

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

На правах рукописи



**Платонов Иван Михайлович**

**ТЕПЛО-МАССООБМЕН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТРУЙ В РЕЖИМЕ  
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ  
АППАРАТОМ**

Специальность

01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель: к.т.н., доцент  
Быков Леонид Владимирович

Москва – 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. СПОСОБЫ УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ.....	12
1.1. Управление вектором тяги .....	12
1.2. Поворот сопла. Изменение геометрии сопла .....	12
1.3. Газовые рули .....	17
1.4. Интерцепторы .....	19
1.5. Управление вектором тяги за счет изменения объема рабочего тела.....	21
1.6. Поворот потока за счет двухконтурной подачи рабочего тела .....	30
1.7. Выдув струи наружу летательного аппарата перпендикулярно набегающему потоку.....	31
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.....	35
2.1. Основные уравнения .....	35
2.2. Формы записи системы уравнений.....	36
2.3. Уравнения состояния .....	37
2.4. Вязкие напряжения. Тепловые и диффузионные потоки.....	38
2.5. Переносные свойства .....	39
2.6. Моделирование турбулентности.....	41
2.6.1. Осреднение основных уравнений .....	41
2.6.2. Коэффициент турбулентной вязкости .....	44
2.6.3. Модель напряжений Рейнольдса.....	46
2.6.4. К-ε модель турбулентности .....	49
2.6.5. К-ω модель Уилкокса .....	50
2.6.6. Модель Спаларта-Аллмараса.....	51
2.6.7. SST модель турбулентности .....	54
2.6.8. Модель Transition SST .....	56
2.7. Химическая кинетика.....	60
2.7.1. Общие положения .....	60
2.7.2. Химические реакции диссоциации .....	63

ГЛАВА 3. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ.....	64
3.1. Решение тестовой задачи для решения задачи сеточной независимости расчётной сетки на получаемые результаты .....	67
3.2. Выбор модели турбулентности и верификация по данным экспериментов .....	70
3.3. Верификация полной математической модели на экспериментальных данных .....	71
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОДОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	74
4.1. Исследование характеристик газодинамического управления на основе поворотного сопла в варианте разрезного исполнения.....	77
4.2. Исследование характеристик газодинамического управления на основе газовых рулей.....	81
4.3. Исследование характеристик газодинамического управления на основе интерцепторов в варианте выдвижных щитков .....	86
4.4. Исследование характеристик газодинамического управления на основе системы вдува для деформации струи двигательной установки .....	91
4.5. Исследование характеристик газодинамического управления на основе выдува струи в набегающий поток.....	94
4.6. Анализ характеристик методов газодинамического управления.....	98
ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СТРУИ С НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ И РЕАКТИВНОЙ СТРУЕЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ .....	100
5.1. Эжектирование струи в заторможенный поток .....	101
5.2. Эжектирование струи в сносящий поток .....	104
5.3. Эжектирование струи в сносящий поток при работе двигательной установки.....	108
5.4. Влияние скорости набегающего потока на характер обтекания и эффективность газодинамического управления .....	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	116
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	118

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы исследования и степень ее разработанности**

Развитие авиационной и ракетной техники в настоящее время предъявляет все новые требования к находящимся в эксплуатации и создаваемым образцам летательных аппаратов (ЛА). Необходимость повышения скоростных и маневренных характеристик ЛА в полной мере относится и к классу авиационных управляемых ракет (АУР): ракета должна обладать хорошими скоростными характеристиками, высокой управляемостью и малой заметностью. Исторически принципы управления АУР унаследовали от самолетов, т.е. создание управляющего момента по изменению направления движения создавались за счет отклонения аэродинамических рулей. Возросшие скорости полета АУР привели к росту аэродинамических нагрузок на управляющие элементы (аэродинамические рули). Увеличение нагрузки на аэродинамические рули приводит в итоге к необходимости усиления их конструкции, а, следовательно, и к увеличению массы или ограничениям по углу отклонения, что ведет к потере эффективности управляющего воздействия.

Ограниченность возможности принципиального улучшения характеристик аэродинамического управления АУР сделала актуальной необходимость разработки альтернативных методов управления АУР, а именно, газодинамического метода управления (ГДУ). В настоящее время фактически не существует универсальных методов анализа эффективности методов газодинамического управления авиационными управляемыми ракетами, поэтому создание математической модели и методики расчета газодинамических и тепловых параметров течений при полете АУР в режиме газодинамического управления представляет собой актуальную задачу современной аэрокосмической техники.

Известные примеры метода газодинамического управления полетом ЛА основаны на методах УВТ [1].

Управление вектором тяги подразумевает под собой направление части тяги двигательной установки под углом к направлению полета летательного аппарата [2]. УВТ позволяет улучшить управляемость, но при этом уменьшает доступную тягу двигательной установки, так как часть полной тяги отбирается на совершение маневров. В частности, для твердотопливных ракет такой подход отражен в работе Н.И. Асеинова и И.В. Буртыля. [3].

На настоящий момент известны несколько методов управления вектором тяги авиационной управляемой ракеты: поворот сопла двигателя в его дозвуковой или сверхзвуковой части; ввод щитков/лопаток в исходящий из сопла поток; несимметричный впрыск рабочего тела в поток. Такие методы можно условно разделить на три категории: изменение геометрии сопла; деформация истекающей струи за счет впрыска в нее дополнительного объема газа; отклонение истекающей из сопла струи за счет введения препятствий в поток.

#### **Цель диссертационной работы.**

Целью работы является исследование процессов теплообмена и газовой динамики в результате сложного взаимодействия гетерогенных потоков: струи ракетного двигателя, управляющей струи системы газодинамического управления авиационной управляемой ракетой и сносящего потока.

#### **Основные задачи диссертационной работы:**

Для достижения указанной цели в работе решены следующие задачи:

- определены граничные условия полёта АУР в плотных слоях атмосферы;
- разработана математическая модель процессов теплообмена и газовой динамики, характерных для полета АУР при обтекании сверхзвуковым потоком;
- разработана математическая модель процессов теплообмена и химической кинетики в камере сгорания и истекающих струях;
- разработана методика численного решения основных уравнений, входящих в математическую модель, проанализированы особенности методики, проведено исследование сеточной независимости решаемой задачи;

- проведена верификация разработанной математической модели на основе сравнения результатов с экспериментальными данными и расчетными исследованиями других авторов;

- проведены численные исследования параметров теплообмена и аэродинамических характеристик АУР для различных способов управления вектором тяги;

- проанализированы эффекты, возникающие при взаимодействии управляющей струи со сносящим потоком, струей ракетного двигателя, поверхностью корпуса ракеты.

**Объект исследования** – авиационные управляемые ракеты класса «воздух – воздух» с различными системами газодинамического управления.

**Предмет исследования** – теплообмен и газовая динамика течения при комплексном взаимодействии управляющих струй системы газодинамического управления АУР со сносящим потоком, струей ракетного двигателя, поверхностью корпуса ракеты.

**Методология исследования** основана на проведении численного эксперимента по изучению теплофизических и газодинамических характеристик течений при газодинамическом управлении АУР.

**Научная новизна работы:**

1. Впервые построена математическая модель теплообмена и газовой динамики полета АУР, использующих газодинамическое управление для создания поворотного момента.

2. Получены таблицы сравнительных характеристик управляющих моментов и аэродинамического качества при различных методах газодинамического управления АУР.

3. Исследованы и проанализированы параметры процессов теплообмена и газовой динамики в результате сложного взаимодействия струй: струи ракетного двигателя, управляющей струи системы газодинамического управления АУР под воздействием сносящего потока.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическая ценность работы заключается в создании математической модели, позволяющей с хорошей точностью рассчитывать параметры процессов, характерных для газодинамического управления АУР.

Практическая значимость работы состоит в рекомендациях по выбору метода газодинамического управления АУР в соответствии с условиями ее применения при разработке перспективных и модернизации существующих образцов ракетной и авиационной техники.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель, описывающая внутренние и внешние течения, сопровождающие полет АУР при маневрировании в плотных слоях атмосферы со сверхзвуковой скоростью при включенной силовой установке.
2. Сравнительный анализ эффективности различных методов газодинамического управления.
3. Рекомендации по организации использования продуктов сгорания в качестве рабочего тела при применении метода газодинамического управления.
4. Анализ сложных трехмерных структур, образующихся при взаимодействии управляющей струи со струей ракетного двигателя и элементами АУР под воздействием сносящего потока.

**Степень достоверности результатов** работы подтверждается использованием математических моделей, основанных на фундаментальных законах механики и теплофизики, удовлетворительным совпадением результатов численного моделирования, проведенного с использованием предложенной модели, с данными стендовых экспериментов, расчётными данными других авторов, полученными при прочих равных начальных условиях.

**Личный вклад автора** заключается в разработке математической модели, описывающей внутренние и внешние течения, сопровождающие полет АУР при маневрировании в плотных слоях атмосферы со сверхзвуковой скоростью при включенной силовой установке, проведении комплекса расчетных работ для АУР

различных массогабаритных схем и методов газодинамического управления, анализе и интерпретации полученных данных.

#### **Апробация работы.**

Основные положения диссертации и результаты работы докладывались на всероссийских и международных конференциях: «Инновации в авиации и космонавтике-2015»; «Новые решения и технологии в газотурбостроении»-2015; «Авиация и космонавтика-2015»; «Гагаринские чтения-2016»; «Гагаринские чтения-2017»; «Международной конференция по Вычислительной Механике и Современным Прикладным Программным Системам (ВМСППС'2017); «Гагаринские чтения-2018»; «XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019)».

#### **Публикации по теме диссертации.**

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 13 работах [4-16], 5 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

#### **Структура и объем диссертации.**

В представленной работе рассмотрены различные методы УВТ, проведен анализ их достоинств и недостатков. Рассмотрен метод газодинамического управления АУР, оценены его преимущества и недостатки по сравнению с методами УВТ.

Особое внимание уделено изучению структуры газовой динамики, характерной для газодинамического управления АУР, распределению тепловых полей и организации отбора рабочего тела из камеры сгорания для формирования управляющей струи. В работе использован обширный опыт исследований, проведенных разными авторами при решении многопараметрических задач термо-газодинамики и тепло-массообмена применительно к проблеме обтекания тел сверхзвуковым потоком.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы. Работа представлена на 127 страницах основного текста, включающего 66 рисунков, 21 таблицу и список литературы из 81 наименования.



Решение сформулированных выше задач и критический анализ полученных результатов представлены в соответствующих разделах работы.

### **Краткое содержание работы.**

**Во введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертации, сформулированы цель и задачи работы. Показана новизна работы, её научная и практическая значимость, достоверность и обоснованность результатов. Кратко охарактеризованы методы исследования, используемые в работе.

**В первой главе** рассмотрены статьи, диссертации и материалы конференций отечественных и зарубежных авторов по тематике газодинамического управления летательным аппаратом.

**В главе 2** представлена математическая модель, описывающая как обтекание поверхности ЛА высокоскоростным потоком, так и высокотемпературное течение в тракте и сопле двигательной установки.

**В главе 3** проведена верификация математической модели на сравнении с результатами экспериментальных стендовых испытаний, а также экспериментальными данными других авторов.

**В главе 4** проанализированы существующие методы газодинамического управления вектором тяги БЛА и сделаны выводы об их эффективности и границах применимости.

**В главе 5** проанализированы сложные трехмерные структуры, явившиеся результатом комплексного взаимодействия управляющей струи с поверхностью ЛА, сносящим потоком и ядром потока двигательной установки.

### **Публикации автора:**

1. Платонов. И.М. Решение задачи горения водорода в сверхзвуковом потоке с помощью модуля Ansys CFX [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2015. N 82. 13 с. Режим доступа: [http://trudymai.ru/upload/iblock/a7b/platonov\\_rus.pdf?lang=ru&issue=82](http://trudymai.ru/upload/iblock/a7b/platonov_rus.pdf?lang=ru&issue=82)

2. Платонов И. М., Молчанов А. М., Быков Л. В. Анализ влияния геометрических характеристик сопла на тягу гиперзвукового двигателя // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. N 9. С. 405-409.

3. Платонов И.М., Быков Л.В. Исследование влияния качества сеточной модели на определение местоположения ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле [Электронный ресурс] // Труды МАИ: 2016. N 89. 12 с. Режим доступа:

[http://trudymai.ru/upload/iblock/329/platonov\\_bykov\\_rus.pdf?lang=ru&issue=89](http://trudymai.ru/upload/iblock/329/platonov_bykov_rus.pdf?lang=ru&issue=89).

4. Molchanov A.M., Bykov L.V., Platonov I.M., Yanishev D.S. Influence of geometric parameters and chemical kinetics model on combustion in a supersonic flow // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2017. Vol. 44(6). P. 553-563.

5. Быков Л. В., Молчанов А. М., Янышев Д. С., Платонов И. М. Современные подходы к расчету характеристик течения при ламинарно-турбулентном переходе в пограничном слое // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. N 1. С.104–120.

6. Платонов И.М. Программный комплекс Ansys для моделирования задач газовой динамики и химической кинетики // конф. «Инновации в авиации и космонавтике – 2015» (Москва, 21-23 апреля 2015). С. 84-85.

7. Платонов И.М., Молчанов А.М., Быков Л.В. Математическое моделирование процессов горения водорода в сверхзвуковой струе // Конф. мол. уч. и спец. Новые решения и технологии в газотурбостроении. (Москва, 26-28 мая 2015). Сборник тезисов докладов. М.: ЦИАМ, 2015. С. 179-180.

8. Платонов И.М., Быков Л.В., Молчанов А.М. Ламинарно-турбулентный переход – состояние вопроса и проблемы // 14-й межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2015» (Москва, 16-20 ноябрь 2015). Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2015. С. 447-449.

9. Платонов И.М. Исследование влияния турбулентности набегающего потока на устойчивость ламинарного пограничного слоя на скользящем крыле // Гагаринские чтения – 2016: 42-я Межд. мол. Научн. конф.: Сборник тезисов докладов: В 4 т. (Москва, 12-15 апреля 2016). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2016. С. 336-336.

10. Платонов И.М., Янышев Д.С. Численное моделирование рабочих параметров экспериментальной установки по изучению образования наледи на

поверхности летательного аппарата // Гагаринские чтения – 2017: 43-я Межд. мол. Науч. конф.: Сборник тезисов докладов. (Москва, 05-19 апреля 2017). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2017. С. 1032-1033.

11. Платонов И.М., Быков Л.В., Янышев Д.С. Численное моделирование рабочих параметров экспериментальной установки для изучения образования наледи на элементах конструкции летательных аппаратов // Мат. XX Юбилейной международной конф. по вычислительной механике и современным прогр. системам-2017 (Алушта, 24-31 мая 2017). М.: Издательство МАИ-Принт, 2017. С.529-531.

12. Ежов А.Д., Платонов И.М. Беспилотный летательный аппарат реактивного старта с изменяемым положением крыла // «Гагаринские чтения – 2018»: XLIV Межд. мол. Науч. Конф. (Москва, 17-20 апреля 2018). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2018., Т. 1, с. 47.

13. Платонов И.М., Быков Л.В., Пашков О.А. Анализ влияния качества сеточной модели на результаты расчета параметров высокоскоростного течения в сносящем потоке // XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, май 2019). Сборник тезисов докладов. М.: Издательство МАИ-Принт, 2019. С.530-531.

# **ГЛАВА 1. СПОСОБЫ УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

## **1.1. Управление вектором тяги**

Под управлением будем понимать процесс изменения параметров движения ЛА в желаемом направлении и целенаправленное воздействие на работу отдельных систем, на характеристики ЛА для достижения заданной цели. Органы управления летательного аппарата – технические устройства, с помощью которых регулируются величина и направление сил и моментов, действующих на ЛА [17, 18]. В рамках данной работы рассматриваются методы газодинамического управления ЛА на примере АУР.

Наиболее наглядно газодинамические методы управления можно продемонстрировать на примере использования таких методов на современных самолетах.

## **1.2. Поворот сопла. Изменение геометрии сопла**

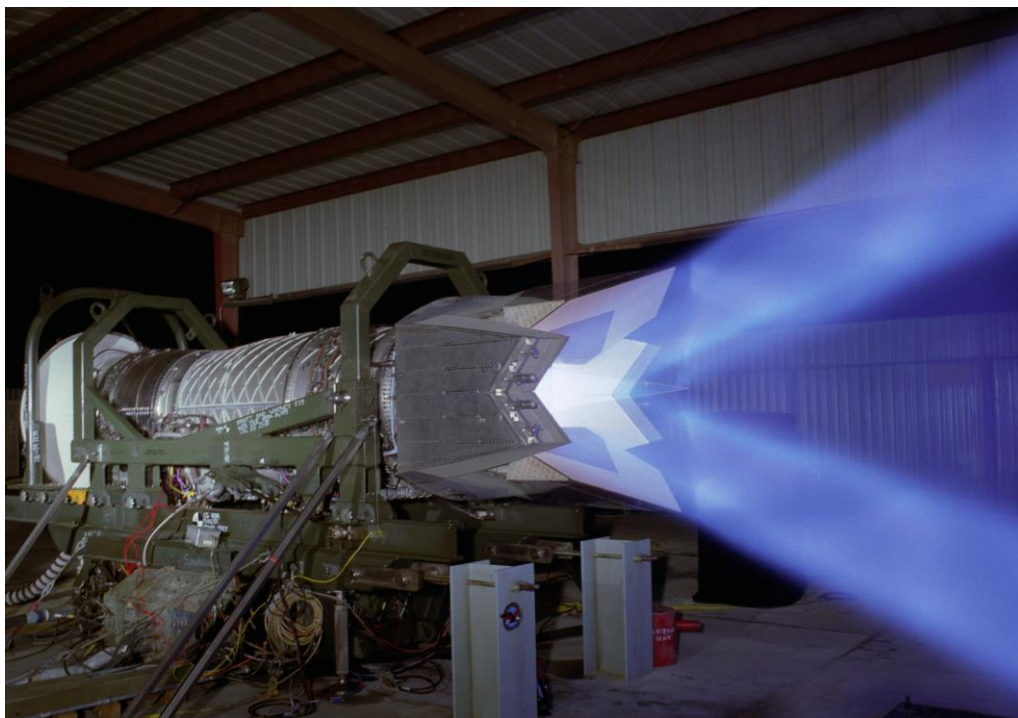
Достаточно распространенным методом управлением вектором тяги является изменение геометрической конфигурации сопла двигателя. Если двигатель физически развернуть в каком-то направлении, то часть тяги перераспределится в том же направлении. Исследованию физической картины обтекания отклоняемых сопел при взаимодействии с набегающим потоком посвящена серия работ [19, 20]. При этом перенаправленная часть тяги отнимается от полной тяги двигателя, что, по сути, является потерями производительности двигателя.

Примером механического изменения геометрии сопла могут служить самолеты F-22 и F-35. На рисунке 1.1 можно рассмотреть разворот сопла для получения возможности вертикального взлета и посадки.



**Рис 1.1. Схема поворотного двигателя в режиме вертикального взлета и посадки**

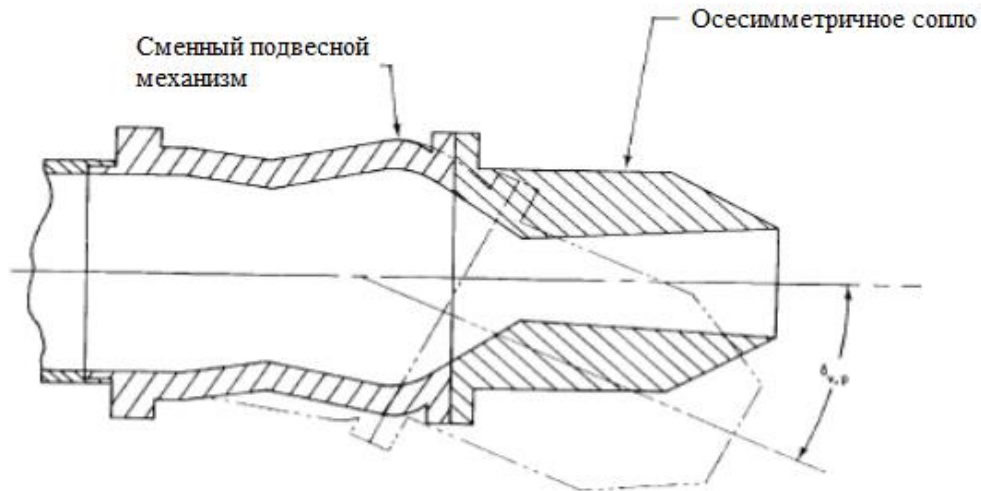
На рисунке 1.2 представлен двигатель F-119. Хорошо видны пределы отклонения струи.



**Рис. 1.2. Отклонение вектора тяги на двигателе F-119.**

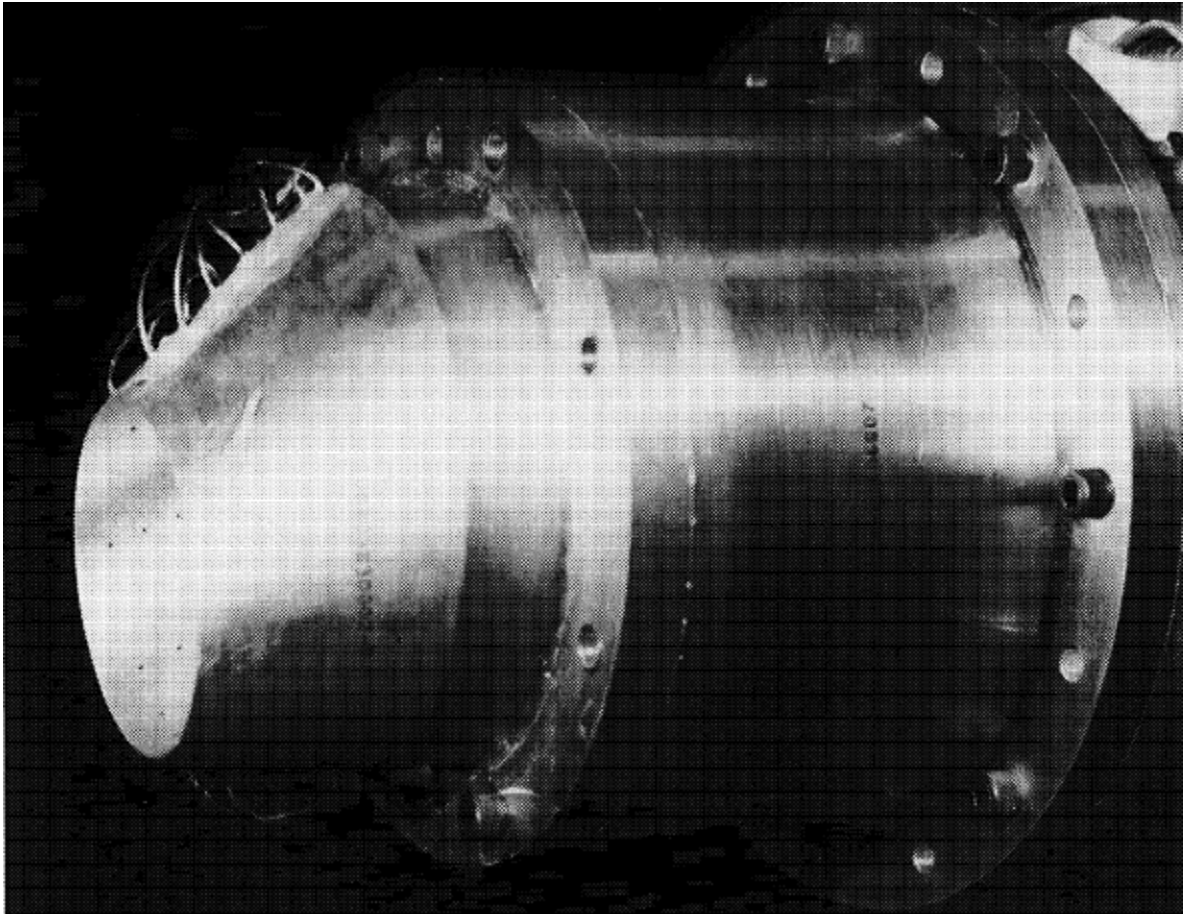
Берриер и Тейлор предложили использовать механизм подвесного типа для поворота потока. На рисунке 1.3 приведена схема поворотного сопла [21]. Отмечается, что при расположении поворотного механизма в дозвуковой, докритической зоне сопла, потери тяги двигателя от поворота потока значительно снижаются. Авторами приводятся результаты экспериментов, получившиеся при

отклонении угла вектора тяги до  $25^\circ$  при использовании сопел с различной степенью расширения. При этом потери тяги отмечаются малыми или даже незначительными.



**Рис. 1.3. Схема поворотного сопла. Источник: [21].**

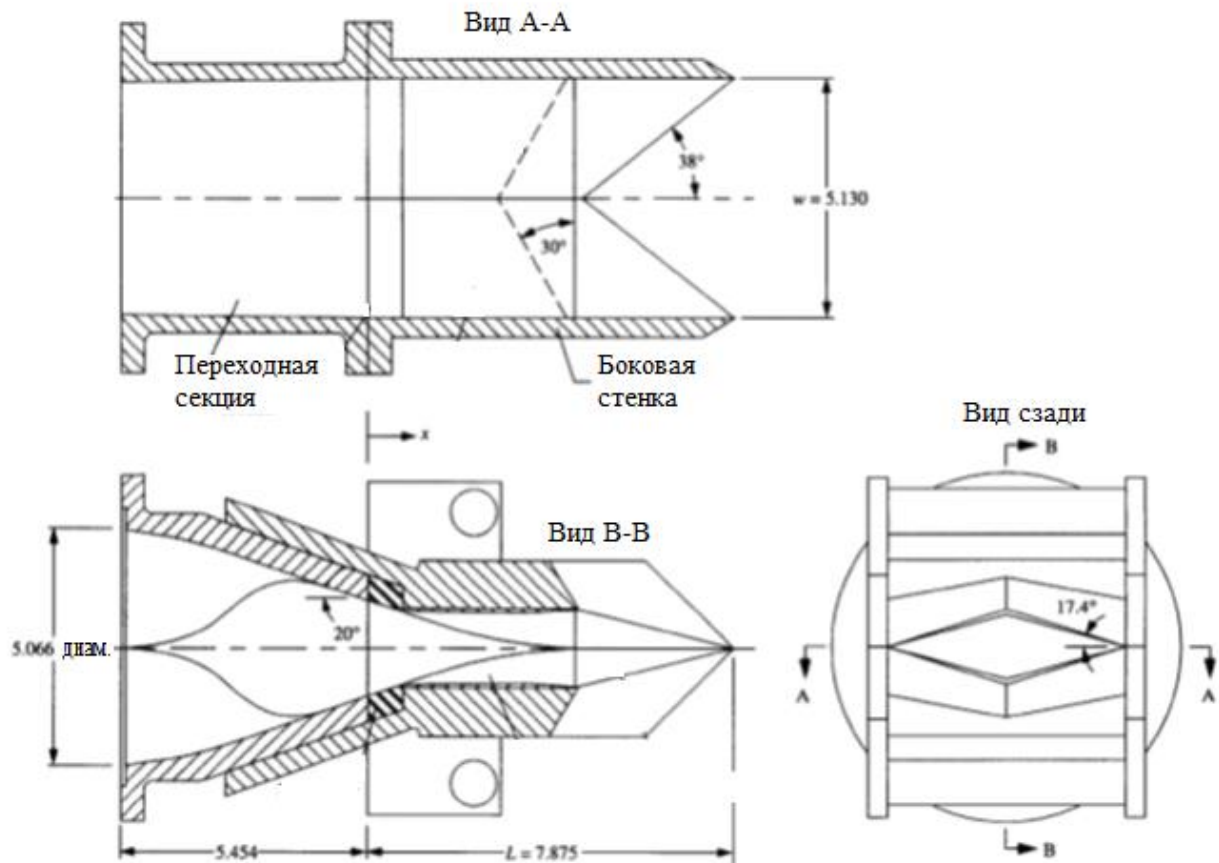
Карсон и Капон в [22] предложили производить УВТ за счет поворота потока в сверхзвуковой части сопла. Они использовали осесимметричное сопло с круговой сегментированной расходящейся насадкой (Рис.1.4). В указанной работе рассматривались различные модельные масштабные геометрии и режимы работы: угол отклонения поверхности от  $0$  до  $30^\circ$  и коэффициентом давления вплоть до  $8,0$ . Измеряя давление вдоль расширяющейся части сопла, Карсон и Капон обнаружили, что аэродинамическое сопло смещается в результате отражения от расходящихся насадок и не зависит от критического сечения сопла. При этом настоящее местоположение аэродинамического критического сечения зависит от степени расширения сопла и наклона по отношению к центральной оси. По результатам исследования ученые пришли к выводу, что поворот потока (вектора тяги) происходит в дозвуковой части сопла. При этом потери в тяге были незначительны.



**Рис. 1.4. Сопло с сегментированной круговой насадкой. Источник: [22].**

Рассмотренные конфигурации сопла оказывались эффективными только при достаточном давлении в сопле, когда обеспечивалось безотрывное течение на стороне сопла, противоположной направлению поворота струи. При коэффициенте давления сопла равном 3, удалось достичь величин углов отклонения вектора тяги до  $37^\circ$ . Наблюдаемое смещение и наклон аэродинамической критики является результатом изменения геометрической конфигурации сопла.

Винг и пр. [23] предложили концепцию, способную регулировать положение аэродинамической критики за счет изменения внутренней геометрии прямоугольного канала сопла (рисунок 1.5). Критическое сечение за счет такой регулировки можно было перемещать вверх и вниз по потоку. Предполагалось снижение потерь тяги при повороте потока в дозвуковой области сопла при изменении наклона и положения аэродинамической критики.



**Рис. 1.5. Схема прямоугольного сопла с изменяемой геометрией. Конфигурация «хвост ласточки». Размеры в дюймах. Источник: [23].**

Винг и др. исследовали несколько модельных конфигураций. Расширяющаяся часть сопла быстро переходила в горизонтальные поверхности, что не позволяло извлечь дополнительную тягу из недорасширенного течения. Показания датчиков тяги и давления свидетельствовали о наличии зон отрыва и обратных токов. Тяга сопла в стандартном положении конфигурации оказалась на 1-2% хуже обычных сопел. В ходе исследования было проверено несколько конфигураций геометрии по углу тангажа и рысканья. Изменение геометрии внутреннего канала для поворота потока в плоскости тангажа не дало положительных результатов. В некоторых случаях, особенно при низком коэффициенте давления сопла, отклонить поток на значимый угол не удалось. Значения измеренного давления показали, что, вопреки ожиданиям, формирование прямого скачка в критической части сопла не происходило. Для совершения поворота потока были размещены дополнительные преграды на



сужающейся части сопла для поджатия критики. Такой подход позволил получить прямой скачок в желаемом месте, но дополнительная геометрия создала помехи течению, что привело к значительным потерям тяги. При этом значительного поворота потока получить не удалось. Максимальное отклонение вектора тяги, которое удалось достичь этим методом, составили  $6^\circ$ . В плоскости рысканья такое управление потоком позволило достичь отклонения потока на угол в  $11^\circ$ . При увеличении коэффициента давления сопла максимальное значение угла отклонения тяги уменьшалось и при некоторых конфигурациях принимало отрицательные значения.

На основании проведенных исследований авторы сделали вывод, что изменение внутренней конфигурации тракта сопла с учетом сложных взаимодействий с потоком не обеспечивает формирования необходимых управляющих моментов.

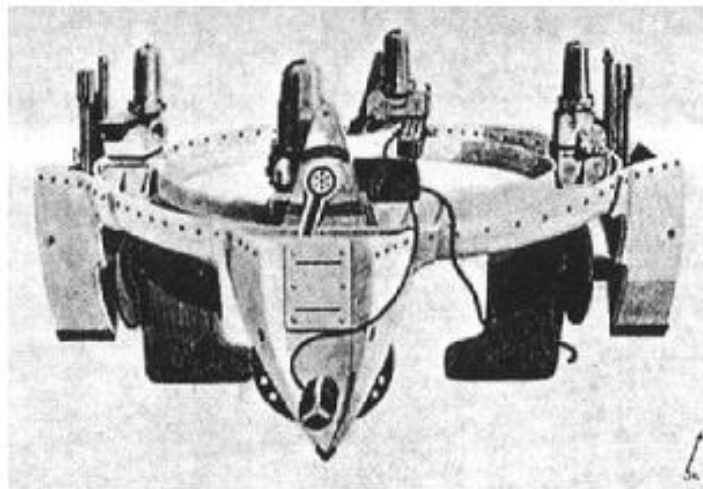
### **1.3. Газовые рули**

Альтернативой управления вектором тяги за счет манипуляций с геометрией сопла служит отклонение струи за счет размещения в сверхзвуковой части сопла отклоняющих поверхностей (газовых рулей). Газовые, или газодинамические рули нашли применение в управлении ракетами. Газовые рули могут применяться как в комбинации с аэродинамическими рулями, так и самостоятельно.

Газовые рули устанавливаются в зоне реактивной струи ракетного двигателя для управления положением ракеты-носителя. Они необходимы для стабилизации ракеты в начальный период движения, когда скорость ракеты мала, а также при полете в разреженной атмосфере. Две пары газовых рулей, отклоняемых относительно продольной оси ракеты-носителя, обеспечивают управление по тангажу, курсу и крену. Материалом для изготовления газовых рулей могут служить графит или жаропрочные сплавы [24].

Газовые рули использовались на первых баллистических ракетах, например, на ракете ФАУ-2 [25]. На ракете применялись четыре графитовые пластинки

(Рис.1.6), расположенные в зоне горячего потока. Отклонение производилось парой гироскопов.



**Рис. 1.6. Графитовые лопатки отклонения вектора тяги на Фау-2.**

Основным недостатком газовых рулей является потеря тяги двигателя при «нулевом» положении рулей из-за постоянного нахождения рулей в зоне газового потока двигателя, а также обеспечение потребного шарнирного момента привода рулей на уровне 1,5 – 2,0 кГм. [26]. Следует помнить, что газовые рули действуют только на активном участке полета, т.е. во время работы реактивного двигателя.

Стоит отметить, что в процессе работы газовые рули подвергаются значительной эрозии, что негативно сказывается на эффективности и величине управляющего воздействия. На рисунке 1.7. показаны начальный профиль пера газового руля, а также профиль, сохранившийся после стендовых испытаний [27].



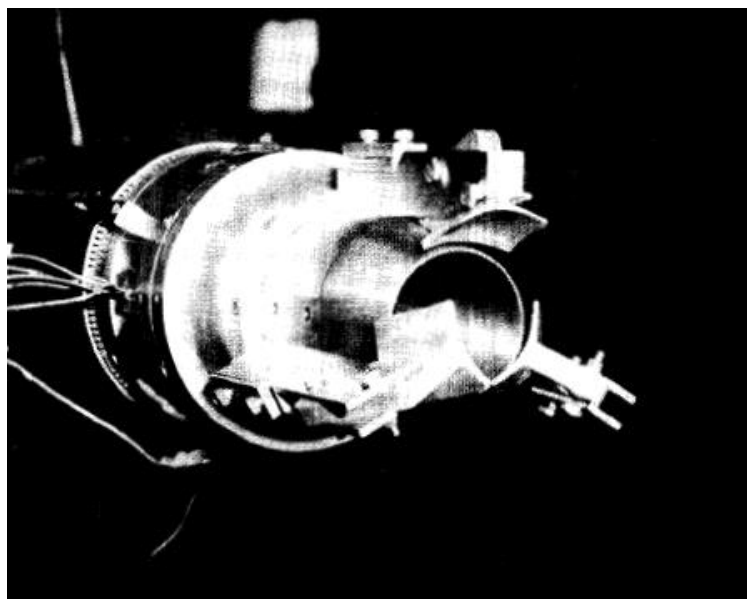
**Рис. 1.7. Профиль пера газового руля в начале (а) и в конце (б) работы твердотопливного двигателя. Источник: [27].**

#### 1.4. Интерцепторы

Управление вектором тяги может осуществляться с помощью щитков (интерцепторов), отклоняемых поверхностей, которые находятся за срезом сопла и в нейтральном положении не введены в поток, а вводятся в поток только для совершения маневров. Известно исследование Берриера и Масона [28], в котором авторами были рассмотрены различные конфигурации: изменялось количество и расположение щитков относительно сопла, искривление их поверхности, угол отклонения от центральной оси. Авторы рассмотрели несколько конфигураций на малоразмерной модели двигателя, работавшей на сжатом воздухе. Первые полученные результаты показали, что наибольшую эффективность проявили интерцепторы в форме «ложки», нежели плоская поверхность, изогнутая только вокруг одной оси. Исследователи, однако, отметили, что при увеличении степени отклонения струи общая тяга двигателя заметно падала.

Расположение крепления интерцепторов относительно оси сопла не оказало сильного воздействия, но радиальное расположение крепления показало возросшее воздействие на поток. При этом направление вектора потока соответствовало положению отклонения щитка интерцептора. Это позволяет осуществить УВТ в любом направлении на большие углы отклонения.

Берриер и Масон тестировали две мульти-лопаточных конфигурации, одна состояла из 3-х лопаток (Рис.1.8), вторая – из 4-х. Различия в эффективности обеих конфигураций оказались незначительными. Разница в подходах заключается в степени сложности организации отклонения тяги в направлении крена и рысканья.



**Рис. 1.8. Конфигурация перехватчиков с 3-мя отклоняемыми поверхностями. Источник: [28].**

Для описания связи между углом отклонения потока и потерями тяги был рассмотрен пример 3-х лопаточной конфигурации на сопле с коэффициентом давления равным шести. Одна лопатка была полностью введена в поток, были измерены угол отклонения потока –  $11.7^\circ$  и потерю тяги – 10%. При введении второй лопатки в поток удалось достичь угла отклонения потока в  $19^\circ$  при потерях тяги в 21%. Такие большие потери обусловлены поворотом сверхзвукового потока.

Несмотря на ограничения подхода с расположением щитков за соплом, были построены два самолета-демонстратора: F-18 HARV и X-31 Enhanced Fighter Maneuverability. Использование щитков для управления вектором тяги на самолетах показали возможность улучшения маневренности ЛА, хоть и в ограниченных масштабах. Поскольку щитки вызывают значительные потери тяги, имеет смысл применять их кратковременно, на закритических режимах углов атаки и на границе сваливания.

Примеры использования отклоняющихся поверхностей при газодинамическом управлении ЛА самолетного типа приведены на рисунке 1.9.

**F-18 HARV****X-31 и отклоняемые лопатки****Рис. 1.9. Примеры управления вектором тяги за счет лопаток.**

Измерения, выполненные при работе F-18 HARV [29] подтвердили потерю тяги при отклонении потока интерцепторами, наблюдаемую экспериментально Берриером и Масоном.

На рисунке 1.9. (F-18 HARV) показана наземная работа двигателя с отклонением потока. Видно, что истекающая из сопла струя направлена вверх, при этом наблюдается переток газа между двумя лопатками по направлению вниз.

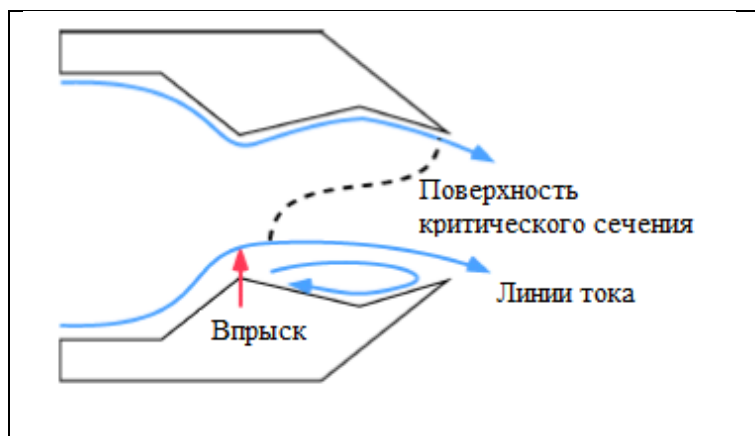
Исследованную выше конфигурацию крепления адаптировали к использованию в ракетной технике, т.к. размещение интерцепторов в другом месте является проблематичным ввиду малых габаритов изделия. Широкое применение интерцепторы получили в США на зенитных управляемых ракетах и ракетах класса «воздух-воздух».

### **1.5. Управление вектором тяги за счет изменения объема рабочего тела**

Описание течения, установившегося при впрыске газа в сверхзвуковой основной поток, является интересной технической задачей. Течения такого рода существуют при управлении вектором тяги ракеты, при регулировке реактивной тяги, при впрыске дополнительного горючего в сверхзвуковой поток.

Управление вектором тяги без изменения физической геометрии сопла осуществляется посредством впрыска рабочего тела в сверхзвуковое течение в сопле. При впрыске предполагается изменение течения вблизи стенки и формирование аэродинамического сопла. Такой подход позволяет создавать сопло как цельную конструкцию, что исключает необходимость использовать сложную механическую конструкцию управления.

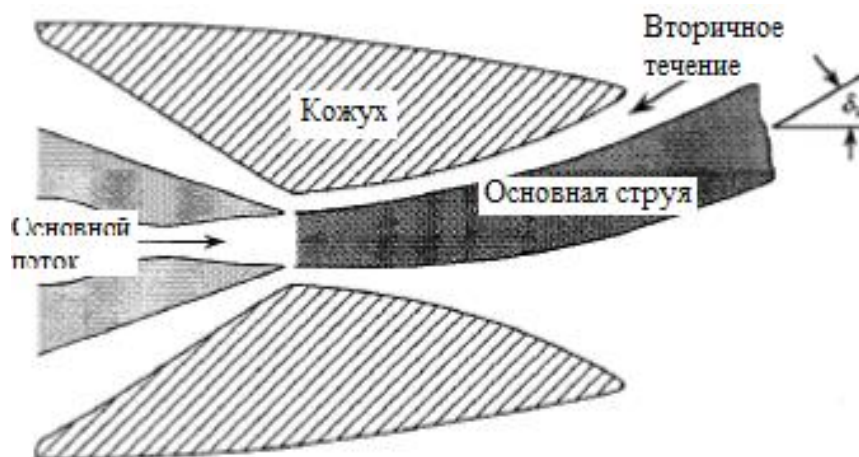
Управление вектором тяги за счет вдува [30] работает при создании скачковых препятствий в сверхзвуковом потоке. Во всех случаях применения, при подаче газа в основной поток, впрыскиваемое вещество ведет себя как препятствие основному потоку, при этом образуется сильная ударная волна (рисунок 1.10). Эта волна взаимодействует с пограничным слоем у поверхности стенки и формирует сложную систему течения, в том числе зоны повышенного и пониженного давления в области места впрыска. Такие преграды позволяют повернуть поток, но только за счет снижения полной тяги. При эффективности в 3,3°/%-массы впрыска, полученная тяга находится в интервале 85-94% от номинала [31].



**Рис. 1.10. Пример сопла с каверной. Впрыск происходит в критическом сечении.  
Источник: [31].**

Отклонение потока за счет создания обратного вторичного течения работает при отсосе массы из пограничного слоя между кромкой сопла и внешним кожухом [32]. При этом образуются обратные токи вдоль внешнего кожуха. Схема плоского сопла с крестообразной насадкой представлена на рисунке 1.11. В результате происходит падение давления и увеличение скорости тока в зоне разрежения, что создает дифференциал тяги. Такой подход позволяет

осуществить УВТ при снижении тяги до 92-97% от номинальных значений. Сложность метода заключается в необходимости установки дополнительного оборудования.



**Рис. 1.11.** Схема отклонения струи за счет обратных токов.  
Источник: [32].

Метод смещения аэродинамической критики сопла приводит к наименьшим потерям тяги, но при этом наименее эффективен. Он похож на метод механического изменения критики сопла, рассмотренный ранее, в том плане, что поворот потока осуществляется в дозвуковой области сопла. По принципу достижения результата есть отличия от механического превращения сопла: изменение геометрии происходит за счет впрыска рабочего тела и формирования аэродинамических структур. Эффективность метода – 2°/%-массы впрыска, полученная тяга находится в интервале 94 - 98% от номинала тяги [33]. Более эффективную методику управления вектором тяги по сравнению со смещением аэродинамического критического сечения предложили Деере и др. [33].

Они провели серию расчетов двумерного сопла с двумя критическими сечениями. Впрыск осуществлялся на первом сечении с расходом 6% от основного потока. В работе варьировали угол сужения перед второй критикой, расстояние между критиками, угол впрыска и минимальную ширину первого критического сечения.

Как показано в [33] увеличение угла сужения каверны с  $9^\circ$  до  $20^\circ$  приводит к увеличению эффективности угла отклонения с 1.49 до  $1.71^\circ$ /на % массы

впрыска, с пренебрежительно малыми потерями тяги. Снижение длины каверны не сильно повлияли на отклонение потока, но увеличило тягу на 1.5%. Уменьшение первой критики до размеров второго критического сечения увеличило эффективность управления вектором, но тяга снизилась на 2.2%.

Изменение угла впрыска оказало наибольшее воздействие на УВТ при минимальном изменении тяги. При смене угла с  $50^\circ$  относительно центральной оси (вниз по потоку) на  $150^\circ$  (вверх по потоку) привело к значительному росту поворота потока с 0,84 до  $2,15^\circ/\%$  впрыска. Отмечено, что важным фактором управления потоком является отрыв потока в каверне между критическими сечениями.

Используя результаты из работы [33], Деере и др. построили тестовый маломерный образец двухгорлового сопла с возможностью УВТ [34]. Были протестированы конфигурации сопла, оптимизированные под режим взлета, посадки, набора высоты и крейсерского полета. Для всех случаев впрыск производили вверх по потоку под углом  $150^\circ$ . Флам и др. пришли к выводу, что максимальное УВТ возможно при одинаковой площади критических сечений. Сопло с двумя одинаковыми критическими сечениями показало себя наиболее сбалансированным вариантом между возможностью отклонения вектора тяги и потерями полной тяги двигателя, по сравнению с механическим изменением геометрии сопла на всем диапазоне коэффициентов давления сопла.

Исследования по управлению вектором тяги за счет вдува воздуха после критического сечения также проводились группой авторов из ЦИАМ под руководством Воробьева С.В. [35]. В работе авторами рассматривались две формы сопла: плоская и осесимметричная. При организации впрыска воздуха с одной стороны канала плоского сопла после минимального сечения приводило к прилипанию струи к противоположной стороне канала за счет эффекта Коанда (рисунок 1.12).



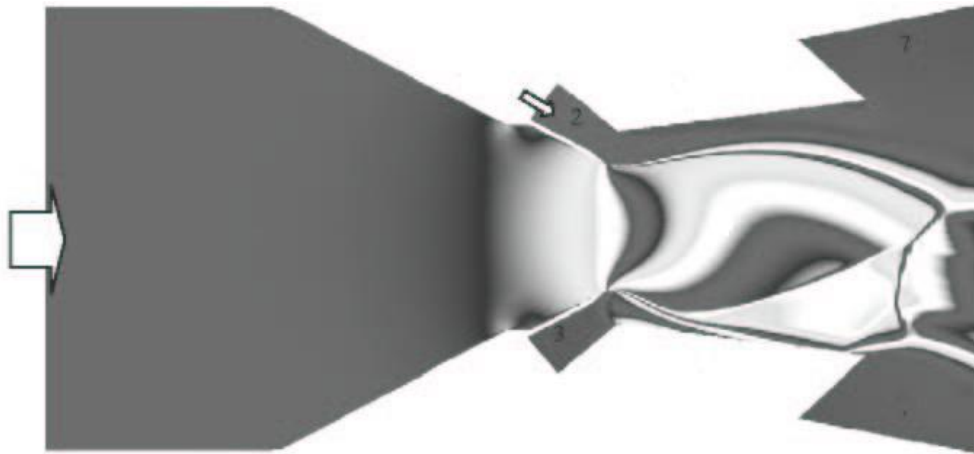


Рис. 1.12. Поле числа Маха плоского эжекторного сопла. Источник: [35].

При организации впрыска на осесимметричном сопле проще организовать всестороннее управление отклонением струи, но эффективность управления по сравнению с плоским каналом снижается.

Результаты анализа получаемого угла отклонения вектора тяги, в зависимости от перепада давления сопла, представлены на рисунке 1.13. Показано, что эффективное управление струей удалось получить на соплах, чей перепад давления не превышал значения  $\pi = 5$ . Предположительно, что для большего перепада давления необходимо организовывать сверхзвуковой впрыск воздуха в сверхзвуковой части сопла.

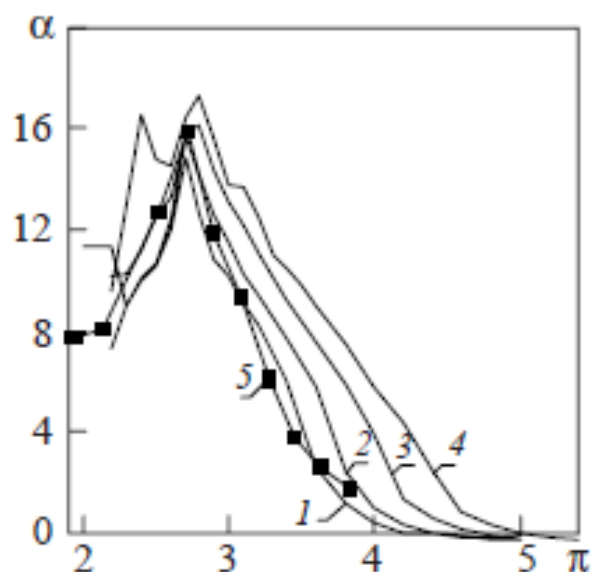
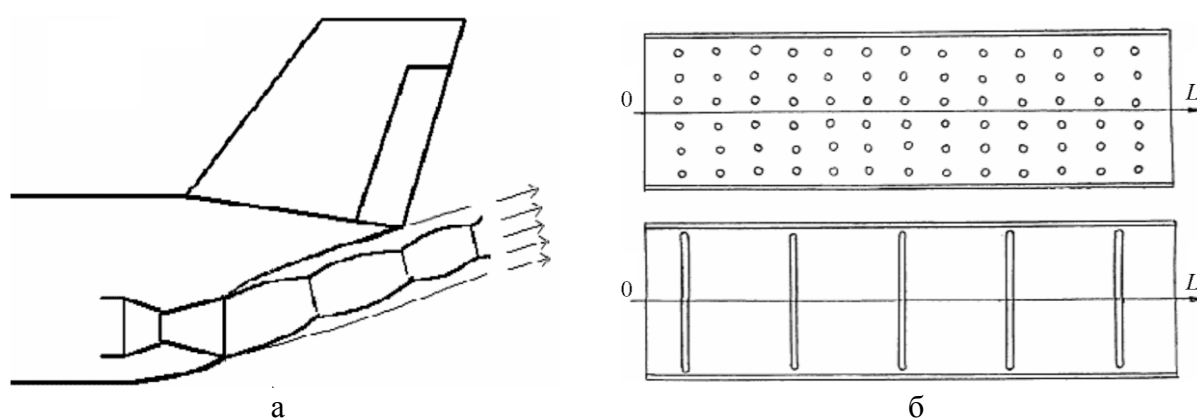


Рис. 1.13. Зависимость угла вектора тяги  $\alpha$  от степени повышения давления. Степень расширения сопла  $\epsilon$ : 1-1,69; 2 – 1,75; 3 – 1,84; 4 – 1,94. Источник: [35].

«Эксперименты на модельных соплах с инжекторным УВТ продемонстрировали линейную зависимость угла вектора тяги  $\alpha$  от отношения расходов инжектируемого и основного потоков с коэффициентом пропорциональности 3°/% в диапазоне до  $\pi = 5$ , что соответствует лучшим мировым результатам, полученным для данного способа управления» [35].

Работы по исследованию влияния вдува дополнительного расхода на эффективность газодинамического способа управления тягой проводили Жирников Б.Л. и др. [36]. Они рассматривали схему высокоскоростного летательного аппарата (Рис.1.14. а), в котором силовая установка была интегрирована с фюзеляжем, хвостовая поверхность фюзеляжа использовалась в качестве стенки сопла с внешним расширением реактивной струи. В работе рассматривались различные способы подачи воздуха: через равномерно перфорированную круглыми отверстиями поверхность, с плоскими щелевидными отверстиями, с наличием отклоняющего щитка (Рис.1.14. б). Наибольшую эффективность по устранению зон с отрицательным динамическим давлением проявил подход, когда весь дополнительный расход воздуха подавался через одно щелевое отверстие, расположенное ближе всего к срезу сопла. Причем чем сильнее скорость впрыска превышала скорость звука, тем эффективнее оказывалось управление потоком.



**Рис. 1.14. Пример использования сопла-расширительной стенки. а – схема течения за соплом на нерасчетном режиме; б - расширительная стенка модельного сопла с двумя типами перфорации. Источник: [36].**

В работе [37] в зависимости от режима полета реализуются различные схемы течения в сопле с расширительной стенкой. На маршевом режиме полета такая компоновка позволяет получить добавку тяги. Вектор тяги направлен прямо вперед и проходит через центр масс ЛА. Однако на начальных этапах полета расширительная стенка является источником сопротивления. При перепадах давления на сопле, соответствующих этим режимам полета, струя приобретает ячеистую структуру и прилипает к расширительной стенке. В результате перерасширения струи на стенке возникают зоны разрежения. Отрицательное избыточное давление на стенке вызывает появление силы, направленной вниз. Вектор эффективной тяги оказывается направленным не по оси аппарата, а отклоняется вниз, что приводит к появлению кабрирующего момента. Из-за большой площади омываемой струей поверхности этот момент настолько значителен, что его трудно парировать обычными органами управления.

Анализ влияния агрегатного состояния впрыскиваемого вещества в сопло ракеты на создаваемое боковое усилие проводился в работе [38]. В работах [39, 40] рассматривался вариант впрыска различных материалов в качестве дополнительного расхода. Экспериментально исследовались различные газодинамические характеристики потока. Впрыск осуществлялся в закритической части сопла. Расстояние от критики до точки впрыска варьировалось тремя вариантами ( $X/L=0,47; 0,3; 0,72$ ) (Рис.1.15).

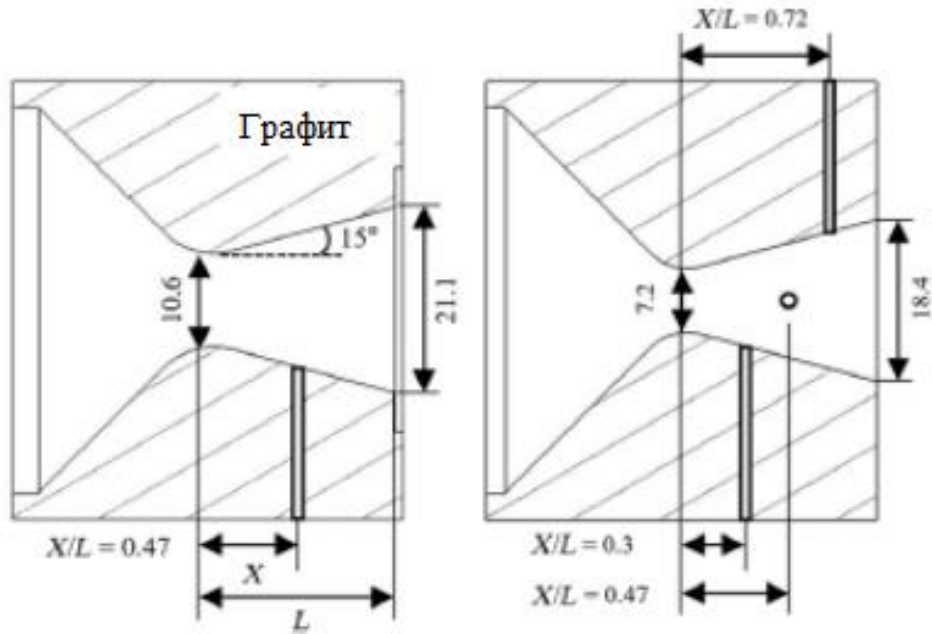


Рис. 1.15. Схема сопла с подачей дополнительного расхода в сверхзвуковую часть канала. Подача доп. расхода под давлением: слева  $P = 20$  бар, справа –  $P = 40$  бар. Источник: [40].

Отмечено, что впрыск при большем давлении в камере сгорания оказался более результативным по показателям боковой силы, при прочих равных. Поэтому исследование влияния расхода впрыска на боковую силу было проведено при удвоенном значении давления ( $P=40$ бар.). Рисунок 1.16 показывает практически линейную зависимость роста бокового усилия от роста расхода.

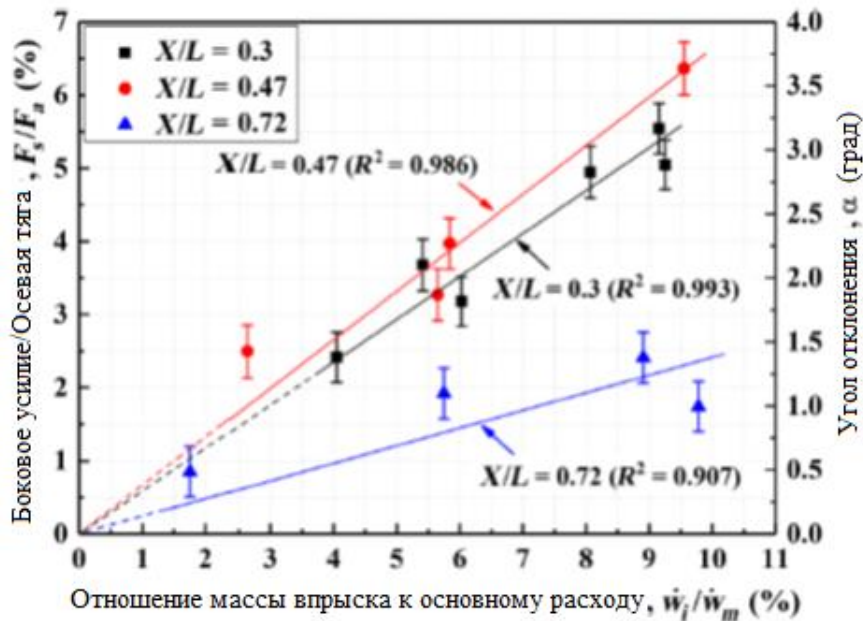
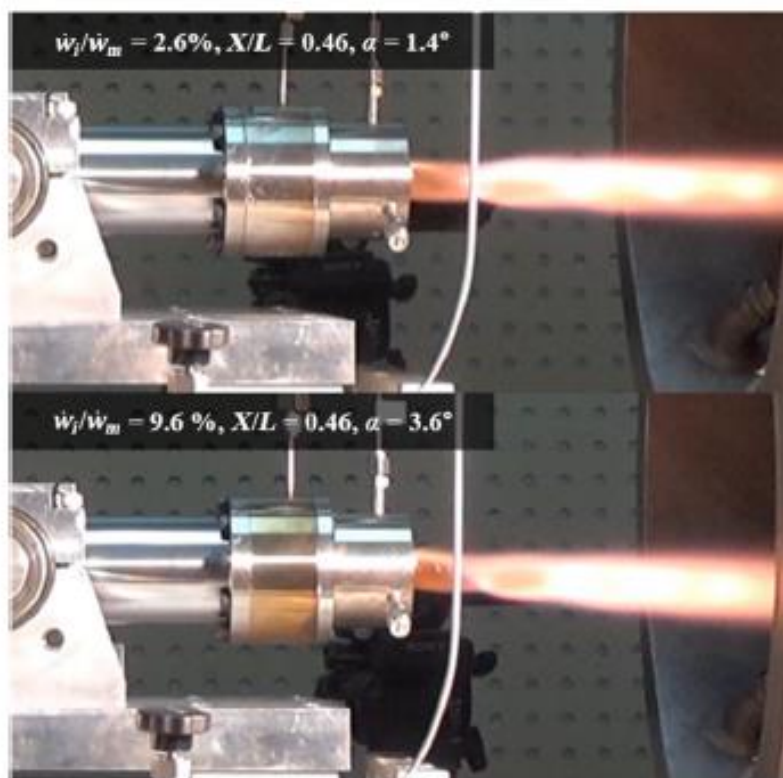


Рис. 1.16. Результаты испытаний при разных условиях впрыска. Источник: [40].

Наиболее эффективное место впрыска дополнительного расхода, определенное в результате исследования –  $X/L=0,47$ . Отклонение струи при расходе в 9% составило около  $3^\circ$  (Рисунок 1.17).

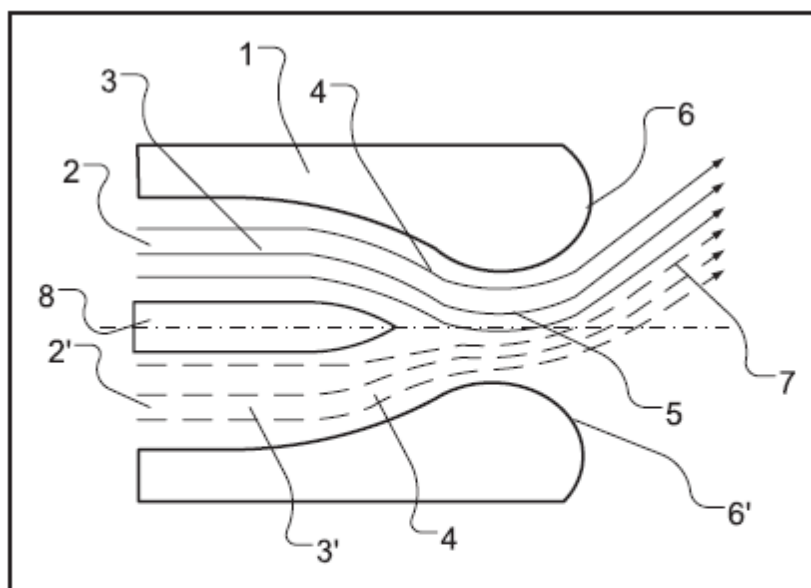


**Рис. 1.17. Фотография поворота струи при впрыске перекиси водорода в сопло. Источник: [40].**

Эйлерс и др. исследовали возможность применения УВТ на двигателе с внешней подачей топлива [41]. Изменение вектора тяги было получено путем впрыска рабочего тела перпендикулярно оси сопла. В качестве рабочего тела впрыска использовали  $CO_2$ . Меняя расположение места впрыска Эйлерс и др. анализировали воздействие впрыска на эффективность отклонения вектора тяги. Измерения в ходе эксперимента показали, что создаваемое боковое усилие не зависело от коэффициента давления сопла.

### 1.6. Поворот потока за счет двухконтурной подачи рабочего тела

Для реализации подхода управления вектором тяги за счет двухконтурной подачи рабочего тела (и использовании эффекта Коанда), авторами работы [42] была предложены форма сопла на малом беспилотном летательном аппарате (БПЛА), представленная на рис.1.18.



**Рис. 1.18. Сопло с двухконтурной подачей рабочего тела.**  
 1 – канал; 2,2' – струи/потоки; 3,3' – отсеки; 4 – область схождения потоков; 5 – горло сопла; 6,6' – Выпуклые поверхности Коанда; 7 – повернутый поток;  
 8 – центральное разделительное тело. Источник: [42].

Дозвуковая часть сопла была разделена на две секции, по которым рабочее тело поступало с разной скоростью в критическую часть сопла за счет двух винтов, вращающихся на разных оборотах. Авторам удалось получить достаточно большие углы отклонения струи. Результаты показаны на рисунке 1.19. Следует отметить, что данная схема использовалась при дозвуковом полете малого беспилотного летательного аппарата (БПЛА) и возможность распространения на сверхзвуковой полет требует дополнительных исследований.

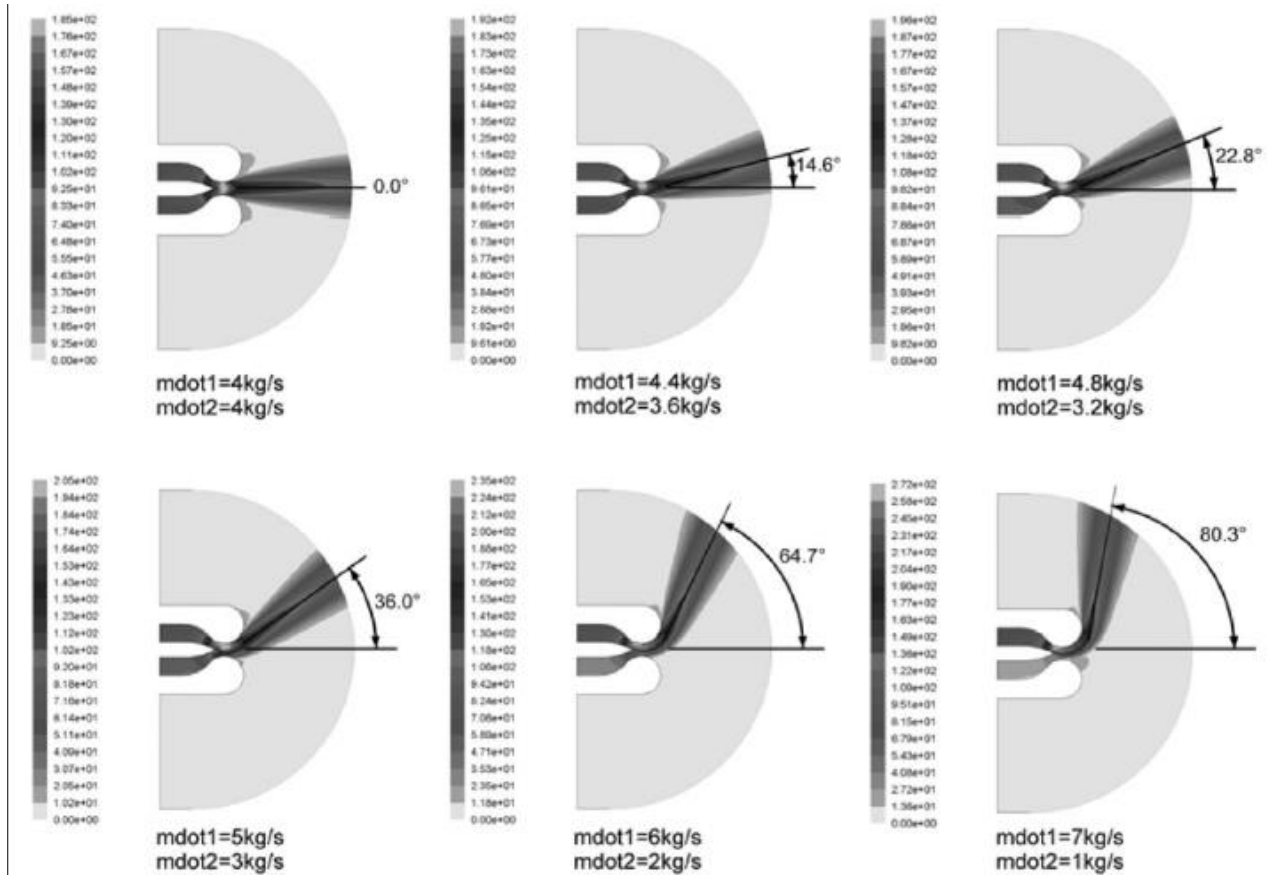


Рис. 1.19. Поворот струи при различных расходах рабочего тела. Источник: [42].

### 1.7. Выдув струи наружу летательного аппарата перпендикулярно набегающему потоку

Интересно рассмотреть возможность применения дополнительного расхода газа не для впрыска в сопло для деформации струи, а наружу, под углом к набегающему потоку. Примером использования выдува струи наружу для управления полетом ракеты может послужить перевод в горизонтальное положение ракет на начальном участке полета. При этом рабочее тело поступает из газогенератора, расположенного на носовой части ракеты в отдельном отделе от отсека.

В настоящей работе предлагается рассмотрение варианта подачи рабочего тела при его отборе из камеры сгорания. Таким образом, отпадает необходимость размещения дополнительной массы на борту ЛА. При таком методе управляющий

момент создается непосредственно реактивной струей, истекающей в набегающий поток. Тогда массовый расход на боковую струю полностью идет на создание поворотного момента. При этом запас давления в рабочей камере двигательной установки обеспечивает необходимые тяговые характеристики.

Исследованию эжекционных свойств струи в сносящем потоке посвящены множество экспериментальных и расчетных работ [43-46]. При взаимодействии двух потоков – сносящего потока и эжекционной струи, струя рабочего тела выступает в роли твердого препятствия, деформирующегося под воздействием сносящего потока. В результате такого взаимодействия формируется сложная трехмерная структура течения [47], которая показана на рисунке 1.20. При этом перед эжектируемой струей и в зоне смешения образуется подковообразный вихрь, который отделяет струю от набегающего потока [46, 48]. Отмечается, что на интенсивность смешения оказывают воздействие: перепад давления при впрыске, импульс струи, а также скорость набегающего потока [49].

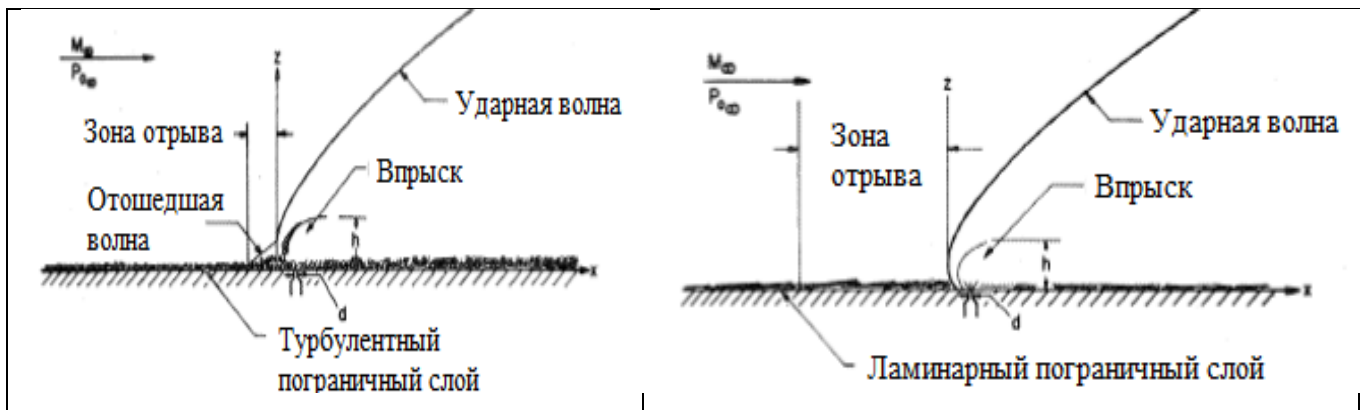


Рис. 1.20. Впрыск в сносящий поток. Источник: [47].

Экспериментальное исследование впрыска газа перпендикулярно набегающему потоку было проведено в работах [50, 51]. При проведении эксперимента варьировались следующие параметры: скорость набегающего потока, давление впрыска, угол атаки. На рисунках 1.21-1.23 показаны шлирен-фотографии течения на разных режимах.



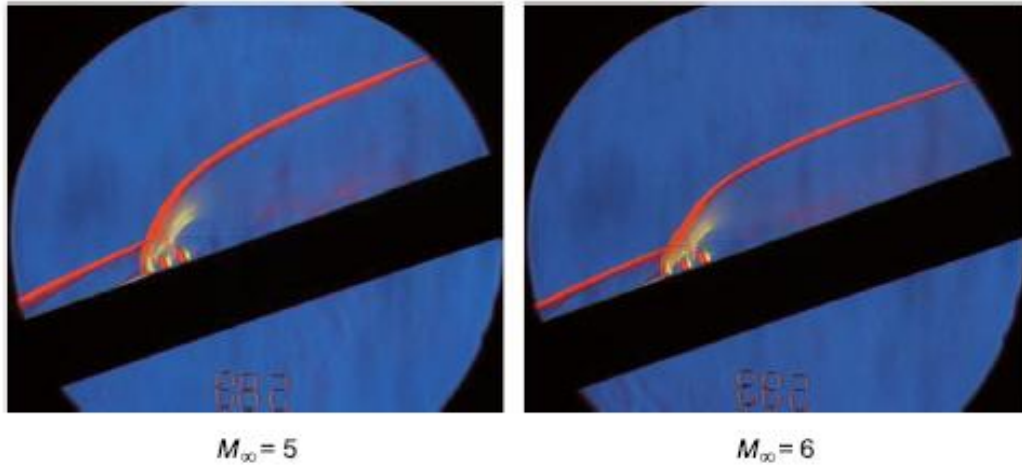


Рис. 1.21. Шлирен-фотографии при изменении скорости набегающего потока. Угол атаки  $\alpha = -20^\circ$ . Источник: [51].

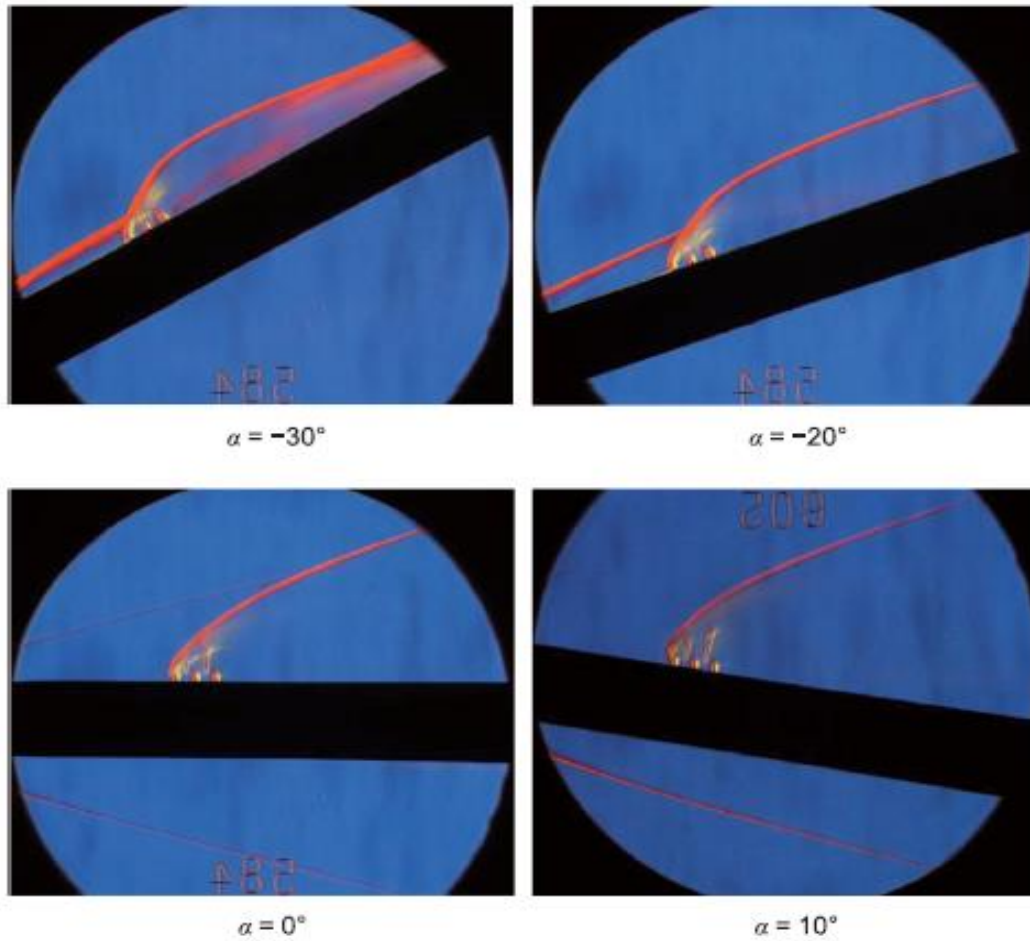
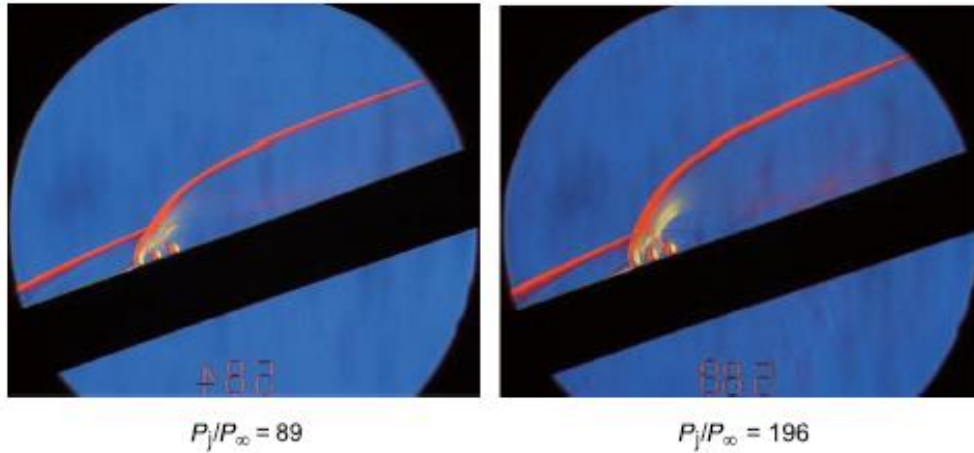


Рис. 1.22. Шлирен-фотографии при изменении угла атаки в диапазоне от минус 30 до 0°. Скорость набегающего потока  $M_{\infty} = 6$ . Источник: [51].



**Рис. 1.23. Изменение давления в форсунках бокового расхода.  
Скорость набегающего потока  $M_\infty=6$ . Источник: [51].**

Получившиеся шлирен-фотографии позволяют оценить картину течения рядом с телом вращения при обтекании высокоскоростным потоком и при боковом выдуве расхода.

Рассмотренные выше варианты газодинамического управления позволяют сделать вывод о необходимости дальнейшего изучения этой области физических явлений, сопровождающих такие методы управления ЛА, оценки их эффективности и оптимизации конструктивных решений.

## ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 2.1. Основные уравнения

Для описания течения газа в рассматриваемой задаче используются система уравнений, включающая уравнения неразрывности, количества движения, энергии и уравнений сохранения массы химических компонентов

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\rho$  - плотность газовой смеси;  $\mathbf{V}$  - вектор скорости.

Уравнение количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} - \mathbf{T}) + \nabla p = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

где  $p$  - давление;  $\mathbf{T}$  - тензор вязких напряжений.

Уравнение сохранения массы химического компонента  $s$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_s) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} C_s + \mathbf{J}_s) = \dot{w}_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_C - 1, \quad (2.3)$$

где  $C_s = \rho_s / \rho$  - массовая доля компонента  $s$ ;  $\rho_s$  - плотность компонента  $s$ ;  $\dot{w}_s$  - скорость образования компонента  $s$  в результате химических реакций;  $N_C$  - количество компонентов газовой смеси.;  $S_s$  - источник, связанный с межфазным взаимодействием;  $\mathbf{J}_s$  - вектор диффузионного потока.

Уравнение полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot [\mathbf{V} (\rho E + p) + \mathbf{q} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}] = 0, \quad (2.4)$$

где  $E$  - полная энергия [Дж/кг];  $\mathbf{q}$  - плотность теплового потока, обусловленного теплопроводностью и диффузией.

## 2.2. Формы записи системы уравнений

В декартовой системе координат система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i + \delta_{ji} p - \tau_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_s) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j C_s + J_{s,j}) = \dot{w}_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_C - 1, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E + p) + q_j - u_i \tau_{ij}] = 0, \quad (2.8)$$

где  $u_j$  - компонента скорости в  $j$ -ом направлении;  $\tau_{ij}$  - компонента тензора вязких напряжений.

В произвольной криволинейной системе координат все эти уравнения записываются в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v^i) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + \nabla_j (\rho v^j v^i + g^{ji} p - \tau^{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_s) + \nabla_j (\rho v^j C_s + J_s^j) = \dot{w}_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_C - 1, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla_j [v^j (\rho E + p) + q^j - v_i \tau^{ij}] = 0, \quad (2.12)$$

где  $\nabla_i$  - ковариантная производная;  $v^k, v_k$  - соответственно контравариантные и ковариантные компоненты скорости;  $g^{ji}$  - контравариантные компоненты метрического тензора.

При дальнейших расчетах, как правило, будет использоваться запись уравнений в декартовой системе координат, за исключением тех случаев, когда криволинейность системы координат имеет принципиальное значение.

### 2.3. Уравнения состояния

Давление газовой смеси складывается из парциальных давлений всех компонентов:

$$p = \sum_{s=1}^{N_c} p_s = \sum_{s=1}^{N_c} \rho_s \frac{R}{M_s} T = \rho \frac{R}{M_\Sigma} T, \quad (2.13)$$

где  $T$  - температура;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $M_\Sigma$  - кажущаяся молекулярная масса газовой смеси:

$$M_\Sigma = \left( \sum_{s=1}^{N_c} \frac{C_s}{M_s} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Полная энергия состоит из внутренней и кинетической составляющих:

$$E = e + \frac{u_k^2}{2}. \quad (2.15)$$

Внутренняя энергия газовой смеси складывается из внутренних энергий отдельных компонентов  $e_s$ :

$$e = \sum_{s=1}^{N_c} C_s e_s. \quad (2.16)$$

Энтальпия определяется по формуле

$$h = e + \frac{p}{\rho} = \sum_{s=1}^{N_c} C_s e_s + \sum_{s=1}^{N_c} C_s \frac{R}{M_s} T = \sum_{s=1}^{N_c} C_s \left( e_s + \frac{R}{M_s} T \right) = \sum_{s=1}^{N_c} C_s h_s, \quad (2.17)$$

где 
$$h_s = e_s + \frac{R}{M_s} T \quad (2.18)$$

энтальпия компонента  $S$ .

Для  $h_s$  используются справочные термодинамические формулы в зависимости от температуры [52]:

$$\frac{h_s(T)}{R_s T} = a_{1,s} + a_{2,s} \frac{T}{2} + a_{3,s} \frac{T^2}{3} + a_{4,s} \frac{T^3}{4} + a_{5,s} \frac{T^4}{5} + \frac{b_{1,s}}{T}, \quad (2.19)$$

где  $R_s = R/M_s$  - газовая постоянная компонента  $S$ .

## 2.4. Вязкие напряжения. Тепловые и диффузионные потоки

Предполагается, что газ подчиняется законам Ньютоновской жидкости и для него справедлива гипотеза Стокса:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad , \quad (2.20)$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости.

Как уже указывалось, тепловой поток  $q_j$ , входящий в уравнение энергии (2.8), обусловлен теплопроводностью газа и переносом теплоты за счет диффузии:

$$q_i = q_{\lambda,i} + q_{D,i} \quad . \quad (2.21)$$

Плотность теплового потока  $q_{\lambda,j}$ , обусловленного теплопроводностью, определяется законом Фурье:

$$q_{\lambda,i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad , \quad (2.22)$$

а перенос за счет диффузии - соотношением:

$$q_{D,i} = \sum_s V_{s,i} \rho_s h_s = \sum_s J_{s,i} h_s \quad . \quad (2.23)$$

Здесь  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности;  $V_{s,i}$  - скорость диффузии компонента  $S$ .

Для диффузионного потока используется модифицированная формула Фика [53]:

$$J_{s,i} = g_{s,i} - C_s \sum_{r \neq s} g_{r,i} \quad , \quad (2.24)$$

где

$$g_{s,i} = -\rho D_s \frac{\partial C_s}{\partial x_i} \quad , \quad (2.25)$$

$D_s$  - коэффициент диффузии компонента  $S$ . Такой подход обеспечивает условие равенства нулю суммарного диффузионного потока всех компонентов и

является хорошей аппроксимацией диффузионных потоков, полученных их уравнений Стефана-Максвелла [54].

## 2.5. Переносные свойства

Для расчета переносных свойств газовой смеси использовалась модель, основанная на правиле смешения Уилки [55], аппроксимации Блоттера для вязкости [56] и справочных данных Мак Брайда [52].

Для вязкости газовой смеси используется формула Уилки [55]:

$$\mu = \sum_{s=1}^{N_c} \frac{X_s \mu_s}{\phi_s}, \quad (2.26)$$

где  $X_s$  - мольная доля компонента  $S$ ,

$$\phi_s = \sum_{r=1}^{N_c} X_r \left[ 1 + \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_r}} \left( \frac{M_r}{M_s} \right)^{1/4} \right]^2 \left[ \sqrt{8 \left( 1 + \frac{M_s}{M_r} \right)} \right]^{-1}, \quad (2.27)$$

$\mu_s$  - динамическая вязкость компонента  $s$ , определяемая по формуле:

$$\mu_s = 0.1 \exp \left[ \left( A_s \ln T + B_s \right) \ln T + C_s^* \right], \quad (2.28)$$

где  $A_s, B_s, C_s^*$  - справочные константы [52].

Коэффициент теплопроводности задается формулой:

$$\lambda = \sum_s \frac{X_s \lambda_s}{\phi_s}, \quad (2.29)$$

Коэффициенты теплопроводности компонентов  $\lambda_s$  определяются по формулам аналогичным формуле (2.28), а коэффициенты, входящие в формулы, берутся из справочника [52].

Диффузионный коэффициент  $D_s$  можно выразить через коэффициент теплопроводности и число Льюиса  $Le_s$ :

$$D_s = \frac{Le_s \lambda}{\rho c_p}, \quad (2.30)$$

где  $C_p$  - удельная (на единицу массы) теплоемкость газовой смеси при постоянном давлении:

$$c_p = \sum_{s=1}^{Nc} C_s c_{p,s} \quad (2.31)$$

Для теплоемкости компонента  $s$  из формулы (2.19) следует соотношение:

$$c_{p,s}(T) = \frac{dh_s}{dT} = R_s (a_{1,s} + a_{2,s}T + a_{3,s}T^2 + a_{4,s}T^3 + a_{5,s}T^4) . \quad (2.32)$$

Если положить число Льюиса постоянным и одинаковым для всех компонентов  $Le$ , то для диффузионного потока (2.24) получается упрощенная формула:

$$J_{s,i} = -\rho D \frac{\partial C_s}{\partial x_i} = -Le \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} , \quad (2.33)$$

где  $D = \frac{Le \lambda}{\rho c_p}$  - обобщенный коэффициент диффузии.

При таком подходе можно получить упрощенную формулу для теплового потока. Из формулы (2.17) следует, что:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{Nc} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s + \sum_{s=1}^{Nc} C_s \frac{\partial h_s}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{Nc} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s + \sum_{s=1}^{Nc} C_s \frac{dh_s}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{Nc} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s + c_p \frac{\partial T}{\partial x_i} . \quad (2.34)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{Nc} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s \right) . \quad (2.35)$$

Таким образом, для теплового потока получается следующая формула:

$$\begin{aligned} q_i &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \sum_s J_{s,i} h_s = -\lambda \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{Nc} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s \right) - \sum_s Le \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s \\ &= -\frac{\lambda}{c_p} \left[ \frac{\partial h}{\partial x_i} + (Le - 1) \sum_s \frac{\partial C_s}{\partial x_i} h_s \right] . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Если диффузия полностью подобна теплопроводности ( $Le=1$ ), то получается очень простая формула для теплового потока:



$$q_i = -\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

Числа Прандтля, Шмидта и Льюиса (точнее Льюиса-Семенова) определяются по формулам:

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D}, \quad \text{Le} = \frac{\rho c_p D}{\lambda} = \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \quad (2.38)$$

Замечание. В литературе иногда встречается обратная величина для определения числа Льюиса ( $\text{Le} = \text{Sc}/\text{Pr}$ ).

## 2.6. Моделирование турбулентности

### 2.6.1. Осреднение основных уравнений

Наиболее распространенным способом моделирования турбулентности является использование осреднения Рейнольдса, когда вместо уравнений для мгновенных значений параметров используются уравнения для неких осредненных величин. Можно использовать различные способы осреднения газодинамических параметров течения. Например, с использованием математического ожидания и функции плотности распределения вероятностей:

$$M(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} T \cdot f(T) dT, \quad (2.39)$$

где  $T$  - некоторый газодинамический параметр (например, температура), который рассматривается как случайная величина,  $f(T)$  - плотность вероятности этой величины.

Для стационарной турбулентности используется осреднение по времени:

$$\bar{T}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} T(x, y, z, t) dt, \quad (2.40)$$

где  $\Delta t$  - период времени, существенно превышающий временной масштаб турбулентности.

Согласно эргодической гипотезе, вероятность отличия среднего по формуле (2.40) от среднего, полученного по формуле (2.39), стремится к нулю при увеличении  $\Delta t$ , т.е.

$$M(T) \cong \bar{T} \quad (2.41)$$

В дальнейшем будем обозначать осредненные параметры верхним подчеркиванием:  $\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{p}$  и т.д. Это, так называемые, средние по Рейнольдсу.

Мгновенное значение параметра представляется в форме:

$$T = \bar{T} + T', \quad (2.42)$$

где  $T'$  - пульсационная составляющая параметра  $T$ .

Для осредненных и пульсационных величин справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{A \pm B} &= \bar{A} \pm \bar{B}, \\ \overline{AB} &= \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{A'B'}, \quad \overline{A'B'} \neq 0, \\ \overline{\overline{AB}} &= \bar{A} \cdot \bar{B}, \\ \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_i}, \quad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \\ \overline{A'} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Величину  $\overline{A'B'}$  называют корреляцией пульсаций случайных величин  $A$  и  $B$ . В общем случае она не равна нулю, и это порождает очень интересные следствия. Об этом будет рассказано далее.

При применении правил (2.43) к основным уравнениям (2.5) - (2.8) получаются так называемые уравнения Рейнольдса. Однако для сжимаемых течений в полученных уравнениях содержится большое количество членов, содержащих пульсации плотности.

Для устранения этой проблемы используется метод, предложенный Фавром [57], в котором используются так называемые среднемассовые значения параметров или средние по Фавру:

$$H = \frac{\overline{\rho H}}{\bar{\rho}}. \quad (2.44)$$

Мгновенные значения величин в этом случае представляются в виде:

$$H = H + H'' . \quad (2.45)$$

Для средних по Фавру и соответствующих пульсаций справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A \pm B &= \frac{\overline{\rho(A \pm B)}}{\bar{\rho}} = A \pm B, \\ \overline{AB} &= A \frac{\overline{\rho B}}{\bar{\rho}} = \bar{A}B, \\ \overline{\rho A''} &= \overline{\rho(A - A)} = \overline{\rho A} - \overline{\rho A} = \bar{\rho}A - \bar{\rho}A = 0, \\ \overline{\rho AB} &= \bar{\rho}AB + \bar{\rho}A''B'', \\ \overline{A''} &= -\frac{\overline{\rho' A'}}{\bar{\rho}} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Для плотности, давления, тензора вязких напряжений, векторов теплового потока, скоростей образования компонентов используем осреднение по Рейнольдсу:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad \tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}, \\ q_j &= \bar{q}_j + q'_j, \quad \dot{w}_s = \bar{\dot{w}}_s + \dot{w}'_s, \end{aligned} \quad (2.47)$$

для всех остальных величин – осреднение по Фавру:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i + u_i'', \quad E = E + E'', \quad H = H + H'', \\ V_{k,j} &= V_{k,j} + V_{k,j}'', \quad C_k = C_k + C_k''. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Подставляя эти выражения в основную систему уравнений, описывающих течение химически и термически неравновесного газа, и применяя к этим уравнениям осреднение Рейнольдса, получаем следующую систему:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0, \quad (2.49)$$

Уравнения количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i + \bar{\rho}u_j''u_i'' + \delta_{ji}\bar{p} - \bar{\tau}_{ij} \right) = 0, \quad i=1,2,3, \quad (2.50)$$

Уравнения неразрывности для компонентов газовой смеси (уравнения сохранения массы химических компонентов)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}C_s) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho}C_s\tilde{u}_j + \bar{\rho}C_s''u_j'' + \overline{J_{s,j}} \right) = \bar{w}_s, \quad s=1,2,\dots,N_C-1. \quad (2.51)$$

Уравнение полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}E) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho}u_jH + \overline{\rho u_j''h} + \overline{u_i\rho u_j''u_i''} + \frac{\overline{\rho u_j''u_i''^2}}{2} + \bar{q}_j - \overline{u_i\tau_{ij}} \right] = 0. \quad (2.52)$$

Здесь:

$$H = E + \frac{p}{\rho}. \quad (2.53)$$

полная энтальпия,

$$H = \left( h + \frac{1}{2}\tilde{u}_i^2 + K \right), \quad (2.54)$$

$$K = \frac{1}{2}u_i''^2. \quad (2.55)$$

кинетическая энергия турбулентности.

В осредненных уравнениях появляются дополнительные члены, имеющие физический смысл турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса) и турбулентных потоков энергии и массы.

Основная проблема расчета турбулентных течений состоит в моделировании этих членов.

### 2.6.2. Коэффициент турбулентной вязкости

Как уже говорилось, в уравнениях Рейнольдса появились новые неизвестные величины: дополнительные турбулентные потоки энергии, концентраций и напряжений турбулентного трения:  $\bar{\rho}u_j''H$ ,  $\bar{\rho}u_j''C_s''$ ,  $\bar{\rho}u_j''u_i''$  и

т.п. Задачей моделирования турбулентности является получение явных выражений или специальных уравнений для этих потоков.

Многие модели турбулентности основаны на понятии *коэффициента турбулентной вязкости*  $\mu_T$ . При этом турбулентные потоки выражаются по следующим формулам:

$$\tau_{T,ij} \equiv -\bar{\rho} u_i'' u_j'' = \mu_T \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} K \delta_{ij}, \quad (2.56)$$

$$\bar{\rho} u_j'' C_s'' = -\frac{\mu_T}{Sc_T} \frac{\partial \tilde{C}_s}{\partial x_j}, \quad \bar{\rho} u_j'' h'' = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}, \quad \frac{1}{2} \bar{\rho} u_j'' u_k''^2 = -\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j}, \quad (2.57)$$

где  $Sc_T$  - турбулентное число Шмидта;  $Pr_T$  - турбулентное число Прандтля;  $\sigma_K$  - аналог числа Прандтля для ТКЕ.

Наиболее широко используемые модели турбулентности, основанные на использовании коэффициента турбулентной вязкости: К-ε модель, К-ω модель, SST (Shear Stress Transfer) модель. Они описаны во многих монографиях и статьях, в частности, в [58].

Основное и очень важное преимущество таких моделей состоит в том, основные осредненные уравнения (2.49) - (2.52) имеют практически такой же вид, как и неосредненные уравнения (2.5) - (2.8), только вместо молекулярной вязкости (теплопроводности, диффузии и т.п.) используются их некие эффективные аналоги:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i + \delta_{ji} \bar{p} - \tau_{ij,ef}) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{C}_s) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{C}_s) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu_T}{Sc_T} + \frac{\mu}{Sc} \right) \frac{\partial \tilde{C}_s}{\partial x_j} \right] = \bar{w}_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_C - 1 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} + \frac{\mu}{Pr} \right) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} + \tilde{u}_i \tau_{ij,ef} \right] = 0, \quad (2.61)$$

где:

$$\tau_{ij,ef} = \bar{\tau}_{ij} - \bar{\rho} u_j'' u_i'' = (\mu_T + \mu) \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} K \delta_{ij}. \quad (2.62)$$

### 2.6.3. Модель напряжений Рейнольдса

Имеет смысл рассматривать математическую модель, основанную не на явном выражении для напряжений Рейнольдса (см. формулу (2.56)), а на решении дополнительных дифференциальных уравнений в частных производных для этих параметров.

Уравнения переноса напряжений Рейнольдса выводятся непосредственно из уравнения количества движения (2.10) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\rho} u_i'' u_j'' \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' u_j'' \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left( -\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' \tau_{jk}} + \overline{u_j'' \tau_{ik}} - \delta_{kj} \overline{p' u_i''} - \delta_{ki} \overline{p' u_j''} \right)}_{(I)} \\ &- \underbrace{\left( \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}_{(II)} + \underbrace{\left( \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \right)}_{(III)} - \underbrace{\left( \overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \right)}_{(IV)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Физический смысл членов в правой части уравнения:

(I) - турбулентная, молекулярная и связанная с пульсациями давления диффузия;

(II) - генерация напряжений Рейнольдса;

(III) - корреляция пульсаций давления с тензором скоростей деформации;

(IV) - диссипативный член.

Введем обозначения:

$$R_{ij} = u_i'' u_j'' , \quad (2.64)$$

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' \tau_{jk}} + \overline{u_j'' \tau_{ik}} - \delta_{kj} \overline{p' u_i''} - \delta_{ki} \overline{p' u_j''} \right), \quad (2.65)$$

$$P_{ij} = - \left( \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (2.66)$$

$$\Pi_{ij} = \left( \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \right), \quad (2.67)$$

$$\rho \varepsilon_{ij} = \left( \overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \right). \quad (2.68)$$

Таким образом, уравнение (2.63) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} R_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k R_{ij}) = T_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij}. \quad (2.69)$$

Перейдем к моделированию величин, входящих в это уравнение.

Для диффузии предлагается простейшая формула:

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right]. \quad (2.70)$$

Диссипация при локальной изотропности:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad (2.71)$$

где  $\varepsilon$  - скорость диссипации турбулентной кинетической энергии (ТКЕ).

Моделирование  $\Pi_{ij}$  представляет серьезную проблему и зависит, как будет показано в следующем параграфе, от скорости потока, т.е. от числа Маха. Рассмотрим сначала низкие скорости.

Корреляция пульсаций давления и производных скорости разбивается на медленную и быструю составляющие:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(s)} + \Pi_{ij}^{(r)}. \quad (2.72)$$

Для медленной части, характеризующей тенденцию к изотропности, используется простейшая формула:

$$\Pi_{ij}^{(s)} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon \left( \frac{R_{ij}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right). \quad (2.73)$$

Для быстрой части используется модель Лондера-Риса-Роди (LRR) [59]:

$$\Pi_{ij}^{(r)} = -\alpha \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \beta \left( D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \gamma \rho K \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (2.74)$$

где:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \quad (2.75)$$

тензор скоростей деформации;

$$P = \frac{1}{2} P_{kk} = -\rho R_{mk} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_k} - \quad (2.76)$$

генерация турбулентной кинетической энергии;

$$D_{ij} = -\rho \left( R_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} + R_{jk} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.77)$$

Упрощенный вариант LRR:

$$\Pi_{ij}^{(r)} = -\Gamma \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right). \quad (2.78)$$

Коэффициенты определяются следующими формулами:

$$\alpha = \frac{(c_2 + 8)}{11}, \quad \beta = \frac{(8c_2 - 2)}{11}, \quad \gamma = \frac{(60c_2 - 4)}{55}, \quad (2.79)$$

$$C_1 = 1.5, \quad c_2 = 0.4, \quad \Gamma = 0.6.$$

Упрощенная формула отличается от полной тем, что в ней:

$$\alpha = \Gamma, \quad \beta = \gamma = 0. \quad (2.80)$$

Уравнение переноса  $\varepsilon$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \frac{\varepsilon}{K} [C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon], \quad (2.81)$$

где  $\sigma_\varepsilon$  - аналог числа Прандтля для  $\varepsilon$ . Обычно используются следующие значения констант:

$$\sigma_K = 1.3; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92. \quad (2.82)$$



Для высокоскоростных сжимаемых течений необходимо внести корректировки в моделирование  $\Pi_{ij}$ . В [60] предложена следующая формула:

$$\Pi_{ij} = -\hat{C}_1(M_G) \bar{\rho} \varepsilon \left( \frac{R_{ij}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + C_{\Pi 1}(M_G) \Pi_{ij}^{(r)} - C_{\Pi 2}(M_G) P_{ij}, \quad (2.83)$$

где для коэффициентов, учитывающих сжимаемость используются следующие соотношения:

$$\hat{C}_1 = C_1 \left[ 0.2786 \cdot \exp(-4.7758 \cdot M_G^*) + 0.7213 \cdot \exp(-0.0334 \cdot M_G^*) \right], \quad (2.84)$$

$$C_{\Pi 1} = 0.9978 \cdot \exp(-2.2155 \cdot M_G^*), \quad (2.85)$$

$$C_{\Pi 2} = 17 \cdot M_G^{*3} / \left[ \exp(8 \cdot M_G^*) - 0.999 \right], \quad (2.86)$$

где  $M_G^* = M_G / 3.05$ .

Здесь  $M_G$  - градиентное число Маха,

$$M_G = \frac{SK^{3/2}}{a\varepsilon}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}^* S_{ij}^*}, \quad S_{ij}^* = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (2.87)$$

$a$  - скорость звука.

Наибольшее распространение получили модели турбулентности, адаптированные к конкретным условиям течения, например, К- $\varepsilon$  и К- $\omega$  модели, или модели, ориентированные на конкретные условия применения. Рассмотрим наиболее популярные модели турбулентности.

#### 2.6.4. К- $\varepsilon$ модель турбулентности

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии  $K$  получается сворачиванием уравнения (2.69) по индексам и делением его на два:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k K) = T_{k.k} + P + \overline{p'd''} - \bar{\rho} \varepsilon, \quad (2.88)$$

где

$$P = \frac{1}{2} P_{ii} = \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (2.89)$$

$$T_{k.k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right]. \quad (2.90)$$

Здесь использовалось соотношение

$$\frac{1}{2} \Pi_{ii} = \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} = \overline{p' d''}, \quad (2.91)$$

где  $d''$  - пульсация дивергенции. В работе [61] показано, что в высокоскоростных течениях величина  $\overline{p' d''}$  является отрицательной и может моделироваться следующей формулой:

$$\overline{p' d''} = -0.29 \bar{\rho} M_T \varepsilon. \quad (2.92)$$

Для расчета диссипации используется формула (2.81), а коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле:

$$\mu_T = \frac{0.09 \bar{\rho} K^2}{\varepsilon (1 + 0.29 \bar{\rho} M_T)}. \quad (2.93)$$

Эта модель широко используется для свободных течений (струи, слой смешения и т.п.), но плохо описывает пристеночные течения. Дело в том, что при выводе основных уравнений, относящихся к скорости диссипации  $\varepsilon$ , использовалось допущение о больших значениях локального числа Рейнольдса. Возле стенки это допущение нарушается – локальное число Рейнольдса стремится к нулю.

### 2.6.5. К- $\omega$ модель Уилкокса

В [62] также используются два параметра: турбулентная кинетическая энергия  $K$  и величина  $\omega$ , которая обратно пропорциональна характерному масштабу времени  $\tau$  и имеет, следовательно, размерность частоты  $[1/c]$ .

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывается по формуле:

$$\mu_T = \rho \frac{K}{\omega}. \quad (2.94)$$

Уравнения переноса  $K$  и  $\omega$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u_j K}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{K1}} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + P_K - \beta_0^* \rho K \omega, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u_j \omega}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 1}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{K} P_K - \beta_0 \rho \omega^2. \quad (2.96)$$

Числовые константы, входящие в эту модель, равны:

$$\beta_0^* = 0.09, \quad \alpha = 5/9, \quad \beta_0 = 0.075, \quad \sigma_{K1} = 2, \quad \sigma_{\omega 1} = 2.$$

Связь между параметрами  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta_0^* K}. \quad (2.97)$$

$K - \omega$ -модель хорошо описывает пристеночные течения, но крайне неудобна для свободных течений: В зависимости от задания параметра частоты турбулентных пульсаций  $\omega$ , принимаемого на границе расчетной области, может быть получен значительный разброс в результатах расчета. Кроме того, рассматриваемый метод имеет низкую точность решения в области свободного течения.

### 2.6.6. Модель Спаларта-Аллмараса

Модель Спаларта-Аллмараса (S-A) [63] представляет собой модель с одним уравнением, которая решает дифференциальное уравнение переноса для кинематической вихревой (турбулентной) вязкости. Модель Спаларта-Аллмараса была разработана специально для задач авиационной и космической техники, связанных с моделированием внутренних течений, а также задач турбомашиностроения. Было показано, что она дает хорошие результаты для пограничных слоев, подверженных неблагоприятным градиентам давления.

В своем первоначальном виде модель Спаларта-Аллмараса фактически является моделью, использующей низкорейнольдсовый подход и требующей подробного разрешения области вязкого подслоя ( $Y^+ \sim 1$ ). Дополнение модели Спаларта-Аллмараса была дополнена устойчивой пристеночной функцией  $Y^+$ , что позволило применять модель независимо от сеточного разрешения пристеночной

области. В этом подходе используется принцип осреднения результатов, полученных с использованием модели вязкого подслоя и логарифмической пристеночной функции. В результате этого на промежуточных сетках ( $1 < Y^+ < 30$ ) метод сохраняет свою целостность и обеспечивает устойчивость сдвиговых напряжений и коэффициентов теплопередачи. Несмотря на то, что чувствительность метода к значениям  $Y^+$  снижена, все же следует убедиться, что пограничный слой разрешен с минимальным разрешением 10-15 ячеек.

Модель Спаларта-Аллмараса была разработана для задач внешней аэродинамики. Она не была откалибрована для моделирования произвольных течений, встречающихся в промышленности, и дает относительно большие погрешности для некоторых потоков со свободным сдвигом, особенно для плоских и круглых струйных течений. Кроме того, нельзя надеяться на правильное предсказание затухания однородной изотропной турбулентности.

В модели Спаларта-Аллмараса модифицированная турбулентная вязкость  $\tilde{\nu}$ , для которой решается уравнение переноса, идентична турбулентной кинематической вязкости, за исключением пристенной области (подверженной влиянию вязкости). Уравнение переноса для модифицированной турбулентной вязкости  $\tilde{\nu}$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\nu}u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu + S_{\tilde{\nu}}, \quad (2.98)$$

где  $G_\nu$  отвечает за возникновение турбулентной вязкости, а  $Y_\nu$  - за затухание турбулентной вязкости, которое происходит в пристеночной области из-за ограничения потока стенкой и вязкого демпфирования.  $\sigma_{\tilde{\nu}}$  и  $C_{b2}$  являются константами.  $\nu$  - молекулярная кинематическая вязкость.  $S_{\tilde{\nu}}$  - источниковый член. Следует отметить, что поскольку турбулентная кинетическая энергия  $k$  в модели Спаларта-Аллмараса не вычисляется, то при оценке напряжений Рейнольдса последний член в уравнении, связывающем напряжения Рейнольдса с градиентами средней скорости [64] игнорируется.

Выражение для турбулентной вязкости имеет следующую форму:

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad (2.99)$$

где функция вязкого демпфирования  $f_{v1}$  имеет следующий вид:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 - C_{v1}^3}, \quad (2.100)$$

$$\chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}.$$

Член  $G_\nu$  уравнения (2.98), отвечающий за возникновение турбулентности, имеет следующий вид:

$$G_\nu = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad (2.101)$$

где:

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2} \quad (2.102)$$

и

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{\chi f_{v1}}, \quad (2.103)$$

$C_{b1}$  и  $k$  – константы,  $d$  - расстояние от стенки,  $S$  - скалярная величина тензора деформаций. По умолчанию  $S$  вычисляется на основании величины завихренности:

$$S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (2.104)$$

где  $\Omega_{ij}$  является тензором средней скорости вращения и определяется как:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.105)$$

По умолчанию выражение для  $S$  основано на том, что для сдвиговых потоков завихренность и скорость деформации идентичны. Преимущество завихренности состоит в том, что она равна нулю в областях невязкого потока, таких как стагнационные линии, где образование турбулентности из-за скорости деформации может быть нефизическим. В [65] была включена альтернативная формулировка, она объединяет как величины завихренности, так и тензоры деформации в определении  $S$ :

$$S \equiv |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|), \quad (2.106)$$

где:

$$C_{prod} = 2.0, |\Omega_{ij}| \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, |S_{ij}| \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}},$$

со средней скоростью деформации  $S_{ij}$ , определяемой следующим образом:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.107)$$

Включение тензоров вращения и деформации уменьшает образование вихревой вязкости и, следовательно, уменьшает саму вихревую вязкость в областях, где показатель завихренности превышает показатель скорости деформации. Включение тензоров вращения и деформации более точно учитывает влияние вращения на турбулентность. Модель, настроенная по умолчанию (включая только тензор вращения) имеет тенденцию к чрезмерному прогнозированию образования вихревой вязкости и, следовательно, к чрезмерному завышению самой вихревой вязкости внутри вихрей.

Член затухания турбулентности имеет следующий вид:

$$Y_\nu = C_{w1} \rho f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \quad (2.108)$$

где

$$f_w = g \left[ \frac{1+C_{w3}^6}{g^6+C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad (2.109)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad (2.110)$$

$$r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{s}k^2d^2}. \quad (2.111)$$

Константы модели турбулентности  $C_{b1}$ ,  $C_{b2}$ ,  $\sigma_{\tilde{\nu}}$ ,  $C_{\nu1}$ ,  $C_{w1}$ ,  $C_{w2}$ ,  $C_{w3}$ ,  $k$  по умолчанию имели значения, приведенные в [66]:

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{(1+C_{b2})}{\sigma_{\tilde{\nu}}}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2.0, k = 0.4187. \quad (2.112)$$

### 2.6.7. SST модель турбулентности

SST модель турбулентности Ментера [67, 68] является некой комбинированной моделью турбулентности, основанной на использовании  $K-\omega$  модели в пристеночных областях и  $K-\varepsilon$  модели в областях, находящихся на достаточном удалении от стенки. Этот комбинированный метод заключается в

преобразовании уравнений  $K$ - $\varepsilon$  модели к  $K$ - $\omega$  формулировке. Уравнения видоизмененной  $K$ - $\varepsilon$  модели, дополняются стыковочной функцией  $1-F_1$ . Функция  $F_1$  принимает значение  $F_1=1$  вблизи поверхности и обращается в ноль за пределами пограничного слоя, т.е. на линии границы пограничного слоя и за его пределами  $K$ - $\varepsilon$  модель возвращается к первоначальной, стандартной формулировке.

Эта модель показала хорошие результаты при расчете течений в зоне отрыва и при сильном продольном градиенте давления. Она учитывает перенос касательных напряжений.

Основные уравнения модели:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{K3}} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + P_K - \beta_0^* \rho K \omega, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha_3 \frac{\omega}{K} P_K - \beta_3 \rho \omega^2 + (1-F_1) \frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (2.114)$$

где коэффициенты новой модели - линейная комбинация соответствующих коэффициентов моделей, лежащих в основе метода:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= F_1 \alpha + \alpha_2 (1-F_1), & \beta_3 &= F_1 \beta_0 + \beta_2 (1-F_1), \\ \frac{1}{\sigma_{K3}} &= F_1 \frac{1}{\sigma_{K1}} + (1-F_1) \frac{1}{\sigma_K}, & \frac{1}{\sigma_{\omega 3}} &= F_1 \frac{1}{\sigma_{\omega 1}} + (1-F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2}}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Стыковочная функция в модели Ментера строится таким образом, чтобы наиболее адекватно учитывать перенос напряжения трения в пограничном слое.

Напомним, что  $F_1=1$  вблизи поверхности и  $F_1=0$  за пределами пограничного слоя

В модели Ментера коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле:

$$\mu_T = \rho \frac{a_1 K}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} = \rho \frac{K}{\max(\omega, SF_2 / a_1)}, \quad (2.116)$$

где  $a_1 = 0.31$ ,

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} - \text{инвариант тензора скоростей деформации}, \quad (2.117)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.118)$$

Стыковочные функции в SST-модели определяются по следующим формулам.

$$\begin{aligned} F_1 &= \tanh(\arg_1^4), \\ \arg_1 &= \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{K}}{\beta_0^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho K}{CD_{K\omega} \sigma_{\omega 2} y^2} \right], \\ CD_{K\omega} &= \max \left( \frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.0 \times 10^{-10} \right), \\ F_2 &= \tanh(\arg_2^2), \\ \arg_2 &= \max \left( \frac{2\sqrt{K}}{\beta_0^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Здесь  $y$  - расстояние до ближайшей стенки.

Расстояние от стенки можно определять чисто геометрически, но лучше использовать следующий алгоритм.

Для всей расчетной области решается уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -1. \quad (2.120)$$

с граничными условиями Дирихле  $\phi = 0$  на стенке и Неймана  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  на всех остальных границах.

После нахождения функции  $\phi$  расстояние от стенки определяется через градиент  $\phi$ :

$$y = -|\nabla \phi| + \sqrt{|\nabla \phi|^2 + 2\phi}. \quad (2.121)$$

### 2.6.8. Модель Transition SST

Математическая модель турбулентности Transition SST является одной из гибридных моделей, полученных путем модификации модели турбулентности SST  $k$ - $\omega$ .



Известно [69], что модель турбулентности SST  $k-\omega$  основана на концепции осреднения по Рейнольдсу и относится к классу моделей вихревой вязкости. В данной модели решаются два уравнения переноса скалярной величины: одно для турбулентной кинетической энергии  $k$  и одно для частоты турбулентных пульсаций  $\omega$ .

Модель турбулентности Transition SST является результатом дополнения модели SST  $k-\omega$ , ещё двумя уравнениями. Одно представляется уравнением переноса параметра перемежаемости  $\gamma$  (см. ниже), другое - уравнением переноса критического числа Рейнольдса  $Re_{\theta t}$ , рассчитываемого по толщине потери импульса.

Следует отметить, что данная модель турбулентности содержит в себе ряд эмпирических коэффициентов. Эти коэффициенты подбирались авторами модели в процессе её калибровки таким образом, чтобы обеспечить достоверные результаты во всем диапазоне чисел Рейнольдса, особенно при моделировании обтекания тел потоками газа с низкой начальной турбулизацией.

Уравнение переноса параметра перемежаемости  $\gamma$ :

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_{\gamma 1} - E_{\gamma 1} + P_{\gamma 2} - E_{\gamma 2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right], \quad (2.122)$$

где источниковые члены имеют вид:

$$\begin{aligned} P_{\gamma 1} &= C_{a1} F_{length} \rho S [\gamma F_{onset}]^{c_{\gamma 3}}, \\ E_{\gamma 1} &= C_{e1} P_{\gamma 1} \gamma. \end{aligned} \quad (2.123)$$

В (2.123)  $S$  – величина сдвиговых напряжений;  $F_{length}$  – эмпирическая функция, отвечающая за длину переходной области течения;  $C_{a1} = 2.0$ ;  $C_{e1} = 1.0$  – эмпирические константы.

Источниковые члены, отвечающие за затухание (возникновение) турбулентных пульсаций, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{\gamma 2} &= C_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} , \\ E_{\gamma 2} &= C_{e2} P_{\gamma 2} \gamma , \end{aligned} \quad (2.124)$$

где  $\Omega$  – интенсивность завихренности.

Начало перехода контролируется следующими функциями:

$$\begin{aligned} Re_v &= \frac{\rho y^2 S}{\mu} , \\ R_T &= \frac{\rho k}{\mu \omega} , \\ F_{onset1} &= \frac{Re_v}{2,193 Re_{\theta c}} , \\ F_{onset2} &= \min \left( \max \left( F_{onset1}, F_{onset1}^4 \right), 2, 0 \right) , \\ F_{onset3} &= \max \left( 1, 0 - \left( \frac{R_T}{2,5} \right)^3, 0 \right) , \\ F_{onset} &= \max \left( F_{onset2} - F_{onset3}, 0 \right) , \\ F_{turb} &= e^{-\left( \frac{R_T}{4} \right)^4} , \end{aligned} \quad (2.125)$$

где  $y$  – расстояние от твёрдой поверхности обтекаемого тела;  $Re_{\theta c}$  – критическое число Рейнольдса, при котором в пограничном слое значение параметра перемежаемости  $\gamma$  впервые начинает увеличиваться.

Эмпирические константы для уравнения переноса параметра перемежаемости  $\gamma$  имеют следующие значения:

$$C_{a1} = 2; C_{e1} = 1; C_{a2} = 0.06; C_{e2} = 50; c_{\gamma 3} = 0.5; \sigma_{\gamma} = 1.0 , \quad (2.126)$$

Уравнение переноса для критического числа Рейнольдса по толщине потери импульса  $Re_{\theta t}$  представляется в виде:

$$\frac{\partial(\rho Re_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j Re_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} \right]. \quad (2.127)$$

Источниковый член вычислялся с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} P_{\theta t} &= c_{\theta t} \frac{\rho}{t} (Re_{\theta t} - \tilde{Re}_{\theta t}) (1, 0 - F_{\theta t}), \\ t &= \frac{500\mu}{\rho U^2}, \\ F_{\theta t} &= \min \left( \max \left( F_{wake} e^{\left(\frac{-y}{\delta}\right)^4}, 1 - \left(\frac{\gamma - 0,02}{1 - 0,02}\right)^2 \right), 1, 0 \right), \\ \theta_{BL} &= \frac{\tilde{Re}_{\theta t} \mu}{\rho U}, \\ \delta_{BL} &= \frac{15}{2} \theta_{BL}, \\ \delta &= \frac{50\Omega y}{U} \delta_{BL}, \\ Re_{\omega} &= \frac{\rho \omega y^2}{\mu}, \\ F_{wake} &= e^{-\left(\frac{Re_{\omega}}{1E+5}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Присутствующие в уравнениях (2.127) и (2.128) эмпирические константы принимали следующие значения:

$$c_{\theta t} = 0.03; \quad \sigma_{\theta t} = 2.0. \quad (2.129)$$

Выбор эмпирических функций для переменных  $Re_{\theta t}$ ,  $F_{length}$  и  $Re_{\theta c}$  подробно описывается в работе [70].

## 2.7. Химическая кинетика

### 2.7.1. Общие положения

Скорость образования компонента в результате химических реакций  $\dot{w}_s$  складывается из скоростей всех реакций, в которых он участвует

$$\dot{w}_s = M_s \sum_{k=1}^K (v''_{k,s} - v'_{k,s}) R_k, \quad (2.130)$$

где  $K$  – число реакций, которые протекают в химически реагирующей системе;  $v'_{k,s}$  – стехиометрический коэффициент компонента  $s$  в  $k$ -ой прямой реакции (слева направо);  $v''_{k,s}$  – стехиометрический коэффициент компонента  $s$  в  $k$ -ой обратной реакции (справа налево);  $R_k$  – скорость  $k$ -ой химической реакции.

Обычно химическую реакцию под номером  $k$  представляют в виде:



где  $N_C$  – число компонентов,  $I_s$  – компонент под номером  $s$ .

Скорость химической реакции  $R_k$  определяется как изменение мольной (молярной) концентрации одного из реагирующих веществ за единицу времени, т.е. размерность  $R_k$  равна  $[\text{кмоль м}^{-3} \text{с}^{-1}]$ .

Пусть  $[I_s]$  – мольная концентрация компонента  $s$  – т.е. количество молей (киломолей) данного вещества в единице объема. Очевидно, что

$$[I_s] = \frac{\rho_s}{M_s} = \frac{\rho C_s}{M_s}. \quad (2.132)$$

Скорость химической реакции определяется на основе закона действующих масс:

$$R_k = \left( F_k \prod_{s=1}^{N_C} [I_s]^{v'_{k,s}} - B_k \prod_{s=1}^{N_C} [I_s]^{v''_{k,s}} \right), \quad (2.133)$$

где  $F_k$  и  $B_k$  - коэффициенты скоростей прямой и обратной  $k$ -ой реакции, соответственно),  $n_k = \sum_{s=1}^{N_c} \nu_{k,s}$  - порядок реакции.

Коэффициенты скоростей реакций рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} F_k &= A_k T^{\beta_k} \exp\left(-\frac{T_k}{T}\right) = A_k T^{\beta_k} \exp\left(-\frac{E_k}{R_U T}\right), \\ B_k &= A_k T^{\beta_k} \exp\left(-\frac{T_k}{T}\right) = A_k T^{\beta_k} \exp\left(-\frac{E_k}{R_U T}\right), \end{aligned} \quad (2.134)$$

где  $A_k$  - предэкспоненциальный множитель,  $\beta_k$  - безразмерный температурный показатель степени,  $T_k$  - температура активации,  $T$  - температура,  $E_k$  - энергия активации.

Константы  $A_k, \beta_k, T_k$  имеют разное значение для прямой и обратной реакций. Существует два способа задания этих констант:

- 1) задаются все константы для прямой и обратной реакции,
- 2) задаются константы для прямой реакции, а скорость обратной реакции определяется по формуле

$$B = F / K_C, \quad (2.135)$$

(индекс « $k$ » для упрощения записи опущен, но подразумевается). Константа равновесия  $K_C$  определяется с помощью свободной энергии Гиббса:

$$K_C = \left(\frac{p_0}{R_U T}\right)^{\nu} \exp\left[-\sum_{s=1}^{N_c} (\nu_s'' - \nu_s') \frac{g_s}{R_s T}\right], \quad (2.136)$$

где:  $\nu = \sum_{k=1}^{N_c} (\nu_s'' - \nu_s')$ ;

$$p_0 = 10^5 \text{ [Па]};$$

$$R_U = 8314.41 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} \right];$$

$R_s$  - газовая постоянная компонента  $S$ ;

$g_s = h_s - s_s T$  - энергия Гиббса;

$R_v$  - универсальная газовая постоянная.

Для определения теплоемкостей, энтальпий и энтропий компонентов можно использовать полиномов вида [71]:

$$\frac{C_p^0(T)}{R} = a_1 + a_2T + a_3T^2 + a_4T^3 + a_5T^4, \quad (2.137)$$

$$\frac{h^0(T)}{RT} = a_1 + a_2 \frac{T}{2} + a_3 \frac{T^2}{3} + a_4 \frac{T^3}{4} + a_5 \frac{T^4}{5} + \frac{b_1}{T}, \quad (2.138)$$

$$\frac{s^0(T)}{R} = a_1 \ln(T) + a_2T + a_3 \frac{T^2}{2} + a_4 \frac{T^3}{3} + a_5 \frac{T^4}{4} + b_2, \quad (2.139)$$

где  $C_p^0(T)$  - теплоемкость компонента при постоянном давлении при температуре  $T$ ;  $R$  - газовая постоянная компонента,

$$h^0(T) = \{h^0(T) - h^0(0)\} + h^0(0) = \{h^0(T) - h^0(T_0)\} + h^0(T_0), \quad (2.140)$$

$T_0 = 298.15K$  - стандартная температура;

$h^0(0)$  - химическая энергия компонента при  $0 K$ ;

$h^0(T_0)$  - энтальпия компонента при стандартной температуре  $T_0$ , которую принимают равной

$$h^0(T_0) = \Delta_f H^0(T_0), \quad (2.141)$$

$\Delta_f H^0(T)$  - энтальпия образования (теплота образования) компонента из элементарных веществ при температуре  $T$  и стандартных условиях.

В этих формулах индекс «s», относящийся к номеру компонента, для простоты записи опущен.

При использовании для определения термодинамических свойств полиномов вида (2.137) - (2.139) энергия Гиббса задается формулой

$$\frac{g_s}{RT} = \frac{h_s}{RT} - \frac{s_s}{R} = a_{1,s} [1 - \ln(T)] - a_{2,s} \frac{T}{2} - a_{3,s} \frac{T^2}{6} - a_{4,s} \frac{T^3}{12} - a_{5,s} \frac{T^4}{20} + \frac{b_{1,s}}{T} - b_{s,2} \quad (2.142)$$

Упрощенная формула получается без учёта изменения теплоёмкости реакции (так называемое первое приближение Улиха):

$$\Delta G^0 = \Delta H_{298}^0 - T \Delta S_{298}^0 \quad (2.143)$$

$$K_c = \left( \frac{p_0}{R_U T} \right)^{\nu} \exp \left[ \frac{\Delta S_{298}^0}{R_U} \right] \exp \left[ \frac{-\Delta H_{298}^0}{R_U T} \right] \quad (2.144)$$

Выбор набора элементарных реакций зависит от конкретной задачи.

### 2.7.2. Химические реакции диссоциации

В работе [72] предложено использовать систему реакций, представленную в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Простейшие химические реакции

	Реакция	A	$\beta$	$T_k$ (K)
<b>Диссоциация</b>				
1	$N_2 + M = N + N + M$ (M=N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO, N <sub>2</sub> <sup>+</sup> , O <sub>2</sub> <sup>+</sup> , NO <sup>+</sup> )	7.0E+21	-1.60	113200
2	$N_2 + M = N + N + M$ (M=N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	3.0E+22	-1.60	113200
3	$O_2 + M = O + O + M$ (M= N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO, N <sub>2</sub> <sup>+</sup> , O <sub>2</sub> <sup>+</sup> , NO <sup>+</sup> )	2.0E+21	-1.50	59500
4	$O_2 + M = O + O + M$ (M=N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	1.0E+22	-1.50	59500
5	$NO + M = N + O + M$ (M= N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO, N <sub>2</sub> <sup>+</sup> , O <sub>2</sub> <sup>+</sup> , NO <sup>+</sup> )	5.0E+15	0.00	75500
6	$NO + M = N + O + M$ (M=N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	1.1E+17	0.00	75500
<i>Обменные реакции</i>				
7	$N_2 + O = NO + N$	5.7E+12	0.42	42938
8	$NO + O = O_2 + N$	8.4E+12	0.00	19400

В таблице 2.1 используются следующие стандартные для физ. химии размерности: см<sup>3</sup>, моль, с, К.

### **ГЛАВА 3. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**

При полете летательного аппарата в атмосфере, наиболее распространенным методом управления движением является использование отклоняемых поверхностей (в просторечии - рулей) [17]. При дозвуковых скоростях и малых углах атаки такое управление вполне себя оправдывает. Однако при больших углах атаки и при сверхзвуковых скоростях характер течения в окрестностях летательного аппарата изменяется: происходит срыв потока, и на управляющие органы (рули) попадают турбулентные вихревые структуры, что приводит к падению устойчивости управления, изменяются аэродинамические характеристики летательного аппарата. Очевидно, что для эффективного управления ЛА на обозначенных выше условиях полета необходимо применять какую-то другую схему управления.

В настоящей работе исследовались способы газодинамического управления высокоскоростным летательным аппаратом на примере авиационной управляемой ракеты. Рассмотрены различные подходы организации газодинамического управления: за счет дополнительного впрыска рабочего тела в сопло, как вдоль оси симметрии, так и под углом к ней; использование газодинамических рулей; ввода в поток щитков для отклонения струи; использование поворотного сопла; выдув управляющей струи за габарит летательного аппарата перпендикулярно набегающему потоку.

Каждому из этих способов свойственны свои особые структуры течения, которые образуются при взаимодействии набегающего потока с органами управления. Примером могут служить образование зон обратных токов, формирование скачков уплотнения и волн разрежения, эффект натекания струи на преграду.

Для получения детальной информации о происходящих процессах и их воздействии на конструкцию ЛА использовался метод численного эксперимента.



К достоинствам такого подхода можно отнести большой объем получаемых данных, зачастую недоступный при проведении натурных испытаний. Недостатки подхода заключаются в появлении погрешности, вносимой используемой математической моделью и выбранным численным методом, что обуславливает необходимость проведения верификации математической модели и численного метода по известным экспериментальным данным.

При численном моделировании тепломассообмена и газовой динамики исследуемых процессов решались дискретные аналоги системы уравнений Навье-Стокса в трёхмерной стационарной постановке для модели вязкой сжимаемой теплопроводной среды [73]. В качестве рабочего тела задавался воздух. Известно, что достоверность результатов, получаемых при решении дискретных аналогов дифференциальных уравнений гидрогазодинамики и тепломассообмена, во многом зависит от качества сеточного разрешения областей с высоким градиентом изменяемых параметров. Чем сложнее структура исследуемого процесса, тем более жесткие требования необходимо предъявлять к качеству сеточной модели.

В ходе предварительных исследований установлено, что при моделировании сверхзвуковых и гиперзвуковых течений, важнее всего качественно разрешить области больших градиентов параметров потока, то есть области скачков уплотнения. В данной главе приведен пример анализа влияния размера ячеек расчётной сетки на результаты моделирования. Такой анализ позволяет определить оптимальную размерность сетки, которая с одной стороны обеспечит получение достоверных результатов, а с другой, обеспечит разумную экономию расчётных ресурсов.

Влияние сеточной модели на результаты следует разделять на две составляющие. Первая – это создание достаточно подробной сетки близ поверхности ЛА, для разрешения течения в пограничном слое. В качестве критерия оценки точности результатов использованы суммарные аэродинамические силы и моменты, пересчитанные в безразмерные

аэродинамические коэффициенты следующим образом (на примере коэффициента подъёмной силы):

$$c_y = \frac{R_y}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} S} \quad (3.1)$$

где  $S = 0.000642 \text{ м}^2$  – характерная площадь модели изделия (площадь двух консолей крыла);  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$  – плотность набегающего потока;  $v_\infty = M_\infty \cdot a$  – скорость набегающего потока [м/с];  $R_y$  – проекция полной аэродинамической силы на ось OY глобальной системы координат [Н].

Суммарные аэродинамические моменты пересчитываются в безразмерные аэродинамические коэффициенты следующим образом (на примере коэффициента момента тангажа):

$$m_z = \frac{M_z}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} S l} \quad (3.2)$$

где  $S = 0.000642 \text{ м}^2$  – характерная площадь модели изделия (площадь двух консолей крыла);  $l = 0.5714 \text{ м}$  – характерный линейный размер модели изделия;  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$  – плотность набегающего потока;  $v_\infty = M_\infty \cdot a$  – скорость набегающего потока [м/с];  $M_z$  – составляющая полного аэродинамического момента по оси OZ глобальной системы координат [Н·м].

Все моментные характеристики, представленные в работе, рассчитывались для АУР Р73 относительно точки с координатами (330.957 мм, 0.0 мм, 0.0мм) относительно центра глобальной системы координат.

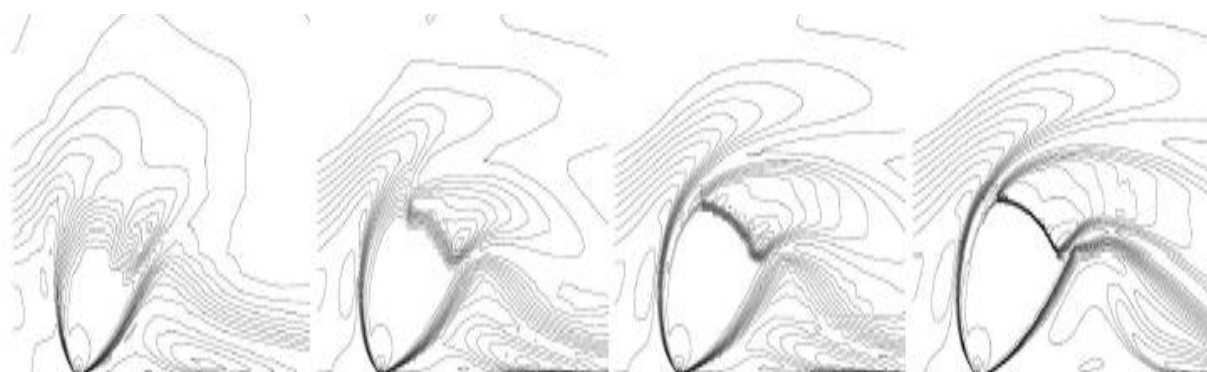
Относительная погрешность определялась по формуле

$$\delta = \frac{a-x}{a} * 100\% , \quad (3.3)$$

где  $a$  – экспериментальные данные,  $x$  – расчетные значения.

Вторая составляющая задачи построения сеточной модели – уловить сложные взаимодействия потока, как с самой конструкцией, так и с другими течениями, включая набегающий поток. Изначально сеточная модель строится таким образом, что сгущения ячеек можно расположить только у поверхности.

Сложнее с сеточной структурой в зоне взаимодействия потоков, в результате которых получаются сложные трехмерные структуры, предсказать появление, форму и расположение которых достаточно сложно. Пример недостаточного сеточного разрешения приводится в работе [46]. На рисунке 3.1 приводится сравнение контура скорости при различном сгущении сетки в области взаимодействия сносящего потока и эжектируемой перпендикулярно ему струи. Видно, что характерная для такого течения бочка Маха на сетке плохого качества может попросту не сформироваться.



**Рис. 3.1. Контур скорости на сетке разного сгущения.**

Отсюда следует, что, необходимую адаптацию сетки можно провести только после предварительного расчета, но только в том случае, если все физические особенности удалось уловить текущей сеткой.

### **3.1. Решение тестовой задачи для решения задачи сеточной независимости расчётной сетки на получаемые результаты**

Исследование сеточной независимости было проведено для X-компоновки геометрии АУР Р73 для трех сеточных моделей, различающихся по количеству ячеек. Исходные данные для построения сеточных моделей приведены в таблице 3.1.

**Таблица 3.1. – Исходные граничные условия и конфигурация геометрии.**

$\alpha^0$	$\gamma^0$	Положение руля				$M_\infty$	$\rho_{ст.}$ [кг/м <sup>2</sup> ]	$T_{ст.}$ [К]
		$\delta_1^0$	$\delta_2^0$	$\delta_3^0$	$\delta_4^0$			
16	-45	-20	-20	-20	-20	0.8	6713	242,5

Здесь  $\alpha^0$  – угол атаки,  $\gamma^0$  – вращение вокруг основной оси, продольной.  $\delta_1^0$ –  $\delta_4^0$  – положение отклонения управляющих рулей.

Размер сеточных моделей имел общее число ячеек – 6 млн., 11 млн. и 18 млн., соответственно. При построении сеточных моделей использовались одни и те же настройки сеточного генератора.

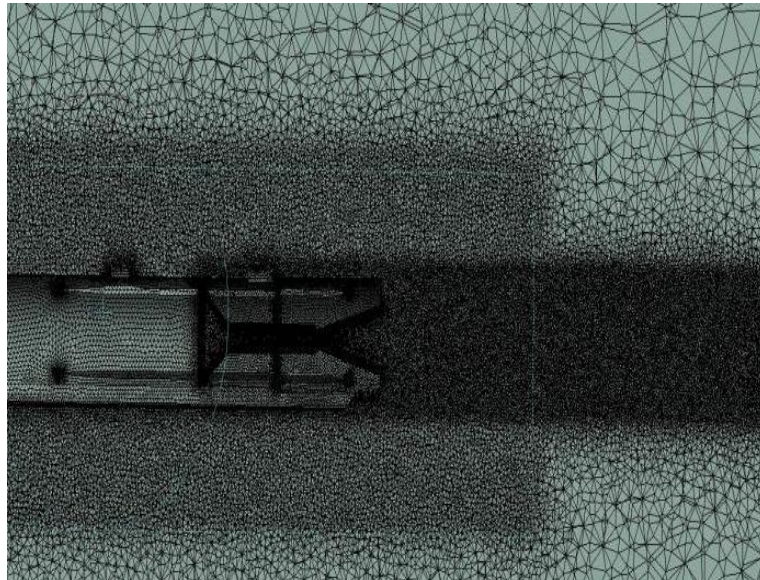
При сравнении полученных при проведении предварительных расчетов аэродинамических коэффициентов, первая сетка (на 6 млн. элементов/ячеек) показала расхождение с экспериментом почти на 20%. Две последние сетки по полученным аэродинамическим коэффициентам отличались на 9,3 и 9,6% от данных эксперимента, соответственно.

Характерным показателем при использовании различных моделей турбулентности является соотношение газодинамического времени и размера ячейки сетки  $y^+$ . Полученные значения погрешности расчета для сеток 11 млн. и 18 млн., подтверждают, что был получен интервал оптимального значения параметра  $y^+$  для выбранной модели турбулентности. Стоит отметить, что сгущение сетки сверх оптимального значения не приносит значительного прироста точности определяемых аэродинамических коэффициентов, но приводит к увеличению времени счета. Поэтому, при проведении дальнейших расчетов было принято положение о нецелесообразности использования сетки объемом более 11 млн. ячеек для данных размеров при симметричной постановке задачи.

**Таблица 3.2. - Результаты проведения исследования на сеточную независимость**

Количество ячеек	Скорость, М	Угол атаки, $\alpha$ ( $^\circ$ )	Безразмерный коэффициент, $C_u$
6 млн.	0,8	16	2,87436
11 млн.	0,8	16	2,40194
18 млн.	0,8	16	2,37079
Эксперимент	0,8	16	2,22404

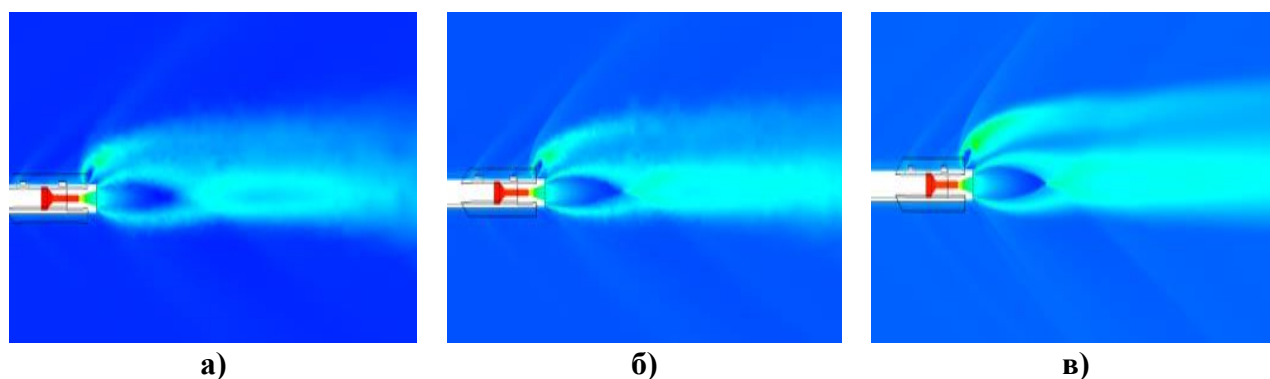
Аналогичное исследование сеточной независимости проводилось для схемы с выдувом рабочего тела перпендикулярно направлению полета. Были построены три сетки различного объема: 1.5, 3.0 и 5.0 млн. узлов соответственно. Сгущение сетки было произведено у поверхности АУР и в зоне истечения реактивной струи. Причем, каждая последующая сеточная модель была модификацией предыдущей.



**Рис. 3.2. Пример сгущения сеточной модели, используемой в дальнейших расчетах.**

Аэродинамические характеристики модели АУР исследовались при следующих значениях полета:  $M_\infty = 2.0$ ; высота  $H = 10000$  м; угол атаки  $\alpha = 0^\circ$ .

Полученные результаты показывают, что на всех сеточных моделях значения аэродинамических характеристик отличаются друг от друга, но на первой сетке наблюдалась достаточно сильная диссипация структуры течения, ввиду достаточно крупных ячеек сетки в области взаимодействия набегающего потока и истекающей из сопла системы газодинамического управления. В результате расчета по такой сеточной модели, истекающая из управляющего сопла струя практически теряла свои реальные характеристики. Результаты расчетов по сеточным моделям под номерами 2 и 3 дали сопоставимые результаты: характеристики газодинамического процесса по результатам этих расчетов показали их удовлетворительное совпадение. Поля температуры течения, полученные на сетках разного сгущения, представлены на рисунке 3.3.



**Рис.3.3. Поля температуры при расчете сетках:**  
*а - 1.5млн. узлов; б - 3.0 млн. узлов; в - 5.0 млн. узлов.*

### 3.2. Выбор модели турбулентности и верификация по данным экспериментов

Система уравнений Навье-Стокса замыкается уравнениями модели турбулентности. Для выбора модели турбулентности, адекватно описывающей процессы, протекающие вблизи поверхности, было проведено предварительное исследование обтекания изделия с верификацией результатов по данным продувок. Были рассмотрены три достаточно хорошо зарекомендовавшие себя модели турбулентности: модель SST, модель Transition-SST и специально разработанная для задач аэродинамического внешнего обтекания модель турбулентности Спаларта-Аллмараса (S-A).

Для верификации был выбран режим с углом атаки  $16^\circ$ , скоростью набегающего потока  $M=0,8$  и задан угол отклонения рулей в  $-20^\circ$ . Начальные данные, соответствующие режиму, представлены в таблице 3.1. Результаты оценивались по безразмерному аэродинамическому коэффициенту подъемной силы и моменту  $M_z$ . Результаты исследования представлены в таблице 3.3.

**Таблица 3.3. - Аэродинамические коэффициенты различных моделей турбулентности**

Модель турбулентности	$C_y$	$M_z$
SST	2.38197	1.2048
S-A	2.37079	1.2356
Transition-SST	2.36929	1.2384
Эксперимент	2,22404	1.30736

Из таблицы видно, что две модели турбулентности Transition-SST и S-A показывают близкие результаты, наиболее соответствующие результатам экспериментов. Однако модель турбулентности S-A содержит только одно уравнение, что выгодно отличает ее от других моделей по необходимому объему вычислительных ресурсов. Поэтому, для проведения расчётов была выбрана модель турбулентности Спаларта-Аллмараса (Spalart-Allmaras, S-A).

### 3.3. Верификация полной математической модели на экспериментальных данных

Для верификации предложенной математической модели были проведены пять расчётов в соответствии с данными стендовых экспериментов для конфигураций изделия и параметров набегающего потока, приведенных в таблице 3.4.

Таблица 3.4. - Конфигурация изделия и параметры набегающего потока

$\alpha^0$	$\gamma^0$	Положение руля				$M_\infty$	$P_{ст},$ [кг/м <sup>2</sup> ]	$T_{ст},$ [К]	$V_\infty,$ [м/с]
		$\delta_1^0$	$\delta_2^0$	$\delta_3^0$	$\delta_4^0$				
16	-45	-20	-20	-20	-20	0.8	6713	242,500	252,170
20	-45	-20	-20	-20	-20	0.8	6713	242,500	252,170
24	-45	-20	-20	-20	-20	0.8	6713	242,500	252,170
16	-45	-20	-20	-20	-20	2	2629	151,100	499
24	-45	-20	-20	-20	-20	2	2629	151,100	499

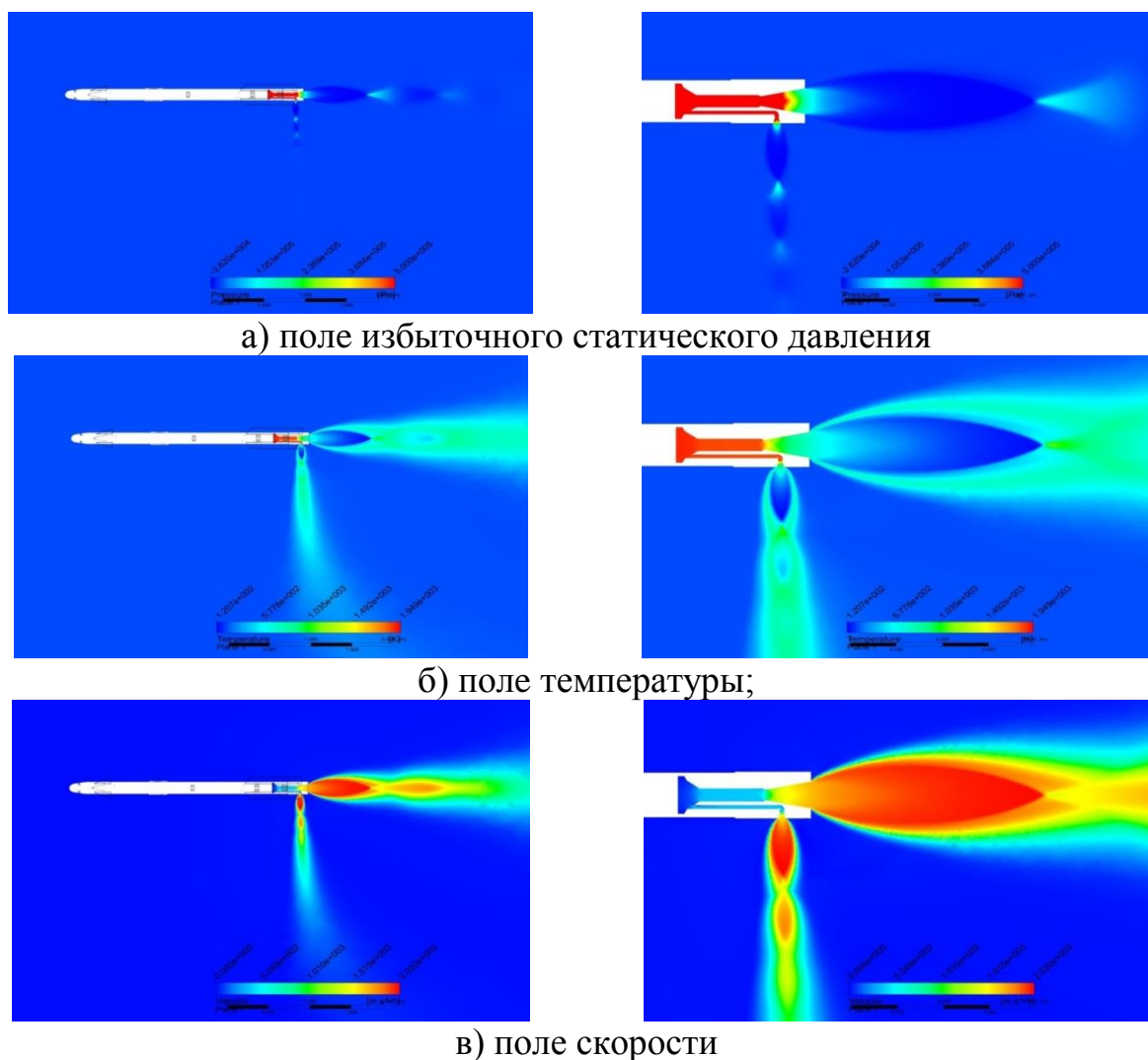
Полученные суммарные и распределённые аэродинамические характеристики изделия представлены в таблице 3.5.

**Таблица 3.5. Сравнительная оценка погрешности математической модели по расчету распределенных аэродинамических характеристик.**

Коэффициент	Эксперимент	Расчет	Относительная погрешность, %
<b>M=0,8</b>		<b>Угол атаки, <math>\alpha = 16^\circ</math></b>	
C <sub>x</sub>	-	1,639	-
C <sub>y</sub>	2,224	2,371	6,598
M <sub>z</sub>	1,307	1,235	5,488
<b>M=0,8</b>		<b>Угол атаки, <math>\alpha = 20^\circ</math></b>	
C <sub>x</sub>	-	1,502	-
C <sub>y</sub>	4,285	4,584	6,970
M <sub>z</sub>	1,238	1,167	5,753
<b>M=0,8</b>		<b>Угол атаки, <math>\alpha = 24^\circ</math></b>	
C <sub>x</sub>	-	1,214	-
C <sub>y</sub>	6,867	6,832	0,517
M <sub>z</sub>	1,116	1,118	0,219
<b>M=2</b>		<b>Угол атаки, <math>\alpha = 16^\circ</math></b>	
C <sub>x</sub>	-	1,425	-
C <sub>y</sub>	3,688	3,673	0,404
M <sub>z</sub>	1,091	1,091	0,008
<b>M=2</b>		<b>Угол атаки, <math>\alpha = 24^\circ</math></b>	
C <sub>x</sub>	-	1,972	-
C <sub>y</sub>	9,156	9,163	0,077
M <sub>z</sub>	1,064	1,096	3,048

При сравнении расчетных и экспериментальных данных на различных режимах получено удовлетворительное совпадение. На рисунке 3.4 представлены поля давления (а), температуры (б) и скорости (в) при боковом выдуве, полученные при проведении моделирования на верифицированной математической модели.





**Рис. 3.4. Параметры потока вблизи изделия (общий вид – слева, область сопла - справа).  $M_\infty = 0,01$ .**

Полученные в настоящей главе данные верификации позволяют утверждать, что предложенная математическая модель, использованная численная схема и принципы построения сеточной модели с исследованием влияния ее качества на полученные результаты, могут быть использованы при проведении численного исследования характера взаимодействия струй АУР с газодинамическим управлением с набегающим потоком. А полученные результаты обладают необходимой степенью достоверности.

## ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОДОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

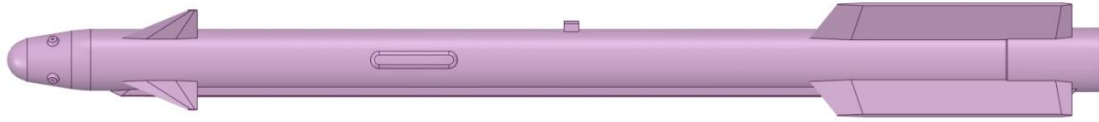
Для изучения различных методов газодинамического управления ЛА необходимо иметь представление о протекающих при работе изделия процессах. Как правило, работа блока ГДУ осуществляется при работе основного двигателя АУР. Соответственно, поверхность корпуса ЛА обтекается высокоскоростным потоком воздуха. Истекающая из сопла струя взаимодействует с набегающим потоком, а также с пограничным слоем, сформировавшимся вблизи поверхности ЛА.

Таким образом, для исследования ГДУ ЛА важно разрешить вышеуказанные комплексные взаимодействия. Для этого необходимо проведение комплексного моделирования обтекания всей поверхности ЛА вместе с истечением газа из камеры сгорания.

В целях экономии расчетных ресурсов полная геометрия камеры сгорания не моделировалась. Вместо этого в целях получения правильных параметров струи моделировался тракт профилированного сопла, то есть его дозвуковая и сверхзвуковая части. Дозвуковая часть сопла была ограничена поверхностью, на которой задавалось давление, температура и параметры турбулизации потока, соответствующие параметрам внутри камеры сгорания.

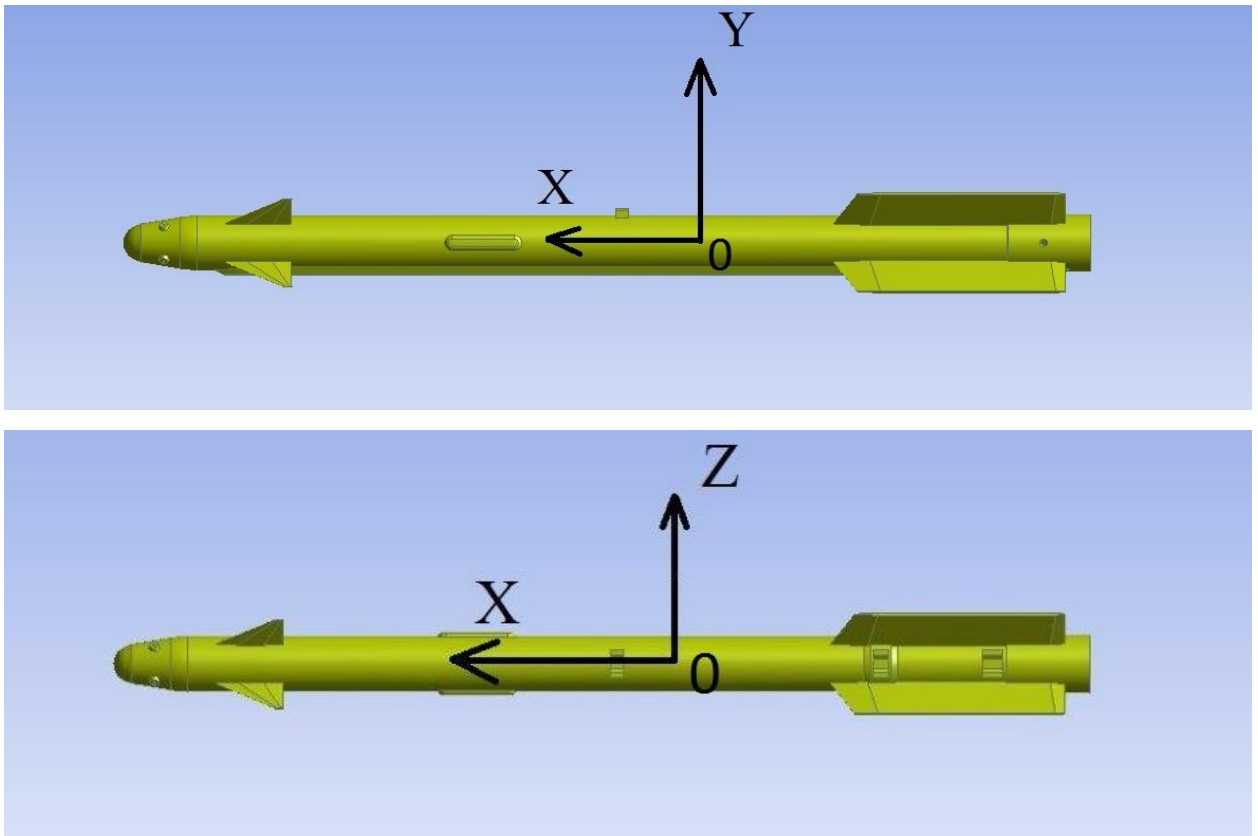
Исследование методов ГДУ предлагается проводить на единой геометрии ЛА с одинаковым каналом, идущим от камеры сгорания. В качестве ЛА был выбран экспортный вариант АУР Р-73Е класса «воздух-воздух». Исходная геометрия исследуемого изделия была достаточно сильно упрощена с целью уменьшения потребных расчетных ресурсов. Были удалены крепежные элементы, конструктивные особенности, связанные с технологией производства, поворотные рули, которые не отклоняются в ходе полета и не оказывают принципиального

влияния на структуру течения. Общий вид упрощенной геометрии изделия представлен на рисунке 4.1.



**Рис. 4.1. Общий вид изделия.**

Используемая для вычисления сил и моментов система координат показана на рисунке 4.2.



**Рис. 4.2. Система координат.**

Построение расчетной сетки и проведение исследования на сеточную независимость было подробно рассмотрено в главе 3.

Из рассмотренных в первой главе настоящей работы способов управления вектором тяги летательного аппарата [1, 3], стоит выделить следующие методы ГДУ для проведения подробного исследования:

- **Поворотное сопло.** Этот метод управления хорошо изучен и успешно применяется на самолетах многих стран мира. Однако его использование на ЛА вида АУР вызывает сложности по причине жесткого ограничения массогабаритных характеристик этого вида ЛА. В связи с этим в настоящей работе рассматривался только вариант разрезного поворотного сопла, когда поворачивается не весь двигатель, а только часть сопла.

- **Газодинамические рули.** Применение такого метода имеет самое раннее происхождение, практически с самого появления боевых снарядов на реактивной тяге.

- **Интерцепторы.** За исключением рассмотренных в главе 1 летных лабораторий, интерцепторы на самолетах применяют в основном как щитки, тормозящие набегающий поток для управления подъемной силой на крыле, и в некоторых случаях как дополнительная поверхность торможения. В ЛА вида АУР интерцепторы получили большее распространение, и в настоящий момент применяются на многих ракетах, в том числе Р-73.

- **Вдув газа в сопло для деформации струи.** В последнее время проводятся работы по исследованию управления вектором тяги (УВТ) за счет вдува газа из газогенератора в сопло. В настоящей работе отбор газа происходит из камеры сгорания ЛА.

- **Выдув газа наружу ЛА в набегающий поток.** При таком подходе основная реактивная струя АУР не деформируется и не поворачивается, а поворотный момент создается за счет боковой реактивной струи.

#### 4.1. Исследование характеристик газодинамического управления на основе поворотного сопла в варианте разрезного исполнения

Геометрия в варианте разрезного поворотного сопла, использовавшаяся для проведения текущих расчетов, представлена на рисунке 4.3.

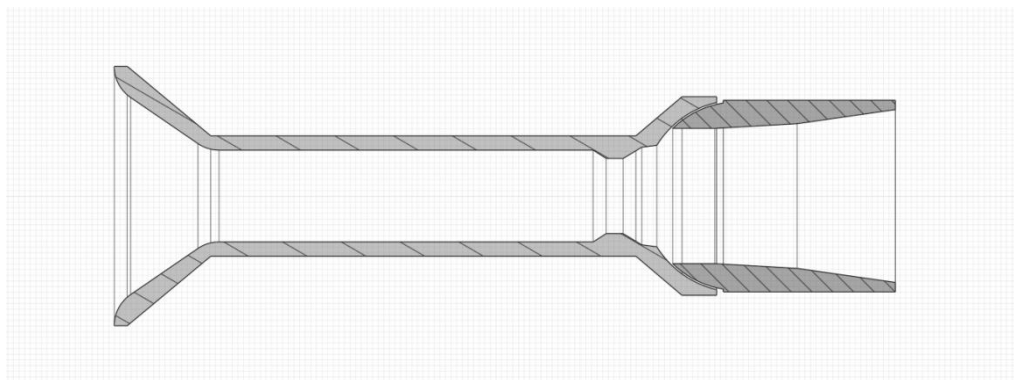


Рис. 4.3. Геометрия в варианте разрезного поворотного сопла.

Рассматриваемые в ходе расчета режимы течения представлены в таблице 4.1. Здесь  $H$  – высота полета,  $M_\infty$  – скорость полета,  $P_\infty$  и  $T_\infty$  – давление и температура среды,  $\alpha$  – угол атаки,  $\delta_y$  и  $\delta_z$  – углы поворота сопла по соответствующим осям.

Таблица 4.1. Граничные условия расчетных режимов

Номер расчета	$H$ , км	$M_\infty$	$P_\infty$ , Па	$T_\infty$ , К	$\alpha$ , °	$\delta_y$ , °	$\delta_z$ , °
1	10	2,0	26500	223,252	0	0	0
2	10	2,0	26500	223,252	0	12,7	0
3	10	2,0	26500	223,252	0	-12,7	0
4	10	2,0	26500	223,252	0	0	-12,7

На рисунках 4.4 – 4.9 представлены поля избыточного статического давления в плоскости симметрии для варианта изделия с ГДУ на основе поворотного сопла в разрезном исполнении.

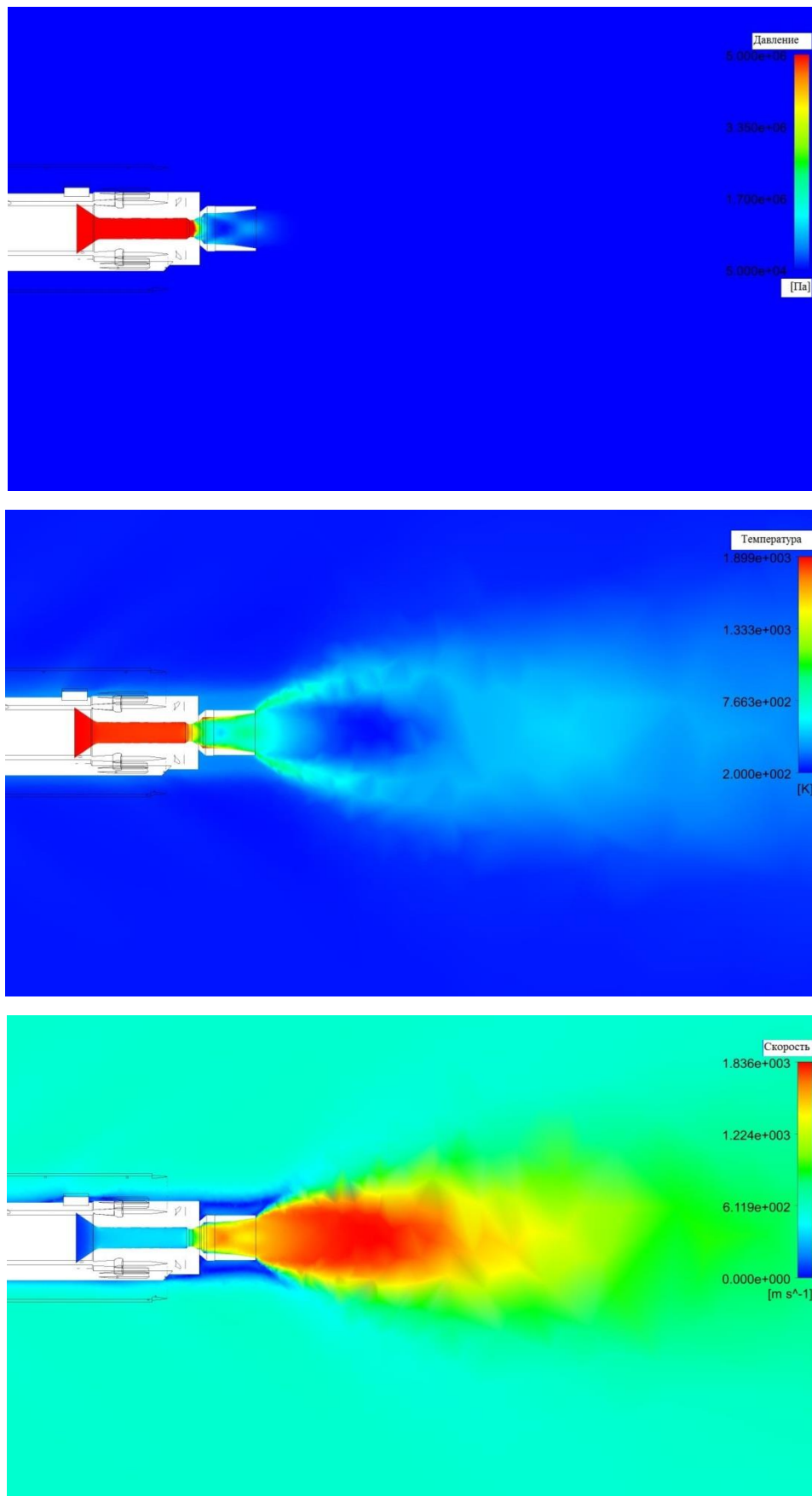


Рис. 4.4. Поле давления, температуры и скорости в плоскости симметрии изделия ( $\delta_y = 0^\circ$   $\delta_x = 0^\circ$ ).

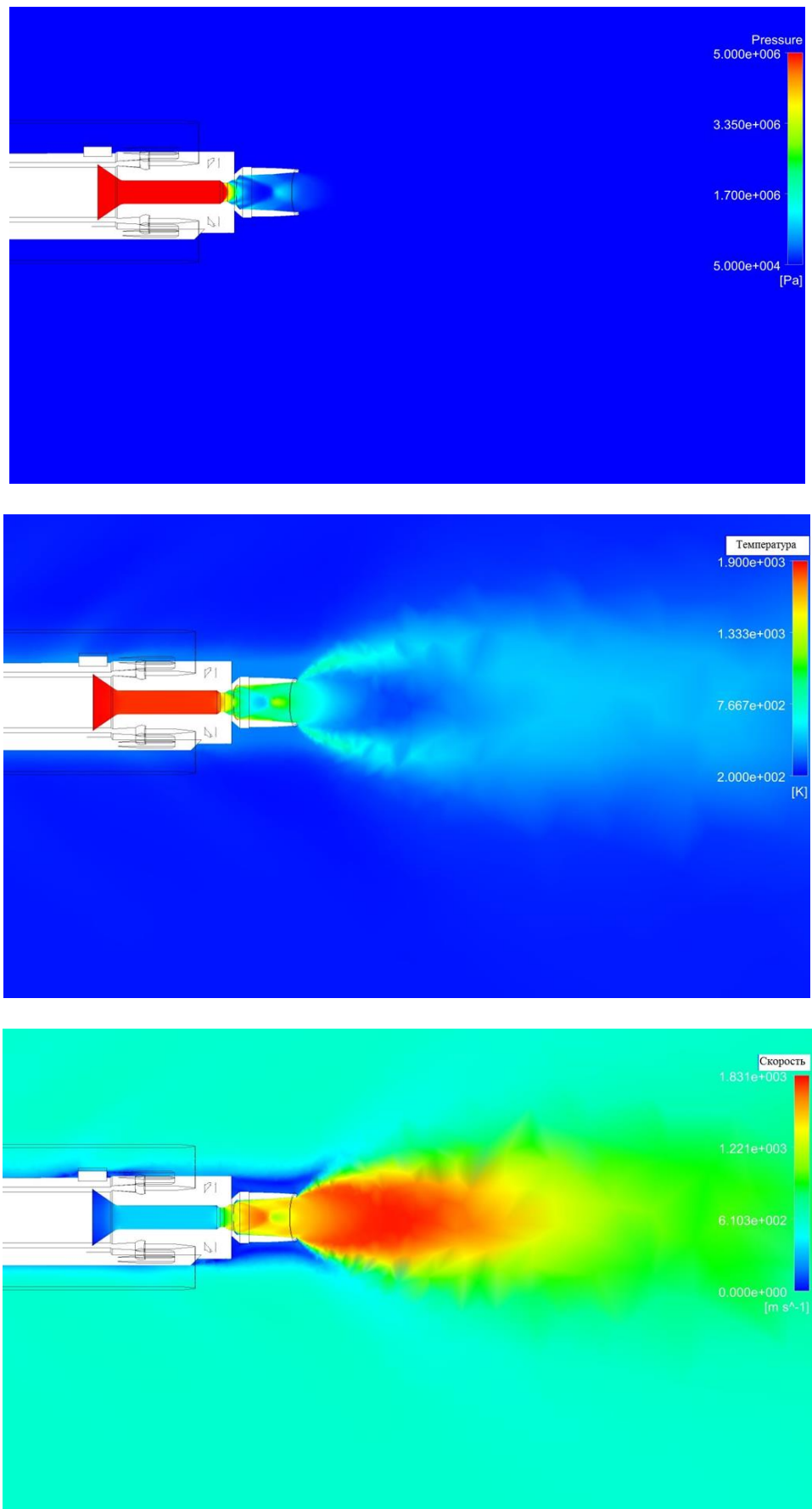


Рис. 4.5. Поле давления, температуры и скорости в плоскости симметрии изделия ( $\delta y = 0^\circ$   $\delta z = -12,7^\circ$ ).

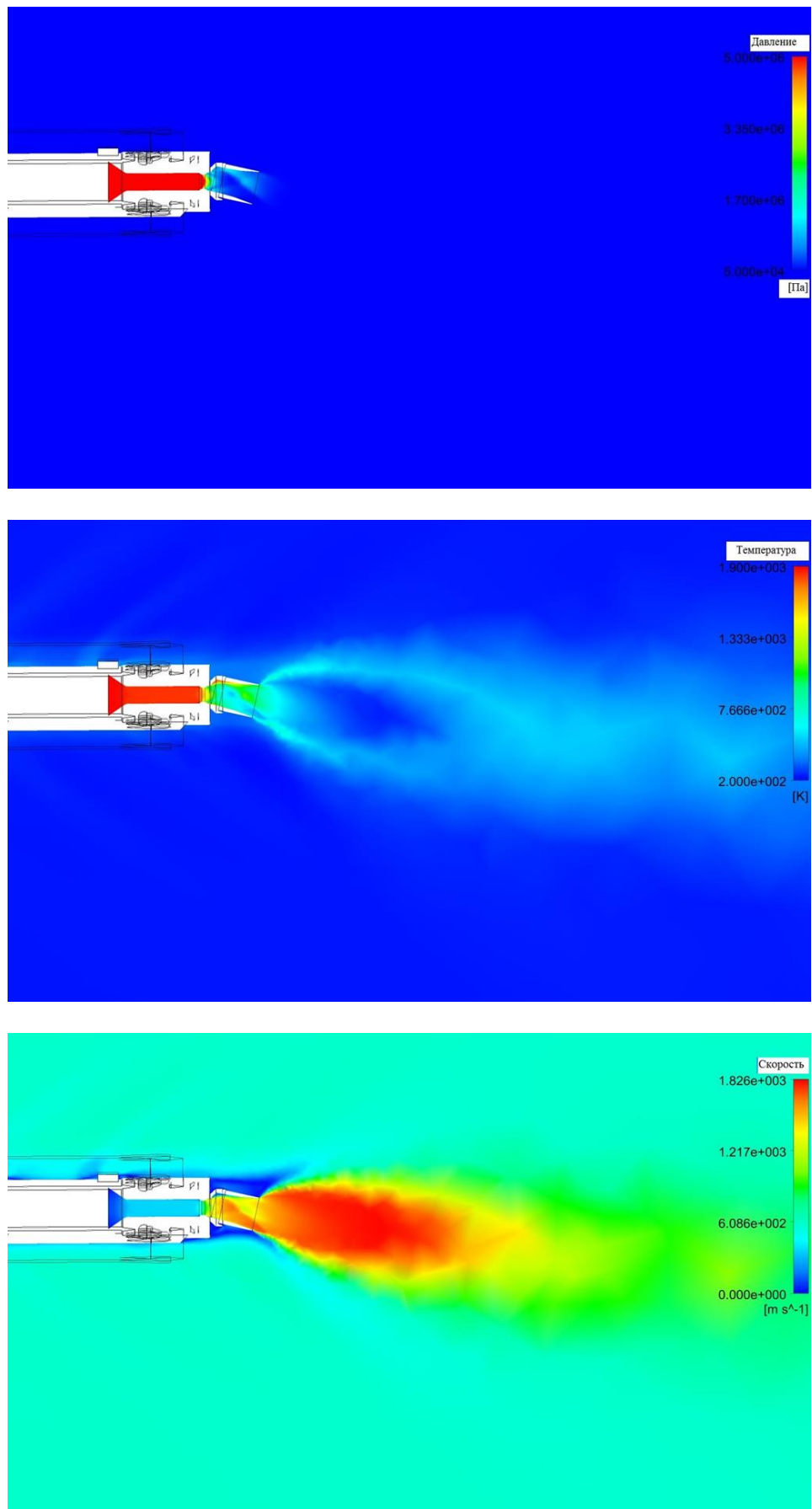


Рис. 4.7. Поле давления, температуры и скорости в плоскости симметрии изделия ( $\delta y = -12,7^\circ$   $\delta y = 0^\circ$ ).



В ходе расчетов были получены суммарные и распределенные аэродинамические характеристики изделия для вариантов, указанных в таблице 4.1. Суммарные аэродинамические характеристики изделия, для варианта с различными углами отклонения поворотного сопла приведены в таблице 4.2.

**Таблица 4.2. Суммарные аэродинамические характеристики изделия для варианта поворотного сопла в разрезном исполнении**

Геометрия изделия	$F_{y1}, Н$	$F_{z1}, Н$	$F_{x1}, Н$ (лобовое сопротивление корпуса изделия)	Тяга двигателя (вдоль оси $X_1$ ), Н
Нулевое отклонение.	-37,0	-28,0	-1308,49	18108,49
Отклонение вверх на $12,7^\circ$	-4401,0	12,6	-1353,33	17534,7
Отклонение вниз на $12,7^\circ$	3880,0	-17,1	-1543,65	17599,49
Отклонение влево на $12,7^\circ$	-50,0	4225	-1388,81	17438,81

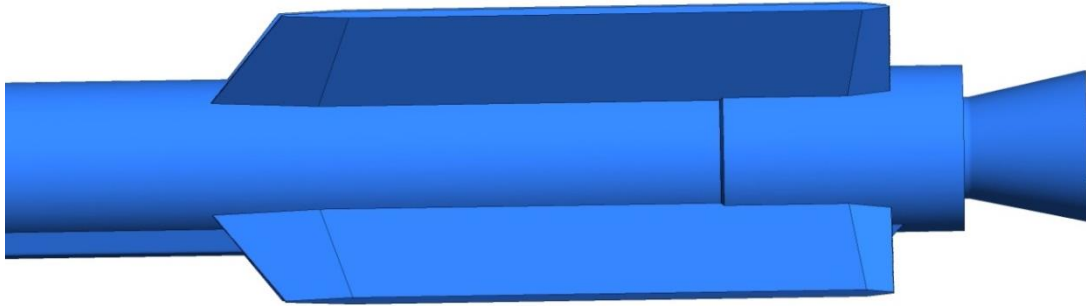
Применение поворотного разрезного сопла для ГДУ ЛА показало высокую эффективность. Создаваемые поворотные усилия оказались достаточно высокими, а потери в тяге – минимальны. Однако остается неразрешенной проблема относительно большой массы конструкции поворотного сопла и управляющих элементов. Такая сложная конструкция может требовать значительных затрат времени и материалов, которые не окупаются при применении такого подхода на одноразовом изделии, при наличии более дешевых, простых и надежных альтернатив.

#### **4.2. Исследование характеристик газодинамического управления на основе газовых рулей**

Газодинамические рули, расположенные внутри сопла, призваны изменять вектор тяги путем отклонения потока, истекающего из камеры сгорания, за счет деформирования струи. Однако данная компоновка конструкции несет определенные сложности. Требуется особый подход для реализации передачи усилий на рули, поскольку данные механизмы должны быть расположены в

стенке сопла. Это приводит к увеличению массы изделия и уменьшению эффективной площади сечения канала, что может негативно сказаться на технических и летных характеристиках изделия.

Геометрическая модель хвостовой части АУР, использующей метод газовых рулей для управления вектором тяги представлена на рис. 4.8.



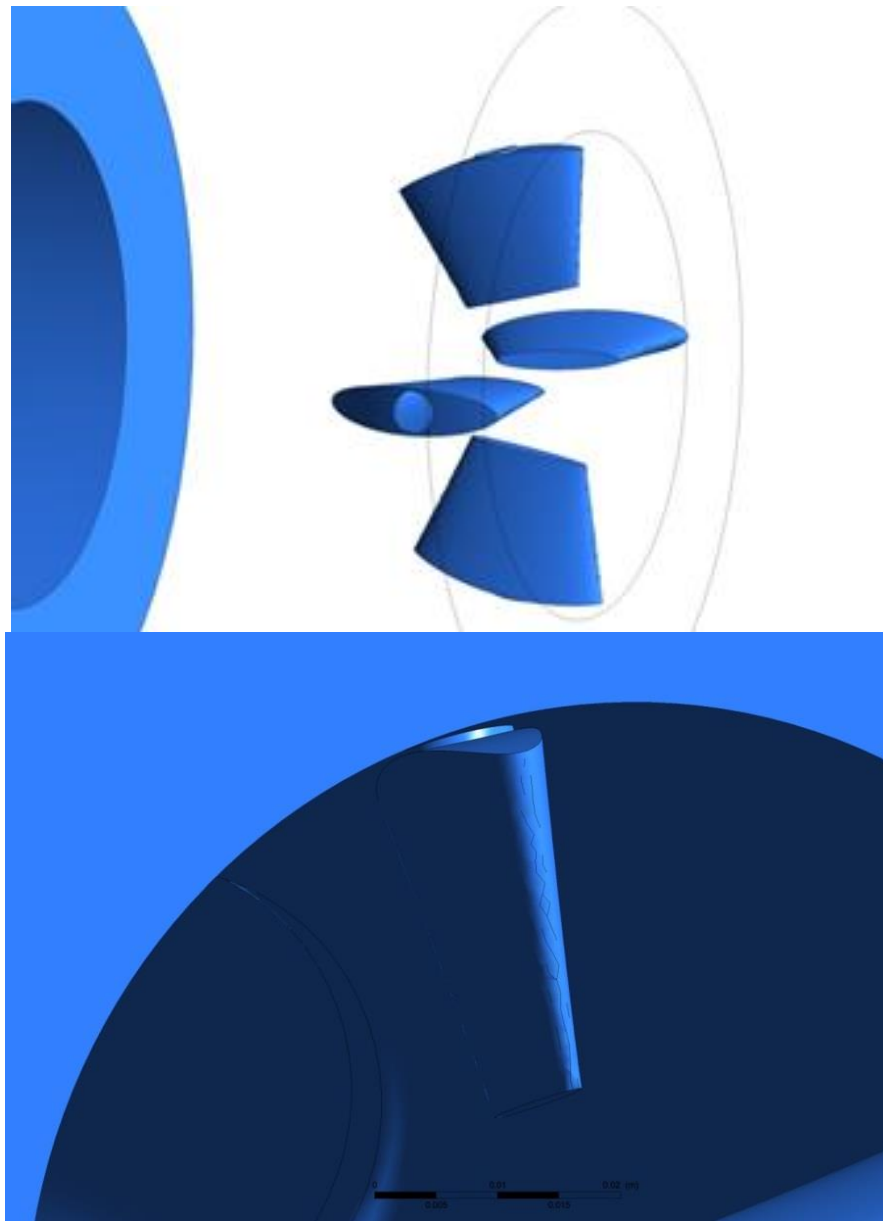
**Рис. 4.8. Хвостовая часть изделия (упрощенная геометрия).**

В рамках данной работы был проведен расчет обтекания изделия с параметрами горячего газа на срезе камеры сгорания с температурой 1900К при числе Маха набегающего потока 2,0. Параметры расчета представлены в таблице 4.3.

**Таблица 4.3. Параметры численного эксперимента**

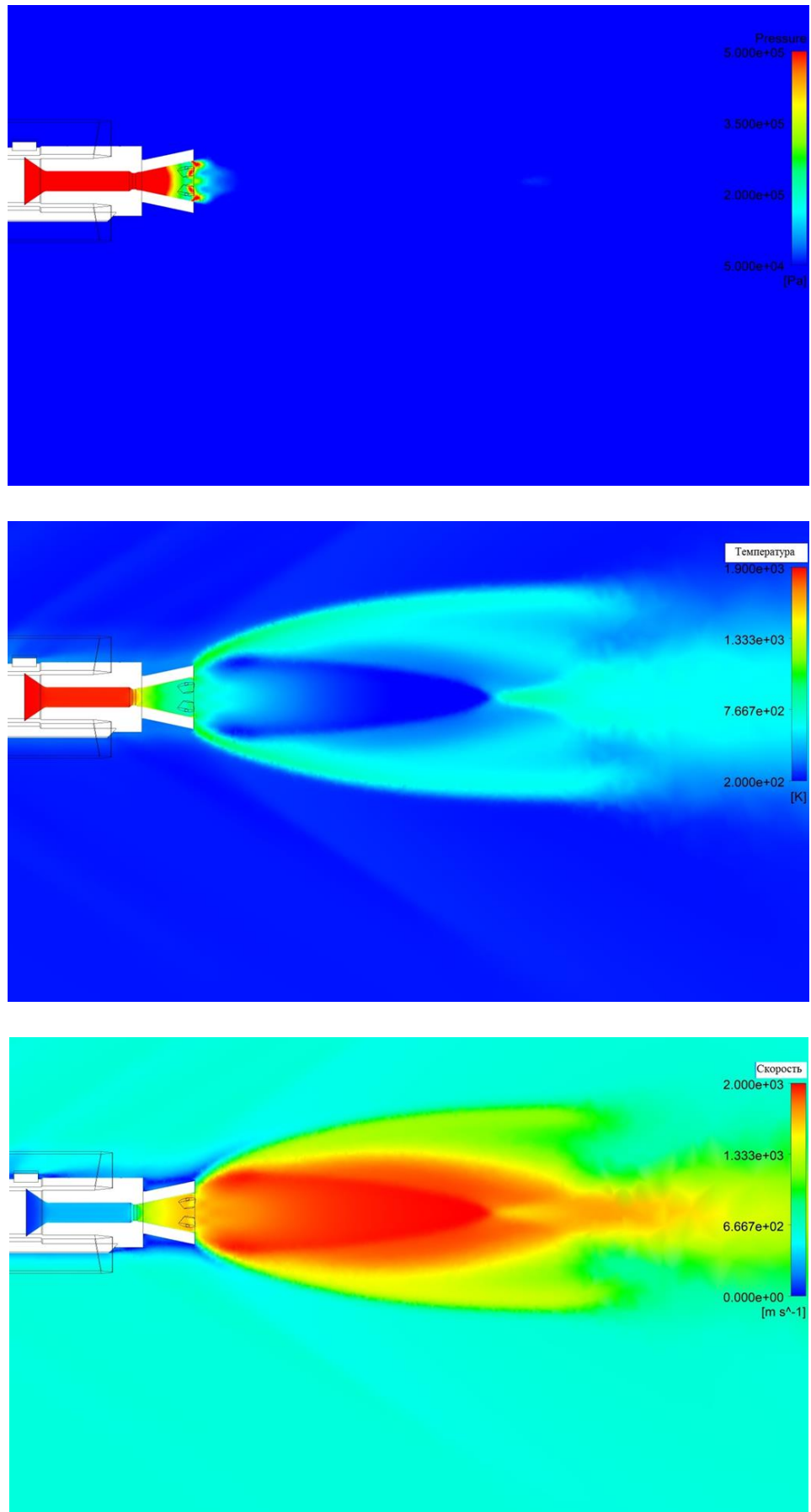
Номер расчета	$M_\infty$ (число Маха набегающего потока)	$P_\infty$ (статическое давление набегающего потока)	$P$ , Па (давление в камере сгорания)	$T$ , К (температура в камере сгорания)
1	2,0	25600	10e6	1900

Геометрическая модель газовых рулей представлена на рис. 4.9.



**Рис. 4.9. Внешний вид газовых рулей.**

Визуализация расчетов газодинамической структуры при использовании газовых рулей приведена на рисунке 4.10.



**Рис.4.10. Поля давлений, температуры и скорости течения в хвостовой части АУР при использовании газовых рулей.**

В ходе проведения расчета было отмечено, что некоторые элементы геометрии отклоняемых рулей подвергаются достаточно сильным тепловым и эрозионным нагрузкам. Это области передних кромок рулей, а также донная область в зоне их крепления к приводам (Рис.4.11). Особенности расположения рулей могут вносить искажения в структуру потока. Это можно видеть при выводе расчетных значений температуры поверхности и турбулентных вихрей в потоке. От места крепления руля к его поверхности расходится волна, которая проходит по поверхности руля диагонально от основания к торцу. При этом между рулями формируются вихревые структуры, что сказывается на форме истекающей из сопла струи (Рис.4.12).

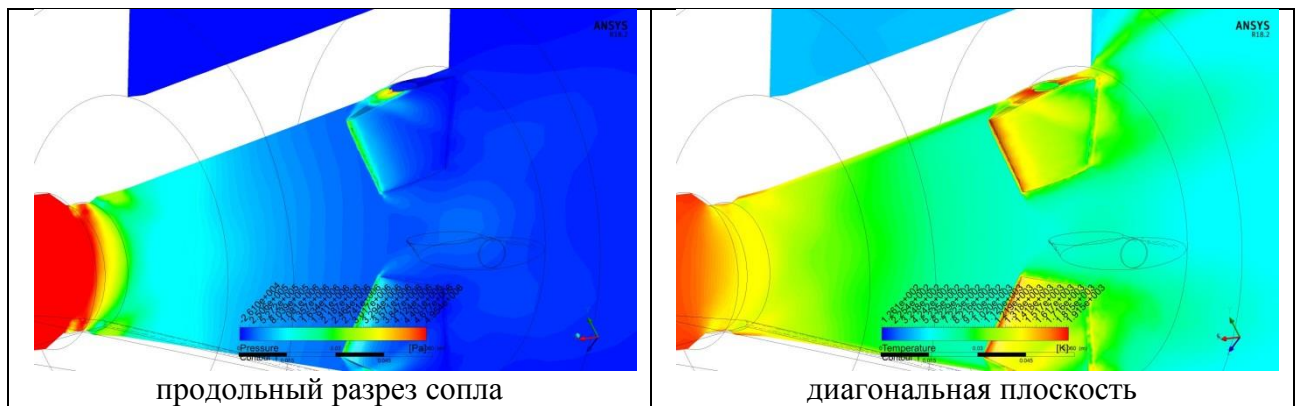


Рис. 4.11. Поля избыточного статического давления (слева) и поля температуры (справа) в диагональной плоскости.  $M_\infty = 2.0$ .

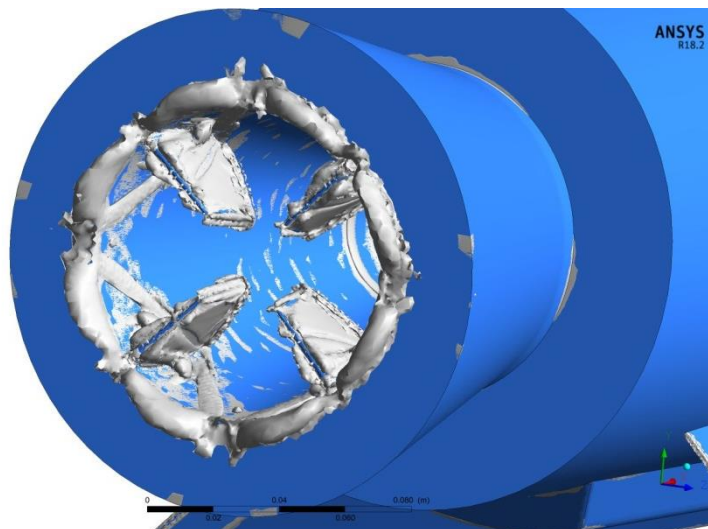


Рис. 4.12. Вихревые структуры, образующиеся на газовых рулях ( $M_\infty = 2.0$ ).

Аэродинамические силы и моменты, действующие на изделие, представлены в таблице 4.4. Аэродинамические моменты вычислялись относительно центра масс изделия (55% длины изделия от носа).

**Таблица 4.4. Аэродинамические силы и моменты**

<b>F<sub>x</sub>, Н (тяга с учетом лобового сопротивления)</b>	<b>F<sub>y</sub>, Н</b>	<b>F<sub>z</sub>, Н</b>	<b>M<sub>y</sub>, Н·м</b>	<b>M<sub>z</sub>, Н·м</b>
18 343,0	-108,74	2,79	0,29	180,8

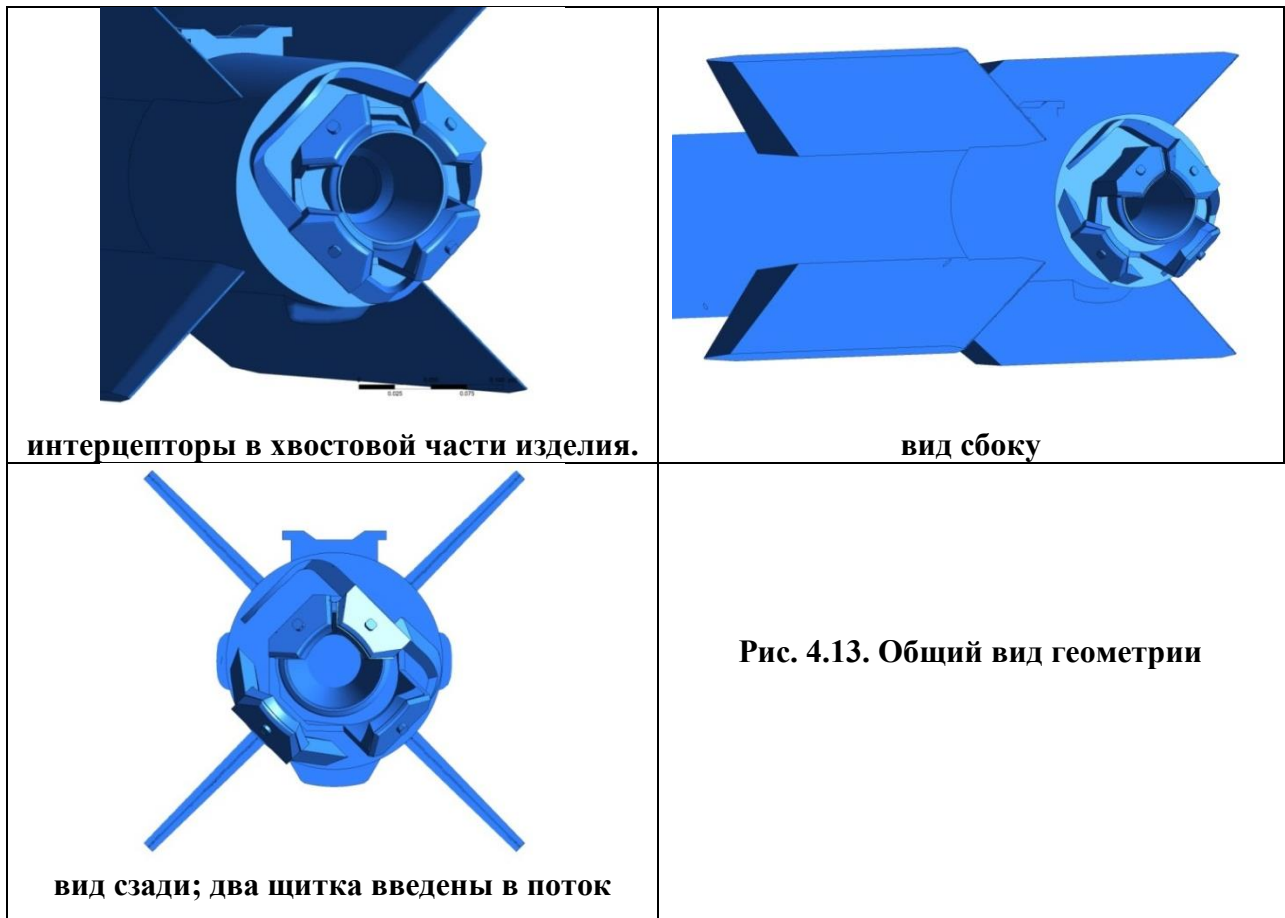
В ходе анализа результатов было установлено, что газовые рули обтекаются подобно крыльям малого удлинения на нулевом угле атаки. На рисунке 4.11 видно, что на передних кромках газовых рулей возникают характерные зоны повышенного давления и температуры.

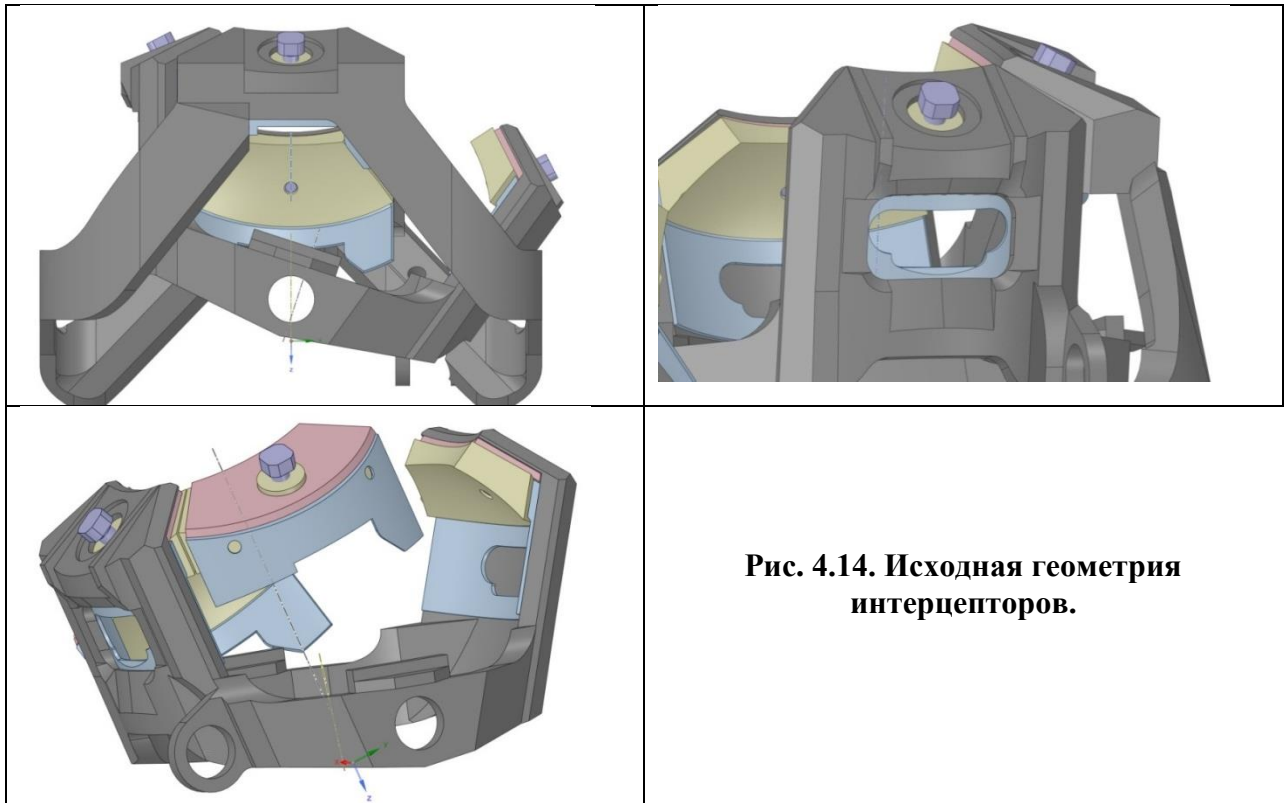
Поскольку управляющие поверхности расположены в зоне горячего потока на протяжении всего потока, то стоит отметить два важных фактора. Первая особенность обтекания заключается в том, что в нулевом положении газовые рули не совершают полезной работы, однако негативно влияют на тягу двигателя ЛА. Вторая особенность заключается в изменении геометрии профиля и поверхности в целом за счет эрозионных воздействий (ввиду отсутствия возможности организовать охлаждение лопаток) на всем протяжении работы двигательной установки. Это означает, что эффективность управления полетом ЛА за счет газовых рулей будет неуклонно снижаться, а в некоторых случаях может иметь непредсказуемый характер из-за изменения размера и формы управляющей поверхности.

### **4.3. Исследование характеристик газодинамического управления на основе интерцепторов в варианте выдвижных щитков**

Принцип работы интерцепторов заключается в отклонении струи потока для создания поворотного момента за счет введения в поток отклоняющих поверхностей. Для осуществления передачи усилия на геометрию интерцепторов используется сложная система приводов и тяг.

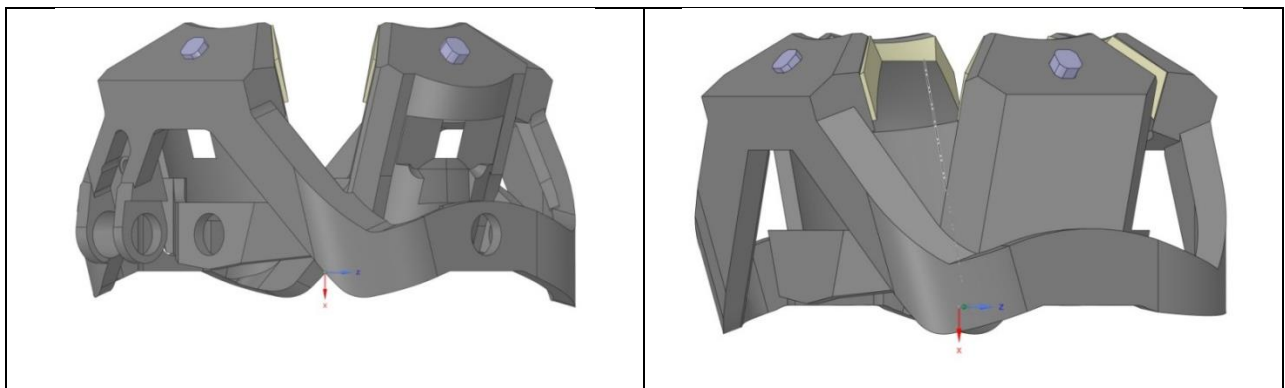
В силу конструктивных особенностей конечная геометрия интерцепторов носит довольно сложный вид. Для проведения численного моделирования такая подробная проработка геометрии и связи механизмов не требуется. Геометрия достаточно сильно упрощается: элементы, связанные с технологией производства заготовки; различные крепежные элементы; технологические отверстия; ребра жесткости и уплотнения удаляются и заменяются сплошной стенкой.





**Рис. 4.14. Исходная геометрия интерцепторов.**

После упрощения исходная геометрия приняла вид, показанный на рисунках 4.15.



**Рис. 4.15. Упрощенная геометрия интерцепторов.**

Всего было проведено три расчета. Исследованные конфигурации изделия отличались количеством щитков, введенных в поток: щитки выведены из потока, один щиток в потоке, два щитка в потоке.

Параметры расчетов представлены в таблице 4.5.

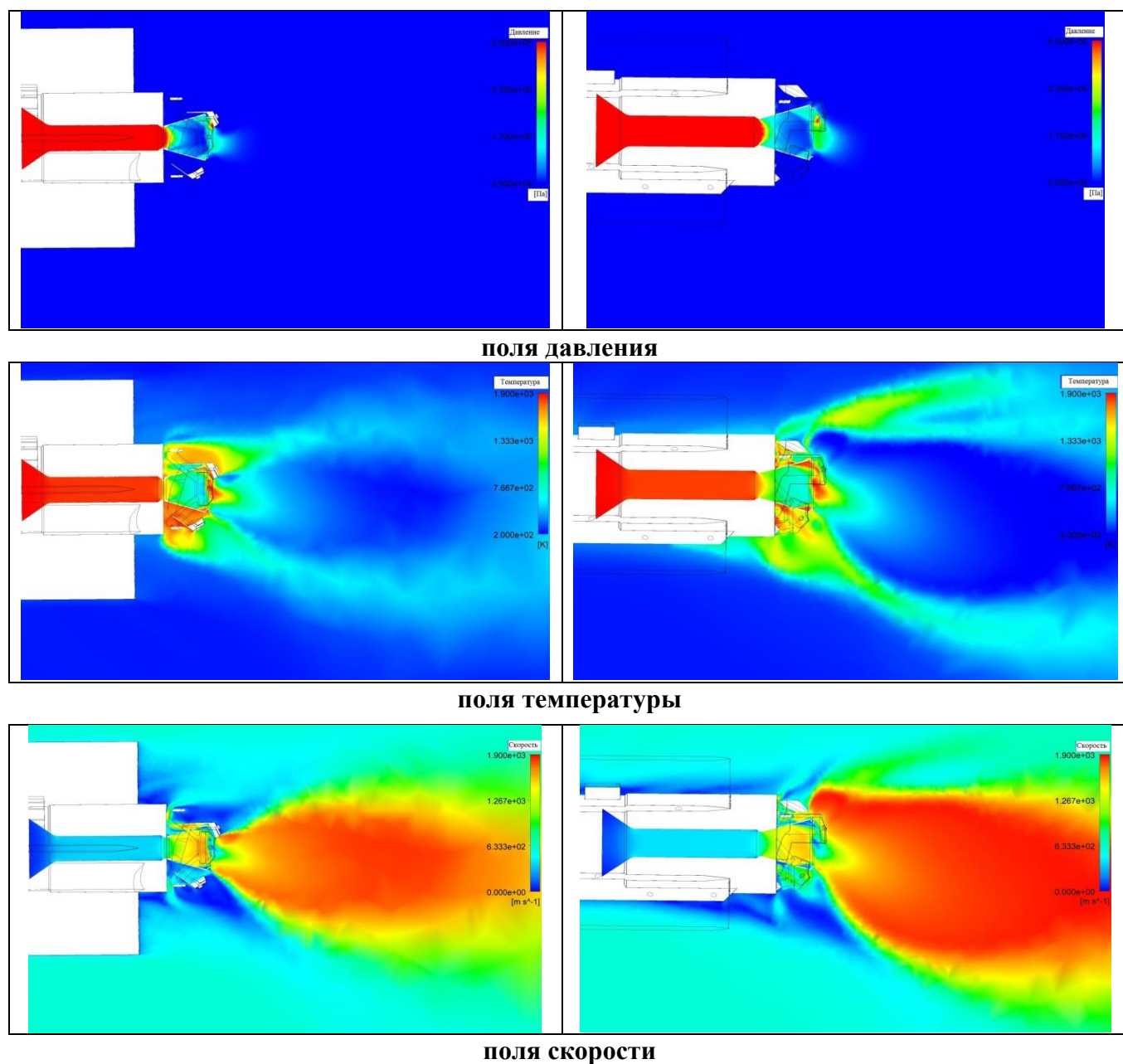


Таблица 4.5. Параметры численного эксперимента

$M_\infty$ (число Маха набегающего потока)	$P_\infty$ , Па (статическое давление набегающего потока)	$P$ , Па (давление в камере сгорания)	$T$ , К (температура в камере сгорания)	Число щитков в потоке
2,0	25 600	10e6	1900	0
				1
				2

Использование интерцепторов может служить эффективным средством для изменения направления полета. При изучении полей распределения скорости и температуры, а также линий тока, стоит отметить наличие зон высоких температур и обратных токов. Когда щитки интерцепторов вводятся в поток, они отклоняют часть истекающей струи. Однако при этом часть истекающей струи перекрывается, тем самым сужая площадь сечения сопла. При этом часть расходной массы перетекает между стенкой сопла и щитком интерцептора в направлении, противоположном движению струи, скапливаясь в донной области, где наблюдается повышение температуры.

Визуализация газодинамических характеристик течения в случае выдвинутых щитков, введенных в поток представлены на рисунке 4.16.



**Рис. 4.16. Поля (а) избыточного статического давления, (б) температуры и (в) скорости: (слева – один щиток в потоке, справа – два щитка в потоке).**

Аэродинамические силы и моменты, действующие на изделие, представлены в таблице 4.6. Аэродинамические моменты вычислялись относительно центра масс изделия (55% длины изделия от носа).

**Таблица 4.6. Аэродинамические силы и моменты**

Число щитков в потоке	$F_x$ , Н (тяга с учетом лобового сопротивления)	$F_y$ , Н	$F_z$ , Н	$M_y$ , Н·м	$M_z$ , Н·м
0	16474,11	-115,0	36,0	55,0	217,0
1	14671,18	1717,0	-1780,0	-2850,0	-2711,0
2	13784,75	3784,4	-411,58	-564,59	-5260,99

Из таблицы 4.6. видно, что введение в поток выдвижных щитков существенно изменяет нормальную и боковую силу, действующие на изделие, а также моменты  $M_y$  и  $M_z$ . Однако при работе поворотного устройства наблюдается также падение тяги. Один щиток уменьшает тягу на 11%. Два введенных в поток щитка уменьшают тягу изделия на 16%. В связи с этим систему ГДУ на основе интерцепторов в варианте выдвижных щитков нельзя считать оптимальной.

#### **4.4. Исследование характеристик газодинамического управления на основе системы вдува для деформации струи двигательной установки**

В рамках исследования характеристик газодинамического управления на основе использования системы вдува для деформации струи двигательной установки было проведено моделирование впрыска газа из камеры сгорания в сверхзвуковую часть сопла, минуя критическое сечение. В качестве рабочего тела использовались продукты реакции, которые подавались из камеры сгорания через тонкие трубки. Диаметр трубок выбирался из соображения габаритов АУР, места и угла впрыска в сопло. Варьировался угол, под которым происходил впрыск газа в струю. Геометрическая модель системы впрыска газа в сверхзвуковую часть сопла представлена на рис. 4.17.

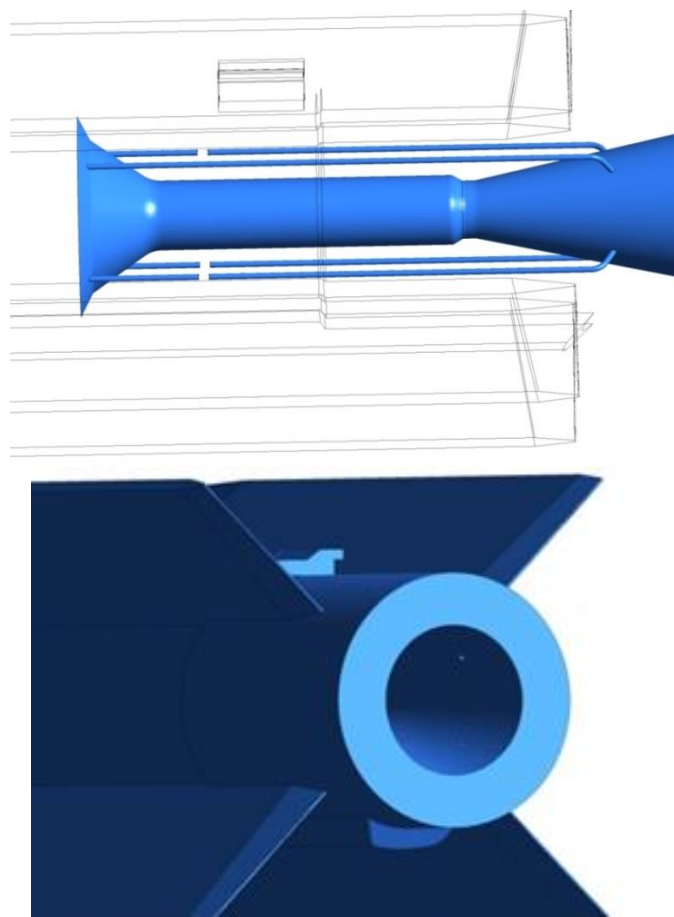


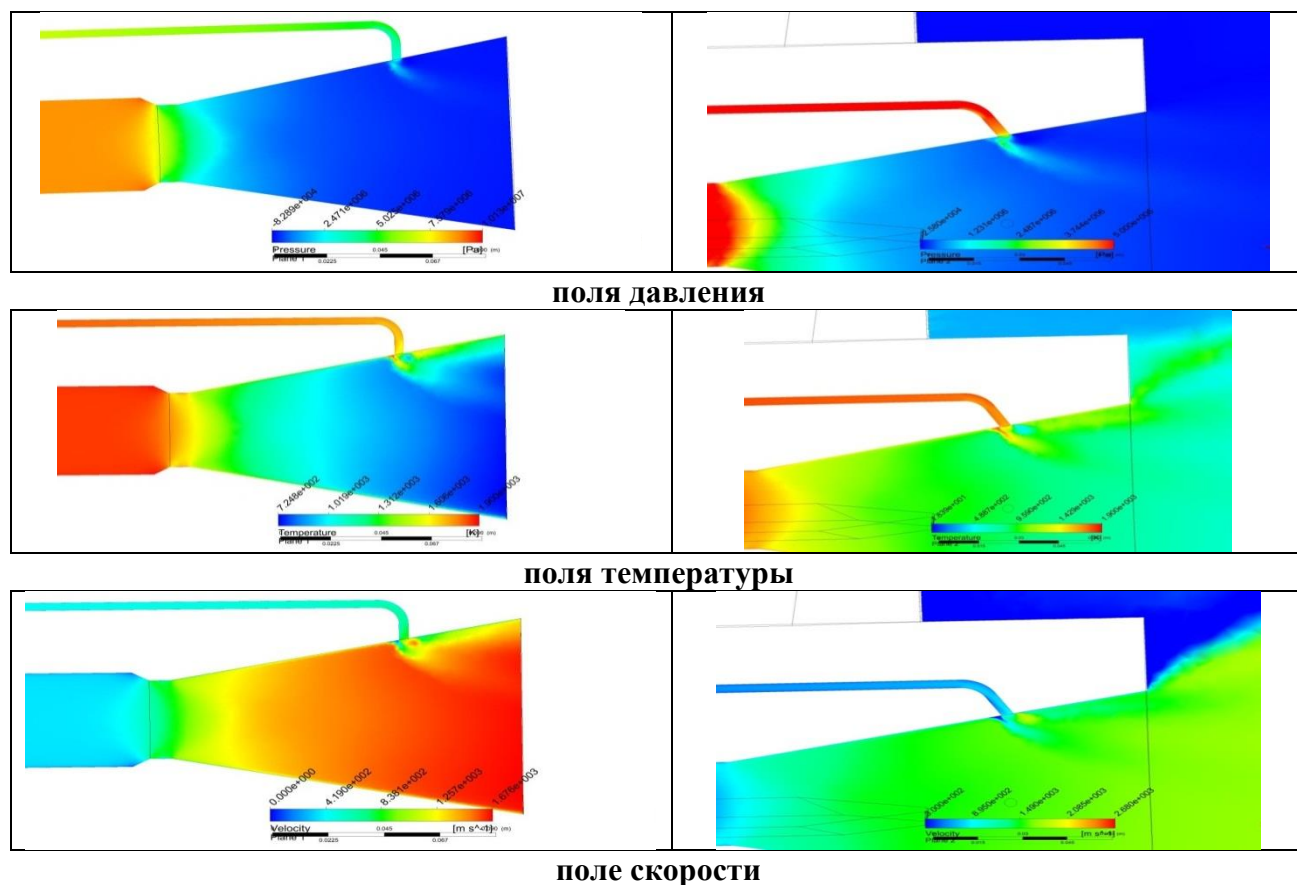
Рис. 4.17. Геометрия изделия. Общий вид.

Всего было проведено три расчета. Первый расчет проводился для варианта изделия в котором отключены все управляющие трубки, то есть, сопло работало без дополнительного впрыска. Во втором и третьем вариантах изделия учитывалась работа одной управляющей трубки. Вдув внутрь сопла осуществлялся под углом 60 и 90 градусов соответственно. Параметры расчетов представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7. Параметры численного эксперимента

Номер расчета	$M_\infty$ (число Маха набегающего потока)	$P_\infty$ (статическое давление набегающего потока)	$P$ , Па (давление в камере сгорания)	$T$ , К (температура в камере сгорания)	Число работающих трубок	Угол вдува
1	2,0	25600	100e06	1900	0	-
2	2,0	25600	100e06	1900	1	60 <sup>0</sup>
3	2,0	25600	100e06	1900	1	90 <sup>0</sup>

Визуализация параметров течения в сопле при подаче дополнительной массы в сверхзвуковую часть сопла для углов впрыска в  $60^{\circ}$  и  $90^{\circ}$  через подводящую трубку представлена на рис 4.18.



**Рис. 4.18.** Поля давления, температуры, скорости течения. Слева впрыск под углом  $90^{\circ}$ . Справа впрыск под углом  $60^{\circ}$ .

Аэродинамические силы и моменты, действующие на изделие, представлены в таблице 4.8. Аэродинамические моменты вычислялись относительно центра масс изделия (55% длины изделия от носа).

**Таблица 4.8.** Аэродинамические силы и моменты

Число работающих трубок	Угол вдува	$F_x$ , Н (тяга с учетом лобового сопротивления)	$F_y$ , Н	$F_z$ , Н	$M_y$ , Н·м	$M_z$ , Н·м
0	-	18045.02	0.25	-0.6807	107	0.1857
1	$60^{\circ}$	19085.82	-41.0	-0.56	345.79	-98.65
1	$90^{\circ}$	19074.6	150.0	-150.0	930.0	-170.0

Из таблицы 4.8. видно, что, вдув массы газа внутрь сопла через управляющую трубку влияет на боковую и нормальную силу, а также моменты

$M_y$  и  $M_z$ , действующие на АУР. Однако наблюдаемые изменения управляющих моментов существенно меньше, чем для других вариантов ГДУ: сильной деформации струи не наблюдается, тем самым заметного крутящего момента не генерируется.

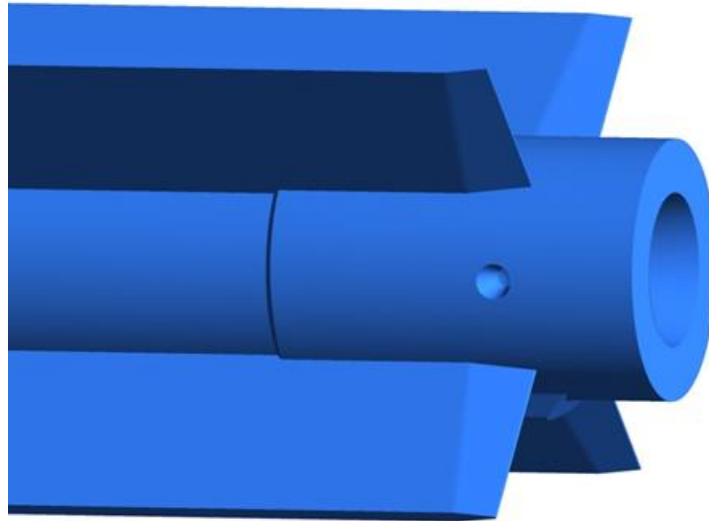
В известных экспериментальных исследованиях расход рабочего тела для создания управляющей струи брался из отдельного газогенератора, давление и расход впрыска даже через отверстие малого диаметра позволяло отклонить струю на 5-10 градусов. В рассматриваемой компоновке АУР массогабаритные ограничения не позволяют разместить на борту дополнительный газогенератор. В связи с этим отбор дополнительного расхода газа приходится брать непосредственно из камеры сгорания. Из тех же соображений габаритных ограничений не представляется возможным разместить трубки большего диаметра, что позволило бы увеличить массовый расход, затрачиваемый на деформацию струи.

Стоит заметить, что ввод дополнительной массы продуктов сгорания в сопло минуя критическое сечение приводит к росту тяги. Это обусловлено увеличением расхода через сечение среза сопла. Но с точки зрения эффективности создания управления управляющего момента такой метод оказывается малоэффективным по сравнению с другими методами ГДУ.

#### **4.5. Исследование характеристик газодинамического управления на основе выдува струи в набегающий поток**

При рассмотрении компоновок с возможностью отбора рабочего тела из камеры сгорания минуя критическое сечение сопла, было отмечено, что вдув продукта в области сопла не оказал сильного воздействия на создания поворотного момента и деформацию струи. Наиболее эффективным представляется создание управляющего момента за счет выдува рабочего тела перпендикулярно к направлению набегающего потока. В представленном варианте геометрии может быть обеспечен значительно больший массовый

расход для создания управляющего момента, чем в варианте вдува внутрь сопла (Рис.4.19).

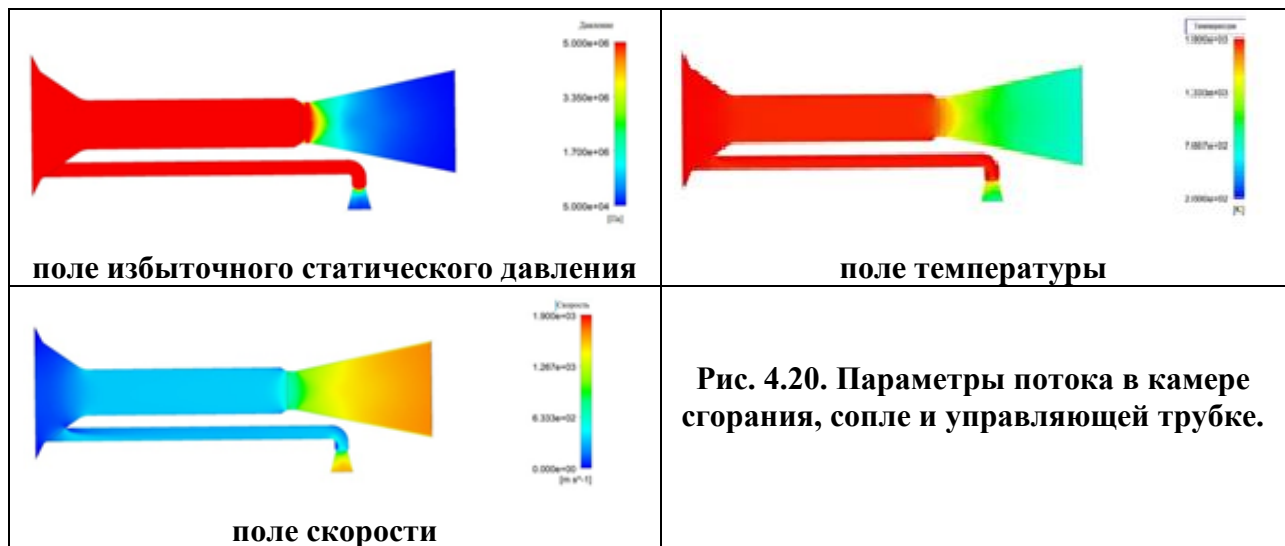


**Рис. 4.19. Исследованная геометрия.**

Установочный расчет газодинамического управления АУР за счет выдува управляющей струи в набегающий поток был проведен при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 2,0$ . Параметры расчетов представлены в таблице 4.9.

**Таблица 4.9. Параметры численного эксперимента**

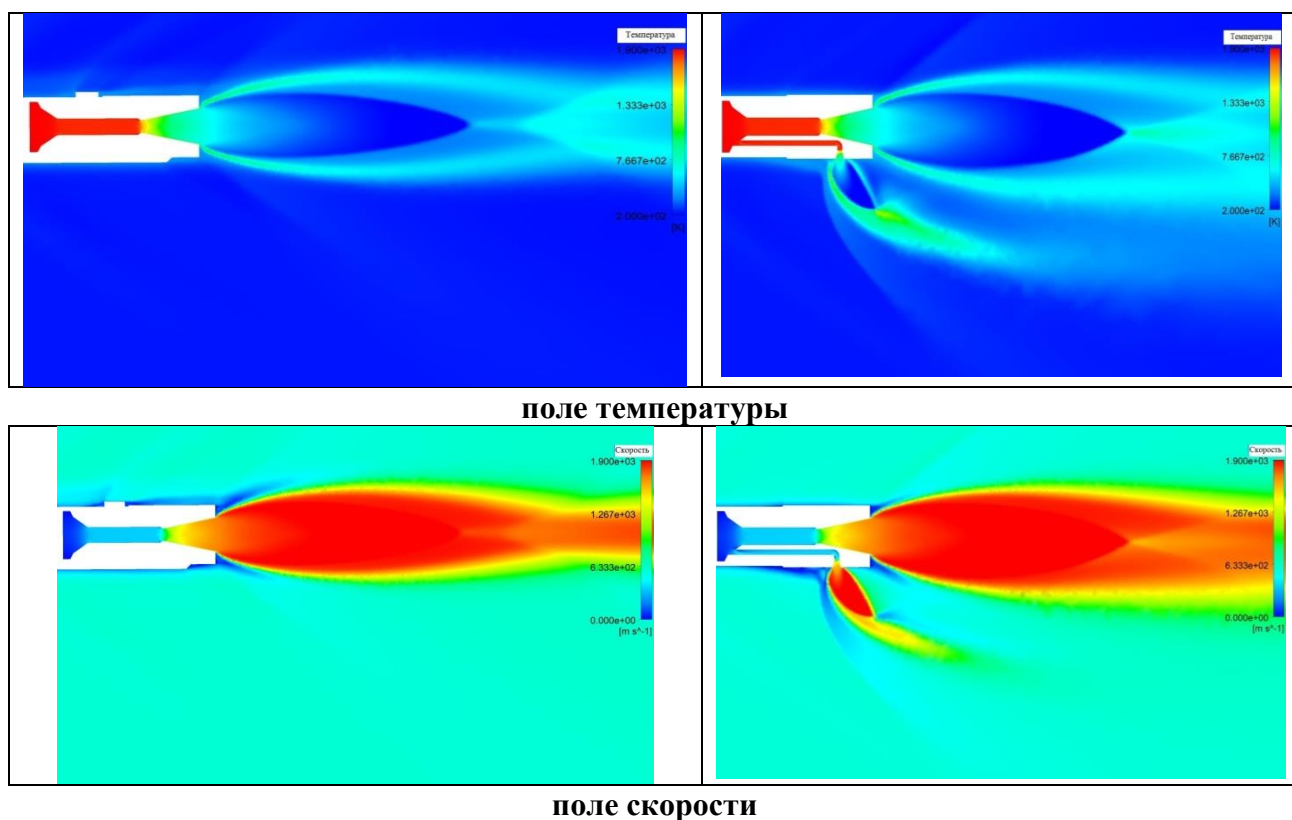
<b><math>M_\infty</math> (число Маха набегающего потока)</b>	<b><math>P_\infty</math>, Па (статическое давление набегающего потока)</b>	<b><math>P</math>, Па (давление в камере сгорания)</b>	<b><math>T</math>, К (температура в камере сгорания)</b>	<b>Число работающих трубок</b>
2,0	25600	100e06	1900	1



В данной геометрии присутствуют некоторые особенности, которые заметны при рассмотрении полей параметров давления и скорости. На кромке малой трубки присутствует неоднородность давления; при повороте трубки на 90 градусов для поворота струи присутствует застойная зона. Бочки маха, которые формируются на боковой струе, несколько деформированны, даже на режиме без набегающего потока. Такое распределение давления может быть объяснено геометрическими особенностями подающей боковой трубки, в следствие чего профиль течения к моменту истечения струи из сопла не успевает принять осесимметричную форму.

На рис. 4.21 представлена структура и основные параметры течения в хвостовой части АУР при выдуве управляющей струи в набегающий поток.





**Рис. 4.21. Параметры потока вблизи изделия: слева – вертикальная плоскость, справа – горизонтальная плоскость.**

Значения аэродинамических сил и моментов, действующих на АУР, представлены в таблице 11. Аэродинамические моменты вычислялись относительно центра масс изделия (55% длины изделия от носа).

**Таблица 4.10. Аэродинамические силы и моменты**

<b>F<sub>x</sub>, Н</b>	<b>F<sub>y</sub>, Н</b>	<b>F<sub>z</sub>, Н</b>	<b>M(y), Н·м</b>	<b>M(z), Н·м</b>
18593	0.3707	1408.1	3434.8697	197.1565

Необходимо отметить, что существенное изменение нормальной и боковой силы, а также моментов, действующих на АУР, предположительно является следствием интерференции управляющей струи и набегающего потока. В результате за счет того, что управляющая струя препятствует протеканию потока между хвостовыми стабилизаторами. В этом месте, вероятно образуется обширная зона повышенного давления. Данное явление нуждается в дальнейшем изучении.

#### 4.6. Анализ характеристик методов газодинамического управления

Оценку эффективности методов газодинамического управления целесообразнее проводить на основании сравнительного анализа параметров управляющих моментов при использовании различных методов. Для этого были выполнены следующие мероприятия:

1. Рассмотрены различные варианты ГДУ летательным аппаратом.
2. Проанализированы положительные и отрицательные стороны каждого из рассмотренных вариантов управления вектором тяги.
3. Составлена сводная таблица аэродинамических сил и моментов, действующих на поверхность летательного аппарата при движении его со скоростью  $M=2$  и совершающего маневры различными способами.

Таблица 4.11. Сводная таблица результатов

Геометрия изделия.	$F_y$ , Н	$F_z$ , Н	$M_y$ , Н·м	$M_z$ , Н·м	Тяга двигателя (вдоль оси X), Н
Поворотное сопло. Нулевое отклонение.	-40,0	-30,0	-41	122	18108,49
Поворотное сопло. Отклонение влево на $12,7^\circ$ .	-50,0	4225	6115	143	17438,81
Изделие с интерцепторами. 1 интерцептор в потоке.	1720,0	-1780,0	-2850	-2710	15641,0
Изделие с интерцепторами. 2 интерцептора в потоке.	3464,0	-200,0	-300	-5520	14935,0
Вдув одной струи внутрь сопла. Угол вдува $90^\circ$ .	150	-150	930	-170	18974,9
Выдув одной боковой струи наружу. Угол выдува $90^\circ$ .	0	2760	-2300	-2300	18000

Как видно из приведенных данных, максимальный управляющий момент возникает при использовании интерцепторов, однако тяга двигателя падает на 16 – 20 %. Тяга двигателя возрастает при вдуве струи внутрь сопла. При этом возникающий управляющий момент явно недостаточен для эффективного управления АУР.

В этой ситуации, наиболее оптимальным методом ГДУ представляется использование управления АУР за счет выдува реактивной струи в набегающий

поток. На сегодняшний день существуют лишь отрывочные сведения о характере взаимодействия ЛА со сложными струйными образованиями, вызванными изменением угла атаки за счет действия реактивной струи, направленной под углом к набегающему потоку.

Изучению физических характеристик такого метода газодинамического управления авиационной управляемой ракетой посвящена следующая глава.

## **ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СТРУИ С НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ И РЕАКТИВНОЙ СТРУЕЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ**

При движении ЛА в сплошной среде, набегающий поток взаимодействует с каждым элементом поверхности летательного аппарата. Например, при обтекании управляющих поверхностей – рулей или крыльев (стабилизаторов), часть потока будет направлена в сторону корпуса ЛА, а другая часть начнет «стекать» с окончаний этих поверхностей. Такое взаимное влияние течения и летательного аппарата принято называть «интерференцией». Подробно взаимодействие потока с различными элементами конструкции рассмотрено в работах [74-76].

Помимо взаимодействия набегающего потока с корпусом ЛА, не менее важно учитывать взаимодействие набегающего потока с истекающей струей. При истечении реактивной струи из сопла, происходит взаимодействие ее с набегающим потоком, скорость которого может быть, как меньше, так и больше скорости такой струи [77]. При определенных режимах на кромке сопла могут образовываться зоны повышенного давления и обратных токов. [19, 20]. Это оказывает существенное влияние на аэродинамические характеристики ЛА, а также на тепломассообмен в системе поток-корпус-реактивная струя.

Рассмотренный в предыдущей главе способ газодинамического управления за счет выдува газа наружу, за пределы корпуса ЛА в сносящий поток, показал обнадеживающие результаты. В связи с этим представляется важным рассмотреть более подробно происходящие при таком методе ГДУ процессы. При этом, такой метод рассчитан не на поворот или деформацию основной реактивной струи ЛА, а на создание поворотного усилия за счет реактивной тяги.

В литературе вопрос взаимодействия эжектируемой струи со сверхзвуковым сносящим потоком рассматривается многими авторами [43-50, 78]. Однако, интересно рассмотреть учет взаимодействия сносящего потока, управляющей струи и реактивной струи двигательной установки, а также

поверхности ЛА. Представляется, что суммарное взаимодействие представляет собой сложную газодинамическую структуру.

### 5.1. Эжектирование струи в заторможенный поток

Для исследования такой трехмерной структуры течения была проведена серия расчетов. Проведение установочных численных экспериментов было выполнено для двух режимов:

- выдув струи в горизонтальном направлении отобранным из камеры сгорания газом перпендикулярно продольной оси изделия в заторможенный поток (нулевая скорость набегающего потока);

- выдув струи в горизонтальном направлении отобранным из камеры сгорания газом перпендикулярно направлению движения изделия в разогнанный поток ( $V=2M$ );

Для каждого режима рассматривалось три варианта расчета: выдув струи производился при следующих значениях температуры газа: 300 К, 1900 К и 3100 К. Параметры расчетов представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Параметры численного эксперимента

Номер режима	$M_\infty$ (число Маха набегающего потока)	$P_\infty$ (статическое давление набегающего потока)	$P$ , Па (давление в камере сгорания)	$T$ , К (температура в камере сгорания)	Число работающих трубок
1	0,0	25600	10e6	3100	1
2				1900	
3				300	
4	2,0			3100	
5				1900	
6				300	

На рисунках 5.1, 5.2 представлены поля скорости и температуры в хвостовой части АУР при скорости набегающего потока  $M_\infty = 0$ . При скорости сносящего потока близкой к нулю, управляющая струя практически ортогональна к оси изделия. Но наблюдается деформация структуры бочек Маха. Такую структуру истечения можно объяснить поворотом потока в трубке в дозвуковой

области, с последующим изменением положения аэродинамической критики сопла, и, как было описано в первой главе, происходит поворот струи. Как видно из рисунков 5.1, 5.2, отклонение истекающей струи незначительное.

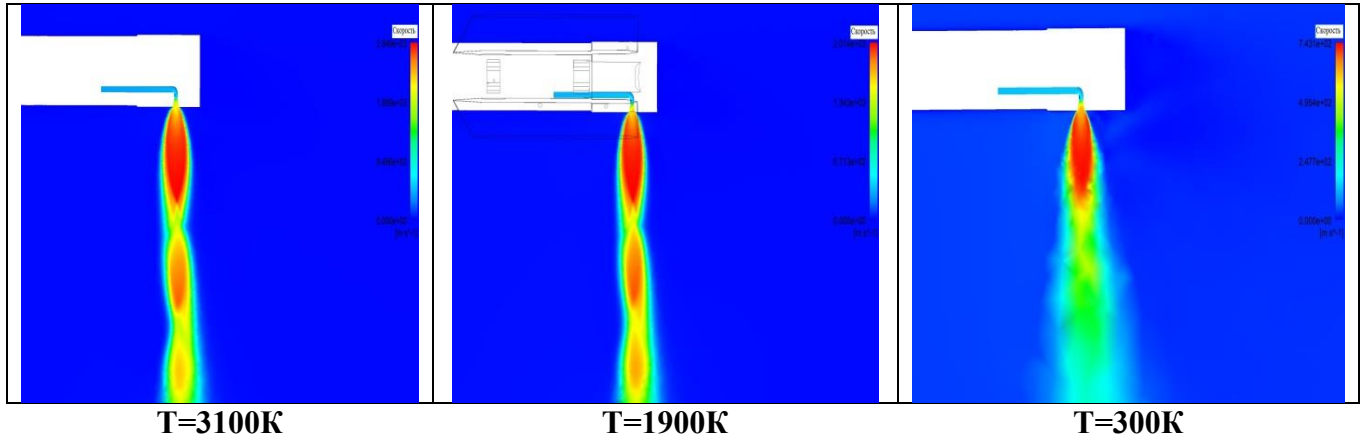


Рис. 5.1. Поля скорости ( $M_\infty = 0.0$ ).

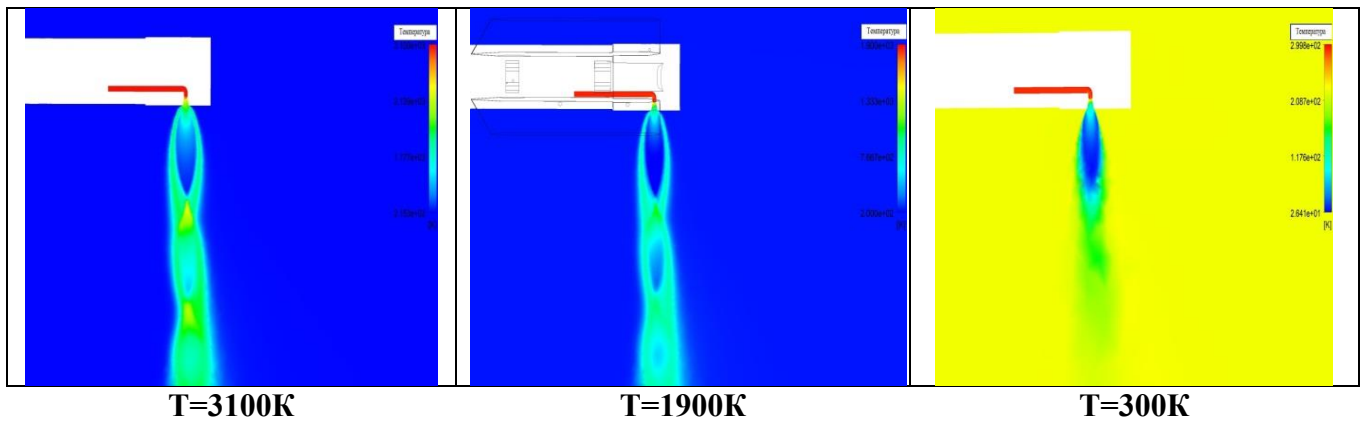


Рис. 5.2. Поля температуры ( $M_\infty = 0.0$ ).

На рисунке 5.3 представлены картины линий тока в управляющей инжектируемой струе при температурах 300 К и 1900 К.

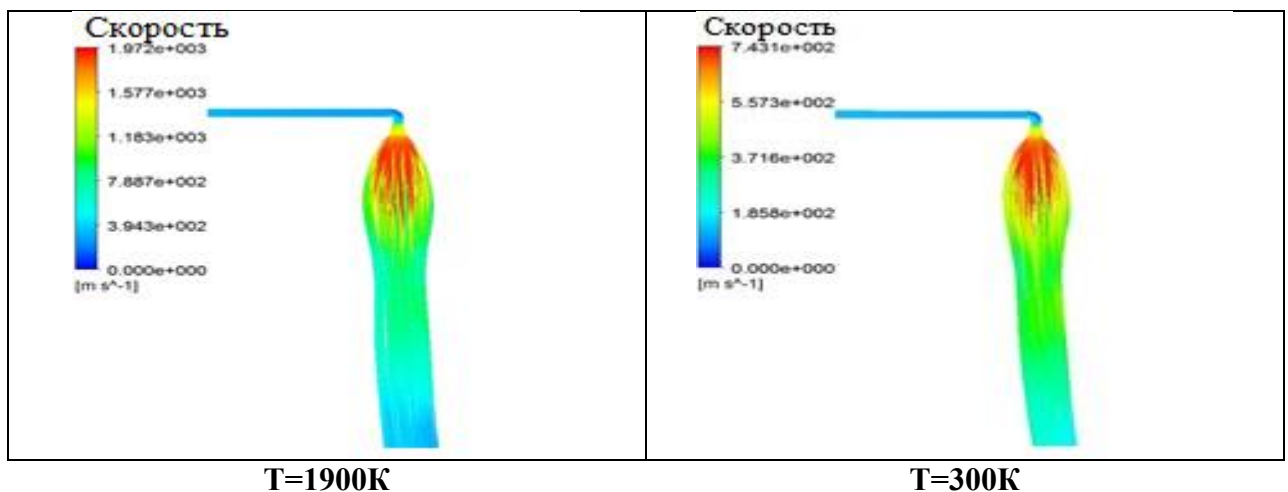


Рис. 5.3. Линии тока ( $M_\infty = 0.0$ ).

Как видно из рисунков, при сравнении характера истечения с разной температурой газа, можно прийти к выводу, что температура газа на структуру течения существенного влияния не оказывает.

Температура газа влияет на параметры на срезе сопла и на расход рабочего тела, требуемый для совершения маневра. Количественные характеристики течения, реализовавшегося в трубке и сопле управляющей системы, представлены в таблице 5.2.

**Таблица 5.2. Количественные характеристики течения**

Номер режима	P, Па (среднее статическое давление на срезе сопла)	T, К (средняя статическая температура на срезе сопла)	V, м/с (средняя скорость на срезе сопла)	G, кг/с (расход через сопло)
1	3,1e5	1957	2049	0,640
2		900	1600	0,847
3		114	610	2,196
4		1957	2049	0,640
5		820	1600	0,840
6		110	610	2,196

При анализе сил и моментов, действующих на исследованную геометрию, полученных в результате расчетов, можно заметить, что основным параметром, который влияет на них, является температура рабочего тела и, следовательно, кинетическая энергия эжектируемого вещества. Аэродинамические силы и моменты, действующие на изделие, представлены в таблице 5.3. Аэродинамические моменты вычислялись относительно центра масс изделия (55% длины изделия от носа).

**Таблица 5.3. Аэродинамические силы и моменты**

Номер режима	F <sub>y</sub> , Н	F <sub>z</sub> , Н	M(y), Н·м	M(z), Н·м
1	15,3	1477,1	1751,1	0,38
2	0,72	1450,02	1719,86	0,50
3	0,0	1414,8	1743,7	0,0
4	-51,01	2136,17	2452,25	140,84
5	-145,73	2185,0	2612,0	222,99
6	-143,98	2133,0	2563,0	213,44

## 5.2. Эжектирование струи в сносящий поток

Классическая картина течения вблизи сопла реактивной струи в сносящем потоке [79, 43] может быть представлена схемой, приведенной на рисунке 5.4.а. При проведении установочного расчета по выдуву струи в сносящий поток была получена похожая картина течения (Рис.5.4. б). Видно, что присутствуют такие газодинамические структуры течения как зоны обратных токов, наклоненный диск Маха, ударная волна и отрыв потока перед областью впрыска.

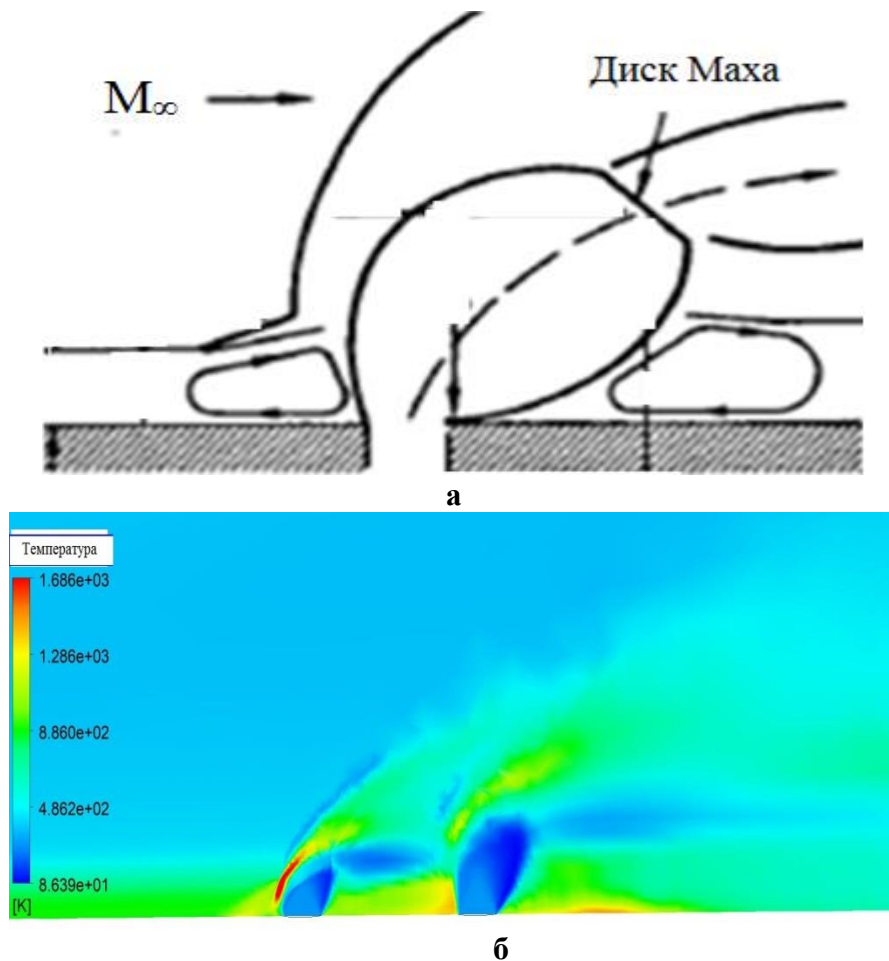


Рис. 5.4. Схема течения вблизи сопла инжектируемой струи в сносящем потоке. Источник: [43].

Экспериментальное исследование выдува газа в сносящий поток представлено, например, в работе [51]. Для проведения дальнейших исследований было проведено сравнение результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными (Рис. 5.5). В таблице 5.4 приведены параметры



расчетного режима.  $P_{0j}$  и  $T_{0j}$  – параметры впрыска газа;  $P_0$  и  $T_0$  – параметры заторможенного потока;  $P_j/P_\infty$  – перепад давления;  $\alpha$  – угол атаки.

Таблица 5.4. Условия проведения эксперимента

$M_\infty$	$P_0$ , МПа	$P_{0j}$ , МПа	$T_0$ , К	$T_{0j}$ , К	$P_j/P_\infty$	$\alpha$ , °
5	0.8	2.45	336	293	89.3	0

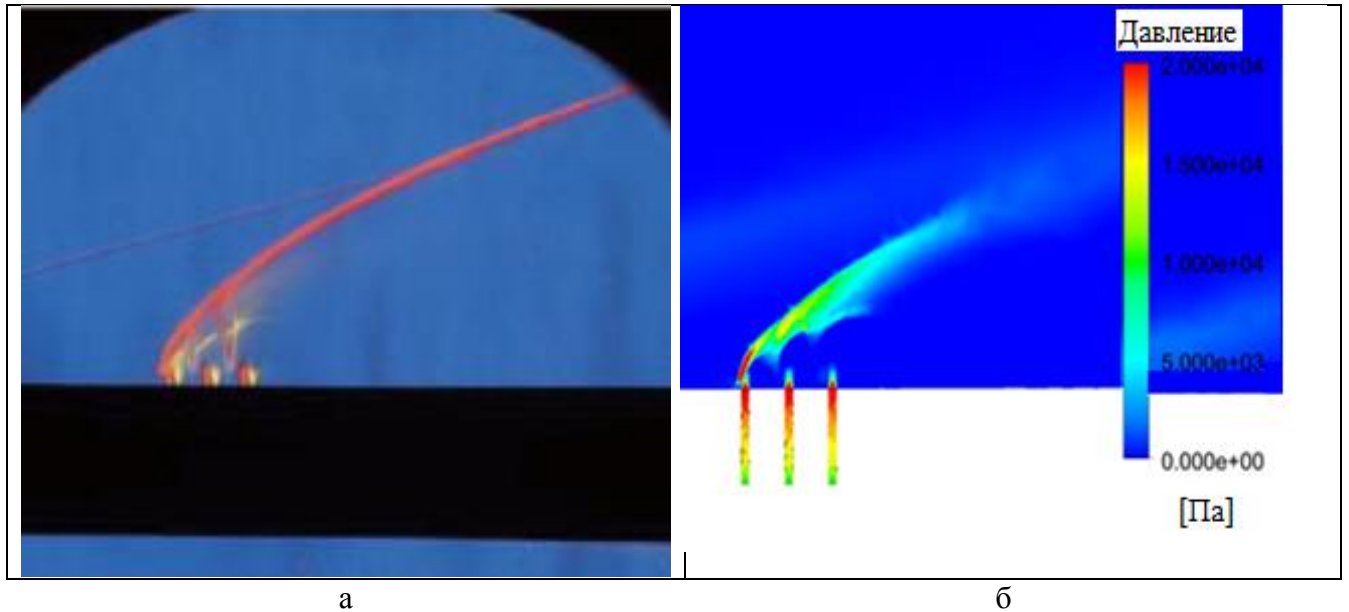


Рис. 5.5. Картина течения при эжекции струи в сносящий поток: а – шлирен-фотография эксперимента, б – поле давления настоящей работы. Источник: [51].

Результаты численного моделирования эжектирования струи в сносящий поток представлены на рисунках 5.5 – 5.8. Из рисунков видно, что истекающая струя изгибается под воздействием набегающего потока.

Характер течения инжектируемой струи под действие сносящего потока представлен на рисунках 5.6 – 5.9.

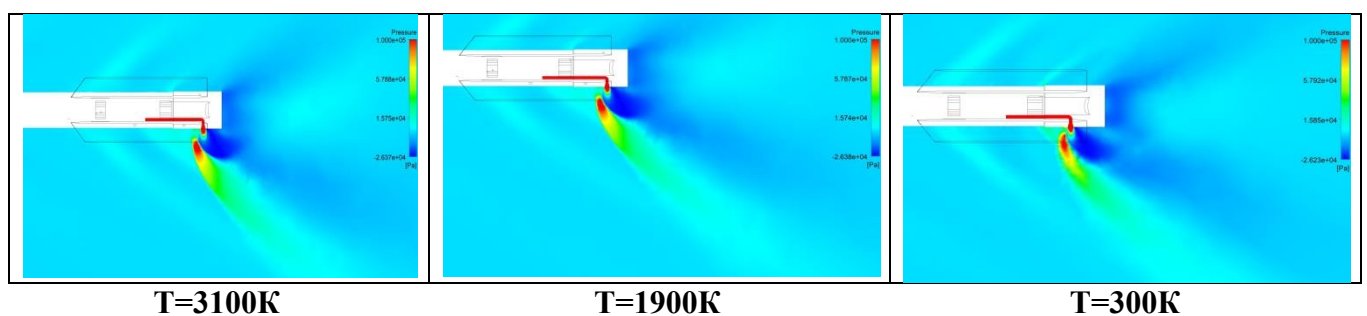
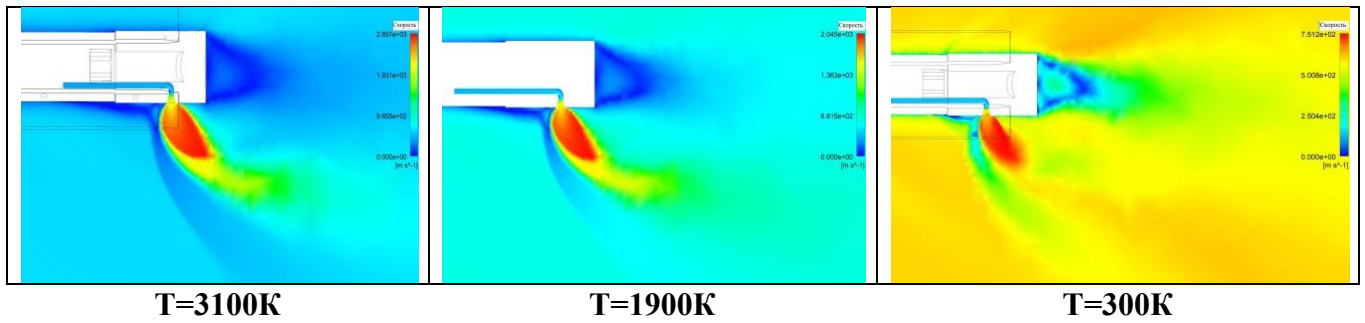
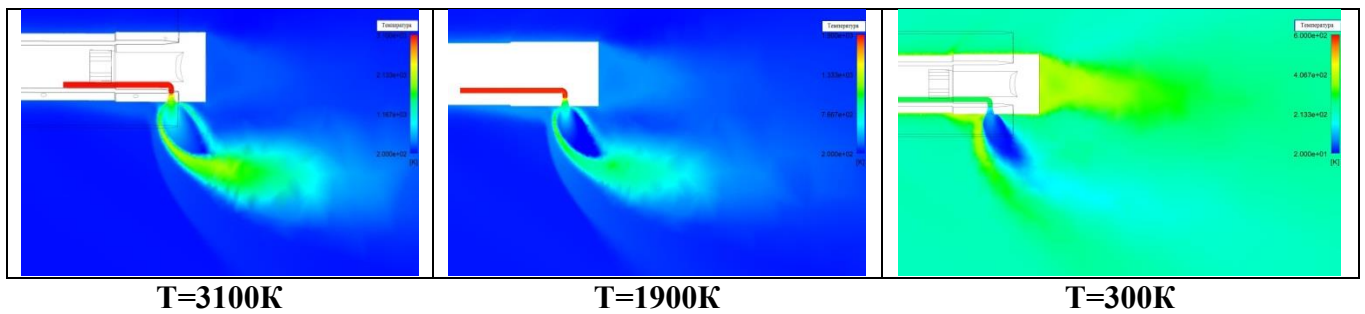
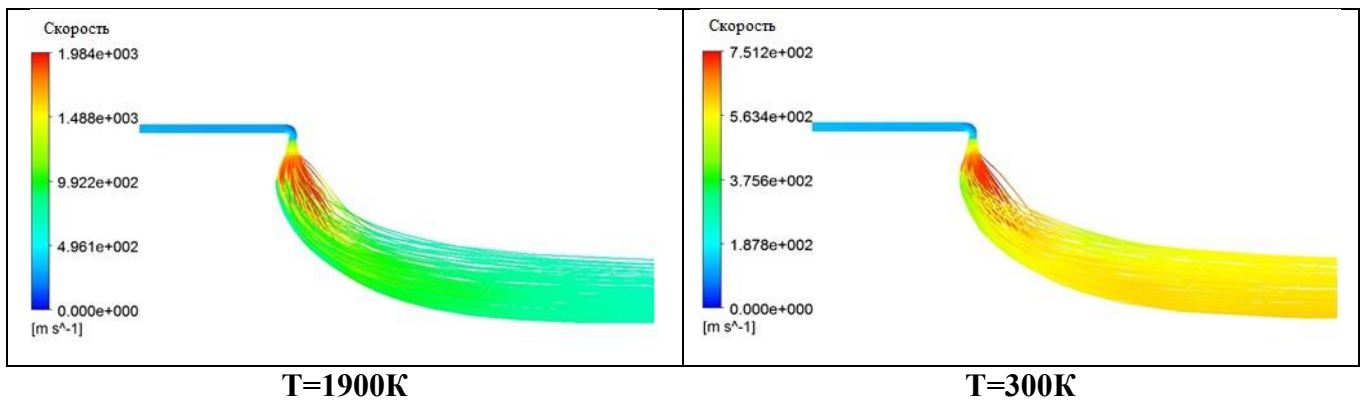
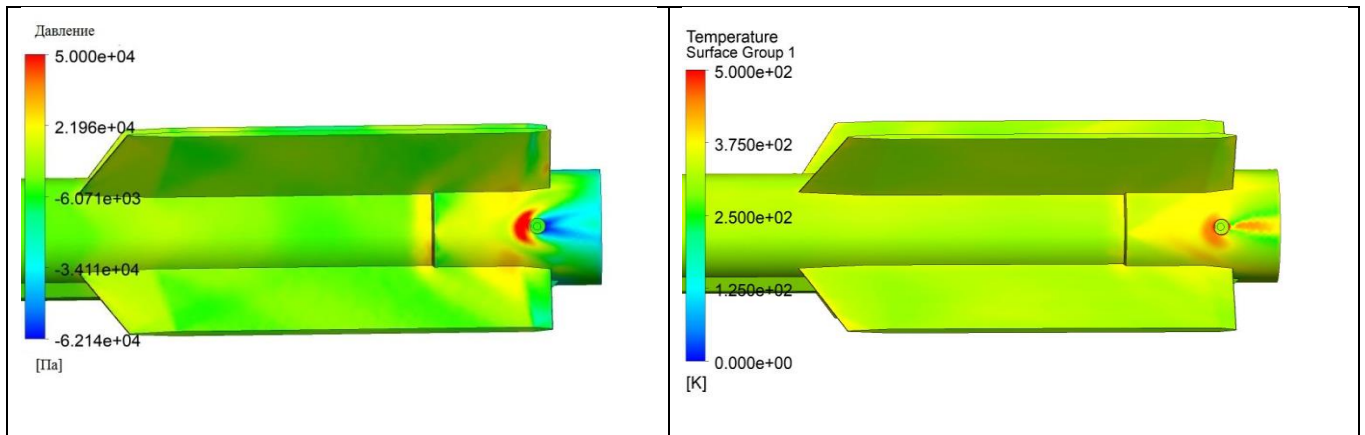


Рис. 5.6. Поля избыточного статического давления ( $M_\infty = 2.0$ ).

Рис. 5.7. Поля скорости ( $M_\infty = 2.0$ ).Рис. 5.8. Поля температуры ( $M_\infty = 2.0$ ).Рис. 5.9. Линии тока ( $M_\infty = 2.0$ ).

Айдер и др. [80] предлагают рассматривать струю, истекающую в сносящий поток, твердым препятствием, которое сносящий поток обтекает. Тогда взаимодействие струй можно представить в виде стандартной картины обтекания цилиндрического препятствия: перед ним образуется зона торможения (повышенного давления), а за ним – зона разрежения. Возникшая ударная волна может оказать значительное влияние на изменение аэродинамических характеристик летательного аппарата. На рисунке 5.10 можно увидеть характерную картину полей давления и температуры, возникающих на поверхности летательного аппарата.



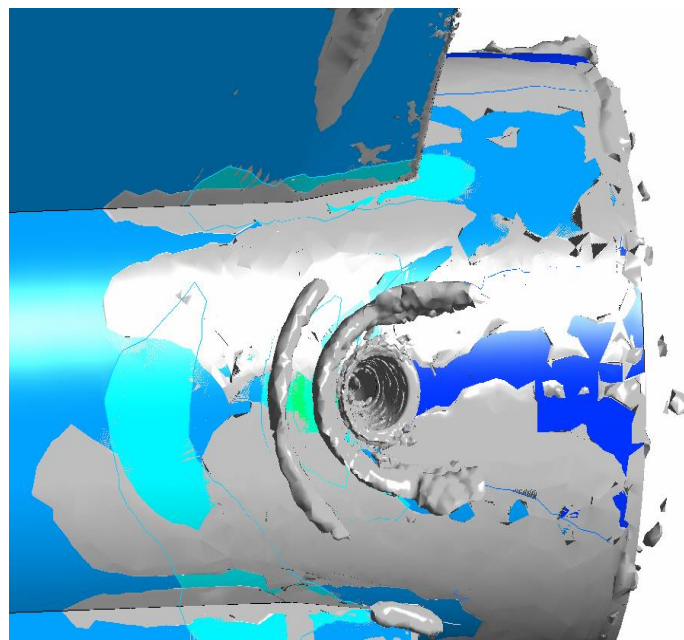
поля давления

поля температуры

**Рис.5.10. Поля давления и температуры на поверхности АУР при взаимодействии управляющей струи со сносящим потоком**

Из рисунка видно, что при натекании сносящего потока на истекающую струю образуется подковообразная зона повышенного давления, а за струей зона разрежения, что вполне соответствует картине обтекания цилиндрической преграды. Формируются два симметричных вихря обтекающих препятствие, образующих за ним зону, на которой теплообмен сопоставим с областью передней критической точки [81].

На рисунке 5.11 представлена картина образования зон повышенного давления в области истечения управляющей струи под воздействие сносящего потока.

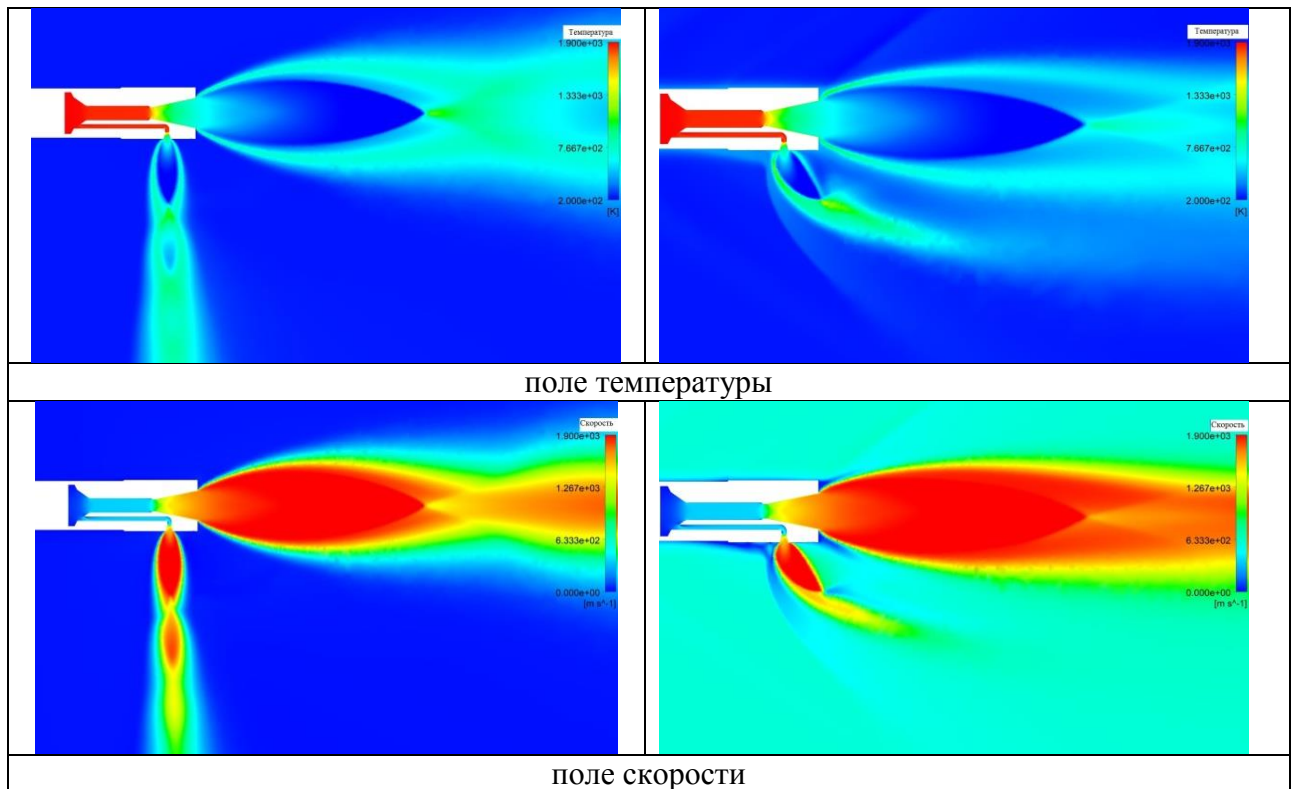


**Рис. 5.11. Поле давления на поверхности при взаимодействии струи с потоком.**

### 5.3. Эжектирование струи в сносящий поток при работе двигательной установки

Дальнейшие исследования газовой динамики и тепломассообмена проводились для условий: натекание набегающего потока на поверхность АУР, работа основной двигательной установки (истечение реактивной струи), истечение управляющей струи.

В укрупненном виде поля температуры и скорости такого взаимодействия представлены на рисунке 5.12. Для сравнения представлены расчеты газовой динамики и температуры истекающих струй в условиях отсутствия набегающего потока.

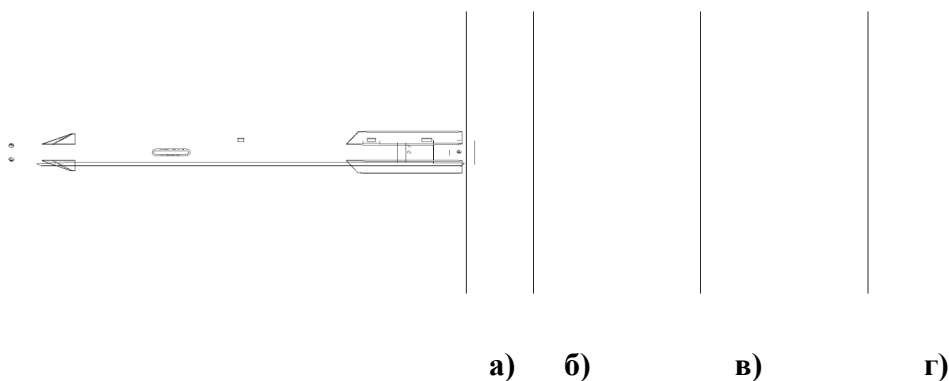


**Рис. 5.12. Параметры потока вблизи изделия. Скорость набегающего потока ( $M_\infty = 0,01$  – слева,  $M=2$  - справа).**

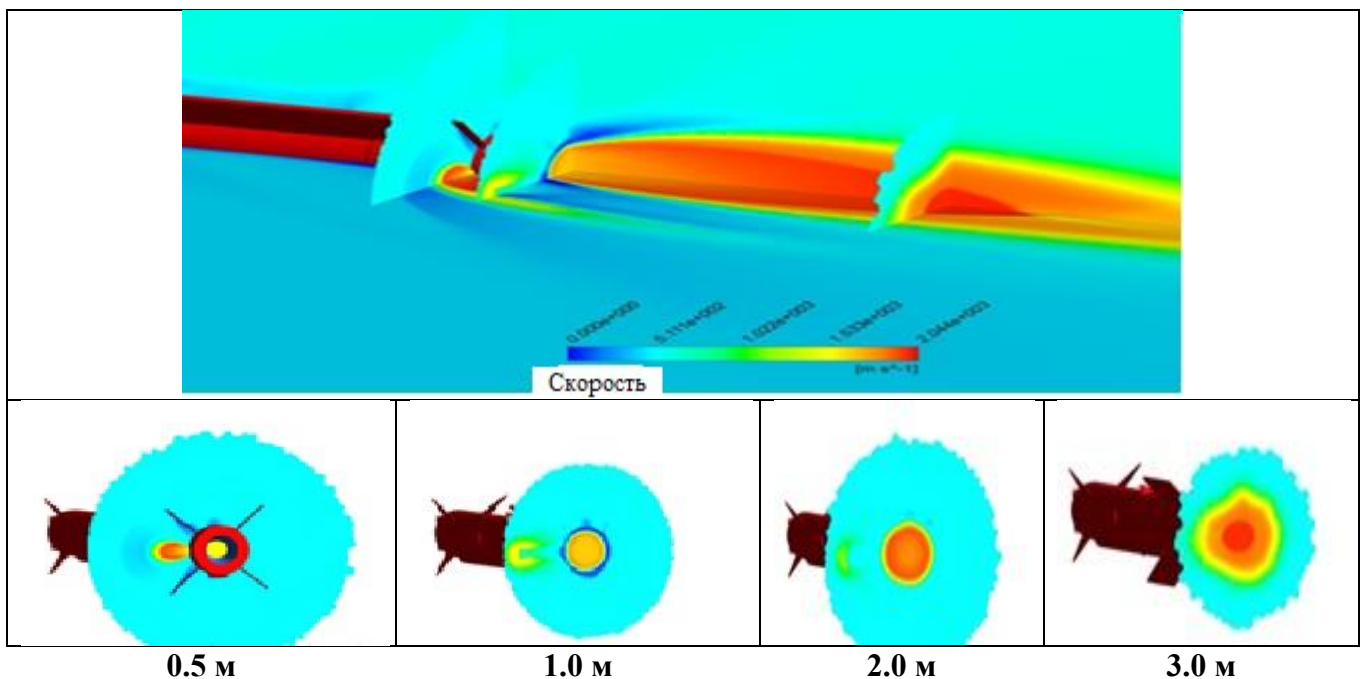
При истечении управляющей струи в заторможенный набегающий поток ( $M_\infty = 0,01$ ) потоки практически не взаимодействуют и, следовательно, не оказывают друг на друга никакого влияния.

При значении скорости набегающего потока  $M_\infty = 2.0$  картина становится принципиально другой. Управляющая струя достаточно быстро поворачивает и становится параллельной основному потоку.

Для изучения взаимодействия двух струй было подробно рассмотрены поля скорости и давления в сечениях, ортогональных направлению распространения струи двигательной установки, на удалении 0.5, 1.0, 2.0 и 3.0 м от сопла (рисунок 5.13). Картина распределения скоростей течения основной и управляющей струй приведена на рисунке 5.14.

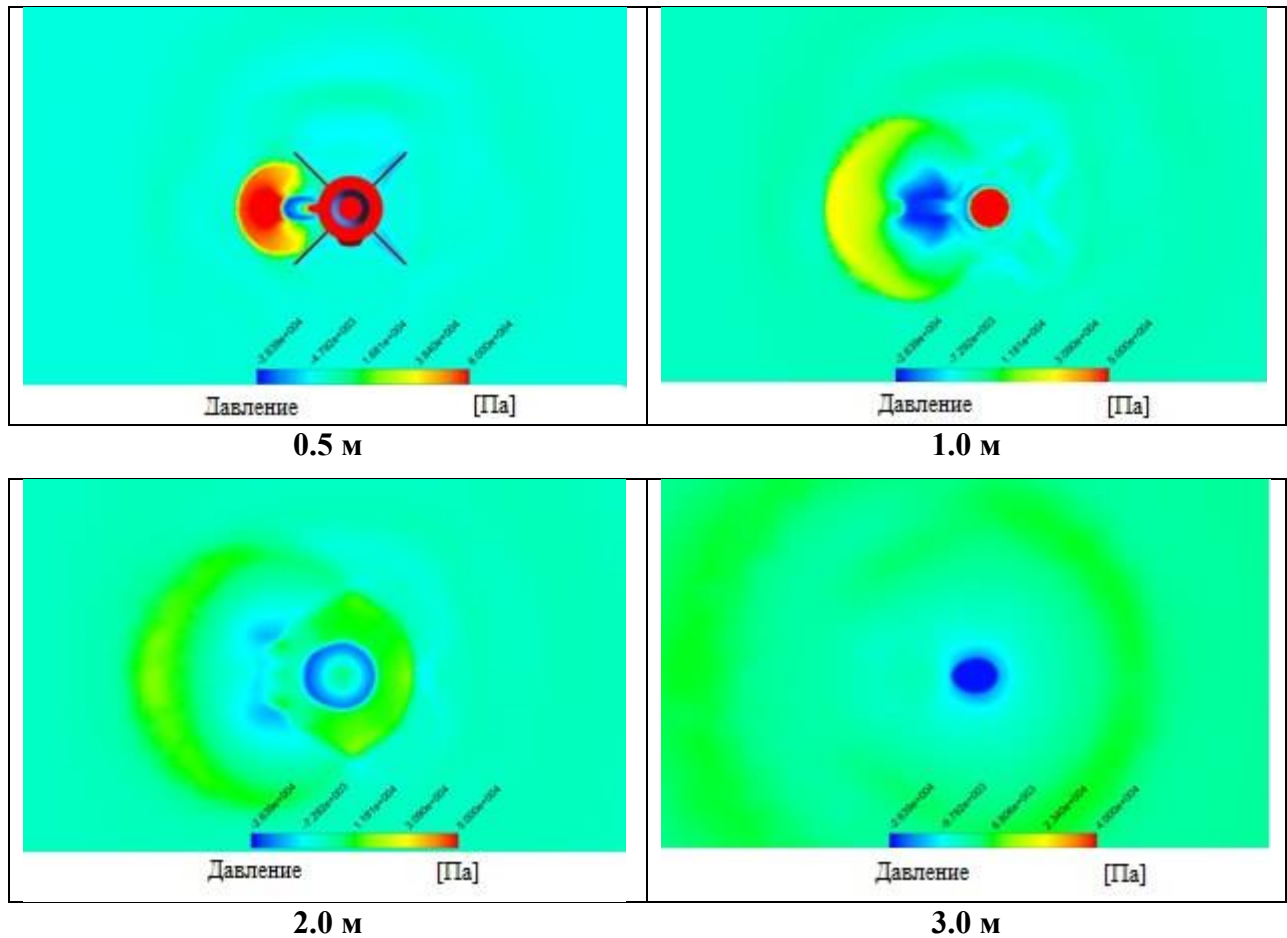


**Рис. 5.13.** Схема расположения сечений на удалении от сопла.  
а:  $-0,5$  м.; б:  $-1$  м.; в:  $-2$  м.; г:  $-3$  м (отсчет в принятой системе координат).



**Рис. 5.14.** Поля скоростей течения на удалении 0.5, 1.0, 2.0 и 3.0 м от сопла при взаимодействии истекающей струи двигательной установки и управляющей струи под воздействием набегающего потока.

Соответствующим образом выглядит и картина распределения полей давления в зоне взаимодействия струй (Рис. 5.15).



**Рис. 5.15.** Поля давления на удалении 0.5, 1.0, 2.0 и 3.0 м от сопла при взаимодействии истекающей струи двигательной установки и управляющей струи под воздействием набегающего потока.

Проанализируем картину течения и происходящие процессы. Управляющая струя выдувается в сносящий поток. Под воздействием потока она поворачивает и деформируется. В поперечном сечении струя из осесимметричной приобретает форму полумесяца (см. Рис. 5.15), размер которого растет при удалении от сопла. С увеличением расстояния от сопла двигательной установки происходит рост геометрических размеров поперечного сечения струй, что не противоречит законам газовой динамики.

Численное исследование явления интерференции струй было проведено для двух взаимно-перпендикулярных управляющих струй (истечение в плоскости YZ,

в направлении осей основной системы координат). В расчетах варьировались величины набегающего потока:  $M=0.8$ ; 2.0; 3.2.

В пространстве между струями формируется область пониженного давления в направлении которой начинает перетекать часть массы газа основной реактивной струи. Результат такого перераспределения массы заключается в изменении формы струи двигательной установки, вытягивающейся в сторону управляющей струи. Последнее хорошо заметно при анализе формы тепловых полей в сечениях, перпендикулярных к струе двигательной установки на разных удалениях от среза сопла (Рис.5.16).

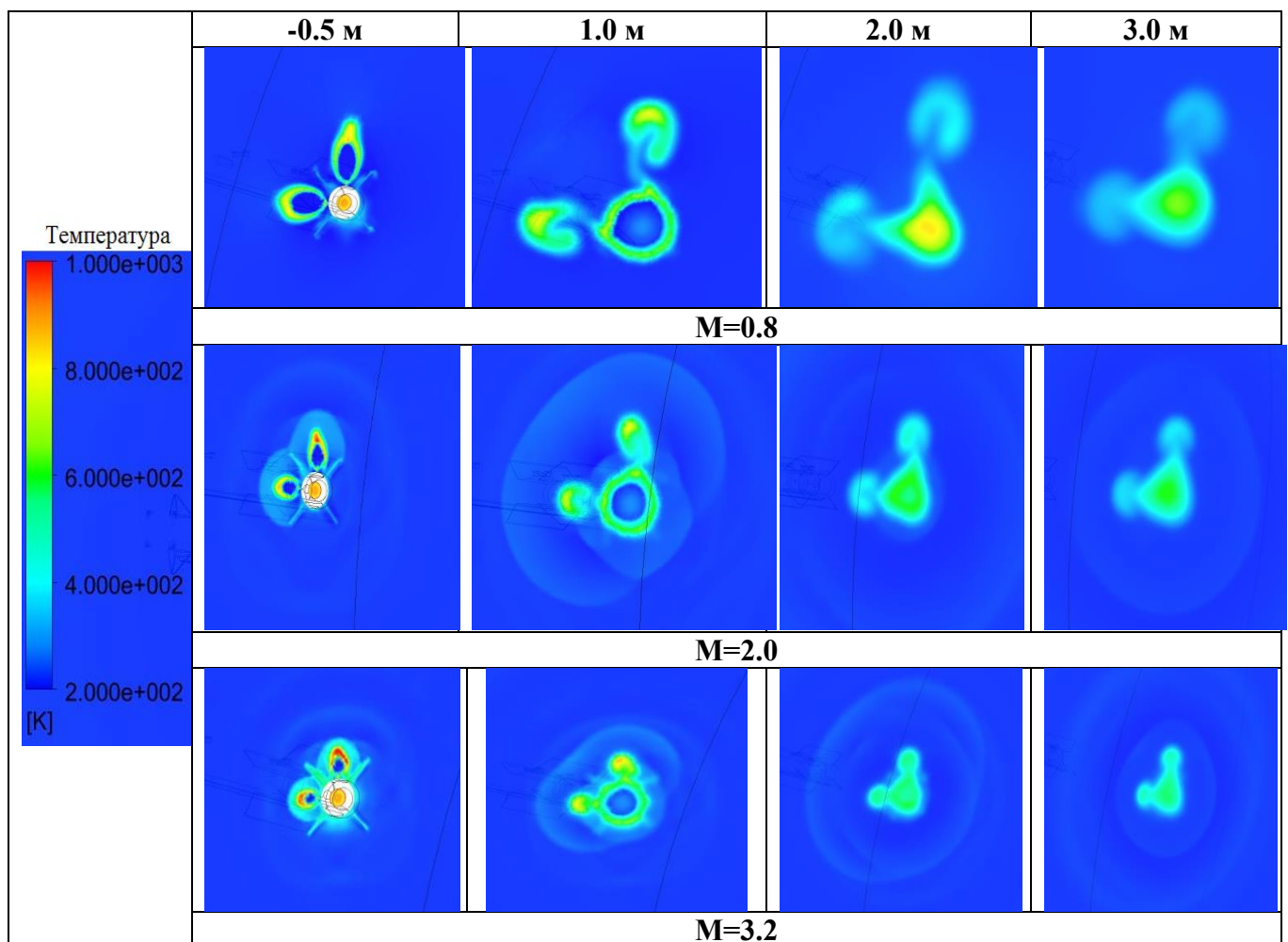


Рис. 5.16. Изменение температурных полей сложного взаимодействия течений на расстоянии 0.5; 1.0; 2.0 и 3.0 м. от среза сопла для трех скоростей полета АУР.

Представленные на рисунке 5.16 результаты численного моделирования показывают, что на расстоянии 0,5 м от среза сопла двигателя четко

прослеживаются тепловые следы, как от струи двигательной установки, так и аналогичные следы от управляющих струй. На расстоянии 1,0 м от среза взаимное влияние струй явно еще не прослеживается, но вот на расстояниях в 2,0 и 3,0 м струи практически сливаются, причем за счет деформации струи двигательной установки. Можно сделать вывод, что такое взаимодействие струй (интерференция) проявляется тем сильнее, чем выше скорость набегающего потока.

При наблюдении за картиной взаимодействия управляющих и основной струй по сечениям на удалении от среза сопла при изменении скорости набегающего потока (Рисунок 5.16) можно отметить, что при малых скоростях сносящего потока интерференция струй носит незначительный характер, приближение управляющих струй к струе двигателя не носит ярко выраженного характера. Наблюдается дисперсия энергии и быстрое снижение температуры управляющих струй. Тем не менее, на удалении более двух метров от среза сопла наблюдается деформация струи двигателя в сторону управляющих струй.

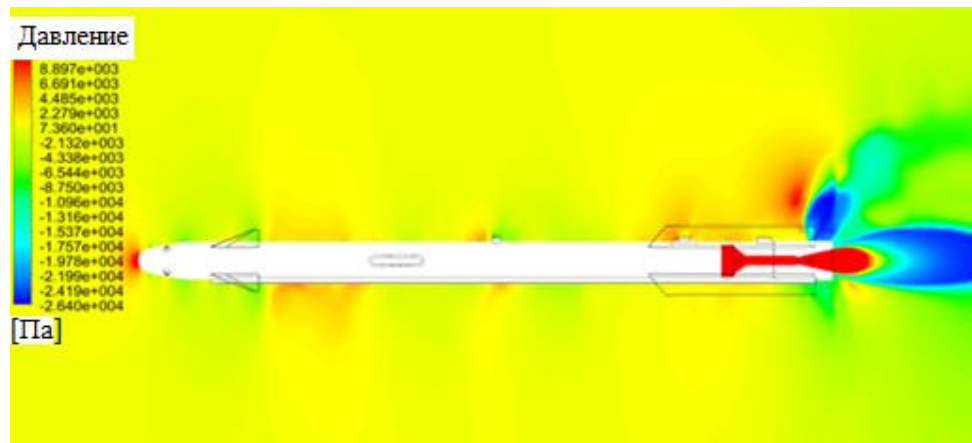
С ростом скорости сносящего потока управляющие струи быстрее прижимаются к реактивной струе двигателя, вплоть до слияния с ней. Струя двигателя теряет осесимметричную форму и практически сливается с управляющими струями. При этом остывание управляющих струй происходит не так интенсивно, как при меньших скоростях полета.

Оценке влияния скорости набегающего потока на взаимодействие управляющей струи и струи двигательной установки будет посвящен следующий раздел.

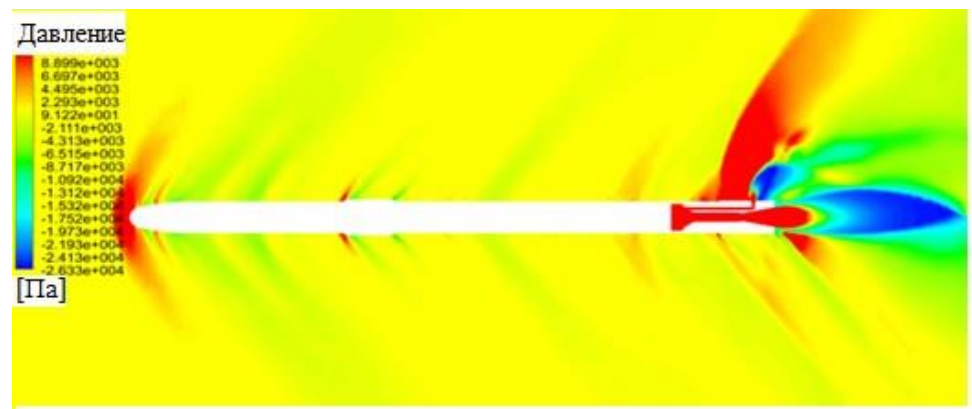
#### **5.4. Влияние скорости набегающего потока на характер обтекания и эффективность газодинамического управления**

Характер изменения полей давления в окрестностях АУР в результате комплексного взаимодействия струй приведен на рисунке 5.17. В расчетах варьировались величины набегающего потока:  $M=0.8$ ; 2.0; 3.2.

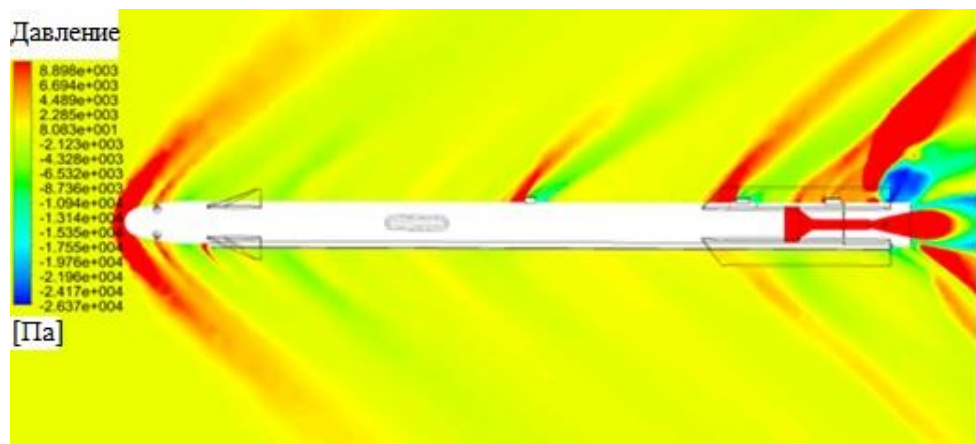




M=0.8



M=2.0



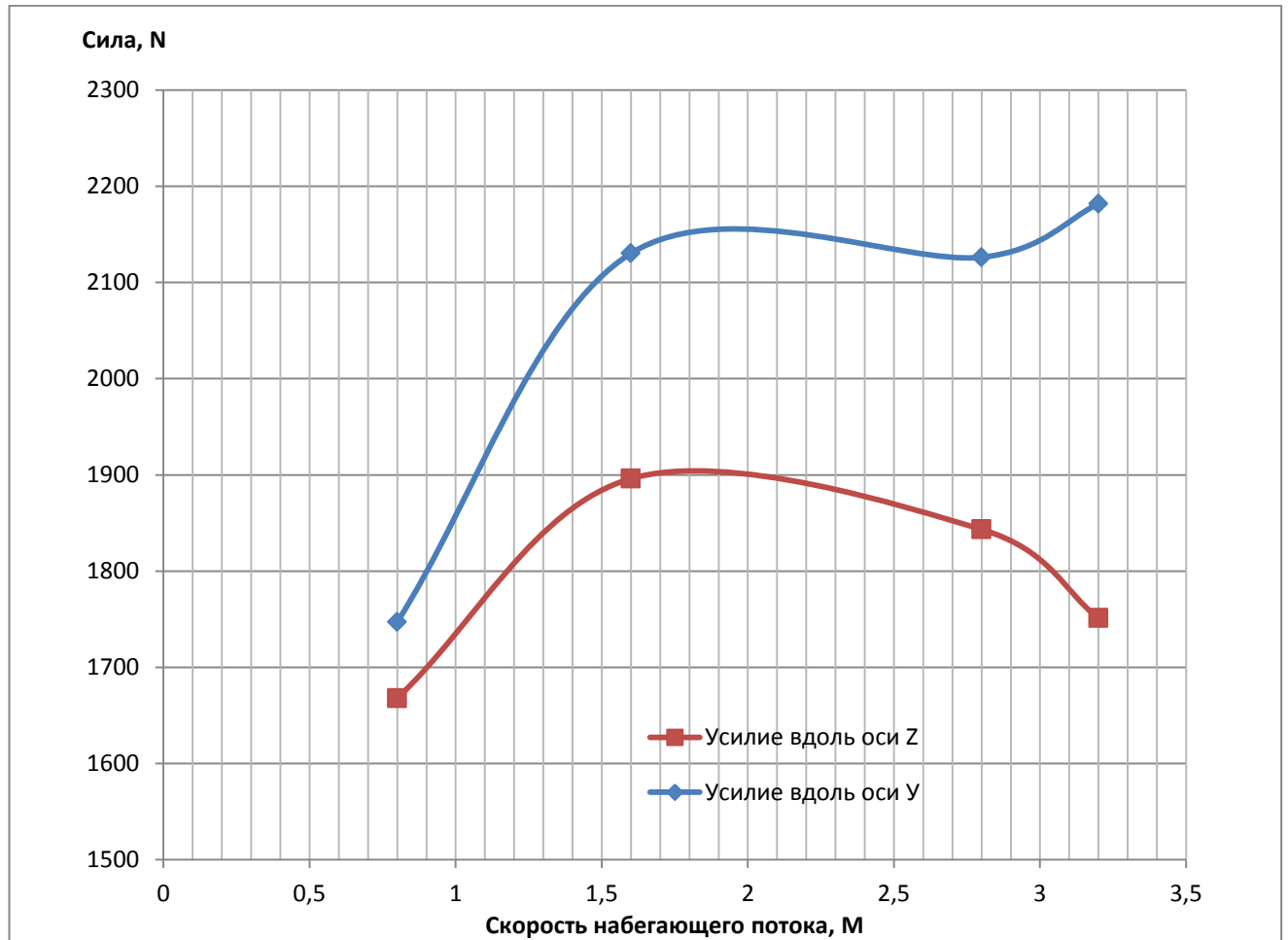
M=3.2

**Рис.5.17. Поля давления в окрестностях АУР в результате комплексного взаимодействия струй при значениях набегающего потока: M=0.8; 2.0; 3.2.**

Из рисунка 5.17 видно, что характер ударных волн, возникающих в окрестностях АУР от взаимодействия лобовой частью, конструктивными элементами и управляющей струей, носит все более ярко выраженный характер с

ростом скорости набегающего потока. При этом ударная волна, возникающая от взаимодействия набегающего потока с управляющей струей, представляет собой структуру, более мощную, чем ударная волна в лобовой точке АУР.

На рисунке 5.18 представлена зависимость изменения суммарного поворотного усилия воздействия управляющей струи от скорости набегающего потока.



**Рис. 5.18. График зависимости управляющего воздействия от числа Маха.**

На графике представлены силы, действующие на АУР в вертикальном и горизонтальном направлении. Если на дозвуковых скоростях большой разницы между горизонтальными и вертикальными силами нет, то с ростом числа Маха растет и расхождение между ними, при  $M=3.2$ , разница достигает почти 500 Н. Такое расхождение можно объяснить наличием конструктивных особенностей АУР: на верхней части ракеты расположены бугеля, на которых и происходит

торможение потока. Это вызывает рост статического давления на поверхности и, как следствие, дополнительный вклад в суммарное управляющее усилие.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках представленного в данной работе исследования процессов тепломассообмена и газовой динамики сложного взаимодействия потоков: струи ракетного двигателя, управляющей струи системы газодинамического управления авиационной управляемой ракетой и сносящего потока решены следующие задачи:

- проведён критический анализ существующих методов газодинамического управления летательными аппаратами, рассмотрены и проанализированы результаты существующих схем и решений;

- сформулированы граничные условия полёта АУР в плотных слоях атмосферы;

- разработана математическая модель процессов тепломассообмена и газовой динамики, характерных для полета АУР при обтекании сверхзвуковым потоком, проанализированы достоинства и недостатки популярных моделей турбулентности для решения поставленных задач;

- разработана математическая модель процессов тепломассообмена и химической кинетики в камере сгорания и истекающих струях;

- разработана методика численного решения основных уравнений, входящих в математическую модель, проанализированы особенности методики, проведено исследование сеточной независимости решаемой задачи, влияния используемой модели турбулентности на результаты расчетов;

- проведена верификация разработанной математической модели на основе сравнения результатов с экспериментальными данными и расчетными исследованиями других авторов;

- проведено тестовое сопоставление результатов численного решения предложенной математической модели, описывающей сложное взаимодействие струй в окрестностях авиационной управляемой ракеты при газодинамическом управлении направлением полета;

- проведены численные исследования параметров теплообмена и аэродинамических характеристик АУР для различных способов управления вектором тяги, выполнена оценка эффективности используемых методов;

- проанализированы эффекты, возникающие при взаимодействии управляющей струи со сносящим потоком, струей ракетного двигателя.

Установлено, что:

- при натекании сносящего потока на истекающую струю образуется подковообразная зона повышенного давления, а за струей зона разрежения, что вполне соответствует картине обтекания цилиндрической преграды. Формируются два симметричных вихря обтекающих препятствие, образующих за ним зону, в которой теплообмен сопоставим с областью передней критической точки.

- под воздействие сносящего потока в пространстве между управляющей струей и струей двигательной установки формируется область пониженного давления, в направлении которой начинает перетекать часть массы газа основной реактивной струи. Результат такого перераспределения массы заключается в изменении формы струи двигательной установки, вытягивающейся в сторону управляющей струи, при этом взаимодействие струй проявляется тем сильнее, чем выше скорость набегающего потока.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о перспективности метода газодинамического управления полетом летательного аппарата, основанного на использовании реактивного эффекта струи, выдуваемой по нормали к набегающему потоку. Отсутствие потерь в тяговых характеристиках двигательных установок и достаточно высокие управляющие моменты, создаваемые выдуваемой струей, делают ее предпочтительной по сравнению с другими методами газодинамического управления.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Асеинов Н.И., Мурадимов Ж.Г. Способы управления вектором тяги РДТТ // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2013. N 9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sposoby-upravleniya-vektorem-tyagi-rdt> (дата обращения: 01.10.2019).
2. Sutton, G. P., and Biblarz, O. Thrust Vector Control // Rocket Propulsion Elements. 7th ed. NY: John Wiley & Sons, New York, 2001. P. 608–623.
3. Асеинов Н.И., Буртыль И.В. Способы управления вектором тяги ракетных двигателей твердого топлива // Решетневские чтения. 2013. N 17. С.109.
4. Платонов. И.М. Решение задачи горения водорода в сверхзвуковом потоке с помощью модуля Ansys CFX [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2015. N 82. 13 с. Режим доступа: [http://trudymai.ru/upload/iblock/a7b/platonov\\_rus.pdf?lang=ru&issue=82](http://trudymai.ru/upload/iblock/a7b/platonov_rus.pdf?lang=ru&issue=82)
5. Платонов И. М., Молчанов А. М., Быков Л. В. Анализ влияния геометрических характеристик сопла на тягу гиперзвукового двигателя // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. N 9. С. 405-409.
6. Платонов И.М., Быков Л.В. Исследование влияния качества сеточной модели на определение местоположения ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле [Электронный ресурс] // Труды МАИ: 2016. N 89. 12 с. Режим доступа: [http://trudymai.ru/upload/iblock/329/platonov\\_bykov\\_rus.pdf?lang=ru&issue=89](http://trudymai.ru/upload/iblock/329/platonov_bykov_rus.pdf?lang=ru&issue=89).
7. Molchanov A.M., Bykov L.V., Platonov I.M., Yanishev D.S. Influence of geometric parameters and chemical kinetics model on combustion in a supersonic flow // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2017. Vol. 44(6). P. 553-563.
8. Быков Л. В., Молчанов А. М., Янышев Д. С., Платонов И. М. Современные подходы к расчету характеристик течения при ламинарно-

турбулентном переходе в пограничном слое // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. N 1. С.104–120.

9. Платонов И.М. Программный комплекс Ansys для моделирования задач газовой динамики и химической кинетики // конф. «Инновации в авиации и космонавтике – 2015» (Москва, 21-23 апреля 2015). С. 84-85.

10. Платонов И.М., Молчанов А.М., Быков Л.В. Математическое моделирование процессов горения водорода в сверхзвуковой струе // Конф. мол. уч. и спец. Новые решения и технологии в газотурбостроении. (Москва, 26-28 мая 2015). Сборник тезисов докладов. М.: ЦИАМ, 2015. С. 179-180.

11. Платонов И.М., Быков Л.В., Молчанов А.М. Ламинарно-турбулентный переход – состояние вопроса и проблемы // 14-й межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2015» (Москва, 16-20 ноябрь 2015). Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2015. С. 447-449.

12. Платонов И.М. Исследование влияния турбулентности набегающего потока на устойчивость ламинарного пограничного слоя на скользящем крыле // Гагаринские чтения – 2016: 42-я Межд. мол. Научн. конф.: Сборник тезисов докладов: В 4 т. (Москва, 12-15апреля 2016). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2016. С. 336-336.

13. Платонов И.М., Янышев Д.С. Численное моделирование рабочих параметров экспериментальной установки по изучению образования наледи на поверхности летательного аппарата // Гагаринские чтения – 2017: 43-я Межд. мол. Науч. конф.: Сборник тезисов докладов. (Москва, 05-19 апреля 2017). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2017. С. 1032- 1033.

14. Платонов И.М., Быков Л.В., Янышев Д.С. Численное моделирование рабочих параметров экспериментальной установки для изучения образования наледи на элементах конструкции летательных аппаратов // Мат. XX Юбилейной международной конф. по вычислительной механике и

- современным прогр. системам-2017 (Алушта, 24-31 мая 2017). М.: Издательство МАИ-Принт, 2017. С.529-531.
15. Ежов А.Д., Платонов И.М. Беспилотный летательный аппарат реактивного старта с изменяемым положением крыла // «Гагаринские чтения – 2018»: XLIV Межд. мол. Науч. Конф. (Москва, 17-20 апреля 2018). М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2018., Т. 1, с. 47.
16. Платонов И.М., Быков Л.В., Пашков О.А. Анализ влияния качества сеточной модели на результаты расчета параметров высокоскоростного течения в сносящем потоке // XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, май 2019). Сборник тезисов докладов. М.: Издательство МАИ-Принт, 2019. С.530-531.
17. Воробьев В. В. Системы управления летательных аппаратов: учебник для межвузовского использования / В. В. Воробьев, А. М. Киселев, В. В. Поляков; под ред. В. В. Воробьева; Военно-воздушная инженерная акад. им. проф. Жуковского. - Москва: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 2008. - 202 с.: ил. табл.; 21 см.; ISBN 978-5-903111-29-9 (в пер.)
18. Калугин В.Т., Мордвинцев Г.Г., Попов В.М. Моделирование процессов обтекания и управления аэродинамическими характеристиками летательных аппаратов // М.: МГТУ им. Баумана, 2011. 527с.
19. Лаврухин Г.Н., Талызин В.А. Экспериментальные исследования сопел до- и сверхзвуковых самолетов // Ученые записки ЦАГИ. 2014. N 5. С. 18-32. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalnye-issledovaniya-sopel-do-i-sverhzhvukovyh-samoletov> (дата обращения: 08.06.2019).
20. Лаврухин Г.Н., Скворцов Е.Б., Талызин В.А., Шелехова С.В. Экспериментальное исследование аэродинамики сопла с отклоняемым вектором тяги // Ученые записки ЦАГИ. 2014. N 4. С. 59-64. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalnoe-issledovanie-aerodinamiki-sopla-s-otklonyaemym-vektorom-tyagi> (дата обращения: 01.10.2019).



21. Berrier B. L., Taylor J. G. Internal Performance of Two Nozzles Utilizing Gimbal Concepts for Thrust Vectoring [Электронный ресурс] // Technical Report. 01 Apr 1990. Report No: NASA-TP-2991, 127p. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19900009884> (дата обращения 2019-09-25).
22. Carson G. T., Capone F. J. Static Internal Performance an Axisymmetric Nozzle with Multiaxis Thrust-Vectoring Capability // NASA TM-4237, 1991. p.75.
23. Wing D. J., Mills C. T. L., Mason M. L. Static Investigation of a Multiaxis Thrust-Vectoring Nozzle with Variable Internal Contouring Ability [Электронный ресурс] // NASA TP-3628, 1997. P.147. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19970021349> (дата обращения: 2019-09-25).
24. Глушко В.П. Космонавтика: Энциклопедия / Гл. ред. В. П. Глушко; Редколлегия: Бармин В. П., Бушуев К. Д., Верещетин В. С. и др. М.: Сов. Энциклопедия, 1985. 528 с.
25. Dungan T. A-4/V-2 Makeup - Tech Data and Markings // URL: <http://www.v2rocket.com/start/makeup/design.html>.
26. Пат. 96109569 Российская Федерация, МПК F42В. Ракета с комбинированным управлением / Соколовский Г.А.; заявитель и обладатель Государственное машиностроительное конструкторское бюро "Вымпел" (RU). - N 96109569/02; заявл. 1996.05.23, опубл. 1997.11.20, 9 с.
27. Тимаров А. Г., Ефремов А. Н., Бульбович Р. В. Численное моделирование влияния уноса газовых рулей на управляющие усилия // Вестник Концерна ВКО Алмаз-Антей. 2016. N 3. С. 47-51. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-modelirovanie-vliyaniya-unosa-gazovyh-ruley-na-upravlyayuschie-usiliya/>
28. Berrier B. L., Mason M. L. Static Performance of an Axisymmetric Nozzle with Post-Exit Vanes for Multiaxis Thrust Vectoring [Электронный ресурс] // NASA TP-2800, 1988. P. 51. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19880010896> (дата обращения: 2019-09-25).

29. Bowers A. H., Pahle J. W. Thrust Vectoring on the NASA F-18 High Alpha Research Vehicle // NASA TM-4771, 1996. P.32.
30. Neilson J. H., Gilchrist A., Lee C. K. Side Thrust Control by Secondary Gas Injection into Rocket Nozzles // Journal of Mechanical Engineering Science. 1968. Vol. 10(3), p. 239–251. [https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1968\\_010\\_036\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1968_010_036_02).
31. Flamm J. D., Deere K. A., Mason M. L., Berrier B. L., Johnson S. K. Design Enhancements of the Two Dimensional, Dual Throat Fluidic Thrust Vectoring Nozzle Concept // 3rd AIAA Flow Control Conference. 2006. 27 p.
32. Washington D.M., Alvi F.S., Strykowski P.J., Krothapalli A. Multiaxis Fluidic Thrust Vector Control of a Supersonic Jet Using Counterflow // AIAA Journal. 1996. Vol. 34. N 8. P.1734-1736. <https://doi.org/10.2514/3.13296>.
33. Deere K. A., Berrie B. L., Flamm J. D., Johnson S. K. Computational Study of Fluidic Thrust Vectoring Using Separation Control in a Nozzle // AIAA Paper AIAA- 2003-3803, 2003. <https://doi.org/10.2514/6.2003-3803>.
34. Flamm J. D., Deere K. A., Mason M. L., Berrier B. L., Johnson S. K. Experimental Study of an Axisymmetric Dual Throat Fluidic Thrust Vectoring Nozzle for Supersonic Aircraft Application // AIAA Paper. 2007. P.28. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20070030933>.
35. Воробьев С.В., Клестов Ю.М., Мышенков Е.В., Мышенкова Е.В. Исследование способов отклонения вектора тяги в эжекторных и поворотных соплах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. N 4. С.692-693.
36. Жирников Б.Л., Кудин О.К., Нестеров Ю.Н. Экспериментальные исследования управления струйным течением в хвостовой части летательного аппарата // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL. N 6. С.96-102.
37. Zeutzius M., Beylich A.E., Matsuo S., Setoguchi T. Experimental investigation of a gas dynamic thrust vector control for hypersonic space planes // JSME International J., Series B. 1996. V. 39, N 1. P. 101-111.

38. Wu J.-M., Chapkis R.L., Mager A. Approximate Analysis of Thrust Vector Control by Fluid Injection // National Engineering Science Co. 1961. <https://doi.org/10.2514/8.5891>.
39. Shandor M., Stone A.R., Walker R.E. Secondary Gas Injection in a Conical Rocket Nozzle // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. N 2. P. 334-341. <https://doi.org/10.2514/3.1533>.
40. Eunkwang Lee, Hongjae Kang, Sajin Kwon. Demonstration of Thrust Vector Control by Hydrogen Peroxide Injection in Hybrid Rockets [Электронный ресурс] // Journal of Propulsion and Power, 2019. Vol. 35, N 1. p. 109-114. URL: <http://arc.aiaa.org> | DOI: 10.2514/1.B37074.
41. Eilers S. D., Wilson M. D., Whitmore S. A., Peterson Z. W. Side Force Amplification on an Aerodynamically Thrust Vectored Aerospike Nozzle // Journal of Propulsion and Power. 2012. Vol. 28. N 4. P.811-819. DOI: 10.2514/1.B34381.
42. Cen Z., Smith T., Stewart P., Stewart J. Integrated flight/thrust vectoring control for jet-powered unmanned aerial vehicles with ACHEON propulsion // Proc. I. Mech. E. Part G: J. Aerospace Engineering. 2015, Vol. 229(6) 1057–1075. DOI: 10.1177/0954410014544179.
43. Orth R.C., Schetz J.A., Billing F.S. The interaction and penetration of gaseous jets in supersonic flow [Электронный ресурс] // NASA CR-1386. 1969. JOHNS HOPKINS UNIVERSITY: Silver Spring, Md. 44 P. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19690023102> (дата обращения: 2019-04-30).
44. Висков А.Н., Горелов Ю.А., Стрелин В.А., Фарбер Б.А. К определению эжекционных свойств струи в сносящем потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1977. Т.VIII, N 3. С.127-133.
45. Внуков А.Е. Об истечении вязкой струи в перпендикулярно сносящий поток // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т. XVIII. N 4. С.107-111.
46. Яковчук М.С. Численное моделирование динамических процессов вдува струй в сверхзвуковую часть сопла // Вестник СГАУ. 2012. N 3 (34). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-modelirovanie-dinamicheskikh->

protsestovov-vduva-struy-v-sverhzhvukovuyu-chast-sopla (дата обращения: 11.10.2019).

47. Zukoski E.E., Spaid F.W. Secondary Injection of Gases into a Supersonic Flow // AIAA Journal. 1964. Vol.2. N 10. P1689-1696.

48. Charwat A.F., Allegre J. Interaction of a Supersonic Stream and a Transverse Supersonic Jet // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. N 11. p. 1965-1972. DOI: 10.2514/3.2712.

49. Савинов А.А. Влияние сносящего потока на импульс струи [Электронный ресурс] // Ученые записки ЦАГИ. 1980. Т. XI. N 5. С.116-118. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vliyanie-snosyashchego-potoka-na-impuls-strui> (дата обращения: 17.06.2019).

50. Висков А. Н., Горелов Ю. А. Образование дискретных поперечных вихрей на струях в сносящем потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1976. N 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovanie-diskretnyh-poperechnyh-vihrey-na-struyah-v-snosyashchem-potoke> (дата обращения: 01.09.2019).

51. Luo S.J., Ni Z.Y., Liu Y.F. Study on the characteristics of interaction flowfields induced by supersonic jet on a revolution body // Theoretical & Applied Mechanics Letters. 2017. Vol. 7(6). P. 362-365. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2017.11.008>.

52. McBride B.J., Gordon S., Reno M.A. Coefficients for Calculating Thermodynamic and Transport Properties of Individual Species // NASA Technical Memorandum 4513, October 1993. P.1-89.

53. Scalabrin L.C. Numerical Simulation of Weakly Ionized Hypersonic Flow over Reentry Capsules // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Aerospace Engineering) in The University of Michigan. 2007. 182p.

54. Sutton K., Gnoffo P. A. Multi-component diffusion with application to computational aerothermodynamics // AIAA Paper 1998-2575, 1998. <https://doi.org/10.2514/6.1998-2575>.

55. Wilke C. R. A viscosity equation for gas mixtures // J. of Chem. Phys. 1950, N 18. p. 517–519.
56. Blottner F. G., Johnson M., Ellis M. Chemically reacting viscous flow program for multi-component gas mixtures // SC-RR-70-754, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1971. DOI: [10.2172/4658539](https://doi.org/10.2172/4658539).
57. Favre A. Turbulence: space-time statistical properties and behavior in supersonic flows // Physics of Fluids. 1983. Vol. 23 (10). PP.2851-2863.
58. Молчанов А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и теплообмена. // Москва: Изд-во МАИ. 2013. 206 с.
59. Launder B., Reece G. J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 68(03). p. 537 – 566.
60. Молчанов А.М. Математическое моделирование гиперзвуковых гомогенных и гетерогенных неравновесных течений при наличии сложного радиационно-конвективного теплообмена / А. М. Молчанов. - М.: МАИ, 2017. - 159 с.: ил.
61. Молчанов А.М. Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности // Вестник Московского авиационного института. 2009. N 1. Т.16. С.38-48.
62. Wilcox, D.C. Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models // AIAA Journal. 1988. Vol.26. N 11. p. 1299–1310.
63. Leer V. B. Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A Second Order Sequel to Godunov's Method // Journal of Computational Physics. 1979. N 32. P. 101–136.
64. Janicka J., Kolbe W., Kollmann W. Closure of the transport equation for the pdf of turbulent scalar fields // Journal Non-Equilibrium Thermodynamics. 1978. N 4. 47 p.

65. Drake M. C., Blint R. J. Relative Importance of Nitrogen Oxide Formation Mechanisms in Laminar Opposed-Flow Diffusion Flames // *Combustion and Flame*. 1991. N 83. P. 185–203.
66. Voller V. R., Brent A. D., Prakash C. The Modeling of Heat, Mass and Solute Transport in Solidification Systems // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1989. N 32(9). P. 1719–1731.
67. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. 1994. Vol.32. N 8. p. 269–289.
68. Menter F.R. Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows // *AIAA Paper 93-2906*, 1993. 22 p.
69. Menter F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA Journal*. 1994. N 32(8). p. 1598–1605.
70. Menter F. R., Langtry R. B., Likki S. R., Suzen Y. B., Huang P. G., Völker S. A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables—Part I: Model Formulation // *ASME. J. Turbomach.* 2006. N 128(3): pp. 413–422. <https://doi.org/10.1115/1.2184352>.
71. Tsang W., Hampson R.F. Chemical kinetic data base for combustion chemistry. Part I. Methane and related compounds // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1986. Vol.15. P.1087.
72. Ibragimova L.B., Smekhov G.D., Shatalov O.P. Recommended Rate Constants of Chemical Reactions in H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> Gas Mixture with Electronically Excited Species O<sub>2</sub>(1), O(1D), OH (2) Involved // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2003. Т. 1. 31 с. (<http://chemphys.edu.ru/media/published/Ибрагимова-2003-01-20-001.pdf>).
73. Быков Л.В., Молчанов А.М., Щербаков М.А., Янышев Д.С. Вычислительная механика сплошных сред в задачах авиационной и космической техники // М.: ЛЕНАНД, 2015. 668с.
74. Williams J, Butler F.J., Wood M.N. The aerodynamics of jet flaps // HM Stationery Office, London. 1963. 32 P.

75. Weber J., Gaynor J.M. Interference Problems on Wing-Fuselage Combinations in Inviscid, Incompressible Flow // Aeronautical research council reports and memoranda. London: Her Majesty's stationery office. 1976. 75 p.
76. Бродецкий М. Д., Рафаэлянц А. А., Харитонов А. М., Черемухин Г. А. Аэродинамическая интерференция призматических мотогондол с крылом при сверхзвуковых скоростях // Ученые записки ЦАГИ. 1988. N 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/aerodinamicheskaya-interferentsiya-prizmaticheskikh-motogondol-s-krylom-pri-sverhzhukovyh-skorostyah-1> (дата обращения: 17.09.2019).
77. Свирщевский С.Б., Семенчиков Н.В., Королев Н.В. Исследование аэродинамических характеристик кормовой части летательного аппарата с кольцевым соплом в транс- и сверхзвуковом потоке // Матем. Моделирование. 1999. Т.11. N 4. С.19-28 (дата обращения: 04.02.2019г).
78. Арнольд В. Н., Гордон М. Г., Савинов А. А. Интерференция крыла и струи в сносящем потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1970. N 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/interferentsiya-kryla-i-strui-v-snosyaschem-potoke> (дата обращения: 01.06.2019).
79. Viti V., Neel R., Schetz J.A. Detailed flow physics of the supersonic jet interaction flow field // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21(4). P.16. <https://doi.org/10.1063/1.3112736>.
80. Aider J.-L., Duriez T., Wesfreid J.E. From natural to forced counter-rotating streamwise vortices in boundary layers [Электронный ресурс] // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 137. 8p. doi:10.1088/1742-6596/137/1/012009. (дата обращения: 17.06.2015).
81. Spall R. E., Malik M. R. Goertler vortices in supersonic and hypersonic boundary layers // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1989. Vol. 1(11); <https://doi.org/10.1063/1.857508>.