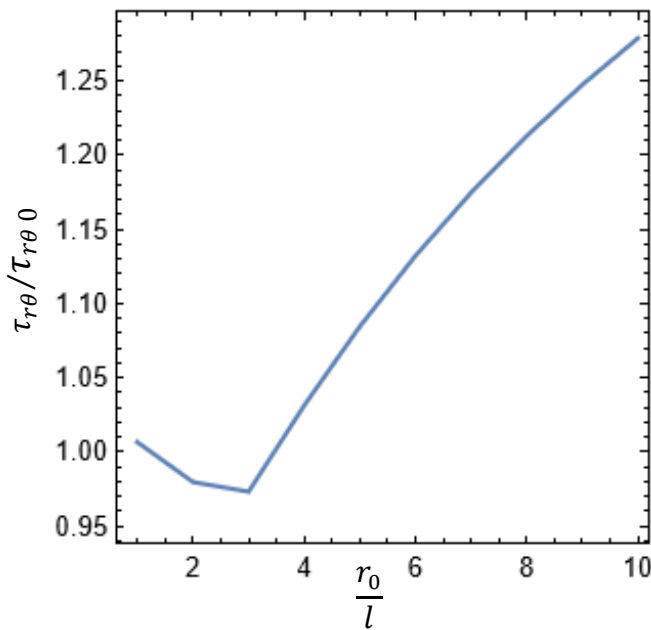
Рис. 10. Результаты решения для случая **гидростатического давления** для различных значений масштабного параметра включения  $l^{(\text{вкл})}$  и матрицы  $l^{(\text{матр})}$ : нормированные радиальные перемещения  $\frac{u_r}{r_0}$  (а), радиальные деформации  $\varepsilon_{rr}$  (б), радиальные напряжения Коши  $\tau_{rr}$  (в) и радиальные градиентные напряжения  $\mu_{rrr}$  (г).



а

б

Рис. 11. Максимальные концентрации радиальных напряжений  $\tau_{rr}$  в зависимости от значения размера включения  $\frac{r_0}{l}$  для задачи **гидростатического давления** (а) и задачи **чистого сдвига** (б).



а

б

Рис. 12. Максимальные концентрации касательных напряжений  $\tau_{r\theta}$  (а) и эквивалентных напряжений по Мизесу  $\tau_I$  (б) для задачи **чистого сдвига** в зависимости от размера включения  $\frac{r_0}{l}$ .



Иллюстрации к аналитическому решению для задачи чистого сдвига приведено на рис. 13 и 14. Двумерные контурные графики представлены для рассматриваемой нагрузки, заданной в виде (101), которая обеспечивает состояние чистого сдвига в матрице (на бесконечности) на плоскостях  $\varphi = \pm \pi/4$ . Распределения полей найдены для значения масштабного параметра  $\frac{r_0}{l} = 2$  и  $\frac{r_0}{l} = 10$ . В случае более крупных включений максимум деформации в матрице локализуется вблизи границы включения (рис. 13 г). Можно отметить, что в классическом решении этот максимум локализован именно на границе раздела, где сохраняется разрыв поля деформаций. В градиентном решении поле деформаций непрерывно меняется в направлении нормали к границе раздела, так что максимум деформации матрицы смещается вдаль от включения (рис. 13 в), а на границе раздела фаз деформации матрицы и включения имеют один порядок. Этот эффект известен в ГТУ как «эффект пограничного слоя», при котором в решении в фазе матрицы возникают зоны сниженных деформаций вокруг включения [29, 84]. Поля напряжений и деформаций Коши для крупных включений практически однородны внутри включения (рис. 13 г, рис. 14 б), тогда как в мелких включениях эти поля непостоянны и возрастают по сравнению с классическим решением (рис. 13 в, рис. 14 а). Эффект «пограничного слоя» во включениях лучше виден на распределении поля напряжений в виде красной области на границе раздела (рис. 14 а). Градиентные напряжения имеют практически нулевые значения в случае крупных включений (рис. 14 г), и их концентрация возникает вокруг границы раздела для включений малого размера (рис. 14 в).

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что перераспределение нагрузки от матрицы к включению реализуется в случае включений малого размера. Это приводит к повышению эффективных упругих свойств дисперсных композитов, наполненных включениями малого размера, а также к тому, что снижается концентрация напряжений и деформаций в матрице, что может приводить и к повышению общей прочности таких материалов. Такие эффекты хорошо известны из экспериментов для некоторых классов материалов [86], и как следует из представленных расчетов, они могут быть описаны на основе решений ГТУ.

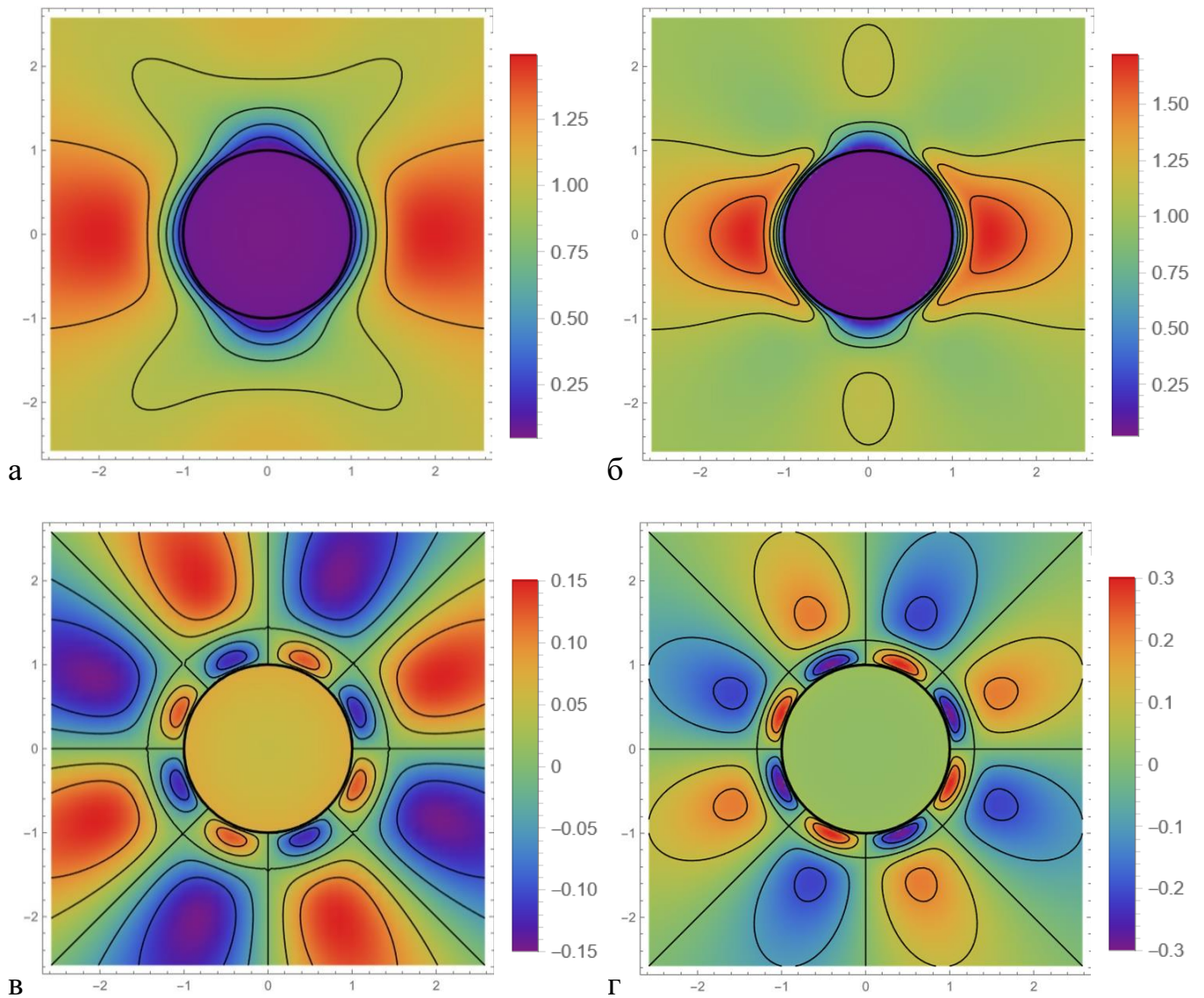


Рис. 13. Распределение полей радиальных деформаций  $\epsilon_{rr}$  для значения масштабного параметра  $\frac{r_0}{l} = 2$  (а) и  $\frac{r_0}{l} = 10$  (б) и полей сдвиговых деформаций  $\epsilon_{r\theta}$  для значения масштабного параметра  $\frac{r_0}{l} = 2$  (в) и  $\frac{r_0}{l} = 10$  (г) для задачи чистого сдвига.

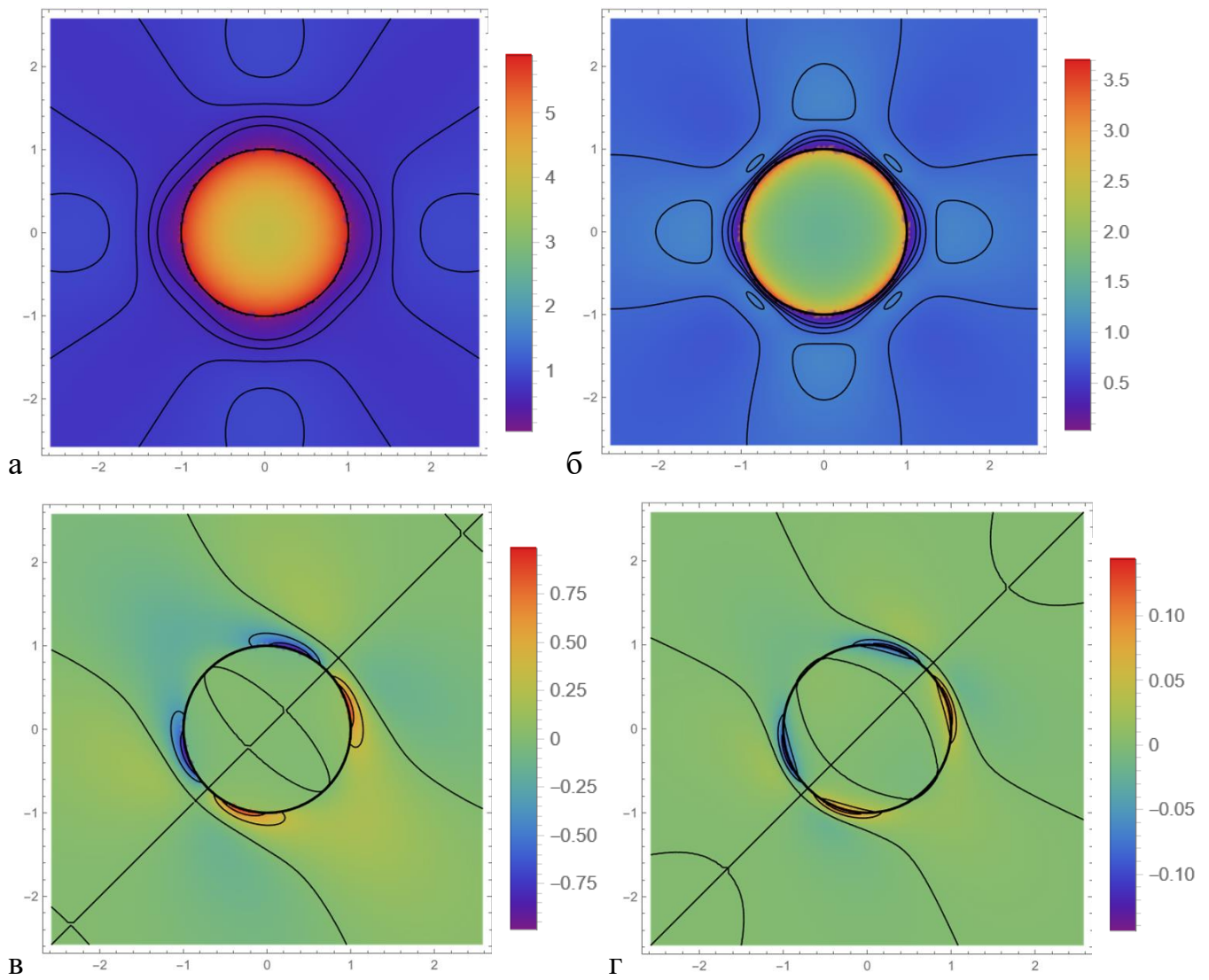


Рис. 14. Распределение полей касательных напряжений  $\tau_{r\theta}$  [Мпа] для значений масштабного параметра  $\frac{r_0}{l} = 2$  (а) и  $\frac{r_0}{l} = 10$  (б) и полей градиентных напряжений  $\mu_{rr\theta}$  [Мпа·м] для значений масштабного параметра  $\frac{r_0}{l} = 2$  (в) и  $\frac{r_0}{l} = 10$  (г) для задачи чистого сдвига.

### 3.2 Задача о сфере, нагруженной по экватору

Рассматривается сферическое тело  $\Omega$  с радиусом  $r_0$  нагруженное постоянной линейной нагрузкой, приложенной на экваторе сферы в радиальном направлении. Для решения удобно использовать сферическую систему координат  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + \theta\mathbf{e}_\theta + \phi\mathbf{e}_\phi$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ ), для которой ось симметрии определяется полярными углами  $\theta = 0, \theta = \pi$ .

Потенциалы Папковича-Нейбера  $\Phi(r, \theta)$  и  $\varphi(r, \theta)$  для внутренних областей сферы имеют вид (39). Потенциалы для градиентной части решения  $\psi(r, \theta)$  и  $\chi(r, \theta)$  могут быть записаны в виде (40).

Стоит обратить внимание на то, что представление потенциалов в виде рядов (39), (40) является полным по Треффтцу [53, 54], т.е. они позволяют получить все виды решений для соответствующих уравнений равновесия (18) (при этом для произвольных нагрузок может потребоваться рассмотрение бесконечных рядов). Коэффициентами  $B_0$  и  $D_0$  в (39) и (40) можно пренебречь, так как они не возникнут в решении для поля перемещений (38). Коэффициент  $B_1$  соответствует перемещению твердого тела вдоль оси симметрии, и им также можно пренебречь [55].

Ненулевые компоненты вектора напряжений и вектора моментных напряжений (7) на поверхности сферы ( $r = r_0, n = \mathbf{e}_r$ ), участвующие в осесимметричных задачах в сферических координатах, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 t_r &= \tau_{rr} - \frac{\partial \mu_{rrr}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial \theta} - 4\mu_{rrr} + 3\mu_{r\theta\theta} \\
 &\quad + \mu_{\theta\theta r} + \mu_{\phi\phi r} + 3\mu_{r\phi\phi} - (\mu_{rr\theta} + \mu_{r\theta r}) \cot \theta, \\
 t_\theta &= \tau_{r\theta} - \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial \theta} - 5\mu_{r\theta r} - \mu_{rr\theta} + 2\mu_{\theta\theta\theta} \\
 &\quad + 2\mu_{\theta\phi\phi} + (\mu_{\phi\phi r} + \mu_{r\phi\phi} - \mu_{r\theta\theta} - \mu_{\theta\theta r}) \cot \theta
 \end{aligned} \tag{110}$$

$$m_r = \mu_{rrr}, \quad m_\theta = \mu_{\theta rr} \tag{111}$$

здесь учтено, что в рассматриваемых задачах будет подразумеваться условие нулевых моментных напряжений ( $\bar{\mathbf{m}} = 0$ ), а следующие компоненты тензора градиентных

напряжений должны быть тождественно равны нулю в рамках осесимметричных задач упрощенной ГТУ:

$$\mu_{r\phi\phi} = \mu_{r\theta\phi} = \mu_{r\phi r} = \mu_{r\phi\theta} = \mu_{\theta\theta\phi} = \mu_{\theta\phi\theta} = \mu_{\theta\phi r} = \mu_{\phi\phi\phi} = 0 \quad (112)$$

Далее будут рассмотрены несколько вариантов описания условий нагружения сферы для рассматриваемой задачи.

### 3.2.1 Задание нагрузки через дельта-функцию

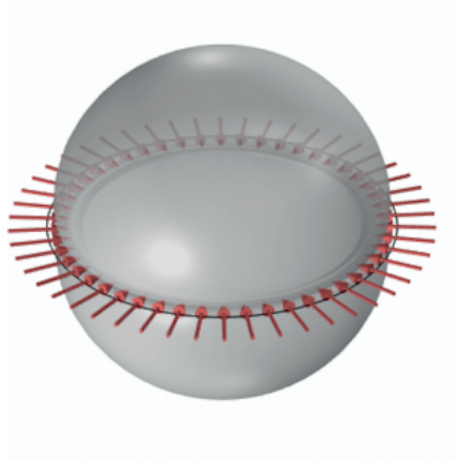
Рассмотрим вариант задания нагружения на поверхности сферы ( $r = r_0$ ) в соответствии с классической задачей о сфере под экваториальной линейной нагрузкой [55], дополненной условием ГТУ о равенстве нулю заданных градиентных (моментных) напряжений на поверхности:

$$r = r_0: \quad \bar{\mathbf{t}} = -\frac{q}{r_0} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_r, \quad \bar{\mathbf{m}} = 0 \quad (113)$$

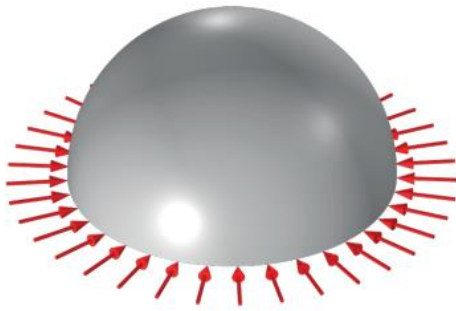
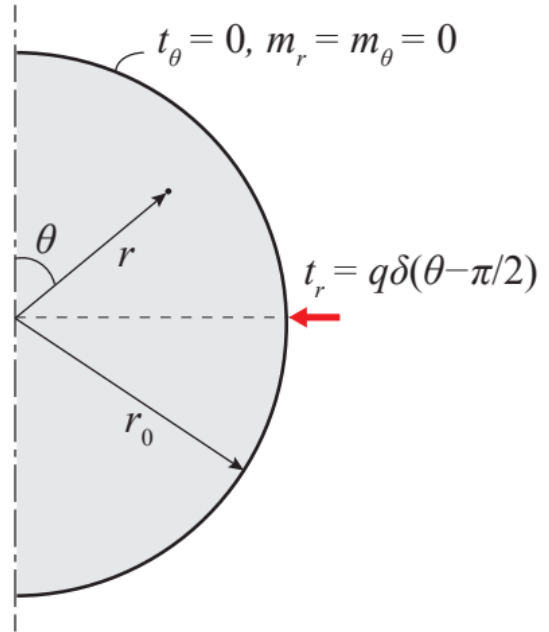
где  $\delta(\dots)$  дельта-функция Дирака,  $q$  – сжимающая нагрузка на единицу длины, распределенная по экватору сферы ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) (см рис. 15а). Величина сжимающей нагрузки  $q$  нормируется относительно радиуса сферы  $r_0$ , чтобы обеспечить правильную размерность вектора напряжений (аналогично классическому решению А.И. Лурье [55]).

Из определения для тензора напряжений и градиентных напряжений (110) и (111) можно получить следующие четыре независимых граничных условия:

$$t_r = -\frac{q}{r_0} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad t_\theta = 0, \quad m_r = 0, \quad m_\theta = 0 \quad (114)$$



а



б

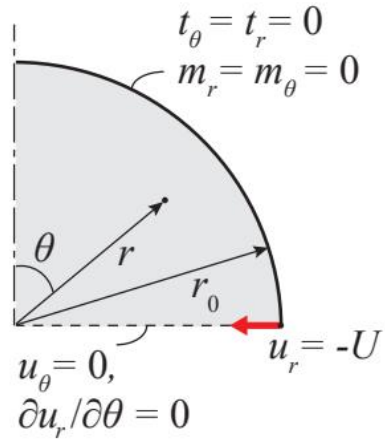


Рис. 15. Сфера, нагруженная линейной экваториальной нагрузкой. Иллюстрация к формулировке с полной сферой (а) и к формулировке с полусферой с учетом симметрии (б).

Чтобы найти решение, дельта-функция Дирака также должна быть выражена через сферические гармоники [78]:

$$\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(0) P_n(\cos \theta), \quad (115)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, & n = 2k, (k = 0, 1, 2 \dots) \\ 0, & n \neq 2k \end{cases}$$

Решение задачи далее строится по стандартному алгоритму. Для определения поля перемещений (38) выбирается максимальное количество членов рядов в представлениях  $n = N$  для потенциалов (39) и (40). Затем определяется тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (1), классические напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  (5) и градиентные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$  (6). Затем, используя граничные условия для классических и градиентных напряжений на поверхности (114) с учетом (115), получаем  $4(N + 1)$  линейных уравнения относительно констант  $A_n, B_n, C_n$  и  $D_n$  ( $n = 0 \dots N$ ), что соответствует различным членам ряда сферических гармоник. Решение этой системы дает значения неизвестных констант рядов. Сходимость решения можно оценить, увеличив количество членов ряда  $N$ . Непосредственный анализ сходимости и скорости сходимости решения полученного ряда в аналитической форме представляется практически невозможным в рамках ГТУ из-за достаточно сложной формы решения для коэффициентов. Поэтому, этот анализ выполняется численно с использованием системы символьной алгебры для некоторых примеров значений параметров модели (см. раздел 3.2.3).

### 3.2.2 Задание нагрузки на кромке полусферы с учетом симметрии

Другой подход к решению рассматриваемой задачи можно реализовать, если учесть симметрию и рассматривать половину сферы (рис. 15). В этом случае имеем плоскость симметрии и круговое ребро, которое можно использовать для непосредственного задания смещения или распределенной линейной нагрузки, что допустимо в рамках постановки ГТУ [69].

В этом случае, на плоскости симметрии ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) должны быть заданы обобщенные граничные условия симметрии ГТУ:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 &: \Rightarrow u_\theta = 0, \\ \partial_n \mathbf{u}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad \left( \text{и} \quad \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \equiv 0 \right) \end{aligned} \quad (116)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta$  в плоскости симметрии; а второе условие градиента перемещений означает отсутствие сдвига и поворотов в плоскости симметрии.

Граничные условия на поверхности сферы ( $r = r_0$ ) принимают вид:

$$\bar{\mathbf{t}} = 0, \quad \bar{\mathbf{m}} = 0 \quad (117)$$

На круговой кромке полусферы ( $\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_0$ ) можно явно определить следующее кинематическое граничное условие вида:

$$\bar{\mathbf{u}}_e = -U\mathbf{e}_r, \quad \text{т.е. } u_r = U, u_\theta = 0, u_\phi = 0 \quad (118)$$

Примечательно, что двум условиям для угловых перемещений в (118) уже удовлетворяют наложенные условия осевой симметрии ( $u_\phi = 0$ ) и плоскости симметрии ( $u_\theta = 0$ , см. (116)). Следовательно, при кинематическом типе нагружения на кромке имеется единственное дополнительное граничное условие:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_0: u_r = -U \quad (119)$$

Решение такой задачи для полусферы следует строить следующим образом. Во-первых, оба условия плоскости симметрии (116) будут выполняться тривиальным образом, если в рядах (39), (40) использовать только слагаемые с номерами  $n = 2k$  ( $k = 0, 1, 2 \dots N$ ). Во-вторых, граничные условия, которые предписывают нулевые значения поверхностных напряжений (117), дают  $4(N + 1)$  уравнений для нахождения неизвестных констант  $A_n, B_n, C_n$  и  $D_n$  в рядах (39), (40) (аналогично задаче с полной сферой). Таким образом, в рамках рассматриваемого представления функций напряжений (39), (40) недостаточно переменных, чтобы удовлетворить дополнительному граничному условию на кромке полусферы (119). Тем не менее, представление поля перемещений или функций напряжений может быть расширено любым частным решением, подчиняющимся заданному уравнению равновесия (для перемещений) или потенциальным уравнениям (18) (для потенциалов).

Для классической задачи теории упругости известно, что из полного представления в рядах можно получить соответствующее частное решение для поля перемещений в следующем виде [55]:

$$\mathbf{u}_c^* = u_r^{(c)} \mathbf{e}_r + u_\theta^{(c)} \mathbf{e}_\theta, \quad (120)$$



$$u_r^{(c)} = -Q \frac{1}{8\mu\bar{r}s_1} \left( (1 - \bar{r}^2) \left( (1 - \bar{r}^2) \frac{2E(k)}{\pi s_2^2} - s_1 \right) + 4(1 - \nu)(1 + \bar{r}^2) \left( \frac{2K(k)}{\pi} - s_1 \right) \right)$$

$$u_\theta^{(c)} = Q \frac{1 - \bar{r}^2}{4\mu s_1} \cos \theta \left( \frac{2E(k)}{\pi s_2^2} - \frac{4}{\pi(s_1^2 - s_2^2)} + \left( \frac{s_1^2}{s_2^2} E(k) - K(k) \right) \right)$$

где  $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$  нормированная радиальная координата,  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно;  $s_{1,2} = \sqrt{1 + \bar{r}^2 \pm 2\bar{r} \sin \theta}$ ,  $k = \sqrt{\frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2}}$ ;  $Q$  — некоторый неизвестный коэффициент, который необходимо найти из решения (в рамках классической упругости этот коэффициент равен линейной нагрузке  $q$ ).

Отметим, что частное решение (120) описывает сингулярное поведение решения вокруг нагруженного экватора в рамках классической теории упругости. А именно, разложение в ряд для  $u_r^{(c)}$  и его градиента на поверхности сферы ( $r = r_0$ ) вокруг  $\theta = \frac{\pi}{2}$  дает нам следующее выражение для поля перемещений:

$$u_r^{(c)} = Q \frac{(1 - \nu)}{\pi\mu} \log \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + O(1), \quad \text{при } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial u_r^{(c)}}{\partial \theta} = Q \frac{(1 - \nu)}{\pi\mu} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^{-1} + O \left( \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \log \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad \text{при } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$
(121)

и поэтому  $u_r^{(c)}$  имеет логарифмическую особенность на экваторе сферы, а ее градиент имеет разрывное гиперболическое поведение.

Заметим, что частное решение (120) не описывает разрывное поведение угловых перемещений на экваторе сферы, поскольку оно включает в себя только сингулярную часть классического решения. Угловые перемещения под действием линейной нагрузки являются разрывными, но не сингулярными. Следовательно,

соответствующую оставшуюся часть классического решения можно найти, только рассматривая полное представление в рядах, определяемое через классические потенциалы Папковича-Нейбера (39) (см. А.И. Лурье [55]).

Для решения задачи в рамках ГТУ необходимо найти градиентный аналог  $\mathbf{u}_g^*$  классического частного решения (120), чтобы полное частное решение можно было представить в виде суммы  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_c^* + \mathbf{u}_g^*$ , и оно удовлетворяло бы уравнениям равновесия градиентной теории упругости (9). Затем следует добавить это решение к представлению поля перемещений (17). Таким образом, в этом представлении будет получена дополнительная константа  $Q$ , которая соответствует поведению решения вокруг нагруженного экватора и может быть использована для удовлетворения граничного условия на кромке (119). Аналогичный анализ с построением специального частного решения для задачи о клине под сосредоточенной нагрузкой был представлен для ГТУ в работе [48]. В этой плоской задаче для клина частные классические и градиентные решения оказываются достаточно простыми и могут быть найдены в компактной аналитической форме. В рассматриваемом случае трехмерной задачи для сферы классическое частное решение (120) принимает довольно сложную форму, и прямого способа получения его градиентного аналога не существует. Таким образом, в настоящей работе постановка с полусферой при численном анализе рассматриваться не будет и приведена в качестве иллюстрации к особенности формулировки и аналитического решения задач с учетом симметрии в ГТУ (в которых возникают дополнительные кромочные граничные условия). Из представленной постановки задачи с учетом симметрии можно получить три важных вывода:

1. Стандартный алгоритм решения (когда число констант в рядах (39), (40) для каждой сферической гармоники равно числу граничных условий (114)) неприменим для решения задач в рамках ГТУ с граничными условиями на кромке.
2. ГТУ позволяет определить конечное значение перемещений на экваторе сферы (119), что невозможно сделать в рамках классической теории. Это следствие стандартной вариационной формулировки ГТУ, в которой

возникают дополнительные статические и кинематические граничные условия на кромках тел [8, 69].

3. Обобщенные условия симметрии (117) для нормальных градиентов перемещений в рамках ГТУ задаются явно и в результате обеспечивают гладкое распределение сдвига, малых поворотов, а также непрерывное изменение нормалей к поверхности под действием линейной нагрузки на экваторе. Это означает, что в решении ГТУ на поверхности под точкой приложения сосредоточенного (распределенного по линии) усилия не возникает излома и не образуется новой острой кромки [69].

### 3.2.3 Результаты численных расчетов

В примерах численных расчетов использованы следующие значения параметров:  $E = 1$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $r_0 = 1$  м,  $q = 0,001Er_0$ . В качестве примера рассмотрена упрощенная ГТУ Айфантисла с одним масштабным параметром  $l_1 = l_2 = l$ .

Анализ сходимости полученного решения в рядах проводится на основе четырех стандартных признаков сходимости. Рассмотрены признак сходимости Даламбера и признак Коши, согласно которым ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  сходится, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1 < 1, \quad \rho_1 = \frac{f_{n+1}}{f_n} \quad (122)$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2 < 1, \quad \rho_2 = \sqrt[n]{f_n} \quad (123)$$

также, дополнительно использован признак Раабе, который требует выполнения следующего условия для сходимости ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_3 > 1, \quad \rho_3 = n \left( \frac{f_n}{f_{n+1}} - 1 \right) \quad (124)$$

и признак Куммера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_4 > 0, \quad \rho_4 = a_n \frac{f_n}{f_{n+1}} - a_{n+1} \quad (125)$$

где  $a_n = n \log n$  ( $n \geq 1$ ) такой, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$  расходится.

Анализ сходимости проводился для радиальных перемещений и деформаций на экваторе на поверхности сферы  $\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_0$  (по линии нагружения). Примечательно, что в рамках классической теории упругости эти величины имеют бесконечные значения и решение соответствующего ряда расходится [55]. В анализе сходимости в рамках ГТУ использованы значения масштабного параметра  $l = r_0$  (сильный градиентный эффект),  $l = \frac{r_0}{100}$  (слабый градиентный эффект),  $l = 0$  (решение в рамках классической теории упругости).

К полученным решениям в рядах для перемещений (38) и деформаций (1) были применены признаки сходимости, представленные через функции напряжений (39), (40). Коэффициенты в этих рядах были найдены из решения задачи, описанной в разделе 3.2.1. Из соотношений (122)–(125) следует, что ряды не являются знакопеременными, и все их члены либо положительны, либо отрицательны (в этом случае, в анализе используются их абсолютные значения, предполагая изменение знака приложенной нагрузки).

Значения найденных первых 50 ненулевых членов и значения суммированных рядов для радиальных перемещений  $u_r(r_0, \pi/2, 0)$  и нормальных деформаций  $\varepsilon_{rr}(r_0, \pi/2, 0)$  представлены на рис. 16 и 17. Все члены ряда решения  $u_r^{(n)}$  и  $\varepsilon_{rr}^{(n)}$  отрицательны при заданной линейной сжимающей нагрузке. На рис. 16 (б), 17 (б) хорошо видно, что градиентное решение для деформации при  $l = r_0$  сходится, хотя разница между скоростью сходимости градиентного решения с  $l = \frac{r_0}{100}$  и классическим решением (которое заведомо расходится) не очевидна. Чтобы обеспечить точную проверку сходимости, для оцениваемых рядов применялись признаки сходимости (122)–(125).

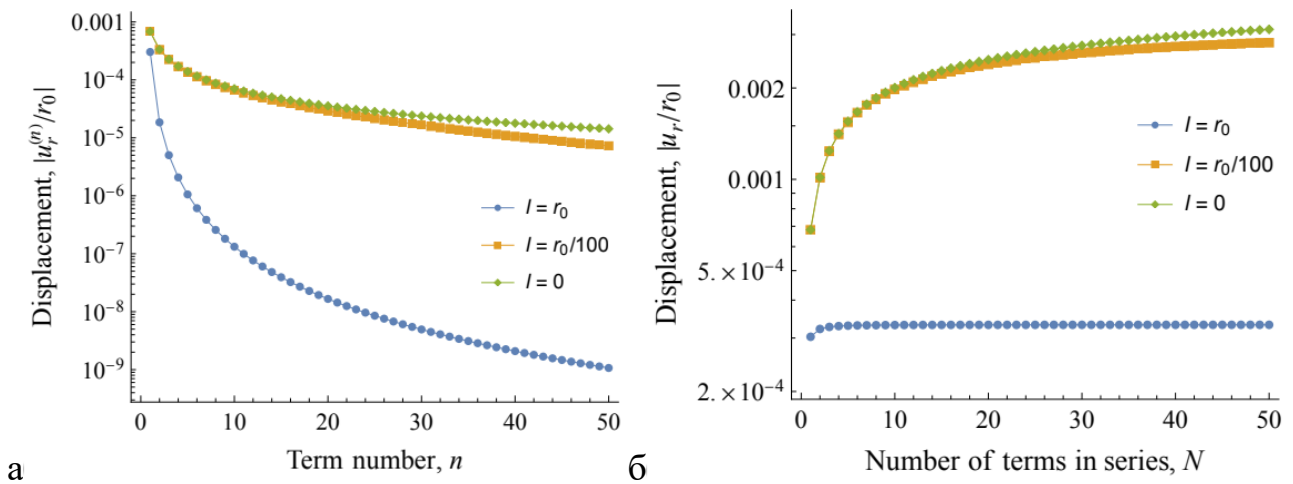


Рис. 16 Результаты решений для радиального перемещения на экваторе сферы.

Численные значения членов ряда (а), зависимость решения от числа членов ряда  $N$  (б).

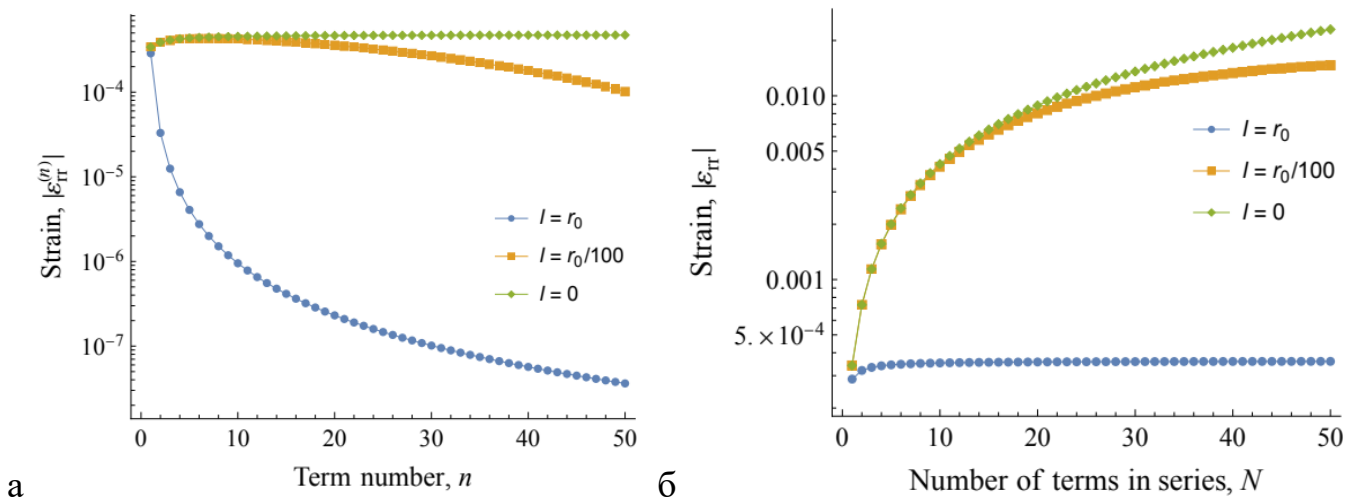


Рис. 17 Результаты решений для радиальных деформаций на экваторе сферы.

Численные значения членов ряда (а), зависимость решения от числа членов ряда  $N$  (б).

Иллюстрации к проведенному анализу с использованием признаков сходимости представлены на рис. 18, 19. Видно, что признак сходимости Даламбера и признак Коши ( $\delta_1$  и  $\delta_2$ ) могут не являются информативными, поскольку они принимают значения, близкие к 1 при увеличении числа слагаемых  $N$  в рядах (рис. 18 (а), (б), рис. 19 (а), (б)). Наиболее информативным является признак Куммера (рис. 18 (г), 19 (г)), для которого в рамках классического решения теории упругости получено  $\delta_4 < 0$ , что подтверждает известный факт расходимости классического

решения рассматриваемой задачи в зоне нагружения. Напротив, для решения градиентной теории упругости имеем  $\delta_4 > 0$  (125), так что это решение сходится, и на экваторе сферы (под линейной нагрузкой) реализуются конечные значения перемещений и деформаций.

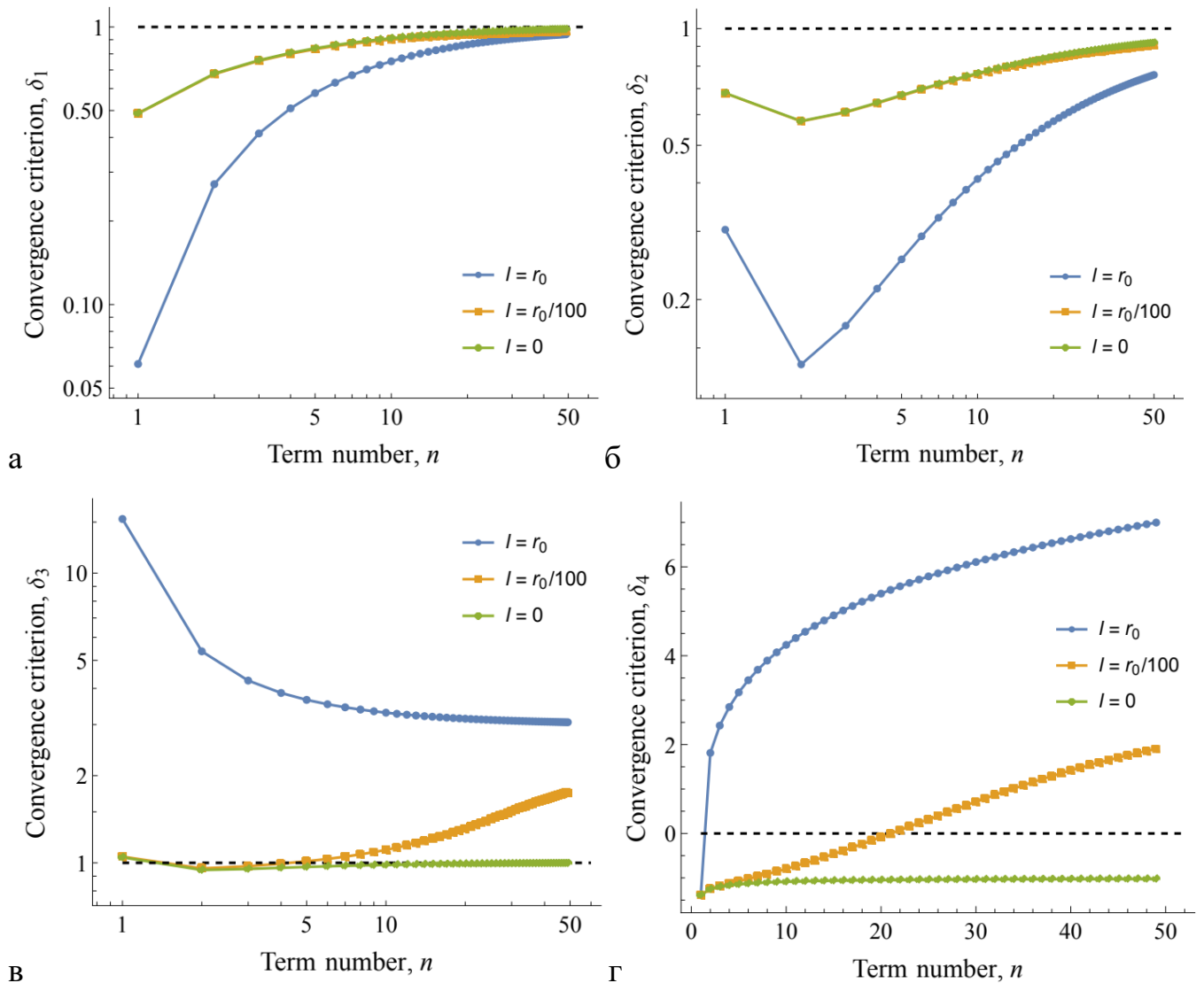


Рис. 18. Признаки сходимости решения рядов для радиальных перемещений  $u_r(r_0, \pi/2)$ , признак Даламбера (а), признак Коши (б), признак Раабе (в) и признак Куммера (г).

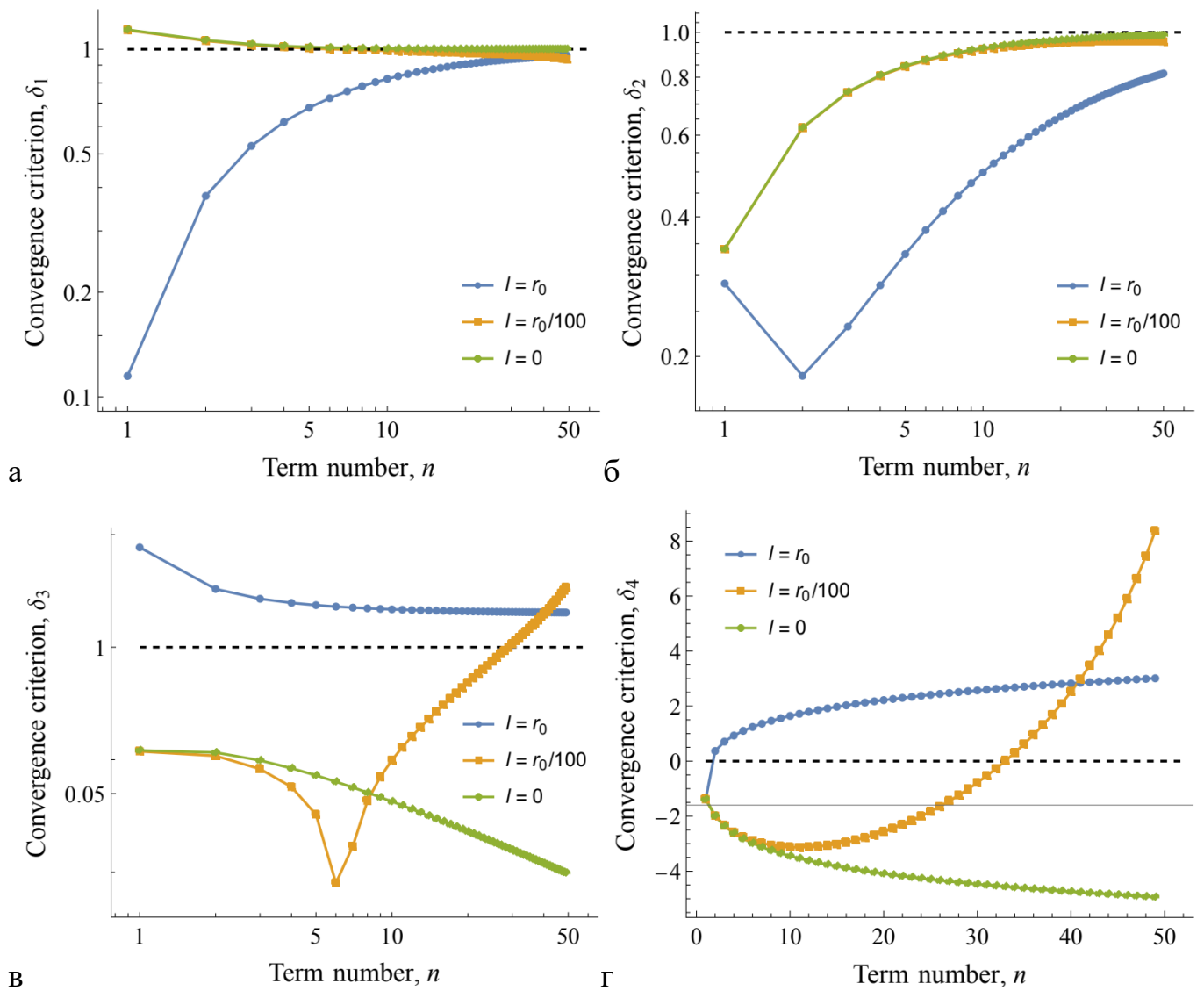


Рис. 19. Признаки сходимости решения ряда для радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r_0, \pi/2)$ , признак Даламбера (а), признак Коши (б), признак Раабе (в) и признак Куммера (г).

Деформированное состояние сферы, найденное на основе решения ряда с  $N = 50$  в рамках ГТУ представлено на рис. 20 для различных значений масштабного параметра. Видно, что изменение масштабного параметра существенно влияет только на деформации на экваторе сферы, где действует нагрузка. Деформированное состояние является гладким и не содержит изломов и негладких участков. Более подробно это показано на рис. 21, где представлено распределение оцененных перемещений по угловой координате  $\theta \in [0, \pi]$  на поверхности сферы. Максимальные радиальные перемещения становятся больше при меньших

масштабных параметрах, хотя их распределение остается плавным (рис. 21 (а)). На полюсах сферы возникает некоторый шум в решении для наименьших значений масштабного параметра (красная кривая на рис. 21 (а)), поскольку сходимость решения становится хуже и требуется использование больше числа членов ряда.

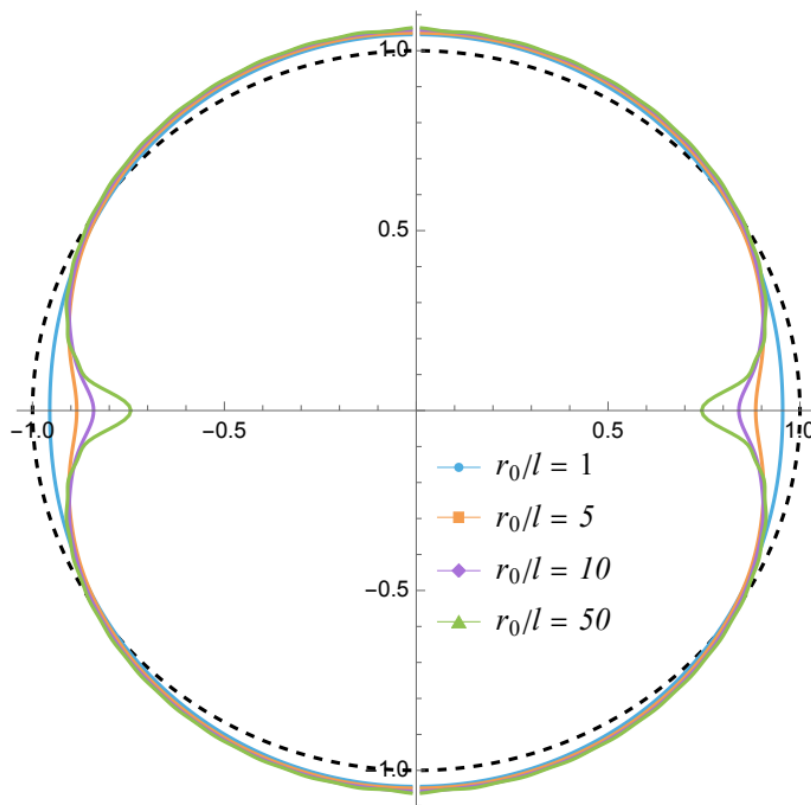


Рис. 20. Деформированное состояние сферы под действием экваториальной нагрузки в рамках ГТУ для различных значений масштабного параметра ( $r_0 = 1$  м). Деформации увеличены в 100 раз.



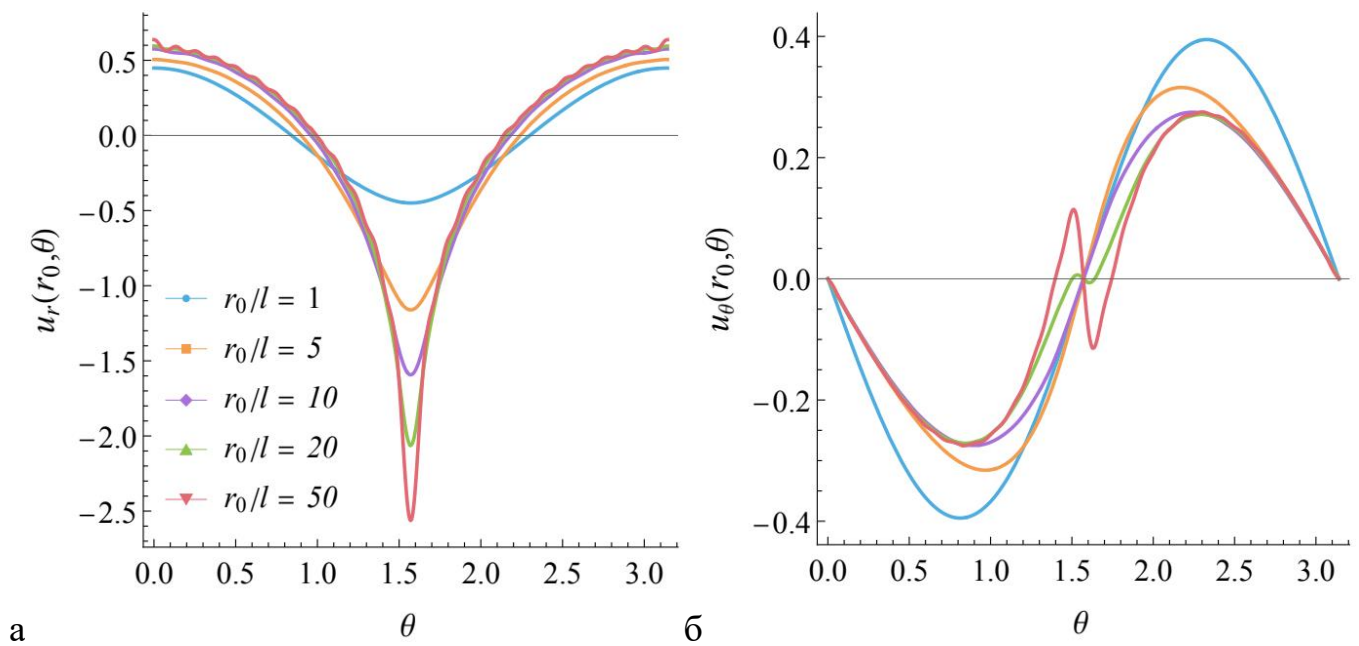


Рис. 21. Распределение радиальных (а) и угловых (б) перемещений по угловой координате на поверхности сферы в решении ГТУ для различного соотношения радиуса сферы  $r_0$  и масштабного параметра  $l$ .

Угловые перемещения всегда имеют нулевые значения на экваторе сферы, однако при малых значениях масштабного параметра возникают области локальных экстремумов (красная кривая на рис. 21 (б)). При меньших масштабных параметрах расстояние между этими экстремумами становится меньше, а их амплитуды — больше. В результате, в предельном случае классической теории упругости ( $l = 0$ ) возникнет разрыв угловых перемещений на экваторе сферы и сингулярные радиальные перемещения согласно асимптотике (121). Иллюстрация такого поведения классического решения приведена на рис. 22, где показано сравнение решения ГТУ в случае наименьшего рассматриваемого масштабного параметра ( $l = 0,01$ ) (это решение сходится очень медленно, что приводит к волнистым кривым) и классического решения в рамках классической теории упругости, полученного с помощью МКЭ. Очевидно, что результаты численного решения, полученного с помощью МКЭ, в точке приложения нагрузки зависят от размеров сетки. Представленное классическое КЭ решение было получено с использованием элементов второго порядка в линейной постановке и с наименьшим размером элемента, равным  $0,0025r_0$ . На рис. 22 видно, что решение в рядах в рамках ГТУ в

случае малых  $l$  стремится к классическому упругому решению с сингулярным (сеточно-зависимым) и прерывистым поведением поля перемещений на экваторе.

Скорость сходимости для поля деформаций ниже, чем для поля перемещений. В связи с этим, для получения картины поля деформаций необходимо большее количество членов в рядах и более длительные вычисления. Полученные результаты распределения сдвиговой деформации вдоль поверхности сферы показаны на рис. 23. Основным результатом является полученное непрерывное распределение сдвиговой деформации поперек экваториальной линии (при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). В решении в рамках классической теории упругости в этом месте сдвиговые деформации терпят разрыв ( $\pm\infty$ ) и соответствующее прерывистое изменение ориентации нормали к поверхности (согласно асимптотическому решению (121)). В решении в рамках ГТУ сдвиговые деформации на экваторе всегда имеют нулевые значения и непрерывное решение с экстремумами по обе стороны от экватора. При меньших значениях масштабного параметра эти экстремумы становятся все ближе и выше и стремятся к бесконечности при  $l \rightarrow 0$ .

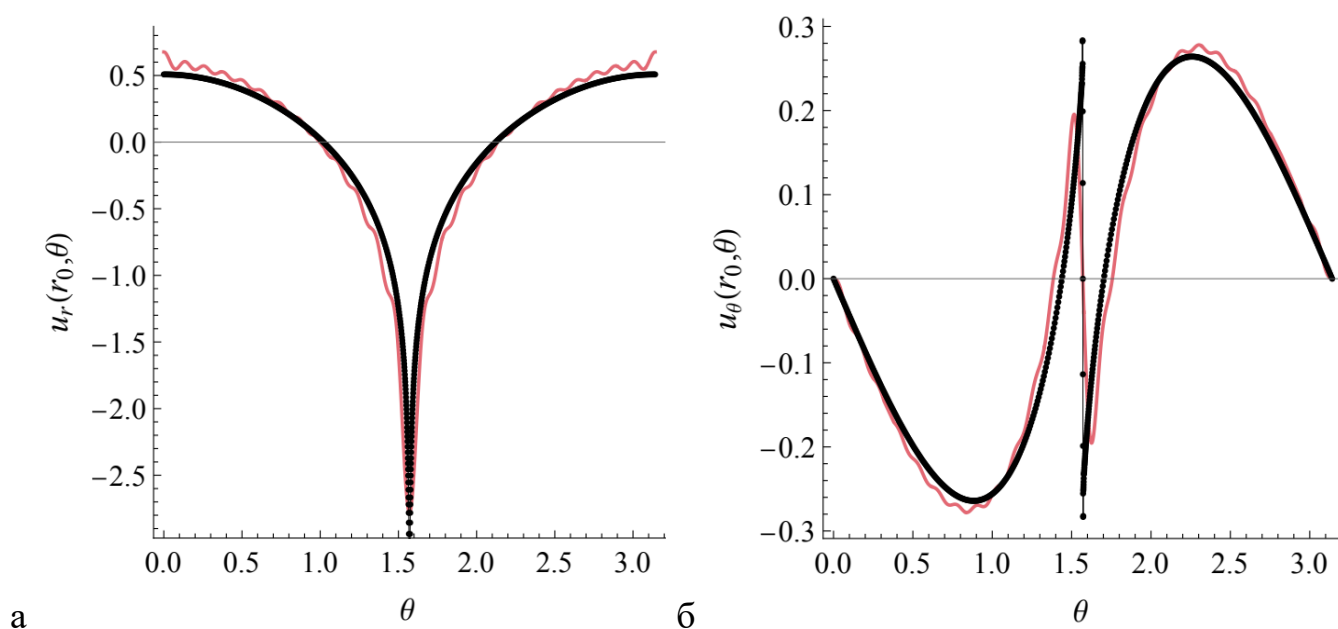


Рис. 22. Распределение радиальных (а) и угловых (б) перемещений по угловой координате  $\theta$  на поверхности сферы. Решение в рамках ГТУ для  $\frac{r_0}{l} = 100$  показано красной линией, решение в рамках классической теории упругости в МКЭ показано черными точками (в узловых точках КЭ решения).

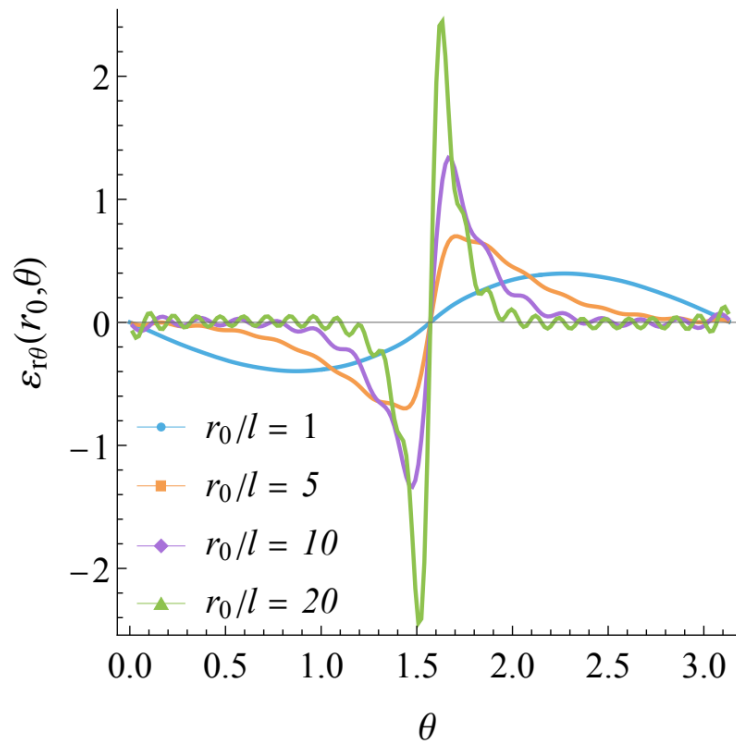


Рис. 23 Распределение сдвиговых деформаций  $\varepsilon_{r\theta}$  по угловой координате  $\theta$  на поверхности сферы.

#### **4. Моделирование экспериментальных данных по испытанию образцов с отверстиями различного размера**

С целью исследования особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий и валидации моделей градиентной теории упругости проведены эксперименты по растяжению образцов с малоразмерными отверстиями. Для получения экспериментальных данных, использован метод корреляции цифровых изображений.

##### **4.1 Метод корреляции цифровых изображений**

Метод корреляции цифровых изображений представляет собой оптический метод, используемый для измерения изменений поля координат на поверхности образца. Определение изменений поля деформаций основано на получении кросс-корреляций между изображениями объекта в исходном и деформированном состояниях.

Для увеличения чувствительности измерения поля координат на поверхность образца наносится паттерн, который представляет собой случайно распределенные по поверхности образца контрастные точки. Плотность заливки паттерна должна составлять около 50 %, а средний размер зерна паттерна должен быть не меньше двух пикселей приемной матрицы фотоаппарата [47, 65].

## 4.2 Концентрация деформаций в образцах с отверстиями

### 4.2.1 Изготовление образцов

Образцы вырезаны из листа полиметилметакрилата (ПММА) толщиной 1 мм и представляют собой ленту шириной 25 мм и длиной 260 мм. В центре образцов, с помощью вертикально-сверлильного станка Энкор Корвет-411 и свёрл Kyocera Micro Tools серии 226, просверлены отверстия различного диаметра: 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5, и 3.0 мм (см. рис. 24). С помощью аэрографа с диаметром сопла 0.2 мм черной краской на водной основе на образцы нанесен паттерн, обеспечивающий необходимый контраст для хорошей корреляции изображений. На рис. 25 приведено микрофото образцов с нанесенным паттерном в зоне отверстия. При нанесении паттерна учитывались следующие рекомендации к подготовке изображения, указанные в [47]. Вероятность заполнения получаемого изображения светлыми элементами должна быть 0,5, так как при этом достигается максимум отношения сигнал – шум. Размер информационного элемента изображения (зерна паттерна) должен быть не меньше двух пикселей приемной матрицы фотоаппарата.

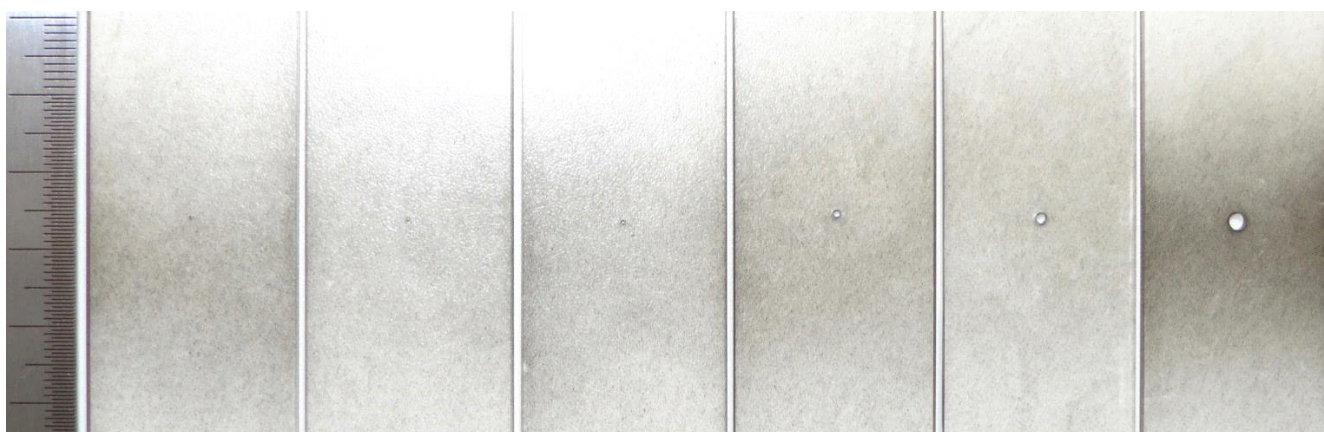


Рис. 24 Фото серии образцов с отверстиями разного диаметра: 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и 2.5 мм, после нанесения паттерна.

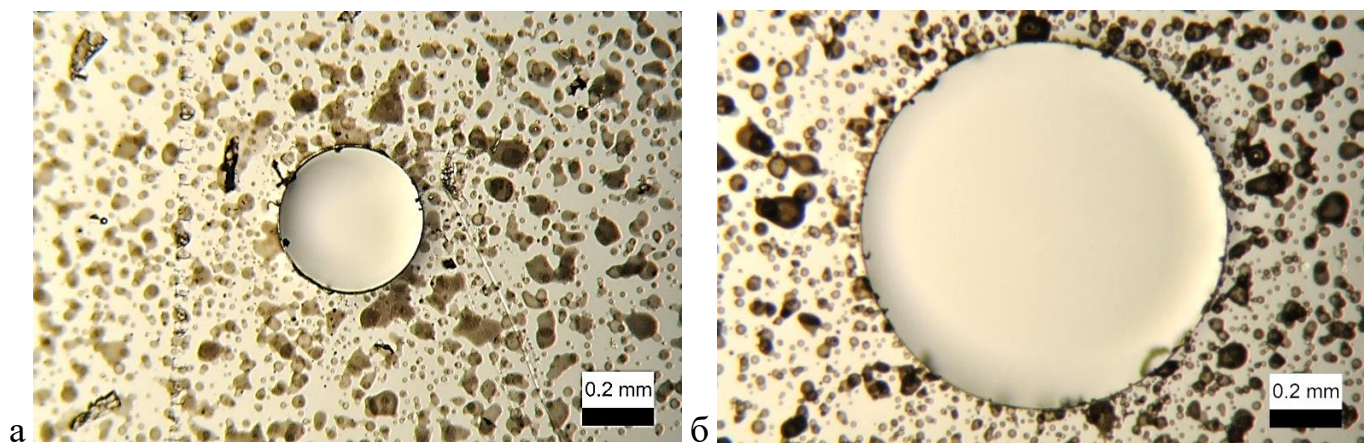


Рис. 25 Микро фото образцов с отверстиями диаметром 0.4 (а) и 1.0 (б) мм, после нанесения паттерна.

#### 4.2.2 Методика испытаний

Испытания проводились на универсальной испытательной машине Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill 3. Образцы зажимались в пневматические захваты и нагружались вертикально, со скоростью 1 мм/мин. Расстояние между захватами 160 мм. Испытания проводились до образования ярко выраженной зоны пластичности. Фотографирование зоны возле отверстия производилось до растяжения и в процессе растяжения, с интервалом перемещения траверсы 0.1 мм. При испытании использовался фотоаппарат Nikon D5500 с макрообъективом Nikon NIKKOR 85mm f/3.5G ED VR. В качестве источника освещения использовался кольцевой светодиодный светильник фирмы Gauss Ring Light диаметров 30 см. Подготовленный к испытаниям образец показан на рис. 26.

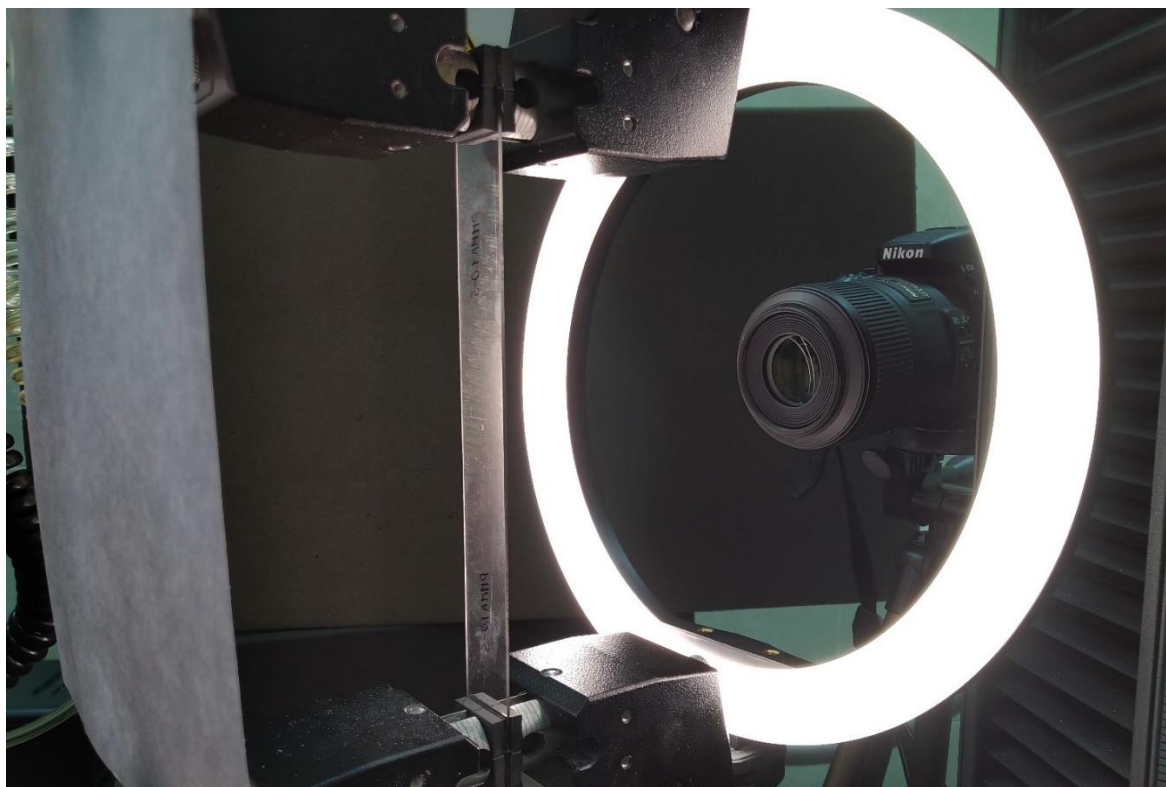


Рис. 26 Подготовленный к испытаниям образец в захватах испытательной машины Instron 5969.

Для определения поля деформаций использована программа Digital Image Correlation Engine. Для расчета используются фотографии образцов в недеформированном и деформированном состоянии, при номинальных деформациях, при которых ПММА не достигает предела пропорциональности, т.е. находится в упругой зоне. По результатам испытаний на одноосное растяжение образцов без отверстий определено, что ПММА достигает предела пропорциональности при номинальных деформациях 1.37%. Согласно классической теории упругости, коэффициент концентрации напряжений возле отверстия равен трем, тогда пластические деформации возле отверстия в ПММА наступают при достижении номинальных деформаций 0.46%. В DICe на выбранных фотографиях выделяется активная область, для точек корреляции которого необходимо определить поле деформаций (см. рис. 27).

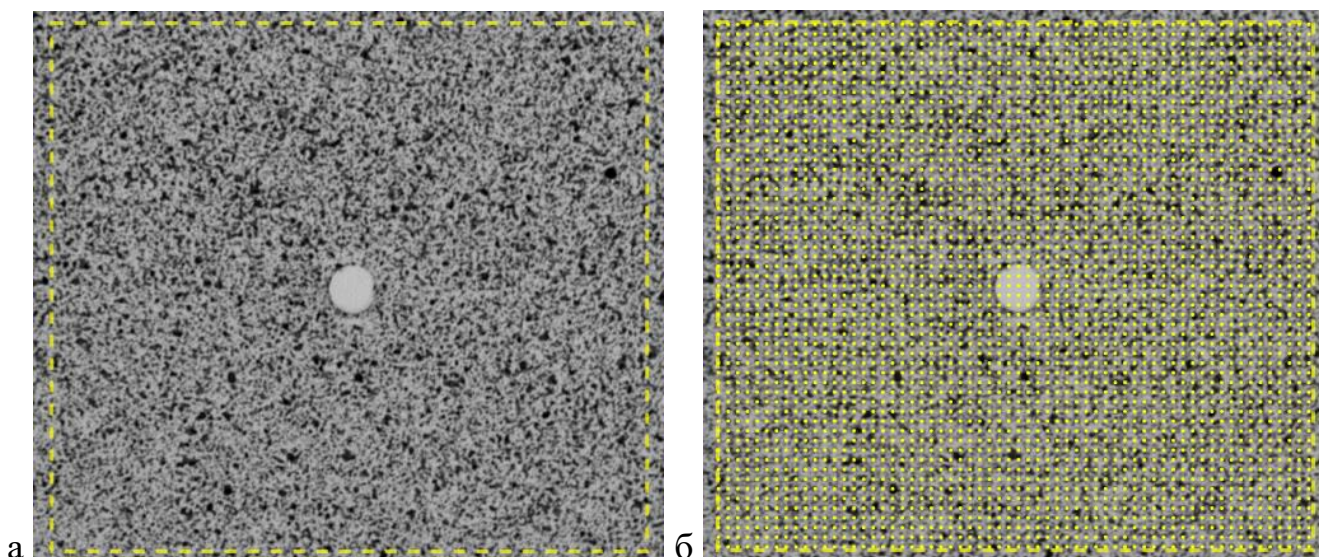


Рис. 27 Выделенная активная область (а) и подмножество точек корреляции в этой области (б) на фотографии образца с отверстием диаметром 0.5 мм.

Точность корреляционных измерений, кроме свойств изображений и паттерна зависит ещё и от параметров самой корреляционной обработки. К ним относятся, в частности, размеры подмножества (окна) корреляции и размер шага. Увеличение окна корреляции по любой из координат приводит к более точному значению сдвига, но при этом теряется локальность измерений по этой координате [47]. Размер шага задает плотность точек внутри подмножества, для которых проводятся вычисления. Рекомендованный размер шага обычно составляет от одной трети до половины размера подмножества. Если размер шага превышает треть размера подмножества, то соседние точки данных уже не считаются независимыми и дальнейшее уменьшение шага не улучшает пространственное разрешение измерения. Однако небольшой размер шага, в сочетании с небольшим размером подмножества, позволяет получить данные близко к краю активной зоны [9]. Для данной задачи в качестве размера подмножества выбрана величина 51 пикс, а размер шага равен 20 пикс.

При подготовке фотографий образцов для расчета в DICe замечено, что использование некоторых фильтров позволяет сделать изображение более контрастным, но при этом, фильтр может исказить контуры зерен паттерна. Такая обработка значительно увеличивает уровень «шумов» при расчете в DICe. На рис. 28 приведены фото одного образца, обработанные с применением фильтра и без



фильтра. Использован высокочастотный фильтр с режимом «осветление» в графическом редакторе GIMP.

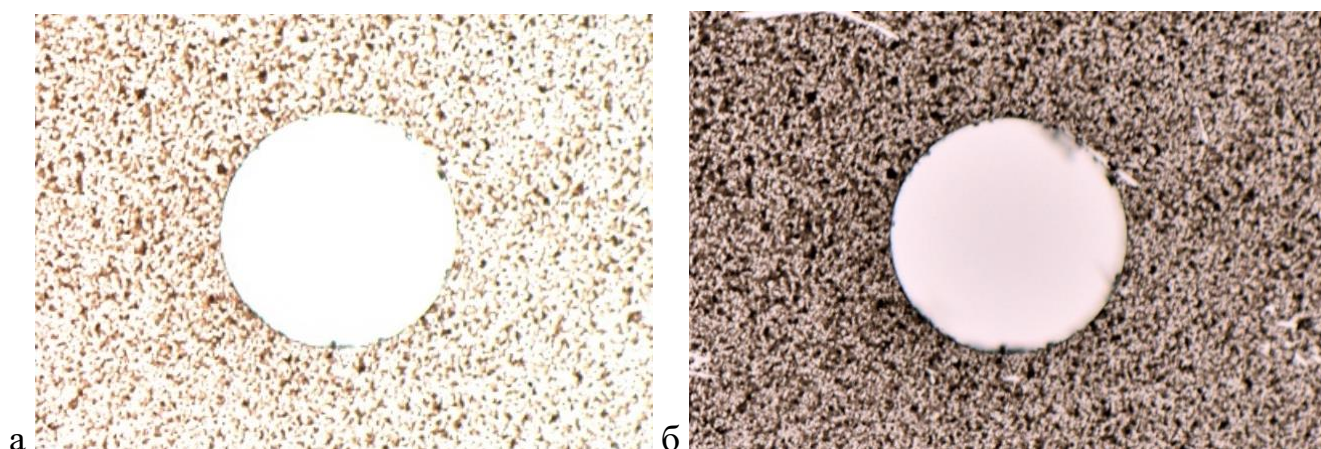


Рис. 28 Фото зоны вблизи отверстия диаметром 2.5 мм обработанного с применением фильтра (а) и без применения фильтра (б).

По результатам испытаний, из множества испытанных образцов были выбраны 12 образцов с удовлетворительным качеством паттерна и резкостью полученных изображений: по два образца с диаметром отверстия 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и по одному образцу с диаметрами 2.5 и 3.0 мм.

#### 4.2.3 Результаты эксперимента и моделирования

Полученные методом корреляции цифровых изображений поля деформаций наложены на численное решение, построенное с помощью МКЭ. Для этого, в расчетном комплексе Comsol в рамках классической и градиентной теории упругости смоделированы испытания образцов с различными диаметрами отверстий. Методика построения численного моделирования в рамках ГТУ смешанным методом конечных элементов приведена в разделе 1.5. Решение задачи строилось в плоской постановке. Конечно-элементная модель и граничные условия приведены на рис. 29.

Предварительно были определены упругие свойства листов ПММА. Для этого проведены испытания на одноосное растяжение образцов без отверстий с использованием видеоэкстензометра. Образцы для определения модуля упругости

изготовлены из того же листа материала, что и образцы с отверстиями. Полученное значение модуля упругости составляет 3.3 ГПа. Коэффициент Пуассона материала подбирался таким, чтобы поля поперечных деформаций вдали отверстия, полученные из численного решения, соответствовали деформациям, полученным экспериментально. Полученное среднее значение коэффициента Пуассона составляет 0.43.

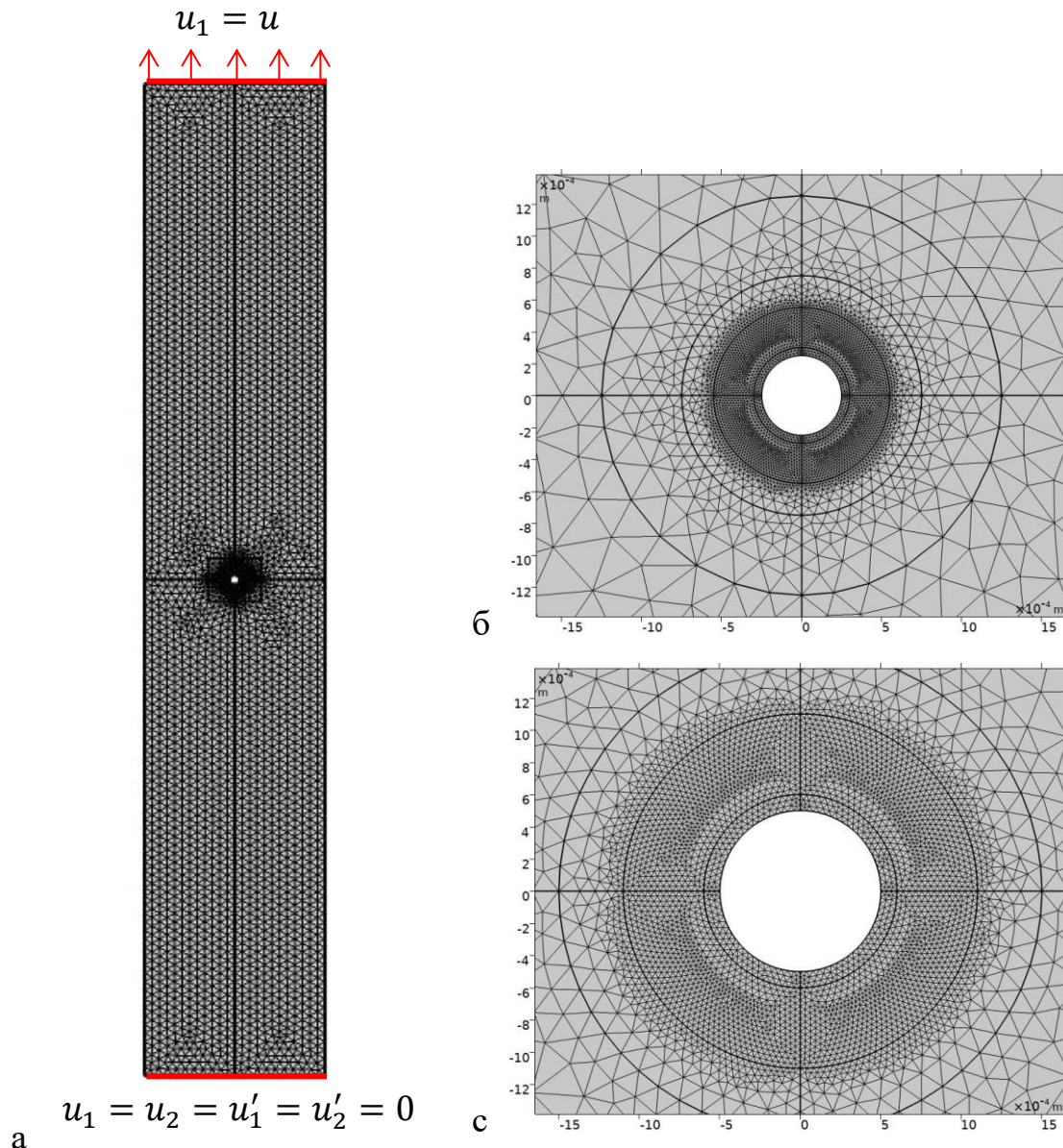


Рис. 29 Конечно-элементная модель, условия закрепления и нагружения для образца с диаметром отверстия 1.5 мм (а) и конечно-элементная сетка в зоне возле отверстия 1.0 мм (б) и 0.5 мм (в).

Примеры сопоставления численного решения, полученного с использованием стандартного МКЭ для поля продольных нормальных деформаций, с

экспериментальными данными, полученными методом корреляции цифровых изображений, показан на рис. 30 и 31. Из проведенного сопоставления было установлено, что поле деформаций имеет несколько отличный характер распределение и меньшие максимумы в эксперименте, по сравнению с классическим решением.

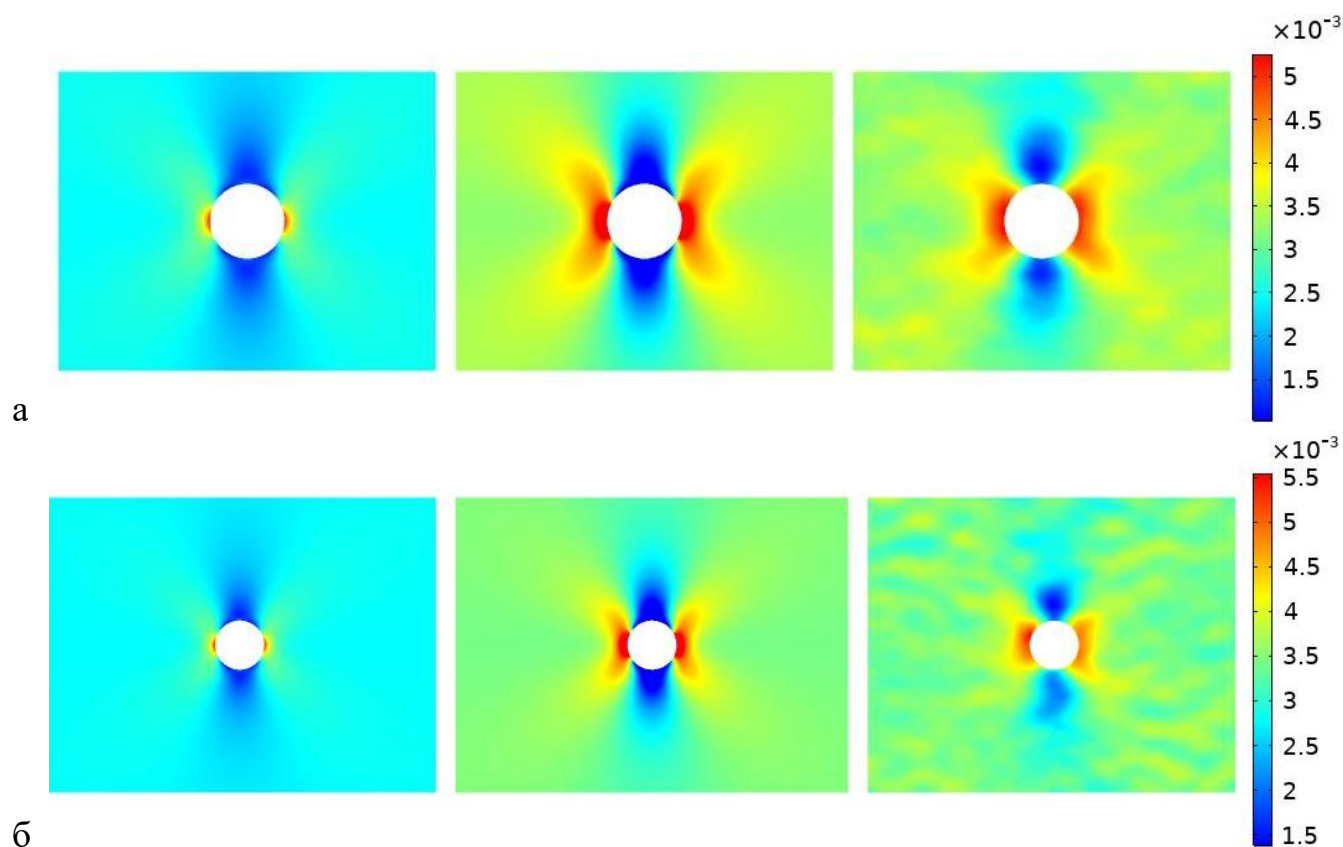


Рис. 30 Продольные деформации, полученные для образца с диаметром отверстия 1.5 мм (а) и 1.0 мм (б). Слева результаты численного расчета, в центре результаты численного расчета в диапазоне значений результатов эксперимента, справа результаты эксперимента. Цветовая шкала относится к центральному и правому рисункам.

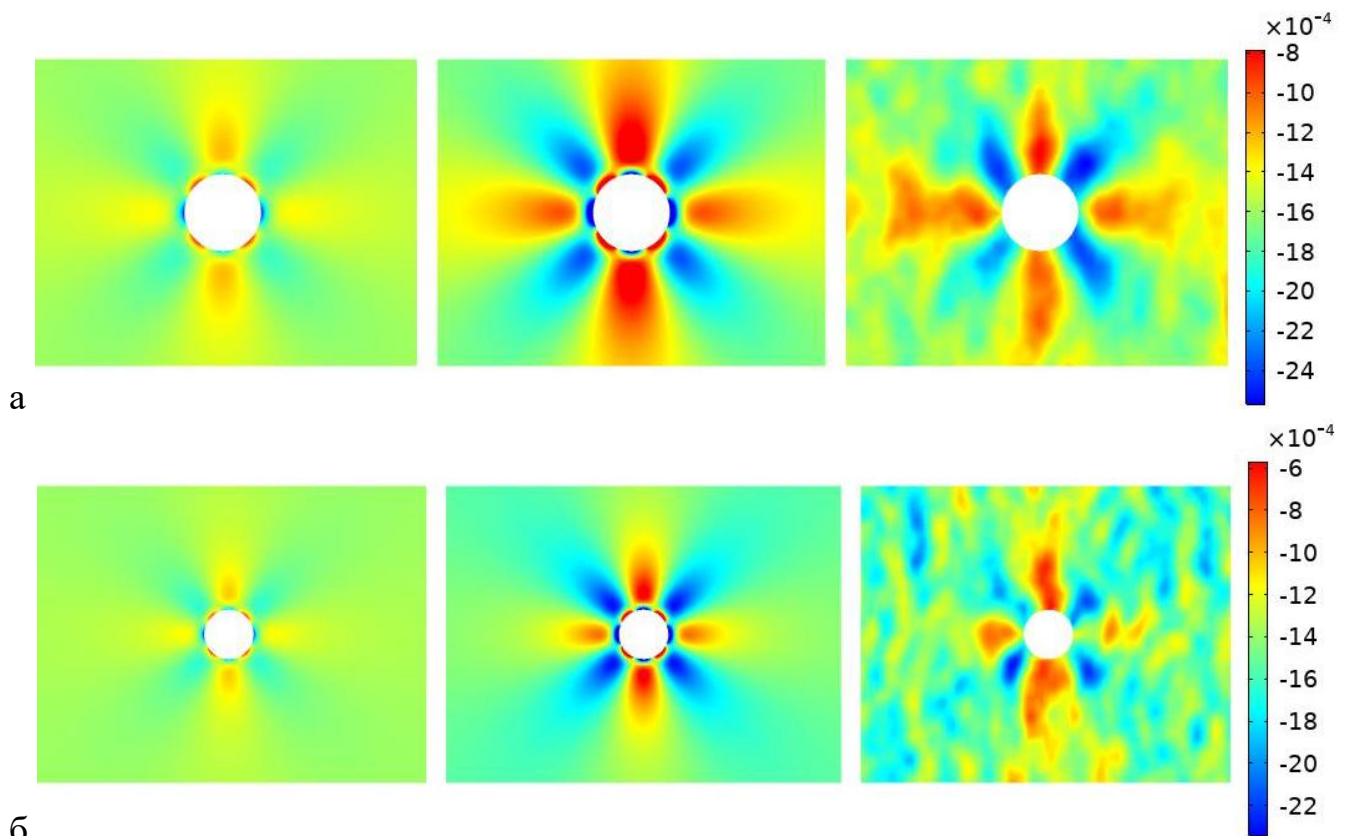


Рис. 31 Поперечные деформации, полученные для образца с диаметром отверстия 1.5 мм (сверху) и 1.0 мм (снизу). Слева результаты численного расчета, в центре результаты численного расчета в диапазоне значений результатов эксперимента, справа результаты эксперимента. Цветовая шкала относится к центральному и правому рисункам.

По наложенным графикам полей деформаций вычислены средние, максимальные и минимальные значения ошибок  $\Delta_{ij}$ .

$$\Delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij \text{ DICE}} \quad (126)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij \text{ DICE}}$  – компоненты тензора бесконечно малых деформаций, полученные из численного решения и методом корреляции в DICE.

Модули относительных средних ошибок  $|\bar{\Delta}_{ij \text{ avg}}|$  определяются в виде:

$$|\bar{\Delta}_{ij \text{ avg}}| = \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij \text{ DICE}}}{\varepsilon_{ij}} \quad (127)$$

Ошибки вычислены с учетом и без учета зоны концентрации деформаций. В качестве зоны концентрации деформаций принята окружность с диаметром  $1.2D$ , где  $D$  – диаметр отверстия. Абсолютные значения средних ошибок  $\Delta_{ij \text{ avg}}$  для

продольных и поперечных деформаций с учетом зоны концентрации деформаций возле отверстия приведены на рис. 32. На рис. 33 приведены абсолютные значения средних относительных ошибок  $|\bar{\Delta}_{ij avg}|$  для продольных и поперечных деформаций без учета зоны концентрации деформаций возле отверстия.

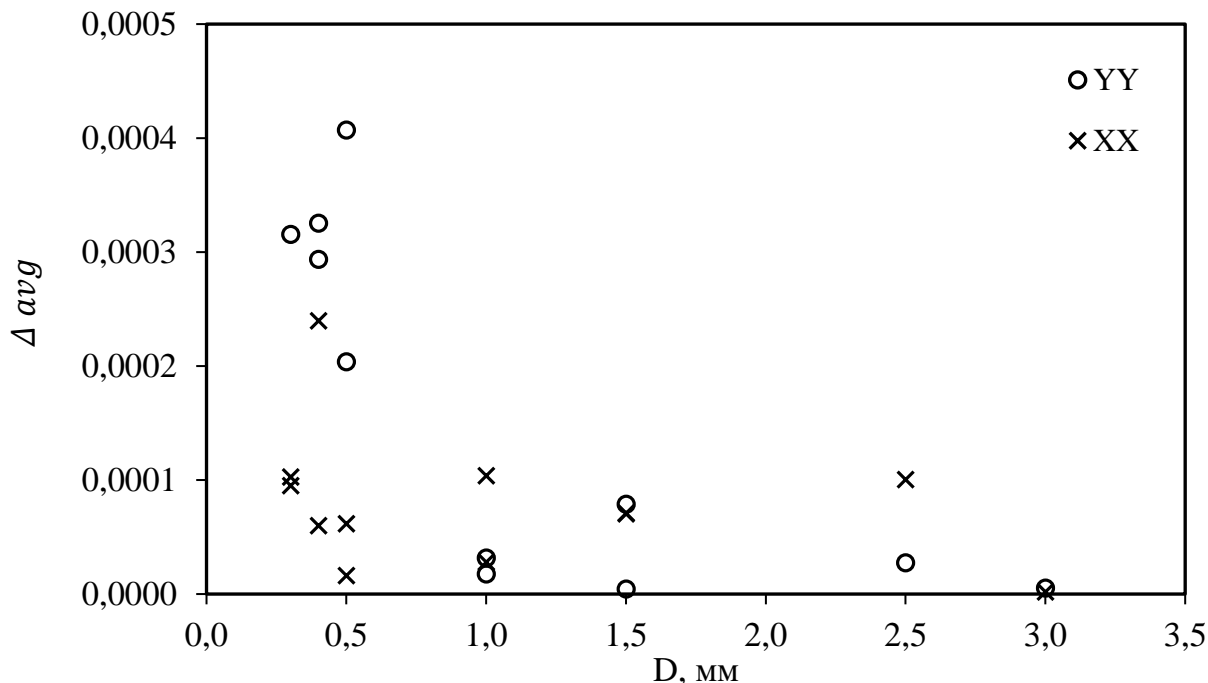


Рис. 32 Абсолютные значения средних ошибок  $\Delta_{ij avg}$  с учетом зоны концентрации деформаций.

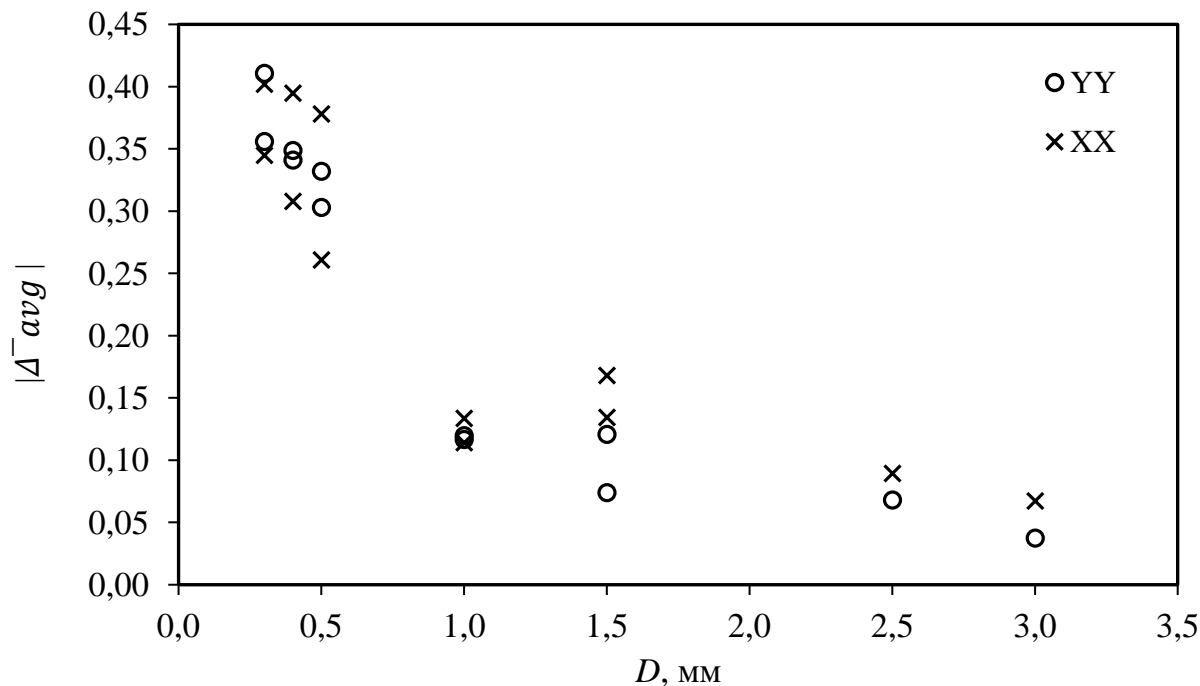


Рис. 33 Абсолютные значения средних относительных ошибок  $|\bar{\Delta}_{ij avg}|$  без учета зоны концентрации деформаций.

Из рисунков 32 и 33 видно, что при уменьшении диаметра отверстия увеличивается значение средней относительной ошибки между экспериментальными данными и результатами численного моделирования в рамках классической ГТУ.

Однако, непосредственное использование поля деформаций для сопоставления решений (в том числе решений градиентной теории упругости) с экспериментом является затруднительным, вследствие вносимых дополнительных погрешностей при численном вычислении деформаций по измеренному в эксперименте полю смещений точек поверхности образца. Поэтому было предложено проведение сопоставление по перемещениям, которые реализуются на контуре отверстий (то есть, фактически, по первичным экспериментальным данным).

Перемещения на контуре отверстия, полученные с помощью метода корреляции цифровых изображений, были наложены на результаты численных решений в рамках классической и градиентной теории упругости. По наложенным графикам перемещений вычислены относительные значения ошибок  $\Delta u = \frac{1}{R} \frac{u - u_{DICe}}{u_{DICe}}$ , где  $u$  и  $u_{DICe}$  – продольные перемещения на контуре отверстия, полученные из численного решения и из эксперимента, соответственно. Относительные средние значения ошибок  $\Delta v$  для классической и градиентной теории упругости показаны на рис. 34. В решении задачи градиентной теории упругости использовалась модель Айфантиса, в которой присутствует неизвестная материальная константа – масштабный параметр. Было показано, что выбором этого параметра можно снизить ошибку теоретического расчета по отношению к эксперименту (см. рис. 34). Подобранный значение масштабного параметра для образцов ПММА составило 0.133 мм. На основе аналогичного подхода в недавней [72] была проведена идентификация масштабного параметра упрощенного варианта ГТУ для образцов оргстекла с отверстиями, где его порядок составил 1.1 мм. Значения масштабного параметра могут различаться для разных марок оргстекла и более высокое значение масштабного параметра означает более ярко выраженный масштабный эффект уже для диаметра отверстия порядка 1 мм, что в проведенных экспериментах не наблюдалось.

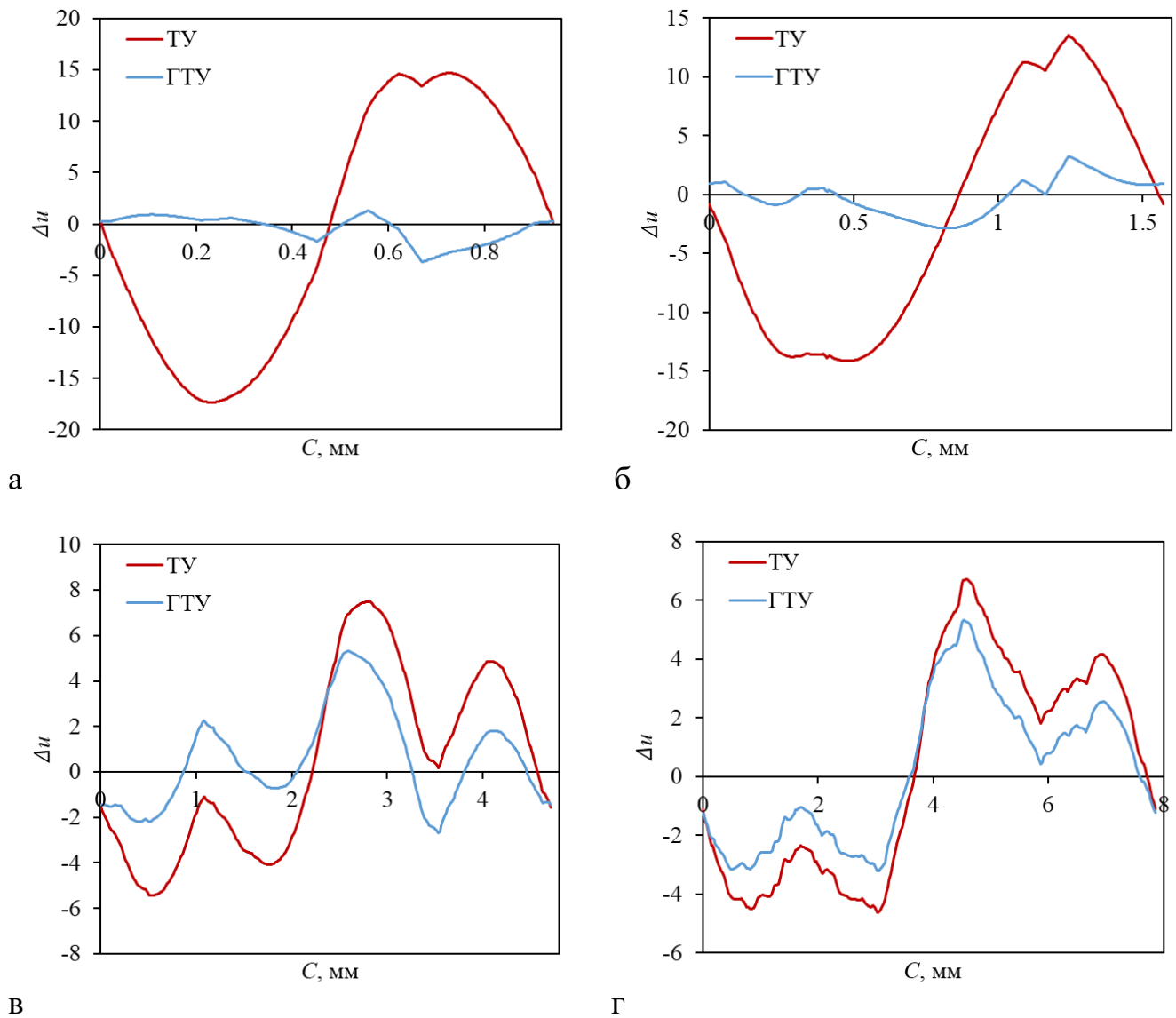


Рис. 34 Относительные значения ошибок  $\Delta u$  по образующей отверстия для классической и градиентной теории упругости, полученные для образцов с диаметрами отверстия 0.3 мм (а), 0.5 мм (б) 1.5 мм (в) и 2.5 мм (г). Здесь  $C$  – расстояние вдоль контура отверстия.

Для оценки зависимости величины ошибки  $\Delta u$  для ТУ и ГТУ от диаметра отверстия для каждого образца вычислена разность ошибок  $\Delta u$  для ТУ и ГТУ

$$\Delta \bar{u} = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi R} (\Delta u_{\text{ТУ}} - \Delta u_{\text{ГТУ}}) dC,$$
 которая по геометрическому смыслу является разностью площадей под графиками  $\Delta u$  для классической ТУ и ГТУ на рисунке 34. Значения ошибок  $\Delta \bar{u}$  полученные для образцов с диаметром отверстия 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и 2.5 мм показаны на рисунке 35.

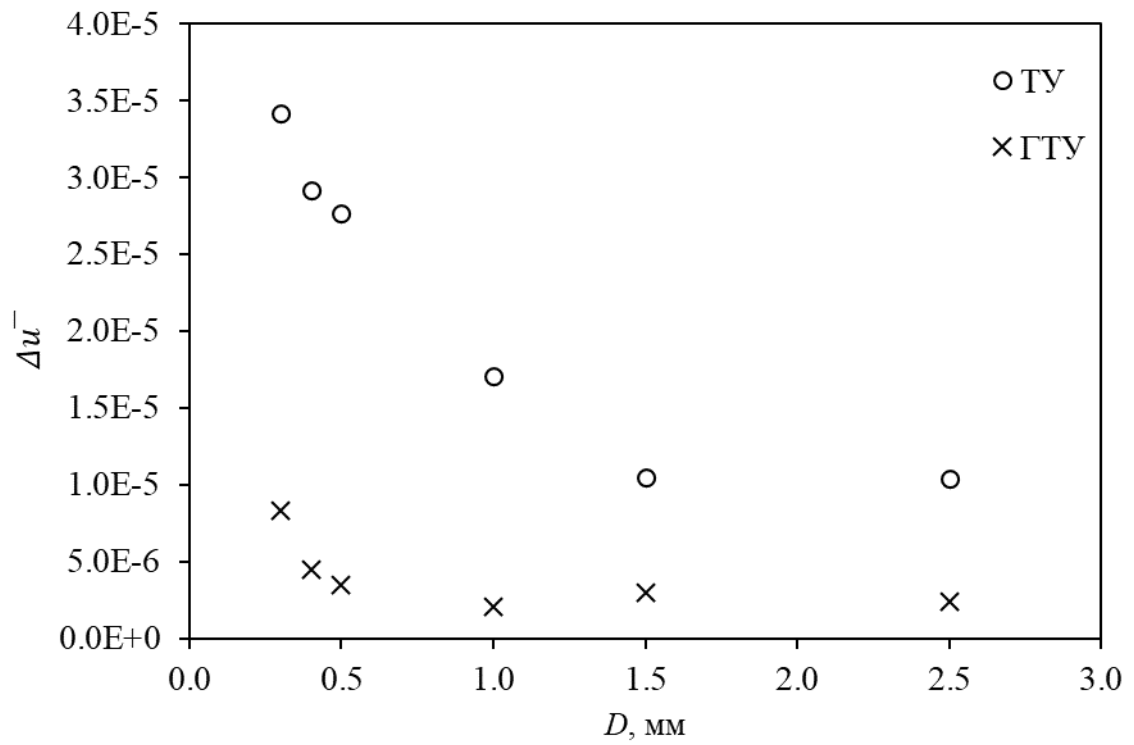


Рис. 35 Разность ошибок  $\Delta u$  по образующей отверстия для классической и градиентной теории упругости, полученные для образцов с диаметром отверстия 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5 и 2.5 мм. Здесь  $C$  – длина образующей отверстия.



## 5. Заключение

В диссертации представлен анализ неклассических масштабных эффектов в задачах с концентрацией напряжений на основе моделей градиентной теории упругости. Предложены новые решения и новые методы построения аналитических решений в ГТУ. В частности, для рассматриваемых классов задач с концентраторами напряжений реализован метод представления решения в форме Папковича-Нейбера, и построены соответствующие решения для плоских и трехмерных задач. Показана возможность уточненного описания эффектов концентрации напряжений в моделях ГТУ в зонах возле концентраторов и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок.

При построении решений использован новый вариант представления решения уравнений равновесия ГТУ, основанный на использовании представления Папковича-Нейбера для классической части поля перемещений и на разложении Гельмгольца для градиентной части поля перемещений. На основе этого представления построено решение для задачи о Кирша, а также получено асимптотическое решение для задачи о трещине в упрощённой ГТУ. Построены новые аналитические решения для пространственных задач с концентраторами напряжений. В частности, построено решение для задачи о сферическом включении в рамках упрощенной теории Айфантиса, которое позволяет учитывать влияние размера включений. Также, построено решение для задачи о сфере, нагруженной линейной экваториальной нагрузкой. Это решение является первым примером решения ГТУ для задачи о действии сосредоточенной нагрузки в ограниченной области (это, в частности, определило вид функций, входящих в общее решение задачи).

В диссертации проведено исследование особенностей концентрации деформаций вблизи малоразмерных отверстий на основе моделей градиентной теории упругости, и их валидация на основе экспериментальных данных, получаемых с использованием метода корреляции цифровых изображений в испытаниях образцов с малоразмерными отверстиями.

Дальнейшее развитие представленных в диссертации задач и подходов может быть связано с проведением детальных исследований стабильности масштабных

параметров, определяемых для разных классов материалов, на основе данных по характеру концентрации напряжений и деформаций вблизи концентраторов и изменению их прочности при изменении характерных размеров этих концентраторов. Подобный анализ необходим для достоверной идентификации параметров, входящих в определяющие соотношения ГТУ, и валидации подходов, основанных на применении решений ГТУ для оценки прочности тел с концентраторами напряжений.

## Список литературы

- [1] Taylor D. The theory of critical distances // *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, №. 7, pp. 1696-1705.
- [2] Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // *Прикладная механика и техническая физика*. 2001. Т. 42. №. 4. С. 145 - 154.
- [3] Бочкарев А. О., Греков М. А. Влияние поверхностных напряжений на жесткостные свойства и устойчивость нанопластины в задаче Кирша // *Физическая мезомеханика*. 2017. Т. 20. №. 6.
- [4] Eshel N. N., Rosenfeld G. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension // *Journal of Engineering Mathematics*, 1970, vol. 4, №. 2, pp. 97-111.
- [5] Khakalo S., Niiranen J. Gradient-elastic stress analysis near cylindrical holes in a plane under bi-axial tension fields // *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 110, pp.351-366.
- [6] Kaloni P. N., Ariman T. Stress concentration effects in micropolar elasticity // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1967, vol. 18, №. 1, pp. 136-141.
- [7] Dai M., Yang H. B., Schiavone P. Stress concentration around an elliptical hole with surface tension based on the original Gurtin-Murdoch model // *Mechanics of Materials*, 2019, vol. 135, pp. 144-148.
- [8] Mindlin R. D. et al. *Microstructure in linear elasticity*. – New York : Columbia University, 1963. – С. 0070.
- [9] Polizzotto C. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity // *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2017, vol. 61, pp. 92-109.

- [10] Askes H., Aifantis E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, №. 13, pp. 1962-1990.
- [11] Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Columbia Univ New York*, 1962.
- [12] Lurie S. A. et al. Dilatation gradient elasticity theory // *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, vol. 88, pp. 104258.
- [13] Gusev A. A., Lurie S. A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, №. 4, pp. 683-691.
- [14] Toupin R. Elastic materials with couple-stresses // *Archive for rational mechanics and analysis*, 1962, vol. 11, №. 1, pp. 385-414.
- [15] Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2015, vol. 38, №. 2, pp. 154-160.
- [16] Васильев В. В., Лурье С. А., Салов В. А. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабнo-зависимой обобщенной теории упругости // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21. №. 4.
- [17] Васильев В. В., Лурье С. А. Новый метод исследования прочности хрупких тел с трещинами // *Деформация и разрушение материалов*. 2019. №. 9. С. 12-19.
- [18] Sciarra G., Vidoli S. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials // *Journal of Elasticity*, 2013, vol. 113, №. 1, pp. 27-53.
- [19] Morel S., Dourado N. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model // *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, №. 10, pp. 1403-1412.

- [20] Bažant Z. P., Yu Q. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength // Journal of engineering mechanics, 2009, vol. 135, №. 2, pp. 78-84.
- [21] Bažant Z. P., Kazemi M. T. Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete // International Journal of fracture. – 1990. – Т. 44. – С. 111-131.
- [22] Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // European Journal of Mechanics-A/Solids, 2019, vol. 78, pp. 103853.
- [23] Васильев В. В., Лурье С. А., Салов В. А. Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. №. 4. С. 43-49.
- [24] Mengsha S. et al. Experimental and theoretical evaluation of influence of hole size on deformation and fracture of elastic perforated plate // Mechanics of Materials. – 2023. – С. 104841.
- [25] Лурье С. А., Дудченко А. А., Нгуен Д. К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. – 2014. – №. 75. – С. 4-4.
- [26] Ендогур А. И., Кравцов В. А. Напряженное состояние композиционной панели в зоне отверстия // Труды МАИ. – 2013. – №. 64. – С. 12-12.
- [27] Лурье А. И. Теория упругости. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.
- [28] Папкович П. Ф. Теория упругости. – 1939.
- [29] Lurie S. et al. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // Journal of materials science. – 2006. – Т. 41. – С. 6693-6707.
- [30] Lurie S. et al. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity: applications to composite materials // International Journal of Engineering Science, 2011, vol. 49, №. 12, pp. 1517-1525.

- [31] Лурье С. А., Белов П. А. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2006. – №. 14. – С. 114-132.
- [32] Образцов И. Ф. и др. Основы теории межфазного слоя //Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10. – №. 4. – С. 596-612.
- [33] Лурье С. А. и др. Масштабные эффекты в механике сплошных сред. материалы с микроструктурой и наноструктурой. – 2011.
- [34] Лурье С. А., Белов П. А. О масштабных эффектах в механике хрупкого разрушения //Деформация и разрушение материалов. – 2013. – №. 5. – С. 10-17.
- [35] Mindlin R. D., Eshel N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity //International Journal of Solids and Structures. – 1968. – Т. 4. – №. 1. – С. 109-124.
- [36] Ломакин Е. В. и др. Об уточнении напряжённого состояния в прикладных задачах упругости за счёт градиентных эффектов //Доклады Академии наук. – Федеральное государственное бюджетное учреждение" Российская академия наук", 2019. – Т. 489. – №. 6. – С. 585-591.
- [37] Васильев В. В., Лурье С. А. Новое решение плоской задачи о равновесной трещине //Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – №. 5. – С. 61-67.
- [38] Волков-Богородский Д. Б. и др. Моделирование эффективных модулей композиционных материалов с цилиндрическими включениями с учетом влияния масштабных эффектов //Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22. – №. 1. – С. 128-152.
- [39] Волков-Богородский Д. Б., Лурье С. А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости //Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – №. 4. – С. 182-192.
- [40] Ломакин Е. В. и др. Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов //Доклады

Академии наук. – Федеральное государственное бюджетное учреждение" Российская академия наук", 2018. – Т. 479. – №. 4. – С. 390-394.

[41] Ерофеев В. И., Шешенина О. А. Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2002. – №. 10. – С. 32-41.

[42] Ерофеев В. И., Шешенина О. А. Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2007. – №. 15. – С. 15-27.

[43] Eremeyev V. A., Lazar M. Strong ellipticity within the Toupin–Mindlin first strain gradient elasticity theory //Mechanics Research Communications. – 2022. – Т. 124. – С. 103944.

[44] Vatulyan A. O. et al. On the Structure of Solutions in the Vicinity of Discontinuity of Boundary Conditions for Gradient Models //Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev. – Cham : Springer International Publishing, 2023. – С. 687-698.

[45] Solyaev Y., Lurie S. Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions //Composite Structures. – 2018. – Т. 202. – С. 1099-1108.

[46] Лурье С. А., Соляев Ю. О., Посыпкин М. А. Метод идентификации масштабных параметров градиентной теории упругости на основе численных экспериментов для плоских композитных структур //International Journal of Open Information Technologies. – 2015. – Т. 3. – №. 6. – С. 1-6.

[47] Миронова Т. В. Анализ деформаций, оптических неоднородностей и дисторсионных искажений с помощью искусственных спеклов в цифровой фотографии : дис. – Физический институт им. ПН Лебедева Российской академии наук, 2012.

- [48] Solyaev Y. et al. On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories //International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Т. 239. – С. 111433.
- [49] Lurie A. I. Spatial problems of elasticity theory //Gostekhizdat, Moscow. – 1955.
- [50] Solyaev Y. Complete general solutions for equilibrium equations of isotropic strain gradient elasticity //arXiv preprint arXiv:2207.08863. – 2022.
- [51] Charalambopoulos A., Gortsas T., Polyzos D. On Representing Strain Gradient Elastic Solutions of Boundary Value Problems by Encompassing the Classical Elastic Solution //Mathematics. – 2022. – Т. 10. – №. 7. – С. 1152.
- [52] Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics //American Journal of Physics. – 1954. – Т. 22. – №. 6. – С. 410-413.
- [53] Qin Q. H. Trefftz finite element method and its applications. – 2005.
- [54] Zielinski A. P., Zienkiewicz O. C. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1985. – Т. 21. – №. 3. – С. 509-528.
- [55] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости // Москва: ГИТТЛ, 1955
- [56] Gourgiotis P. A., Georgiadis H. G. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2009. – Т. 57. – №. 11. – С. 1898-1920.
- [57] Aravas N., Giannakopoulos A. E. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity //International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Т. 46. – №. 25-26. – С. 4478-4503.
- [58] Dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S. Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials //Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2009. – Т. 465. – №. 2107. – С. 2177-2196.



- [59] Polizzotto C. A unifying variational framework for stress gradient and strain gradient elasticity theories //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2015. – Т. 49. – С. 430-440.
- [60] Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y. New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity //Engineering Fracture Mechanics. – 2021. – Т. 258. – С. 108080.
- [61] Anderson T. L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. – CRC press, 2017.
- [62] Papanicolopoulos S. A., Zervos A. Numerical solution of crack problems in gradient elasticity //Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics. – 2010. – Т. 163. – №. 2. – С. 73-82.
- [63] Ломакин Е. В. и др. Концентрация напряжений вблизи жестких цилиндрических включений в условиях антиплоского сдвига //Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2020. – Т. 495. – №. 1. – С. 50-56.
- [64] Ma H. et al. Inclusion problem in second gradient elasticity //International Journal of Engineering Science. – 2018. – Т. 132. – С. 60-78.
- [65] Jones E. M. C. et al. A good practices guide for digital image correlation //International Digital Image Correlation Society. – 2018. – Т. 10.
- [66] Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2019. – Т. 78. – С. 103853.
- [67] Короленко В., Соляев Ю. О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости //Труды МАИ. – 2021. – №. 121. – С. 4.
- [68] Korolenko V. A., Babaytsev A. V. Experimental assessments on the strain concentration around small-sized holes in PMMA //Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2024. – Т. 15. – №. 1. – С. 55-64.

- [69] dell'Isola F., Korolenko V. et al. Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2023. – С. 105153.
- [70] Соляев Ю. О., Короленко В. А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел в рамках градиентной теории упругости //XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – С. 1127-1129.
- [71] Christensen R. M. Mechanics of composite materials. – Courier Corporation, 2012.
- [72] Yuheng C., Chunyu Z., Biao W. A New High-order Deformation Theory and Solution Procedure Based on Homogenized Strain Energy Density //International Journal of Engineering Science. – 2024. – Т. 195. – С. 103990.
- [73] Andreaus U. et al. Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity //International Journal of Engineering Science. – 2016. – Т. 108. – С. 34-50.
- [74] Phunpeng V., Baiz P. M. Mixed finite element formulations for strain-gradient elasticity problems using the FEniCS environment //Finite Elements in Analysis and Design. – 2015. – Т. 96. – С. 23-40.
- [75] Reiher J. C., Giorgio I., Bertram A. Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity //Journal of Engineering Mechanics. – 2017. – Т. 143. – №. 2. – С. 04016112.
- [76] Lurie S., Solyaev Y., Shramko K. Comparison between the Mori-Tanaka and generalized self-consistent methods in the framework of anti-plane strain inclusion problem in strain gradient elasticity //Mechanics of Materials. – 2018. – Т. 122. – С. 133-144.
- [77] Ma H. M., Gao X. L. A new homogenization method based on a simplified strain gradient elasticity theory //Acta Mechanica. – 2014. – Т. 225. – №. 4-5. – С. 1075-1091.
- [78] Style R. W., Isa L., Dufresne E. R. Adsorption of soft particles at fluid interfaces //Soft Matter. – 2015. – Т. 11. – №. 37. – С. 7412-7419.

- [79] Solyaev Y., Babaytsev A. Direct observation of plastic shear strain concentration in the thick GLARE laminates under bending loading // *Composites Part B: Engineering*, 2021, vol. 224, pp. 109145.
- [80] Solyaev Y. O., Korolenko V. A. Application of Papkovich–Neuber General Solution for Crack Problems in Strain Gradient Elasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2023. – Т. 44. – №. 6. – С. 2469-2479.
- [81] Georgiadis H. G., Anagnostou D. S. Problems of the Flamant–Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity // *Journal of Elasticity*. – 2008. – Т. 90. – С. 71-98.
- [82] Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. – 2021. – Т. 163. – №. 2. – С. 181-196.
- [83] Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2021. – Т. 14. – №. 3. – С. 253-263.
- [84] Gao X. L., Ma H. M. Strain gradient solution for Eshelby’s ellipsoidal inclusion problem // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2010. – Т. 466. – №. 2120. – С. 2425-2446.
- [85] Соляев Ю. О. Неклассические масштабные эффекты в прикладных моделях градиентной теории упругости и электроупругости : диссертация ... доктора физико-математических наук : 1.1.8. / Соляев Юрий Олегович; [Место защиты: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» ; Диссовет МГУ.011.6]. – Москва, 2022. – С. 295.
- [86] Landon G., Lewis G., Boden G. F. The influence of particle size on the tensile strength of particulate—filled polymers // *Journal of materials Science*. – 1977. – Т. 12. – С. 1605-1613.