

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Еголева Екатерина Сергеевна



**Моделирование деформирования тонких пластин из композиционных
материалов с высокотемпературными фазовыми превращениями**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Научный руководитель
Доктор физико-математических наук,
Профессор
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2020

Содержание

Введение	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ	12
1.1 Многоуровневая модель композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями при высоких температурах	12
1.2 Модель изменения фазового состава волокон при высоких температурах	14
1.3 Модель изменения фазового состава связующего при нагреве	15
1.4 Принцип сложения слоев	16
1.5 Модель изменения упругих свойств связующего (а) и (б) при нагреве	19
1.6 Модель изменения упругих свойств волокон на 3-м уровне при нагреве	25
1.7 Модель изменения упругих свойств связующего на 3-м уровне при нагреве	26
1.8 Модель для расчета упругих характеристик 1D композита на 2-м уровне	27
1.9 Методика расчета эффективных упругих характеристик тканевого композита на 1-м структурном уровне	29
1.10 Постановка задачи упругости для определения эффективных характеристик композита на 2-м и 1-м уровнях	30
1.11 Метод гомогенизации для определения эффективных характеристик композита на 2-м и 1-м уровнях	32
1.12 Формулировка задач на 1/8 «ячейки периодичности»	33
1.13 Эффективные определяющие соотношения композиционного материала на 1-м и 2-м уровне	35
1.14 Тензоры концентрации напряжений в компонентах композита	36

1.15 Метод конечных элементов для решений задач Lpq . Вариационная формулировка локальной задачи Lpq	37
1.16 Применение метода конечных элементов для решения задач Lpq	39
1.17 Результаты численного моделирования эффективных характеристик компонентов композита на неорганической матрице	43
1.18 Определяющие соотношения для тканевых композитов с многостадийными фазовыми превращениями	51
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ПЛАСТИН С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ	
ПРЕВРАЩЕНИЯМИ	53
2.1 Постановка трехмерной задачи линейной теории термоупругости для тонкой пластины с фазовыми превращениями	53
2.2 Построение асимптотических разложений	56
2.3 Локальные задачи	60
2.4 Решение задач нулевого приближения	65
2.5 Построение решений задач первого, второго и третьего приближений	66
2.6 Осредненные уравнения пластин с многостадийными фазовыми превращениями	69
2.7 Асимптотическая теория пластин типа Тимошенко с фазовыми превращениями на основе учета перемещений 2-го приближения	71
2.8 Соотношения для напряжений более высоких приближений	73
2.9 Осредненные определяющие соотношения для пластин с фазовыми превращениями	73
2.10 Осредненный вид кинематических соотношений	74
2.11 Осредненный вид системы уравнений равновесия для пластины типа Тимошенко с фазовыми превращениями	75
2.12 Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине с фазовыми превращениями	76

2.13 Система уравнений термоупругости для пластин из композиционного материала с многостадийными фазовыми превращениями	77
ГЛАВА 3. РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И ИЗГИБЕ	78
3.1 Аналитическое решение задачи о прогибе	78
3.2 Тестирование аналитического решения	89
3.3. Результаты расчетов для несимметричной многослойной пластины	90
3.4 Результаты численного расчета деформирования и напряжений в тонкой пластине при неравномерном нагреве и изгибе	96
Выводы и заключение	109
Список литературы	110

Введение

В современной науке и технике особое внимание уделяется конструкциям и оболочкам из композиционных материалов с высокими показателями механических свойств (упругость, твердость, прочность), сохраняющихся при интенсивных термосиловых нагрузках. Перспективным классом конструкционных материалов для создания теплонагруженных конструкций являются композиционные материалы на основе неорганических связующих (например, фосфатных, алюмо-фосфатных, хромо-фосфатных, магний-фосфатных, алюмо-хромофосфатных) [1, 35, 41, 48, 54]. Материалы данного класса сохраняют работоспособность до температур свыше 1000°С без оплавления, имеют хорошие диэлектрические характеристики во всем интервале рабочих температур, относительно высокие прочностные показатели при высоких температурах, обладают термостойкостью в окислительных средах, повышенной ударной вязкостью [29, 61, 62]. Благодаря такому комплексу свойств композиционные материалы на основе неорганических связующих имеют большое значение для создания огнестойких строительных конструкций, негорючих электроизоляторов, пожаростойких конструкций на транспорте и для создания других теплонагруженных конструкций.

Характерной особенностью исследований таких композитов является их комплексность: исследования ведутся на стыке механики, физики твердого тела и материаловедения, поскольку при высоких температурах в матрице и волокнах происходят сложные физико-химические (фазовые) превращения, приводящие к необратимому изменению всех тепломеханических и теплофизических свойств материала. [24, 56, 57, 64, 65].

Следует отметить работы Шевченко В.Я. и Барина С.М., Строганова Г.Б., Ромашина А.Г. и др., в которых описаны теоретические основы физико-химических свойств и микроструктура керамоматричных композитов, а также технологические процессы и проблемы их производства [5, 6, 43, 44, 59]. В

монографии Костикова В.И. и Варенкова А.Н. описана кинетика процессов взаимодействия различных компонент сверхвысокотемпературных композитов, а также технология их производства [40]. В области исследования и создании перспективных керамоматричных композиционных материалов выделяются публикации Каблова Е.Н., Гращенкова Д.В. и их коллег из ФГУП «ВИАМ» ГНЦ, в которых собраны результаты последних разработок по данной проблеме, как в России, так и за рубежом [38, 39, 47, 66].

Математические модели термомеханического поведения композитов на неорганических матрицах были разработаны в [61, 62], в работе [62] также была предложена многомасштабная модель внутренней структуры алюмо-фосфатного композита. В работе [20] построена математическая модель композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих, позволяющая более детально описывать переменную микроструктуру многофазного композита с учетом кинетики процессов, протекающих в композиционных материалах при высоких температурах, а также модель позволяет прогнозировать зависимость модулей упругости и пределов прочности материала от режима температурного нагрева. При создании этой модели использован опыт разработки моделей термомеханического высокотемпературного поведения композиционных материалов на полимерных матрицах [29, 31, 32, 33].

Поскольку в качестве элементов конструкций для различных отраслей промышленности используются многослойные пластины из термостойких композиционных материалов, расчет их напряженно-деформированного состояния выделен в особый класс задач механики деформируемого твердого тела. Расчеты тонкостенных конструкций в трехмерной постановке прямыми конечно-элементными методами обычно не приводят к желаемому результату, в плане распределений напряжений по толщине, и требуют больших вычислительных мощностей для расчетов на мелкой сетке. Для расчета напряжений и деформаций тонких пластин иногда предпочтительно

использовать либо особые типы конечных элементов [42], либо специальные теории пластин [32, 34, 36, 46]. В ряде исследований проведены поиски уточняющих методик для расчета напряжений в тонких пластинах, одни из последних [14, 51, 52, 53, 55], в [51, 52] приведено сравнение трёхмерной теорией упругости с неклассическими и классическими моделями пластин.

В задачах линейной теории упругости для пластин в трехмерной постановке часто применяют методы асимптотического осреднения для понижения размерности, учитывая, например, малость толщины пластины по отношению к другим ее параметрам [9, 68, 70]. Асимптотический анализ для случая пластин проведен в работах [67, 69, 70]. Метод асимптотических разложений по малому геометрическому параметру показал свою достаточную эффективность и универсальность – он позволяет аналитически рассчитывать все 6 компонент напряжений и находить их распределение по толщине пластин с высокой точностью, которая может быть достигнута только при расчетах с большим числом конечных элементов.

Однако классический вариант метода асимптотических разложений, когда учитываются разложения для перемещений только до первого порядка малости, обладает определенными ограничениями – точность расчета перемещений снижается для относительно коротких пластин, по сравнению с результатами расчета на основе теории пластин Тимошенко. Для повышения точности расчета коротких пластин необходима модификация метода асимптотических разложений. Для расчета тонкостенных пластин из высокотемпературных композиционных материалов на неорганических матрицах, необходима разработка теории тонких пластин с учетом многостадийных фазовых превращений, которые меняют упругие свойства материала с течением времени и в зависимости от условий нагрева.

Актуальность темы диссертации обусловлена широким применением в современной техники тонкостенных конструкций из композиционных материалов с фазовыми превращениями, в том числе, эксплуатирующихся при высоких температурах, и отсутствием в настоящее время в литературе моделей термомеханического поведения композитов с многостадийными фазовыми превращениями, которые позволяли бы учитывать кинетику изменения микроструктуры в матрице и волокнах при нестационарном нагреве, а также отсутствием достаточно точных методов расчета тонкостенных пластин из высокотемпературных композитов.

Цель данной диссертации: разработка определяющих соотношений для композиционных материалов с высокотемпературными многостадийными фазовыми превращениями, основанной на микроскопическом анализе напряженно-деформированного состояния, и разработка модифицированной асимптотической теории расчета тонких пластин из композитов данного класса.

Задачами настоящей работы являются:

- разработка математической многоуровневой модели для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах;

- построение определяющих соотношений для ортотропных композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями, основанных на многоуровневой модели композита;

- разработка модифицированного варианта асимптотической теории расчета тонких упругих пластин из высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, учитывающего конечные значения сдвиговых характеристик;

- численное моделирование микроскопического напряженно-деформированного состояния композитов с фазовыми превращениями и расчет термоупругих характеристик тканевых композитов;

- проведение тестовых расчетов напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин по модифицированной теории с учетом асимптотических разложений для перемещений 2-го приближения; сравнение результатов с классической асимптотической теорией, использующих 1-е приближение для перемещений;

- решение задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкостенной пластины из тканевого композиционного материала с высокотемпературными фазовыми превращениями при неравномерном нестационарном нагреве и равномерном давлении;

- проведение численных расчетов изменения напряженно-деформированного состояния тонких композитных пластин, обусловленного кинетикой изменения термоупругих характеристик материалов с многостадийными фазовыми превращениями.

Научная новизна работы состоит:

- в разработке новой математической многоуровневой модели для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах, и построении определяющих соотношений для ортотропных композитов на основе этой модели;

- в разработке модифицированного варианта асимптотической теории расчета тонких упругих пластин для случая высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, и учитывающей конечные значения сдвиговых характеристик композита.

В работе применены следующие **методы исследования**:

- метод асимптотического осреднения;

- метод конечных элементов;
- численные конечно-разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- метод сложения слоев в слоистых композитных структурах;
- численные методы интегрирования.

На защиту вынесены следующие положения:

- разработка новой многоуровневой модели для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах, позволяющей построить определяющие соотношения данного класса композитов;

- разработка модифицированного варианта асимптотической теории расчета тонких упругих пластин для случая высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, и учетом асимптотических разложений для перемещений до 2-го приближения;

- эффект влияния многостадийных фазовых превращений в высокотемпературных композитах на кинетику изменения напряженно-деформированного состояния тонких пластин при нестационарном одностороннем нагреве и равномерном давлении.

Достоверность результатов обеспечивается применением традиционных физико-математических методов и законов, корректной постановкой задач, сравнением полученных аналитически соотношений и численных расчетов с результатами, полученными другими методами.

Апробация работы: основные результаты доложены на:

1. Научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики им. профессора Н.Е. Жуковского, февраль 2013;

2. Международной научной конференции "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech – 2014), посвященной

50-летию научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ноябрь 2014 года;

3. III Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея, май 2014;

4. Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии», 5-8 декабря, 2018 г, МГТУ им.Н.Э. Баумана;

5. II Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии», 20-21 декабря, 2019 г, МГТУ им. Н.Э. Баумана;

6. международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики» (FARM-2019), 10-12 декабря, 2019 г, МГТУ им. Н.Э. Баумана;

7. Научном семинаре «Актуальные проблемы вычислительной математики и механики» кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2013-2019 гг).

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 10 публикаций [20 - 28, 63], в том числе 5 в изданиях из списка ВАК [20, 21, 24, 25, 63] и 2 статьи [20, 63] в журнале, индексируемом в Scopus.

Структура и объем работы: диссертация состоит из 3 глав, введения, выводов и заключения и списка использованной литературы из 70 наименований. Объем диссертации 118 с.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

1.1 Многоуровневая модель композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями при высоких температурах

Композиционные материалы с фазовыми превращениями согласно общей методологии моделирования рассмотрим как многоуровневую структуру.

Схематично на рисунке 1.1 показана многоуровневая модель тканевого композиционного материала, состоящую из 4-х структурных уровней. Каждый структурный уровень состоит из большого числа соответствующих ячеек периодичности (ЯП).

Нити ткани таких композитов состоят из большого числа моноволокон, соединенных матрицей, поэтому выделяем ЯП 2-го структурного уровня, состоящую из одного моноволокна, окруженного матрицей (1D композит). Матрица композиционного материала, также может состоять из нескольких компонент, например, из связующего и погруженных в него дисперсных частиц различной формы, их будем называть наполнителем (рисунок 1.1, 2-й структурный уровень).

При высоких температурах в волокнах происходят фазовые превращения и помимо исходной твёрдой фазы, которую будем называть “аморфной”, появляется новая твёрдая фаза – “кристаллическая”. Кавычки означают, что физическая природа фаз может быть отлична от аморфной и кристаллической, и эти термины используются как названия исходного состояния и нового твёрдого состояния, в которое волокна переходят при нагреве [21].

Матрица 2-го уровня при высоких температурах представляет собой также многофазную среду, поэтому выделен 3-й структурный уровень, на котором ЯП состоит из 2-х фаз под условными обозначениями (a) и (b), поскольку мы положили, что фазовые превращения в материале идут по двум

отдельным цепочкам. Каждую из фаз (a) и (b), в свою очередь, представим в виде 5-фазной системы. В процессе нагрева до высоких температур происходит перераспределение соотношения между этими фазами. Схема фазовых превращений для ЯП на 4-ом структурном уровне приведена на рисунке 1.2.

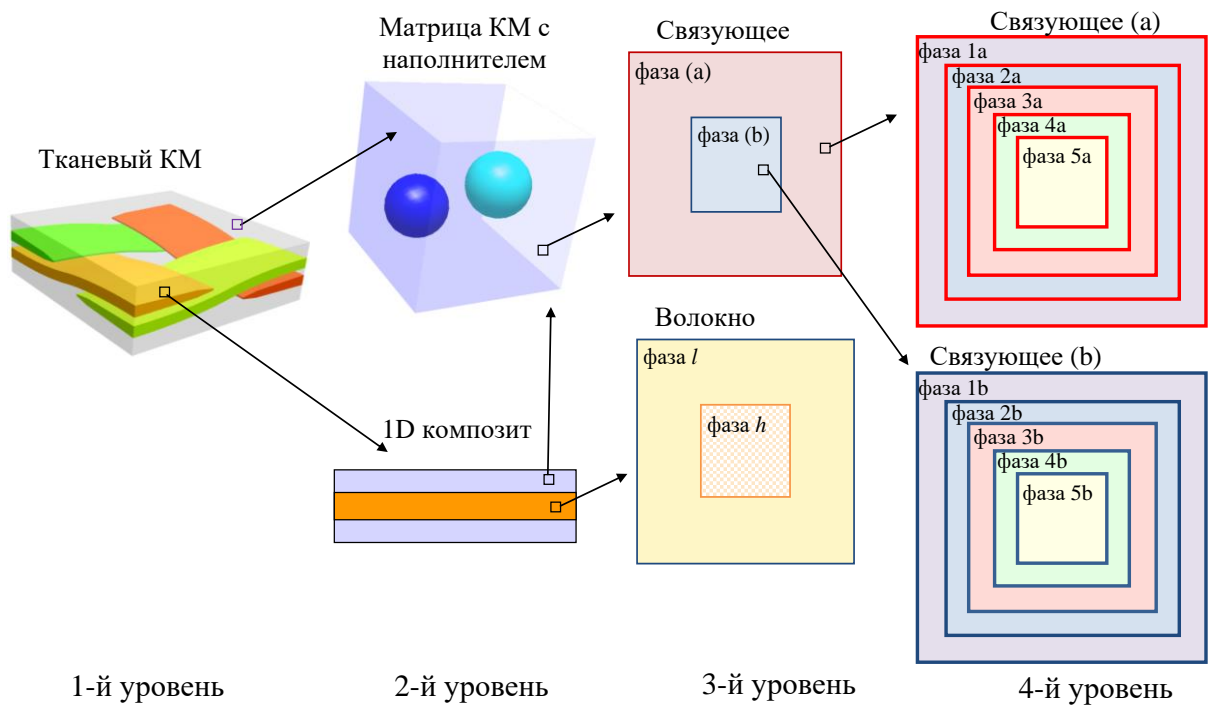


Рисунок 1.1 – Многоуровневая модель тканевого композиционного материала с высокотемпературными многостадийными фазовыми превращениями

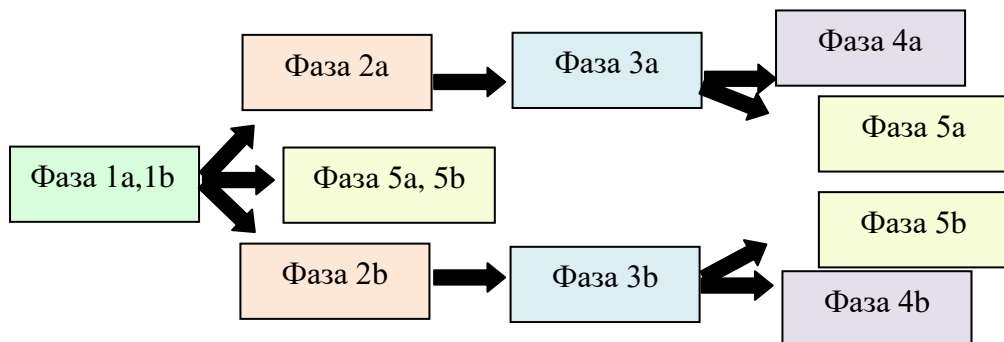


Рисунок 1.2 – Схема многостадийных фазовых превращений связующего по цепочке (a) и цепочке (б) при нагреве до высоких температур

Отметим, что модель легко трансформируется при увеличении количества цепочек фазовых превращений и количества рассматриваемых фаз.

Под высокими температурами будем понимать температуры, при которых происходят необратимые внутренние физико-химические превращения в компонентах (фазах) композита, уровень высоких температур зависит от типа материала и обычно лежит в области свыше 200°C.

При разработке модели учитывались температурные области существования различных фазовых составляющих связующего неорганического (алюмохромфосфатного) типа.

1.2 Модель изменения фазового состава волокон при высоких температурах

Волокна, используемые для армирования матриц, как правило, являются более термостойкими, чем сами матрицы. Волокна с точностью допустимой для прочностных расчётов будем считать термостойкими, т.е. их плотность ρ_f не изменяется. Плотность, например, стекловолокон практически не изменяется вплоть до температур плавления $\sim 1800^\circ\text{C}$ и для упруго-прочностных задач может считаться постоянной.

Волокна при высоких температурах рассмотрим как двухфазную систему, состоящую из исходной “аморфной” h -фазы и новой “кристаллической” l -фазы.

Изменение объемной концентрации “аморфной” h -фазы волокон описывается уравнением сохранения масс [29]:

$$\rho_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = -J_h, \quad (1.1)$$

где ρ_h – плотность аморфной фазы, φ_h – объемная концентрация “аморфной” h -фазы волокна, J_h – массовая скорость фазовых превращений, для которой имеет место соотношение Аррениуса:

$$J_h = J_h^0 \varphi_h \exp\left(-\frac{E_{Ah}}{R\theta}\right), \quad (1.2)$$

здесь J_h^0 – предэкспоненциальный множитель, E_{Ah} – энергия активации “аморфной” фазы, θ – температура, R – газовая постоянная.

Концентрация “кристаллической” фазы в ячейке находится с помощью соотношения $\varphi_l = 1 - \varphi_h$.

В начальном состоянии при температуре $\theta_0 = 293\text{K}$ задана концентрация волокон $\varphi_{f2} = \varphi_{f2}^0$, где φ_{f2}^0 – начальная концентрация волокна в 1-D композите. Полагаем, что концентрация “аморфной” фазы в начальном состоянии $\varphi_h = \varphi_{f2}^0$, а “кристаллическая” фаза еще не появилась, т.е. ее концентрация $\varphi_l = 0$.

1.3 Модель изменения фазового состава связующего при нагреве

Рассмотрим изменение фазового состава связующего при многостадийном высокотемпературном фазовом превращении на 4-м уровне. Для описания изменения фазового состава связующего при нагреве, основываясь на законах сохранения масс для фаз, запишем систему уравнений для объёмных концентраций фаз [29]:

$$\rho_{1w} \frac{\partial \varphi_{1w}}{\partial t} = -J_{1w}, \quad (1.3)$$

$$\rho_{2w} \frac{\partial \varphi_{2w}}{\partial t} = J_{1w}(1 - \Gamma_{1w}) - J_{2w}, \quad (1.4)$$

$$\rho_{3w} \frac{\partial \varphi_{3w}}{\partial t} = J_{2w} - J_{3w}, \quad (1.5)$$

$$\rho_{4w} \frac{\partial \varphi_{4w}}{\partial t} = J_{3w}(1 - \Gamma_{4w}), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \rho_{5w} \varphi_{5w}}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi_{5w} \rho_{5w} \vec{V}_{5w} = J_{3w} \Gamma_{4w} + J_{1w} \Gamma_{1w}, \quad (1.7)$$

где ρ_{sw} – плотности фаз (полагаются постоянными, кроме плотности фаз ρ_{5w} – считаем их аналогами газовых фаз), φ_{sw} – объёмные концентрации фаз для цепочек (a) и (b) фазовых превращений ($s = \overline{1,5}$), Γ_{1w} , Γ_{4w} – коэффициенты газификации, \vec{V}_{5w} – векторы скорости движения газовых фаз, J_{iw} – массовые

скорости фазовых превращений, для которых выполняется соотношение Аррениуса:

$$J_{iw} = J_{iw}^0 \varphi_{iw} \exp\left(-\frac{E_{Asw}}{R\theta}\right), \quad i = 2, 3, 4; \quad w = \{a, b\} \quad (1.8)$$

здесь J_{iw}^0 – предэкспоненциальный множитель, E_{Asw} – энергия активации соответствующей фазы, θ – температура, R – газовая постоянная.

Уравнение (1.7) в расчётах можно не использовать, объёмная концентрация φ_{5w} находится из условия для ячейки $\sum_{i=1}^5 \varphi_{iw} = 1$.

1.4 Принцип сложения слоев

Рассмотрим материал, состоящий из N слоев. К боковой поверхности слоистого материала приложена сила F . Слои уложены параллельно вектору действия силы как показано на рисунке 1.3.

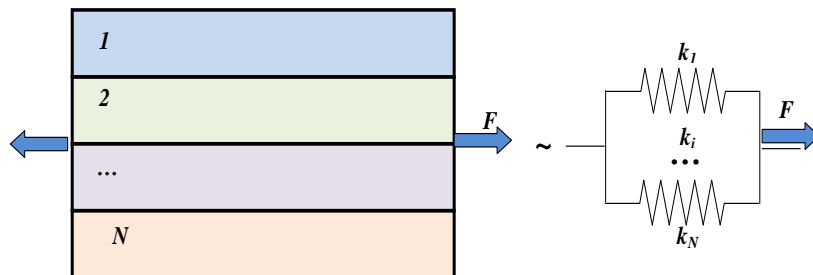


Рисунок 1.3 – Схема одноосного нагружения слоистого материала (слои горизонтальные)

При таком одноосном нагружении деформации каждого слоя будем считать одинаковыми, тогда вводя площади боковой поверхности i -го слоя – A_i , можно записать выражение для относительной площади слоя $a_i = A_i / A$, где

$A = \sum_{i=1}^N A_i$ – площадь боковой поверхности материала. Запишем соотношение

для связи напряжений слоев материала σ_i с напряжением σ для всего

материала (нормальное напряжение в поперечном сечении): $\sigma A = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i$

.Разделив правую и левую части на площадь боковой поверхности A , получим

$\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i a_i$. Пусть для материала выполняется закон Гука: $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^\theta)$, где $\varepsilon^\theta = \beta \Delta \theta$ – тепловая деформация, β – коэффициент теплового расширения, E – модуль упругости материала; и для любого слоя справедливо: $\sigma_i = E_i(\varepsilon_i - \varepsilon_i^\theta)$, тогда

$$\sigma = \sum_{i=1}^N a_i E_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^\theta) = \sum_{i=1}^N a_i E_i \varepsilon_i - \sum_{i=1}^N a_i E_i \varepsilon_i^\theta.$$

Теперь, учтем, что деформации для каждого i -го слоя одинаковые: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = \varepsilon$, перепишем последнее соотношение в виде:

$$E\varepsilon - E\varepsilon^\theta = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^N a_i E_i - \sum_{i=1}^N a_i E_i \varepsilon_i^\theta.$$

Очевидно, что сумма, стоящая при ε дает модуль упругости всего материала:

$$E = \sum_{i=1}^N a_i E_i. \quad (1.9)$$

Тогда тепловую деформацию можно представить в виде:

$$\varepsilon^\theta = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^N a_i E_i \varepsilon_i^\theta.$$

Учитывая, что тепловая деформация i -го слоя $\varepsilon_i^\theta = \beta_i \Delta \theta$, запишем выражение связи коэффициента теплового расширения материала с коэффициентом теплового расширения слоя:

$$\beta = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^N a_i E_i \beta_i. \quad (1.10)$$

Рассмотрим слоистый материал из N слоев. К боковой поверхности приложена сила F . Слои уложены перпендикулярно вектору действия силы как показано на рисунке 1.4.

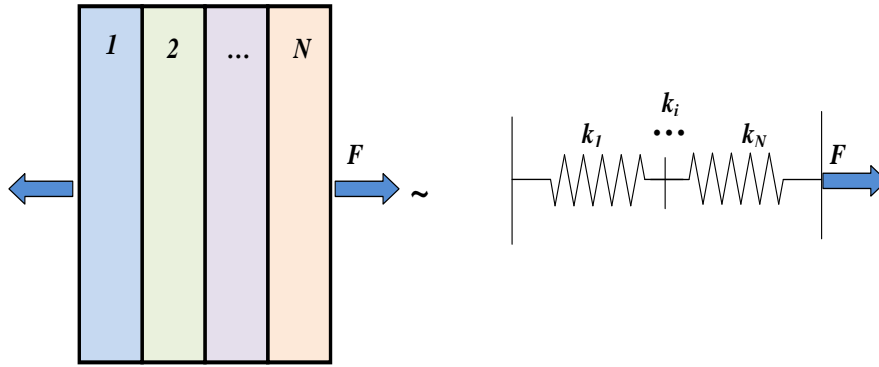


Рисунок 1.4 – Схема одноосного нагружения слоистого материала (слои вертикальные)

При таком одноосном нагружении напряжения каждого слоя будем считать одинаковыми $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_N = \sigma$. Введем толщину i -го слоя L_i , тогда

$$L = \sum_{i=1}^N L_i.$$

Из закона Гука выразим деформацию материала: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^\theta$. Аналогичное выражение будет верно и для деформации i -го слоя: $\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i} + \varepsilon_i^\theta = \frac{\sigma}{E_i} + \varepsilon_i^\theta$.

Поскольку $\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \varepsilon_i$, можно записать

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \left(\frac{\sigma}{E_i} + \varepsilon_i^\theta \right) = \sigma \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \frac{1}{E_i} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \varepsilon_i^\theta.$$

Тогда модуль упругости материала при таком нагружении можно найти из соотношения:

$$\frac{1}{E} = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \frac{1}{E_i}. \quad (1.11)$$

Легко увидеть, что тепловая деформация примет вид:

$$\varepsilon^\theta = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \varepsilon_i^\theta,$$

откуда находим коэффициент теплового расширения для этого случая:

$$\beta = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L} \beta_i. \quad (1.12)$$

1.5 Модель изменения упругих свойств связующего (а) и (б) при нагреве

Построим модель изменения упругих свойств связующего при нагреве для цепочек (а) и (б) на 4-м уровне, для этого рассмотрим модельную форму ЯП V_ζ в виде куба, каждая фаза имеет форму пустотелого куба, а газовая фаза – сплошного куба. Оси локальной системы координат ячейки ориентированы так, как показано на рисунке 1.5. Для такой ЯП с кубической формой фаз поиск эффективного модуля упругости матрицы осуществляется согласно принципу сложения слоёв [50].

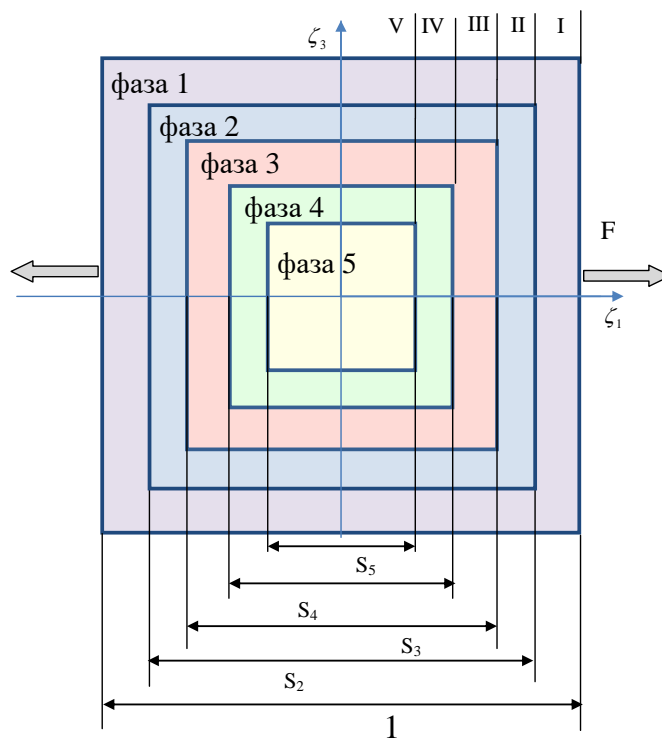


Рисунок 1.5 – Ячейка периодичности с кубической формой фаз в разрезе плоскостью (ζ_1, ζ_3)

Обозначим длины сторон каждого куба как показано на рисунке 1.5, $S_{iw} = \sqrt[3]{\varphi_{iw}}$. Рассечем кубическую ячейку периодичности плоскостями $\zeta_2 = const$, совпадающими с границами раздела фаз и параллельными координатной плоскости (ζ_1, ζ_3) , тем самым получим 5 слоев. Тогда каждый такой j -й слой содержит j фаз. Далее, слои 2 – 5 разрежем плоскостями параллельными координатной плоскости (ζ_2, ζ_3) , получим объемы, показанные на рисунке 1.6.

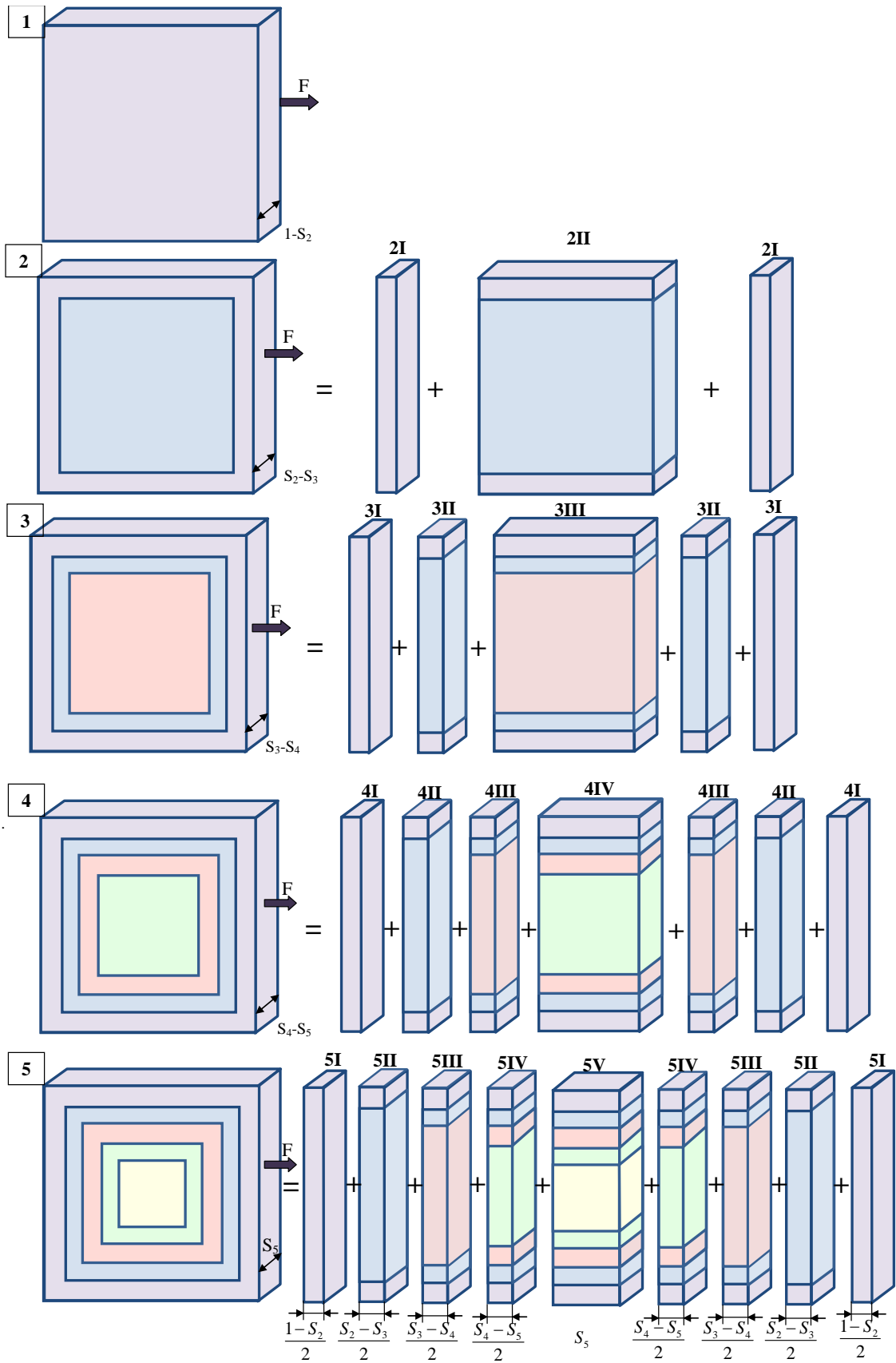


Рисунок 1.6 – Представление ЯП с кубической формой фаз по слоям

Очевидно, что слои 1 – 4 располагаются по обе стороны от центра ЯП, тогда при расчете толщину этих слоев можно удвоить.

Введем обозначение: $A_i = \frac{a_i}{A_0}$, где A_i – относительная площадь боковой поверхности, занятая фазой $i(w)$, a_i – площадь боковой поверхности, занятая фазой $i(w)$, A_0 – площадь боковой поверхности к которой приложена сила, α_i – тепловое расширение фазы $i(w)$. Фазы будем считать изотропными, E_i – модуль упругости фазы $i(w)$, $i = \overline{1,5}$. Далее индекс (w) для простоты опустим.

Запишем выражение для модуля упругости и теплового расширения для 5V -го слоя используя формулы (1.9), (1.10):

$$E_{5V} = \sum_i E_i A_i, \quad \alpha_{5V} = \frac{1}{E_{5V}} \sum_i E_i A_i \alpha_i, \quad i = \overline{1,5}. \quad (1.13)$$

Для объема 5V-го слоя справедливы следующие относительные значения площадей боковых поверхностей для соответствующих фаз:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \cdot S_5, \quad A_1 = \frac{(1-S_2) \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = (1-S_2), \quad A_2 = \frac{(S_2-S_3) \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = (S_2-S_3), \\ A_3 &= \frac{(S_3-S_4) \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = (S_3-S_4), \quad A_4 = \frac{(S_4-S_5) \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = (S_4-S_5), \quad A_5 = \frac{S_5 \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = S_5. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда, подставляя значения для площадей (1.14) в (1.13), получим:

$$\begin{aligned} E_{5V} &= E_1(1-S_2) + E_2(S_2-S_3) + E_3(S_3-S_4) + E_4(S_4-S_5) + E_5 S_5 \\ \alpha_{5V} &= \frac{1}{E_{5V}} \left[E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2-S_3)\alpha_2 + E_3(S_3-S_4)\alpha_3 + E_4(S_4-S_5)\alpha_4 + E_5 S_5 \alpha_5 \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для остальных объемов можно выписать аналогичные соотношения.

Поскольку в 5IV-м объеме отсутствует 5-я фаза, то $A_4 = \frac{S_4 \cdot S_5}{1 \cdot S_5} = S_4$, и

тогда выражения для модуля упругости и коэффициентов теплового расширения для объема 5IV примут вид:

$$\begin{aligned} E_{5IV} &= E_1(1-S_2) + E_2(S_2-S_3) + E_3(S_3-S_4) + E_4 S_4, \\ \alpha_{5IV} &= \frac{1}{E_{5IV}} \left[E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2-S_3)\alpha_2 + E_3(S_3-S_4)\alpha_3 + E_4 S_4 \alpha_4 \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В 5Ш-м объеме отсутствуют 5-я и 1-я фазы, поэтому $A_3 = S_3$, и справедливо:

$$\begin{aligned} E_{5III} &= E_1(1-S_2) + E_2(S_2-S_3) + E_3S_3, \\ \alpha_{5III} &= \frac{1}{E_{5III}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2-S_3)\alpha_2 + E_3S_3\alpha_3]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Продолжая рассуждения, получим:

$$E_{5II} = E_1(1-S_2) + E_2S_2, \quad \alpha_{5II} = \frac{1}{E_{5II}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2S_2\alpha_2], \quad (1.18)$$

$$E_{5I} = E_1, \quad \alpha_{5I} = \frac{1}{E_{5I}} [E_1\alpha_1] = \alpha_1. \quad (1.19)$$

Проделаем аналогичные выкладки для 4IV-го объема:

$$E_{4IV} = \sum_i E_i A_i, \quad \alpha_{4IV} = \frac{1}{E_{4IV}} \sum_i E_i A_i \alpha_i, \quad i = \overline{1,4}. \quad (1.20)$$

Для объема 4IV изменятся значения относительных площадей A_i , поскольку толщина отсеченного слоя будет $(S_4 - S_5)$, поэтому $A_0 = 1 \cdot (S_4 - S_5)$, и тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1-S_2) \cdot (S_4 - S_5)}{1 \cdot (S_4 - S_5)} = (1-S_2), \quad A_2 = \frac{(S_2 - S_3) \cdot (S_4 - S_5)}{1 \cdot (S_4 - S_5)} = (S_2 - S_3), \\ A_3 &= \frac{(S_3 - S_4) \cdot (S_4 - S_5)}{1 \cdot (S_4 - S_5)} = (S_3 - S_4), \quad A_4 = \frac{(S_4 - S_5) \cdot S_4}{1 \cdot (S_4 - S_5)} = S_4. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Тогда, подставляя значения относительных площадей (1.21) в формулы (1.20), получим:

$$\begin{aligned} E_{4IV} &= E_1(1-S_2) + E_2(S_2-S_3) + E_3(S_3-S_4) + E_4S_4, \\ \alpha_{4IV} &= \frac{1}{E_{4IV}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2-S_3)\alpha_2 + E_3(S_3-S_4)\alpha_3 + E_4S_4\alpha_4]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для объема 4III справедливо:

$$\begin{aligned} E_{4III} &= E_1(1-S_2) + E_2(S_2-S_3) + E_3S_3, \\ \alpha_{4III} &= \frac{1}{E_{4III}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2-S_3)\alpha_2 + E_3S_3\alpha_3]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Для объемов 4II и 4I получим:

$$E_{4II} = E_1(1-S_2) + E_2S_2, \quad \alpha_{4II} = \frac{1}{E_{4II}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2S_2\alpha_2], \quad (1.24)$$

$$E_{4I} = E_1, \quad \alpha_{4I} = \frac{1}{E_{4I}} [E_1\alpha_1] = \alpha_1. \quad (1.25)$$

Рассмотрев каждый объем слоя 3 по аналогии, получим:

$$E_{3III} = E_1(1-S_2) + E_2(S_2 - S_3) + E_3S_3, \quad (1.26)$$

$$\alpha_{3III} = \frac{1}{E_{3III}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2(S_2 - S_3)\alpha_2 + E_3S_3\alpha_3],$$

$$E_{3II} = E_1(1-S_2) + E_2S_2,$$

$$\alpha_{3II} = \frac{1}{E_{3II}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2S_2\alpha_2], \quad (1.27)$$

$$E_{3I} = E_1, \quad \alpha_{3I} = \frac{1}{E_{3I}} [E_1\alpha_1] = \alpha_1. \quad (1.28)$$

Для объемов слоя 2, справедливы соотношения:

$$E_{2II} = E_1(1-S_2) + E_2S_2, \quad \alpha_{2II} = \frac{1}{E_{2II}} [E_1(1-S_2)\alpha_1 + E_2S_2\alpha_2], \quad (1.29)$$

$$E_{2I} = E_1, \quad \alpha_{2I} = \frac{1}{E_{2I}} [E_1\alpha_1] = \alpha_1, \quad (1.30)$$

$$E_{1I} = E_1, \quad \alpha_{1I} = \frac{1}{E_{1I}} [E_1\alpha_1] = \alpha_1. \quad (1.31)$$

Далее по полученным соотношениям (1.16) – (1.31) для горизонтальных слоев по принципу сложения слоев, используя формулы (1.11), (1.12), получим для 5-го слоя, учитывая, что теперь слои уложены перпендикулярно действию силы (в формулах обозначим {5}):

$$E_{\{5\}} = \frac{1}{\sum_j l_{5j} \frac{1}{E_{5j}}}, \quad \alpha_5 = \sum_i l_{5j} \alpha_{5j}, \quad j = I, II, III, IV, V, \quad (1.32)$$

здесь обозначены l_i – относительные толщины каждого, рассматриваемого в этом случае, вертикального слоя.

Тогда для 5-го слоя (в формулах обозначим слой {5}) модуль упругости и коэффициент теплового расширения будет иметь вид:

$$E_{\{5\}} = \frac{1}{\frac{(1-S_2)}{E_{5I}} + \frac{(S_2-S_3)}{E_{5II}} + \frac{(S_3-S_4)}{E_{5III}} + \frac{(S_4-S_5)}{E_{5IV}} + \frac{S_5}{E_{5V}}}, \quad (1.33)$$

$$\alpha_{\{5\}} = (1-S_2)\alpha_{5I} + (S_2-S_3)\alpha_{5II} + (S_3-S_4)\alpha_{5III} + (S_4-S_5)\alpha_{5IV} + S_5\alpha_{5V}. \quad (1.34)$$

Аналогично, для 4-го слоя справедливы соотношения:

$$E_{\{4\}} = \frac{1}{\sum_i l_{4j} \frac{1}{E_{4j}}}, \quad \alpha_{\{4\}} = \sum_j l_{4j} \alpha_{4j}, \quad j = I, II, III, IV. \quad (1.35)$$

Тогда, раскрывая сумму, получим:

$$E_{\{4\}} = \frac{1}{\frac{(1-S_2)}{E_{4I}} + \frac{(S_2-S_3)}{E_{4II}} + \frac{(S_3-S_4)}{E_{4III}} + \frac{S_4}{E_{4IV}}}, \quad (1.36)$$

$$\alpha_{\{4\}} = (1-S_2)\alpha_{4I} + (S_2-S_3)\alpha_{4II} + (S_3-S_4)\alpha_{4III} + S_4\alpha_{4IV}.$$

Аналогично, запишем выражения для 3-го слоя:

$$E_{\{3\}} = \frac{1}{\frac{(1-S_2)}{E_{3I}} + \frac{(S_2-S_3)}{E_{3II}} + \frac{S_3}{E_{3III}}}, \quad (1.37)$$

$$\alpha_{\{3\}} = (1-S_2)\alpha_{3I} + (S_2-S_3)\alpha_{3II} + S_3\alpha_{3III}.$$

Для 2-го и 1-го слоя получим:

$$E_{\{2\}} = \frac{1}{\frac{(1-S_2)}{E_{2I}} + \frac{S_2}{E_{2II}}}, \quad \alpha_{\{2\}} = (1-S_2)\alpha_{2I} + S_2\alpha_{2II}, \quad (1.38)$$

$$E_{\{1\}} = \frac{1}{\frac{1}{E_{1I}}} = E_{1I} = E_1, \quad \alpha_{\{1\}} = \alpha_1. \quad (1.39)$$

Запишем выражение для эффективного модуля упругости $E_{(b)}$ и эффективного коэффициента теплового расширения $\alpha_{(b)}$ для связующего (b), используя вновь сложение по слоям по формулам (1.9) и (1.10):

$$E_{(b)} = E_{\{1\}}(1-S_2) + E_{\{2\}}(S_2-S_3) + E_{\{3\}}(S_3-S_4) + E_{\{4\}}(S_4-S_5) + E_{\{5\}}S_5, \quad (1.40)$$

$$\alpha_{(b)} = \frac{1}{E_{(b)}} \left(E_{\{1\}}(1-S_2)\alpha_{\{1\}} + E_{\{2\}}(S_2-S_3)\alpha_{\{2\}} + E_{\{3\}}(S_3-S_4)\alpha_{\{3\}} + E_{\{4\}}(S_4-S_5)\alpha_{\{4\}} + E_{\{5\}}S_5\alpha_{\{5\}} \right) \quad (1.41)$$

Выражения для эффективного модуля упругости $E_{(a)}$ эффективного коэффициента теплового расширения $\alpha_{(a)}$ для связующего цепочки превращений (а) будут выглядеть аналогично формулам (1.40) и (1.41).

В выражениях (1.40) и (1.41) вспомогательные $E_{\{k\}}$, $\alpha_{\{k\}}$, $k = \overline{1,5}$ вычисляются по формулам (1.33) – (1.39) соответственно.

1.6 Модель изменения упругих свойств волокон на 3-м уровне при нагреве

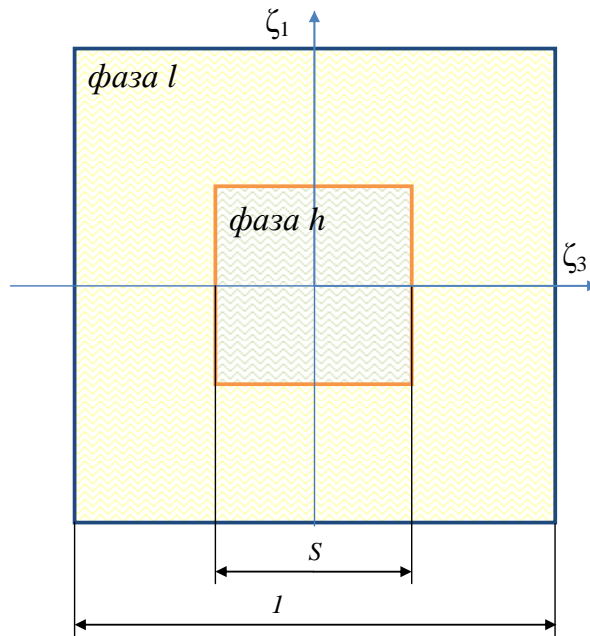


Рис. 1.7 Модель ячейки периодичности волокон с кубической формой фаз.

Изменение модуля упругости для разных типов волокон при нагреве определяется двумя факторами:

- изменением упругих свойств волокна в аморфном состоянии при относительно низких температурах;
- физико-химическими процессами: кристаллизации (например, для стеклянных волокон в инертной среде), окисления (для угольных, борных, органических волокон в инертной среде) или пиролиза (для органических волокон в инертной среде) при высоких температурах.

Первый фактор вызывает обратимое изменение модуля упругости E_f волокон, второй – приводит к изменениям, необратимым после охлаждения [21, 29].

Используя модель ячейки периодичности V_ζ с кубической формой фаз [29], можно получить выражение эффективного для этого уровня модуля упругости и коэффициента теплового расширения волокна. Фазы считаем изотропными. На рисунке 1.7 представлена в разрезе плоскостью (ζ_1, ζ_3) ячейка

периодичности с кубическими фазами – “аморфной” и “кристаллической”. S – линейный размер “аморфной” фазы (длина стороны куба), вся ячейка имеет единичный объем. В любой момент времени $S = \sqrt[3]{\varphi_h}$. Пусть E_h – модуль упругости “аморфной” фазы волокна, а E_l – модуль упругости “кристаллической” фазы волокна, α_l , α_h – коэффициенты теплового расширения “аморфной” и “кристаллической” фаз волокна. Тогда модуль упругости волокна E_{f3} и коэффициент теплового расширения α_{f3} на 3-м структурном уровне, записанные с помощью вспомогательных переменных с волной, имеют вид (1.44), (1.45).

После применения формул (1.9) – (1.12), получим:

$$\tilde{E}_1 = E_l, \quad \tilde{E}_2 = \left(\frac{1-S}{E_l} + \frac{S}{E_l(1-S) + E_h S} \right)^{-1},$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_l, \quad \tilde{\alpha}_2 = (1-S)\alpha_l + S \frac{(1-S)E_l\alpha_l + E_h S\alpha_h}{(1-S)E_l + SE_h},$$

тогда

$$E_{f3} = \tilde{E}_1(1-S) + \tilde{E}_2 S, \quad (1.42)$$

$$\alpha_{f3} = \frac{1}{E_{f3}} (\tilde{E}_1 \tilde{\alpha}_1 (1-S) + \tilde{E}_2 \tilde{\alpha}_2 S). \quad (1.43)$$

1.7 Модель изменения упругих свойств связующего на 3-м уровне при нагреве

Согласно предложенной модели на рисунке 1.1 на 3-м структурном уровне для связующего в рамках ячейки периодичности осуществляется соединение двух цепочек фазовых превращений под условными названиями (а) и (б). Аналогично формулам (1.42), (1.43), запишем соотношения для поиска модуля упругости и коэффициента теплового расширения по известным характеристикам, найденным с предыдущего структурного уровня по формулам (1.40) и (1.41).

Пусть

$$\check{E}_1 = E_{(a)}, \quad \check{E}_2 = \left(\frac{1-S_b}{E_{(a)}} + \frac{S_b}{E_{(a)}(1-S_b) + E_{(b)}S_b} \right)^{-1},$$

$$\check{\alpha}_1 = \alpha_{(a)}, \quad \check{\alpha}_2 = (1-S_b)\alpha_{(a)} + S_b \frac{(1-S_b)E_{(a)}\alpha_{(a)} + E_{(b)}S_b\alpha_{(b)}}{(1-S_b)E_{(a)} + S_bE_{(b)}},$$

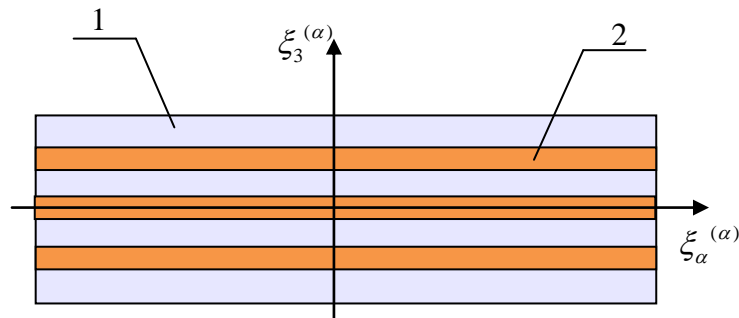
и тогда

$$E_{m3} = \check{E}_1(1-S_b) + \check{E}_2S_b, \quad (1.44)$$

$$\alpha_{m3} = \frac{1}{E_{m3}} (\check{E}_1\check{\alpha}_1(1-S_b) + \check{E}_2\check{\alpha}_2S_b). \quad (1.45)$$

1.8 Модель для расчета упругих характеристик 1D композита на 2-м уровне

Армирующие волокна в тканевом композиционном материале ориентированы по двум взаимно ортогональным направлениям ξ_1 и ξ_2 . На практике в композитах эти ортогональные нити состоят из большого числа моноволокон, окруженных связующим. На рисунке 1.8 изображен фрагмент такой нити, так называемый 1D элемент.



1 – связующее, 2 – моноволокно

Рисунок 1.8 – Модель геометрии 1D элемента

Такой специфический тип материала будем считать трансверсально-изотропным, несмотря на то, что моноволокна могут быть изотропными, у 1D элемента будем разделять продольный и поперечный модули упругости. Всего у 1D элемента 5 независимых упругих констант, для их вычисления используем смесевые формулы [29]:

$$E_L = E_{f3}\varphi_{f2} + E_{m2}(1 - \varphi_{f2}), \quad E_T = \left(\frac{\varphi_{f2}}{E_{f3}} + \frac{1 - \varphi_{f2}}{E_{m2}} \right)^{-1}, \quad (1.46)$$

$$\nu_L = \nu_{f2}\varphi_{f2} + \nu_{m2}(1 - \varphi_{f2}), \quad \nu_T = \nu_{m2}, \quad (1.47)$$

$$G_L = \left(\frac{2\varphi_{f2}(1 + \nu_{f2})}{E_{f3}} + \frac{2(1 - \varphi_{f2})(1 + \nu_{m2})}{E_{m2}} \right)^{-1}, \quad (1.48)$$

где E_L – продольный модуль упругости нити в направлении ее укладки, E_T – поперечный модуль упругости нити, ν_L – продольный коэффициент Пуассона, ν_T – поперечный коэффициент Пуассона нити, G_L – продольный модуль сдвига, $G_T = \frac{E_T}{2(1 - \nu_T)}$ – поперечный модуль сдвига нити, E_{f3} – модули упругости моноволокон, рассчитанный с учетом фазовых превращений на 3-м структурном уровне, ν_{f2} – коэффициент Пуассона моноволокон, E_{m2} – модуль упругости матрицы, рассчитанный на 2-м структурном уровне (если матрица для создания нити взята со 2-го уровня), ν_{m2} – модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, φ_{f2} – относительная объемная концентрация моноволокон в 1D элементе. Вместо смесевых формул (1.46) – (1.48) можно использовать более точные формулы расчета эффективных упругих характеристик однонаправленных композитов, основанные на численном решении таких же локальных задач на ЯП низшего структурного уровня. В данной работе в целях создания более эффективного вычислительного алгоритма, были использованы более простые смесевые формулы.

1.9 Методика расчета эффективных упругих характеристик тканевого композита на 1-м структурном уровне

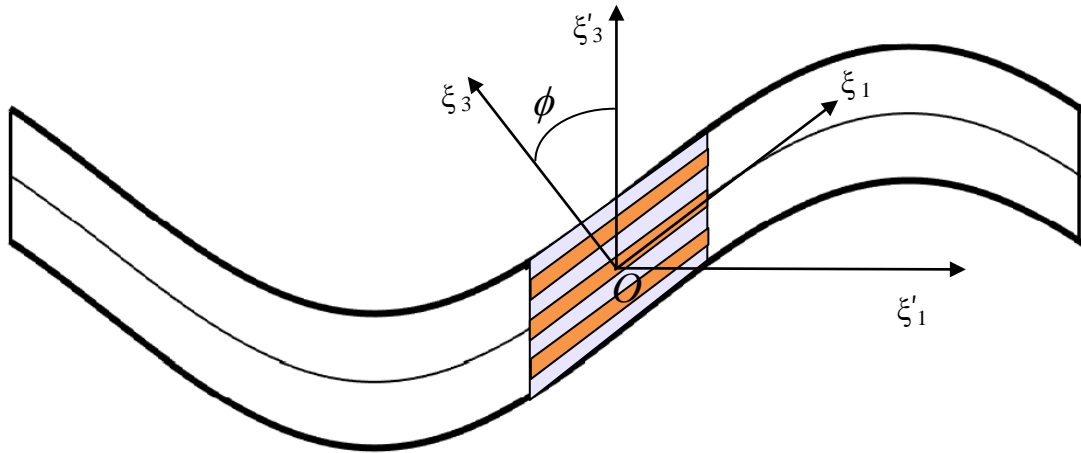


Рисунок 1.9 – Модель изогнутой нити в тканевом композите

Для вычисления компонент тензоров модулей упругости нитей $C_{ijkl}^{(\alpha)} = C_{ijkl}(\xi_s)$, $\xi_s \in \tilde{V}_{\xi\alpha}$ ($\tilde{V}_{\xi\alpha}$ – область в ЯП, занятая α -й нитью в системе координат $O\xi_i$, связанной с ЯП) воспользуемся моделью [30], в которой каждая нить (криволинейно-трансверсально изотропный материал) рассматривается как система большого числа элементарных нитевых сегментов (ЭНС) (рисунок 1.9), на которые α -ю нить делят плоскости, ортогональные к оси $O\xi_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Введем новую декартову прямоугольную систему координат $O^{(\alpha)}\xi_s^{(\alpha)}$ – назовем ее "собственной системой координат ЭНС", точка начала $O^{(\alpha)}$, которая принадлежит линии центров тяжести нити, а ось $O^{(\alpha)}\xi_\alpha^{(\alpha)}$ повернута по отношению к оси $O\xi_\alpha$ единой для ЯП локальной системы координат на угол $\phi_\alpha(\xi_\alpha)$, меняющийся вдоль одной координаты ξ_α , т.е поворот собственной системы координат $O^{(\alpha)}\xi_s^{(\alpha)}$ осуществляется вокруг оси $O\xi_\beta$, $\beta \neq \alpha$. В собственной системе координат $O^{(\alpha)}\xi_s^{(\alpha)}$ каждый ЭНС будем считать трансверсально-изотропным 1D элементом, тогда его упругие характеристики в $O^{(\alpha)}\xi_s^{(\alpha)}$ вычисляются по формулам (1.46) – (1.48).

1.10 Постановка задачи упругости для определения эффективных характеристик композита на 2-м и 1-м уровнях

Согласно принятой модели на рисунке 1.1 композиционный материал на 1-м структурном уровне имеет периодическую структуру и оформлена стабильная геометрическая микроструктура фаз искусственного происхождения. Геометрия ячейки периодичности матрицы композиционного материала также считается известной (рисунок 1.10). Относительные концентрации волокна и матрицы в композите постоянны: $\varphi_f + \varphi_m = 1$.

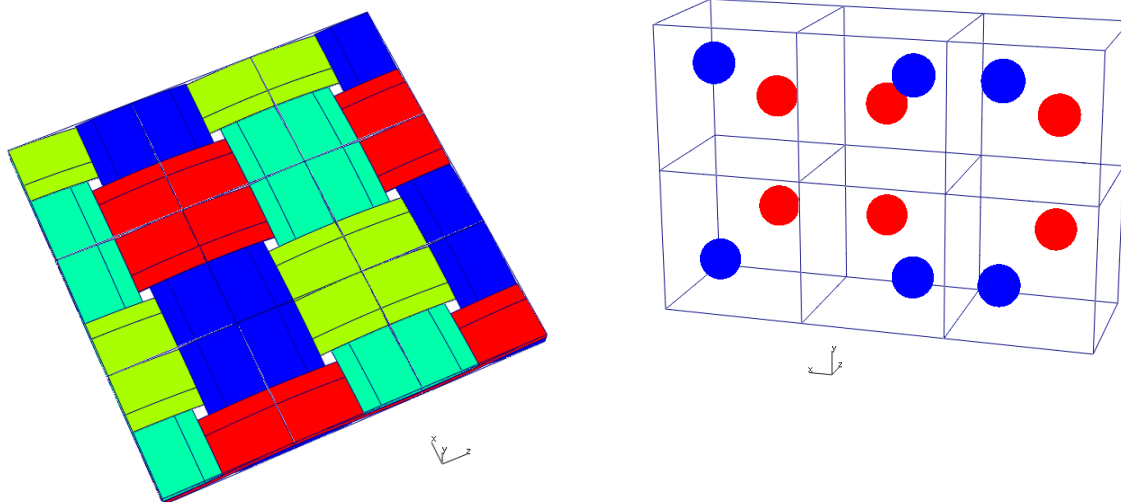


Рисунок 1.10 – Композиционные материалы с периодической структурой

В общем случае ячейка периодичности V_ξ композита состоит из N компонентов $V_{\xi\alpha}$, $\alpha = \overline{1, N}$. Отнесем характерный размер ячейки к характерному размеру композиционного материала, тогда можно обозначить за малый параметр $k = \frac{l}{L} \ll 1$ и введем безразмерные локальные ξ_k и глобальные x_k . Положим, что компонент под номером $\alpha = N$ это матрица (связующее), а остальные – наполнитель (частицы в матрице КМ на 2-м уровне, волокна в КМ 1-го уровня).

Для композита рассматривается система уравнений линейной теории упругости, включающая уравнения равновесия, определяющие соотношения

теории упругости и соотношения, связывающие деформации и компоненты тензора малых деформаций ε_{kl} . В безразмерном виде такая система запишется следующем образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \\ \sigma_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

В (1.49) компоненты тензора напряжений σ_{ij} и компоненты тензора модулей упругости A_{ijkl} обезразмерены к характерному значению σ_0 . Обезразмерены компоненты вектора перемещений u_j (к характерному размеру L). Используется правило суммирования по совпадающим индексам.

Поскольку в композите присутствуют границы раздела различных компонентов композита, потребуем выполнения условий идеального контакта: $[\sigma_{ij}]n_j = 0$, $[u_i] = 0$, n_j – компоненты вектора нормали к поверхности раздела, при переходе через границу раздела компонентов обозначен скачок функции $[u_i]$. Полагаем заданными перемещения u_j^e или вектор поверхностных сил S_i^e для внешней границы Σ всего композита: $\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_1} = S_i^e$, $u_j|_{\Sigma_2} = u_j^e$.

Используя локальные координаты можно записать условие периодичности модуля упругости $A_{ijkl}(\xi_m) = A_{ijkl}(\xi_m + a_m)$, где $a_m = l_m/l$ – безразмерные длины сторон ЯП. В тоже время функции перемещений, напряжений, деформаций для данного метода обычно считают квазипериодическими.

1.11 Метод гомогенизации для определения эффективных характеристик композита на 2-м и 1-м уровнях

Решения такой задачи по методу Бахвалова-Победри [9] ищется в виде асимптотических разложений перемещений:

$$u_i = u_i^{(0)}(x_k) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n u_i^{(n)}(x_k, \xi_j). \quad (1.50)$$

Далее, подстановкой (1.50) в соотношение Коши, определяющие соотношения из (1.49), получаем асимптотические разложения для деформаций и напряжений, с помощью которых делаем асимптотическое разложение уравнений равновесия:

$$\frac{1}{k} \sigma_{ij/j}^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} k^{(n)} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(n+1)}}{\partial \xi_j} \right) = 0. \quad (1.51)$$

Приравнивая к нулю члены при одинаковых степенях малого параметра k , получаем рекуррентную систему локальных уравнений равновесия, тогда для нулевого приближения можно записать следующую систему с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij/j}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_{ij}^{(0)} &= A_{ijkl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{(0)}, \\ \varepsilon_{kl}^{(0)} &= \bar{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial \xi_k} \right), \\ [u_i^{(1)}] &= 0, \quad [\sigma_{ij}^{(0)}] n_j = 0, \\ [\sigma_{ij}^{(0)}] n_j &= 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \\ \langle u_i^{(1)} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где через $\bar{\varepsilon}_{kl}$ обозначены средние деформации композита:

$$2\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}. \quad (1.53)$$

Двойными скобками обозначена совокупность условий периодичности. Используя технику осреднения, в [18, 19] сформулированы локальные задачи на «ячейке периодичности» для области каждого компонента α . Поскольку задача интегро-дифференциальная с условиями периодичности, то ее решение можно искать в виде суммы:

$$u_i^\alpha = \sum_{p,q=1}^3 u_{i(pq)}^\alpha, \quad (1.54)$$

где функции $u_{i(pq)}^\alpha$ имеют следующий вид:

$$u_{i(pq)}^\alpha = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} (\delta_{ip} \xi_q + \delta_{iq} \xi_p) + U_{i(pq)}^\alpha(\xi_m), \quad (1.55)$$

где δ_{ip} - символ Кронекера.

Функции $U_{i(pq)}^\alpha$ – псевдоперемещения, являющиеся решениями граничных задач линейной теории упругости традиционного типа и удовлетворяют тем же самым условиям идеального контакта на границах раздела компонентов, условиям нормировки, но уже не являются периодическими функциями.

Функции $U_{i(pq)}^\alpha$ будут являться решением задач на «ячейке периодичности», сформулированных для псевдоперемещений [18].

1.12 Формулировка задач на 1/8 «ячейки периодичности»

В целях ухода от интегральных условий задачи в псевдоперемещениях на целой ячейке сведем к задачам на одной восьмой «ячейки периодичности». Предусмотрим в «ячейке периодичности» геометрическую симметрию расположения компонентов композита (областей $V_{\xi\alpha}$) относительно трехкоординатных плоскостей ($\xi_i = 0$), кроме того, предположим, что у геометрически симметричных компонент одинаковые упругие характеристики. Тогда задаче сформулированную в псевдоперемещениях можно поставить в соответствие задачу на 1/8 «ячейки периодичности» в области $\tilde{V}_\xi : \tilde{V}_\xi = \tilde{V}_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij(pq)/j}^\alpha &= 0, \text{ в } \tilde{V}_\xi \\
\sigma_{ij(pq)}^\alpha &= A_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{kl(pq)}^\alpha, \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s \\
\varepsilon_{ij(pq)}^\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{i(pq)}^\alpha}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U_{j(pq)}^\alpha}{\partial \xi_i} \right), \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\
\frac{\partial U_{i(pq)}^\alpha}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial U_{i(pq)}^N}{\partial \xi_j}, \\
(\sigma_{ij(pq)}^\alpha - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j &= 0, \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}
\end{aligned} \tag{1.56}$$

В (1.56) введена $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap \tilde{V}_\xi$ – поверхность контакта различных компонент внутри области \tilde{V}_ξ . Под $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$ будем иметь ввиду координатные плоскости, а $\Sigma'_s = \left\{ \xi_s = \frac{a_s}{2} \right\}$, $s=1,2,3$ будет обозначать торцевые поверхности ячейки.

Система (1.56) дополняется условиями для торцевых поверхностей и для плоскостей симметрии, которые имеют разный вид для разных p и q .

Для функции $U_{i(pq)}^\alpha(\xi_j)$, $\xi_j \in \tilde{V}_\xi$ должны быть выполнены ГУ на торцевых поверхностях Σ'_s :

$$\begin{aligned}
U_{i(pq)}^\alpha &= \frac{a_p}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, S_{j(pq)i}^\alpha = 0, \\
S_{k(pq)i}^\alpha &= 0, \xi_m \in \Sigma'_i, i \neq j \neq k \neq i, p = q \\
U_{i(pq)}^\alpha &= \frac{a_p}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, S_{j(pq)j}^\alpha = 0, \\
U_{k(pq)}^\alpha &= 0, \xi_m \in \Sigma'_j, i \neq j \neq k \neq i, p \neq q.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

На координатных плоскостях Σ_s функция $U_{i(pq)}^\alpha(\xi_j)$, $\xi_j \in \tilde{V}_\xi$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}
U_{i(pq)}^\alpha &= 0, S_{j(pq)i}^\alpha = 0, \\
S_{k(pq)i}^\alpha &= 0, \xi_m \in \Sigma_s, i \neq j \neq k \neq i, p = q
\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0, S_{j(pq)j}^\alpha = 0,$$

$$U_{k(pq)}^\alpha = 0, \xi_m \in \Sigma_S, \quad i \neq j \neq k \neq i, p \neq q.$$

Векторы поверхностных сил обозначим как $S_{k(pq)}^\alpha$, т.е.:

$$S_{i(pq)j}^\alpha = S_{i(pq)}^\alpha \Big|_{\Sigma_j} = \sum_{l=1}^3 (\sigma_{il(pq)}^\alpha n_l) \Big|_{\Sigma_j}. \quad (1.59)$$

Представив вектор поверхностных сил через псевдоперемещения граничные условия (1.57), (1.58), можно записать через псевдоперемещения и их производные. Задачи (1.56) на $1/8$ «ячейки периодичности» с граничными условиями (1.57), (1.58) обычно обозначают задачами L_{pq} .

1.13 Эффективные определяющие соотношения композиционного материала на 1-м и 2-м уровне

После решения серии задач L_{pq} для всех значений (pq) и нахождения псевдоперемещений $U_{i(pq)}^\alpha$ и псевдонапряжений $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ для каждой компоненты композита, проинтегрировав псевдонапряжения по областям, в которых расположены компоненты, можно вычислить среднее напряжение в всем композиционном материале:

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \sum_{p,q=1}^3 \bar{\sigma}_{ij(pq)}, \quad (1.60)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma_{ij(pq)}^\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V^{(\alpha)}} \sigma_{ij(pq)}^\alpha dV. \quad (1.61)$$

Поскольку задачи L_{pq} линейные, то их решения $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ (псевдонапряжения) зависят линейным образом от исходных данных, т.е. от функции $\bar{\varepsilon}_{pq}$. В таком случае будут существовать тензоры 4-го ранга $A_{ijpq}^{(0)}(\xi_l)$, которые задают связь $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ и $\bar{\varepsilon}_{pq}$:

$$\sigma^{\alpha}_{ij(pq)} = A_{ijpq}^{(0)}(\xi_l) \bar{\varepsilon}_{pq}, \quad (1.62)$$

здесь по индексам p и q нет суммы.

Если псевдонапряжения $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ найдены, то компоненты тензоров $A_{ijpq}^{(0)}(\xi_l)$ вычисляются из соотношения:

$$A_{ijpq}^{(0)}(\xi_l) = \sigma^{\alpha}_{ij(pq)} / \bar{\varepsilon}_{pq}, \quad (1.63)$$

здесь по индексам p и q нет суммы.

Учитывая (1.62) в (1.61), запишем выражение, выражающее связь средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle$ и средних деформаций композиционного материала $\bar{\varepsilon}_{pq}$:

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \bar{A}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad (1.64)$$

$$\bar{A}_{ijpq} = \langle A_{ijpq}^{(0)} \rangle, \quad (1.65)$$

где \bar{A}_{ijpq} – тензор эффективных модулей упругости композиционного материала.

Запишем итоговую формулу для определения эффективных модулей упругости композиционного материала, для этого (1.63) подставим в (1.65):

$$\bar{A}_{ijpq} = \bar{\sigma}_{ij(pq)} / \bar{\varepsilon}_{pq}, \quad (1.66)$$

здесь по индексам p и q нет суммы.

1.14 Тензоры концентрации напряжений в компонентах композита

Связь напряжений в компонентах композиционного материала $\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_l)$ (микронапряжения) и осредненных напряжений $\langle \sigma_{kl}^{(0)} \rangle$ во всем композите описывает тензор концентраций напряжений $B_{ijmn}(\xi_l)$, найдем его выражение.

Поскольку

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = B_{ijkl}(\xi_m) \langle \sigma_{kl}^{(0)} \rangle, \quad (1.67)$$

то, используя соотношение (1.62), получим

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = \sigma_{ij}^\alpha(\xi_m) = \sum \sigma_{ij(pq)}^\alpha = \sum A_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\varepsilon}_{pq}. \quad (1.68)$$

Подстановка в (1.68) формулы вида $\bar{\varepsilon}_{pq} = \sum_{p,q} \bar{\Pi}_{ijpq} \bar{\sigma}_{pq}$, где $\bar{\Pi}_{ijpq}$ –

компоненты тензора упругих податливостей, дает

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = \sum A_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\varepsilon}_{pq} = \sum_{p,q,s,n} A_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\Pi}_{pqsn} \langle \sigma_{sn}^{(0)} \rangle = B_{ijsn}(\xi_m) \langle \sigma_{sn}^{(0)} \rangle, \quad (1.69)$$

отсюда для тензоров концентрации напряжений получим

$$B_{ijsn}(\xi_m) = \sum_{p,q,s,n} A_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\Pi}_{pqsn}. \quad (1.70)$$

Таким образом, тензор $B_{ijsn}(\xi_m)$ можно найти по напряжениям $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ из соотношений (1.63) и (1.70).

1.15 Метод конечных элементов для решений задач L_{pq} . Вариационная формулировка локальной задачи L_{pq}

Для задачи упругости вариационная формулировка задачи L_{pq} (1.56), (1.58) записывается для любого конечного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ [37, 46], для этого рассматривают произвольное кинематически допустимое поле $U_{i(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s)$, зависящее от вновь введенных переменных q_s , $s = \overline{1, z}$, при этом оно удовлетворяет только части граничных (1.57), (1.58):

$$\begin{aligned} U_{i(pp)}^\alpha &= \frac{a_p}{2} \bar{\varepsilon}_{pp} \delta_{ip}, \xi_m \in \Sigma_i \\ U_{i(pq)}^\alpha &= \frac{a_p}{4} \bar{\varepsilon}_{ip} \delta_{ip}, \xi_m \in \Sigma_j, i \neq j \neq k \neq i, p \neq q \\ U_{i(pp)}^\alpha &= 0, \xi_m \in \Sigma'_i, \\ U_{k(pq)}^\alpha &= 0, \xi_m \in \Sigma_j, i \neq j \neq k \neq i, p \neq q \\ U_{i(pq)}^\alpha &= 0, U_{k(pq)}^\alpha = 0, \xi_m \in \Sigma'_j, i \neq j \neq k \neq i, p \neq q \end{aligned} \quad (1.71)$$

Введем вариацию кинематически допустимого поля, например, как дифференциал поля по новым переменным

$$\delta U_{i(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s) = \sum_{t=1}^z \frac{\partial U_{i(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s)}{\partial q_t} dq_t.$$

Тогда можно ввести лагранжиан от кинематически допустимого поля:

$$L(q_s) = W + H_e,$$

$$W(q_s) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}_\xi} \sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s) \varepsilon_{ij(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s) dV,$$

$$H_e = - \sum_{\gamma=1}^3 \int_{\Sigma_\gamma} \left(U_{\gamma(pq)}^\alpha S_{\gamma(pq)\gamma}^\alpha (1 - \delta_{pq}) + U_{\beta(pq)}^\alpha S_{\beta(pq)\gamma}^\alpha + U_{\mu(pq)}^\alpha S_{\mu(pq)\gamma}^\alpha \delta_{pq} \right) d\Sigma,$$

$$\beta \neq \gamma \neq \mu, \quad \beta, \gamma, \mu = \overline{1, 3}.$$

здесь обозначены: работа поверхностных сил H_e (работа зависит от задачи L_{pq} , из-за ГУ (1.57) и (1.58) она нулевая $H_e = 0$); W – потенциальная энергия; $\sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s)$ и $\varepsilon_{ij(pq)}^\alpha(\xi_m, q_s)$ – кинематически допустимые поля напряжений и деформаций, определяемые по аналогичным правилам, что и псевдонапряжения и псевдодеформации, т.е. решения задач (1.56) – (1.58).

Вариационное уравнение

$$\delta L = 0 \tag{1.72}$$

можно записать в следующем виде:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma, \tag{1.73}$$

где введены обозначения векторов кинематически допустимых полей псевдонапряжений σ , псевдоперемещений U , псевдодеформаций ε и поверхностных сил S :

$$U = \left(U_{1(pq)}^\alpha, U_{2(pq)}^\alpha, U_{3(pq)}^\alpha \right)^T,$$

$$\sigma = \left(\sigma_{11(pq)}^\alpha, \sigma_{22(pq)}^\alpha, \sigma_{33(pq)}^\alpha, \sigma_{12(pq)}^\alpha, \sigma_{13(pq)}^\alpha, \sigma_{23(pq)}^\alpha \right)^T, \tag{1.74}$$

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_{11(pq)}^\alpha, \varepsilon_{22(pq)}^\alpha, \varepsilon_{33(pq)}^\alpha, 2\varepsilon_{12(pq)}^\alpha, 2\varepsilon_{13(pq)}^\alpha, 2\varepsilon_{23(pq)}^\alpha \right)^T,$$

$$S = \left(S_{1(pq)1}^\alpha, S_{2(pq)2}^\alpha, S_{3(pq)3}^\alpha \right)^T (1 - \delta_{pq}) + \\ + \left(S_{1(pq)3}^\alpha + S_{2(pq)3}^\alpha, S_{1(pq)2}^\alpha + S_{2(pq)3}^\alpha, S_{1(pq)2}^\alpha + S_{1(pq)3}^\alpha \right)^T \delta_{pq}.$$

В силу (1.57), (1.58) векторы поверхностных сил $S_{i(pq)j}^\alpha$ нулевые, и следовательно работа внешних сил в (1.73) также равна нулю.

При записи уравнения (1.73) для произвольной подобласти $V \subset \tilde{V}_\xi$ работа внешних сил может быть отлична от нуля, ввиду того что вектор $S = (S_1, S_2, S_3)^T$ будет ненулевым, из-за несоблюдения вида (1.74).

Значит уравнение (1.73) необходимо рассматривать для произвольной подобласти $V \subset \tilde{V}_\xi$.

Закон Гука в системе уравнений (1.56) и соотношения Коши с использованием векторов-столбцов переформулируем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma &= A\varepsilon, \\ \varepsilon &= DU, \end{aligned} \quad (1.75)$$

где A – матрица компонент тензора A_{ijkl}^α модулей упругости, D – матрица линейных дифференциальных операторов.

$$(A_{ijkl}) = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{1212} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial/\partial\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\xi_3 \\ 0 & \partial/\partial\xi_3 & \partial/\partial\xi_2 \\ \partial/\partial\xi_3 & 0 & \partial/\partial\xi_1 \\ \partial/\partial\xi_2 & \partial/\partial\xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Уравнение (1.73) с использованием формул (1.75)(1.75) можно представить в виде:

$$\int_V (D\delta U)^T A D U dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma. \quad (1.77)$$

1.16 Применение метода конечных элементов для решения задач L_{pq}

Представим область \tilde{V}_ξ в виде достаточно большого конечного числа подобластей унифицированного вида V_e , например, используя аппроксимацию

конечными тетраэдрами: $\tilde{V}_\xi = \bigcup_{e=1} V_e$. Представим кинематически допустимое поле U для каждого конечного тетраэдра с помощью аппроксимации стандартными функциями координат, для этого обычно используют полиномы:

$$U_3(\xi_m, q_s) = \Phi_{3 \times z}(\xi_m) q, \quad (1.78)$$

$\Phi_{3 \times z}(\xi_m)$ – матрицы функций формы; $q = (q_1, \dots, q_z)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов; z – число степеней свободы тетраэдра.

Неизвестные коэффициенты будут характеризовать поле перемещений в узлах тетраэдра:

$$q = \left(U_{1(pq)}^{(1)}, U_{2(pq)}^{(1)}, U_{3(pq)}^{(1)}, \dots, U_{1(pq)}^{(m)}, U_{2(pq)}^{(m)}, U_{3(pq)}^{(m)} \right)^T,$$

где $U_{1(pq)}^{(k)} = U_{1(pq)}^\alpha(\xi_{j(k)}, q_s)$ – псевдоперемещения в узле конечного элемента с координатами $\xi_{j(k)}$; m – количество узлов конечного элемента. Функции $\Phi_{3 \times z}(\xi_{j(k)})$ в узлах конечного элемента равны единице: $\Phi_{3 \times z}(\xi_{j(k)}) = 1$

Наиболее широко в настоящее время применяют конечные элементы в виде тетраэдра с четырьмя узлами $m=4$, $z=12$ в вершинах. Этот конечный элемент дает линейную аппроксимацию для псевдоперемещений U и позволяет получить постоянным напряжениям σ в каждом конечном элементе.

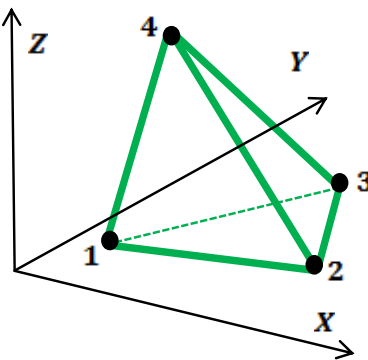


Рис. 1.11 конечный элемент с четырьмя узлами в вершинах

Матрица функций формы $\Phi_{3 \times m}(\xi_{j(k)})$ имеет вид:

$$\Phi_{3 \times m} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_m & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \dots & 0 & \Phi_m & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_m \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Для четырехузлового конечного элемента функции формы:

$$\Phi_i(\xi_j) = L_i(\xi_j), \quad (1.80)$$

$$L_i(\xi_j) = \frac{1}{6V}(a_i + b_i \xi_1 + c_i \xi_2 + d_i \xi_3) = \frac{1}{6V} a_{ij} \xi_j, \quad j = \overline{0,3}, \quad \xi_0 = 1,$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \xi_{1(1)} & \xi_{2(1)} & \xi_{3(1)} \\ 1 & \xi_{1(2)} & \xi_{2(2)} & \xi_{3(2)} \\ 1 & \xi_{1(3)} & \xi_{2(3)} & \xi_{3(3)} \\ 1 & \xi_{1(4)} & \xi_{2(4)} & \xi_{3(4)} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |\Delta|, \quad |\Delta_{ij}| = a_{ij}, \quad (1.81)$$

где $|\Delta_{ij}|$ – миноры матрицы Δ .

Функции $L_i(\xi_j)$ представляют собой отношение $L_i(\xi_j) = r_i(\xi_j)/s_i(\xi_j)$, где $r_i(\xi_j)$ – расстояние от точки с координатами ξ_j , до i -ой стороны тетраэдра; $s_i(\xi_j)$ – расстояние от противоположной вершины тетраэдра до i -ой стороны, для функций также справедливо: $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$.

Учитывая соотношение (1.73) в (1.72), деформации примут вид:

$$\varepsilon = Bq. \quad (1.82)$$

В (1.82) матрица деформаций $B = D\Phi$ имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \partial\Phi_1/\partial\xi_1 & 0 & 0 & \dots & \partial\Phi_m/\partial\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial\Phi_1/\partial\xi_2 & 0 & \dots & 0 & \partial\Phi_m/\partial\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial\Phi_1/\partial\xi_3 & \dots & 0 & 0 & \partial\Phi_m/\partial\xi_3 \\ 0 & \partial\Phi_1/\partial\xi_3 & \partial\Phi_1/\partial\xi_2 & \dots & 0 & \partial\Phi_m/\partial\xi_3 & \partial\Phi_m/\partial\xi_2 \\ \partial\Phi_1/\partial\xi_3 & 0 & \partial\Phi_1/\partial\xi_1 & \dots & \partial\Phi_m/\partial\xi_3 & 0 & \partial\Phi_m/\partial\xi_1 \\ \partial\Phi_1/\partial\xi_2 & \partial\Phi_1/\partial\xi_1 & 0 & \dots & \partial\Phi_m/\partial\xi_2 & \partial\Phi_m/\partial\xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

Для выбранного конечного элемента (тетраэдр, $m=4$) эта матрица примет вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & \dots & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & d_1 & c_1 & \dots & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & \dots & d_4 & 0 & b_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & \dots & c_4 & b_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

При подстановке соотношения (1.84) в (1.77), получаем итоговую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для одного конечного элемента:

$$K_e q = f_e, \quad (1.85)$$

при этом, K_e – матрица жесткости конечного элемента и f_e – вектор нагрузок конечного элемента определяются как:

$$\begin{aligned} K_e &= \int_V B^T A B dV, \\ f_e &= \int_{\Sigma} \Phi^T S d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Для конечного элемента с четырьмя узлами справедливо $K = B^T A B V$ поскольку нет зависимости компонент матрицы $B^T A B$ от координат.

Таким образом, если осуществить «сборку» СЛАУ (1.85) для всех конечных элементов, то можно получить глобальную СЛАУ для всего рассматриваемого объема \tilde{V}_ξ :

$$K q = f, \quad (1.87)$$

здесь глобальная матрица жесткости задачи K заполняется на основе локальных матриц жесткости конечных элементов K_e ; f – глобальный вектор нагрузок, получен из локальных векторов нагрузок конечных элементов f_e , которые находятся с учетом граничных условий (1.57), (1.58).

Для решения полученной СЛАУ (1.87) применяется метод сопряженных градиентов [3].

После решения СЛАУ (1.87), находим перемещения q в узлах, по которым вычисляются псевдоперемещения $U = \Phi q$, деформации $\varepsilon = Bq$ и напряжения $\sigma = ABq$ в конечных элементах.

1.17 Результаты численного моделирования эффективных характеристик компонентов композита на неорганической матрице

В качестве примера разработанной модели был рассмотрен композит на основе неорганической матрицы и керамических волокон. Были проведены расчеты, позволяющие определить изменение концентраций фаз композита и изменение упругих характеристик композита в зависимости от температурного режима.

Был написан программный модуль на языке C++ в среде Microsoft Visual Studio 2008.

1) Результаты численного моделирования изменения фазового состава волокон при нагреве

Исходные данные для численного моделирования:

- температурный нагрев происходит со скоростью ~ 4 К/с;
- начальная концентрация волокна в композите
при $\theta_0 = 293\text{K}$, $\varphi_f^0 = \varphi_a = 0.8$.

На рисунке 1.12 показаны графики изменения концентрации фаз волокон при нагреве. На рисунке 1.13 показан график изменения относительного модуля упругости волокна при нагреве.

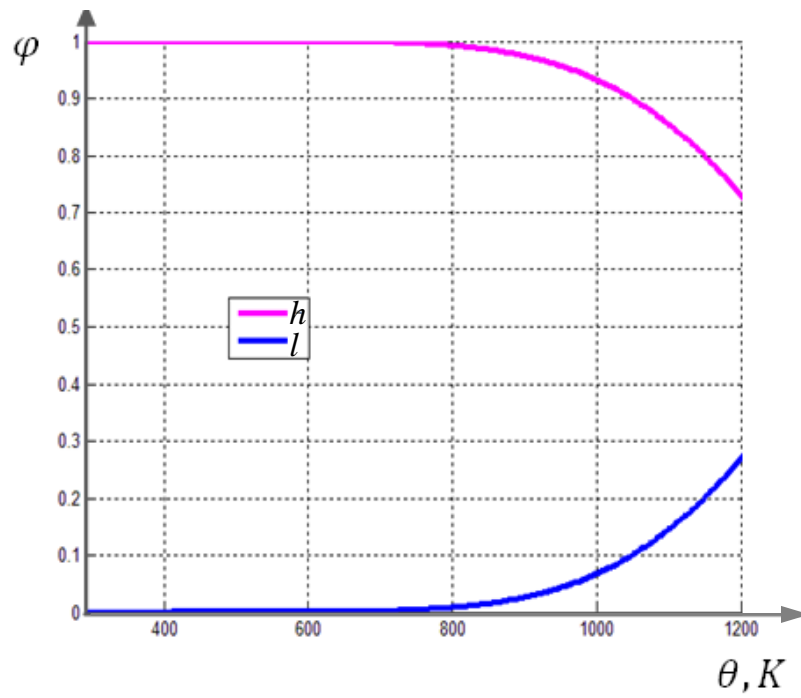


Рисунок 1.12 – Фазовые превращения в волокне в зависимости от температуры (h – аморфная фаза, l – кристаллическая)

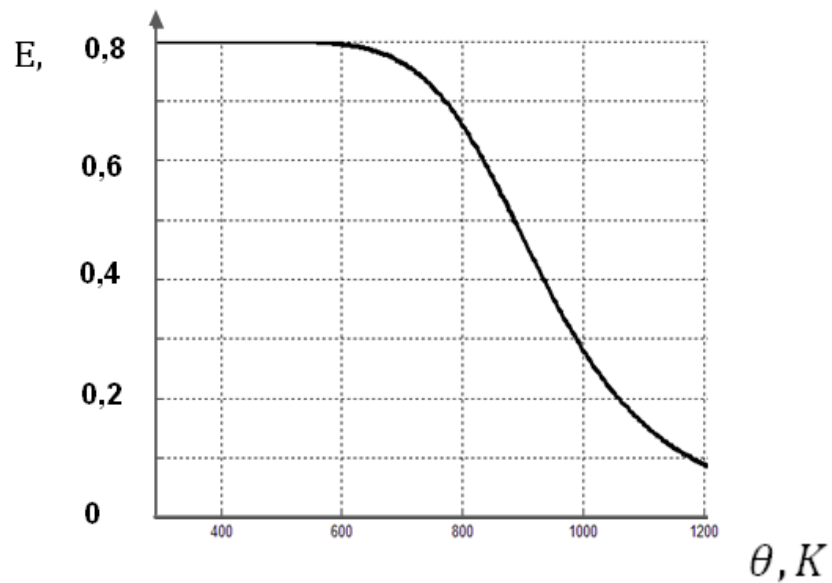


Рисунок 1.13 – Изменение относительного модуля упругости волокна в зависимости от температуры.

2) Результаты численного моделирования изменения фазового состава матрицы при нагреве на 4-м уровне

Исходные данные для численного моделирования:

- для цепочки типа (b):

$$\frac{E_{AP}}{R} = 5700 \text{ K}, \quad \frac{E_{AM}}{R} = 8200 \text{ K}, \quad \frac{E_{AO}}{R} = 10500 \text{ K},$$

$$J_P^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}), \quad J_M^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}), \quad J_O^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}),$$

$$\Gamma_P = 0.05 \quad \Gamma_C = 0.05.$$

- для цепочки типа (a):

$$\frac{E_{AP}}{R} = 5500 \text{ K}, \quad \frac{E_{AM}}{R} = 8000 \text{ K}, \quad \frac{E_{AO}}{R} = 10^4 \text{ K},$$

$$J_P^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}), \quad J_M^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}), \quad J_O^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}),$$

$$\Gamma_P = 0.05, \quad \Gamma_C = 0.05.$$

Константы согласованы с температурными диапазонами существования фаз. На рисунке 1.14 приведены графики изменения концентраций фаз связующего по цепочке типа (b). На рисунке 1.15 приведены графики изменения концентраций фаз связующего по цепочке типа (a).

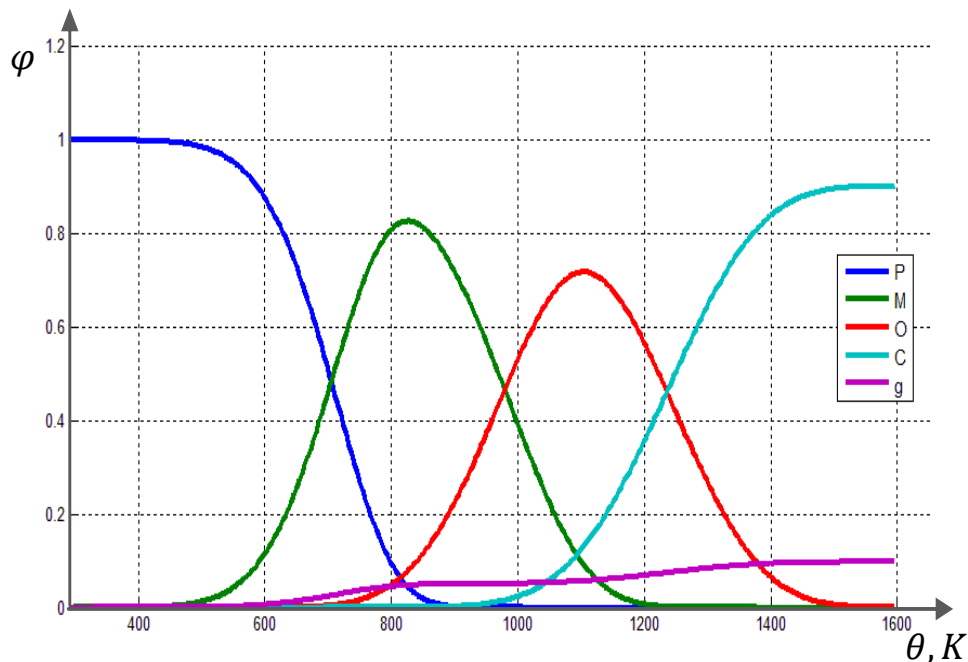


Рисунок 1.14 – Многостадийные фазовые превращения в неорганической матрице по цепочке типа b

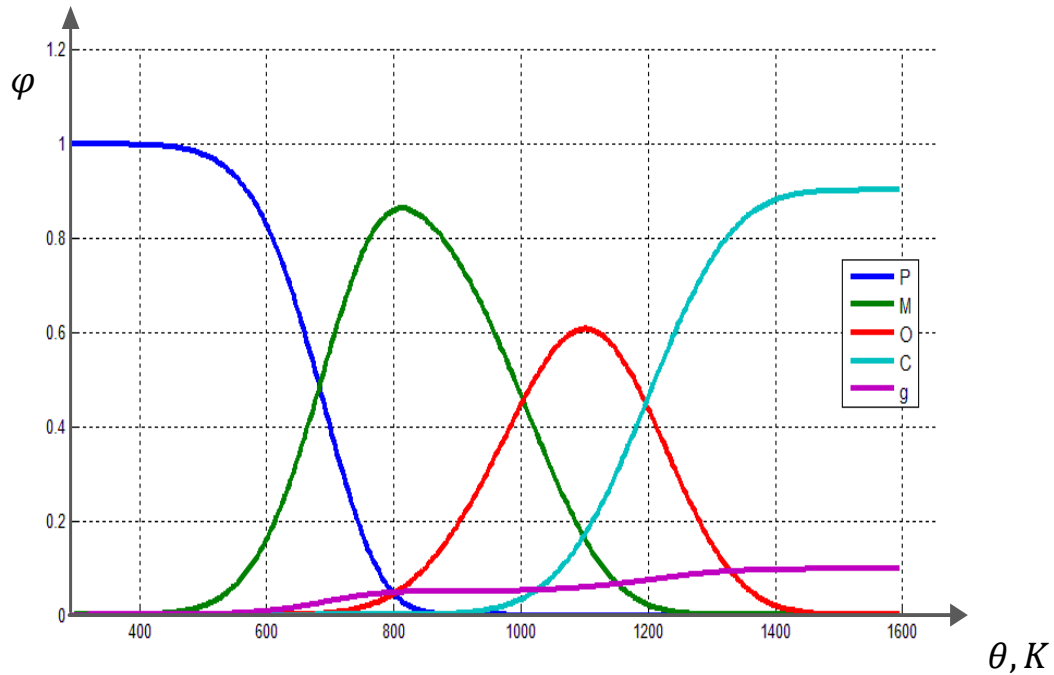


Рисунок 1.15 – Многостадийные фазовые превращения в неорганической матрице по цепочке типа а

На рисунке 1.16 показаны результаты численного моделирования изменения упругих свойств неорганического связующего при нагреве.

В качестве исходных данных для вычисления модуля упругости были приняты:

- по цепочке фазовых превращений типа b:

$$E_C = 44 \text{ ГПа}, E_O = 35 \text{ ГПа}, E_M = 25 \text{ ГПа}, E_P = 10 \text{ ГПа}, E_g = 0.$$

- по цепочке фазовых превращений типа а:

$$E_C = 40 \text{ ГПа}, E_O = 30 \text{ ГПа}, E_M = 20 \text{ ГПа}, E_P = 10 \text{ ГПа}, E_g = 0.$$

Эффективный модуль упругости неорганического связующего на 3 уровне (с учётом обеих цепочек фазовых превращений) вычисляется из предположения, что $\varphi_{(a)} = 0.5$, $\varphi_{(b)} = 0.5$.

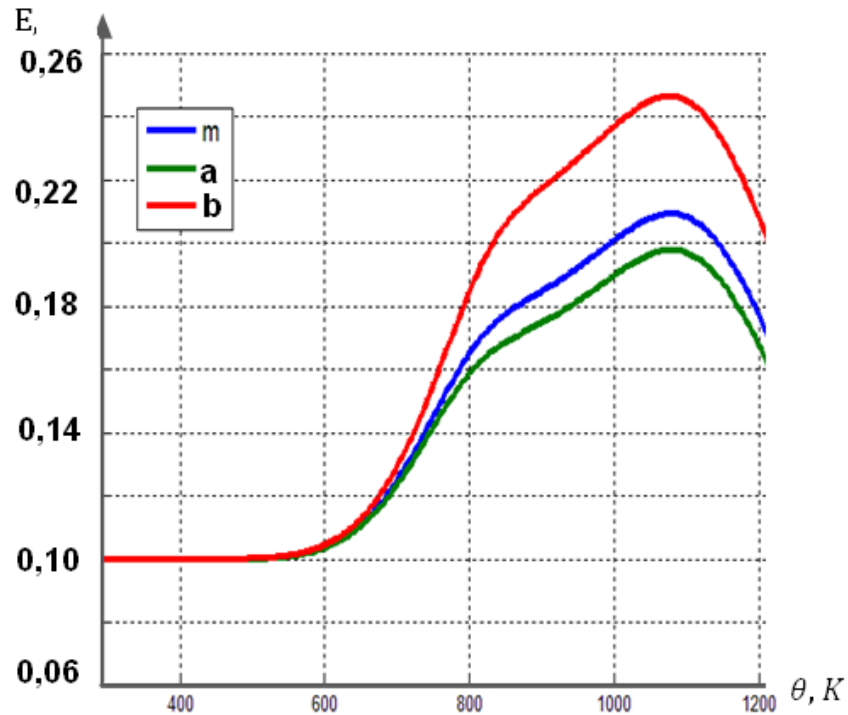


Рисунок 1.16 – Изменение относительного модуля упругости неорганического связующего (красным цветом показан относительный модуль – по цепочке фазовых превращений а-типа, зеленым – модуль по цепочке фазовых превращений b-типа, синим – модуль упругости по комплексной цепочке фазовых превращений типов а и b, совместно)

3) Результаты численного моделирования характеристик композита на 2-м и 1-м уровне

На рисунках 1.17 и 1.18 представлены некоторые примеры решения задачи L_{pq} (L_{33}) в виде распределения компонент тензора концентраций напряжений для композита на 1-м структурном уровне. Показаны значения нескольких компонент, которые имеют наибольшие характерные значения при $E_{m3} = 16,5$, $E_{f3} = 50,5$.

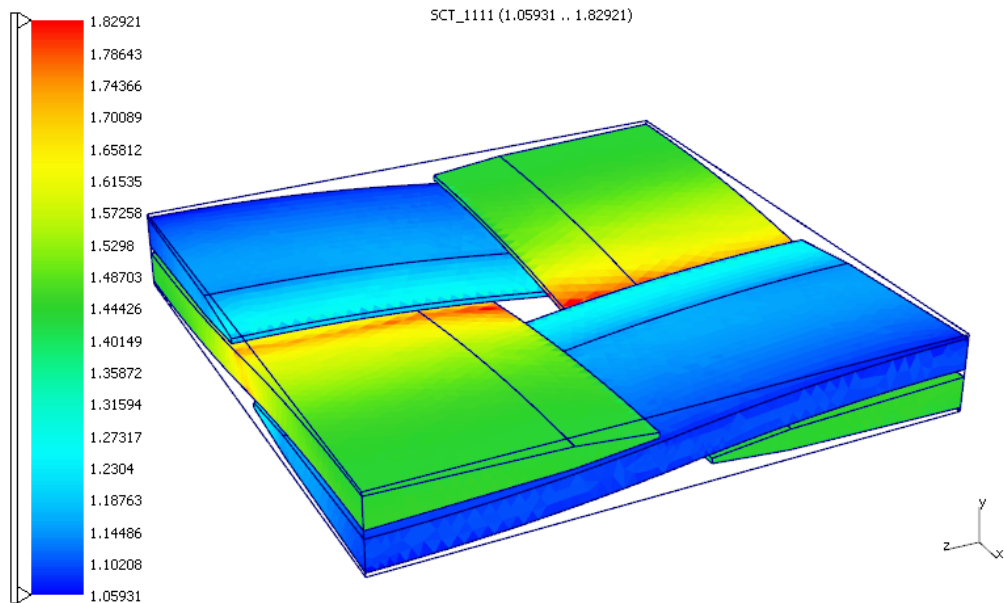


Рисунок 1.17– Распределение компонент тензора концентрации напряжений B_{1111} в волокнах тканевого композиционного материала

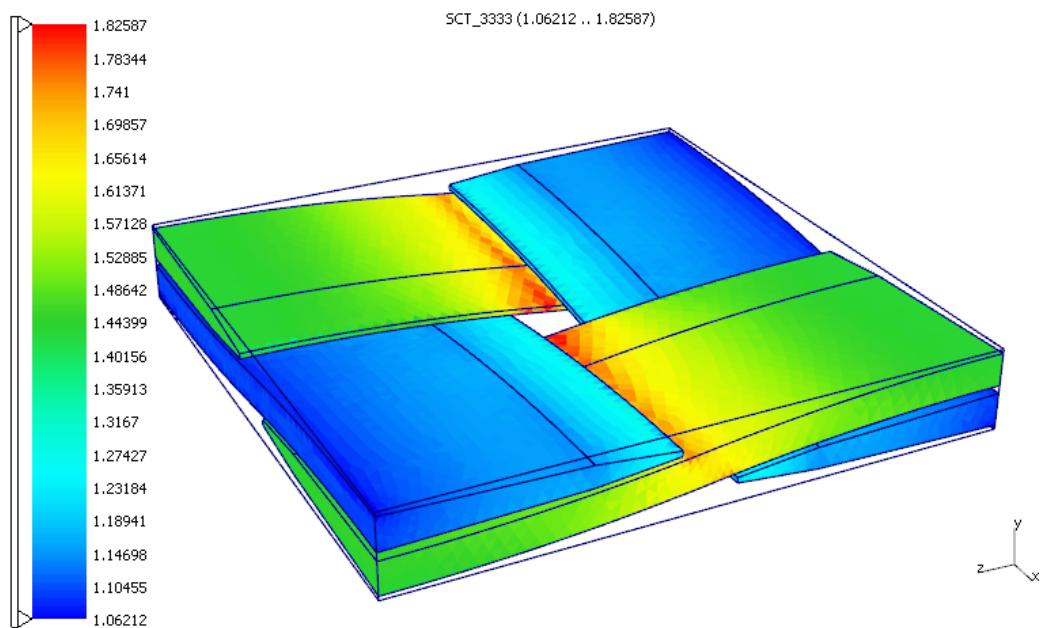


Рисунок 1.18– Распределение компонент тензора концентрации напряжений B_{3333} в волокнах тканевого композиционного материала

Для ЯП на 2-м структурном уровне также решались серии задач L_{pq} , на рисунке 1.14 приведено распределение компонент тензора концентраций напряжений в ЯП для матрицы на 2-м уровне .

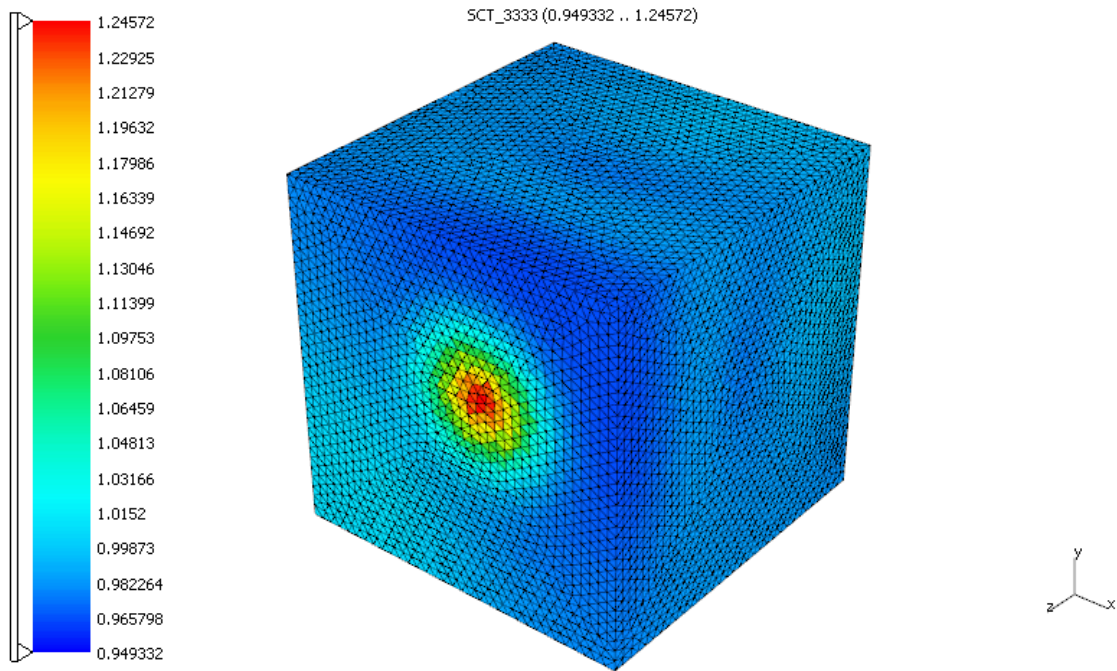


Рис. 1.19– Распределение компонент тензора концентрации напряжений V_{3333} в ЯП на 2-м уровне при температуре 1600 К

В ходе численного моделирования на 1-м уровне были получены наборы значений модулей упругости тканевого композиционного материала для разных пар (E_{m3}, E_{f3}) , что отражено на рисунках 1.20 и 1.21. Отметим, что изменение модулей упругости тканевого композита в зависимости от модулей упругости его компонент носит нелинейный характер.

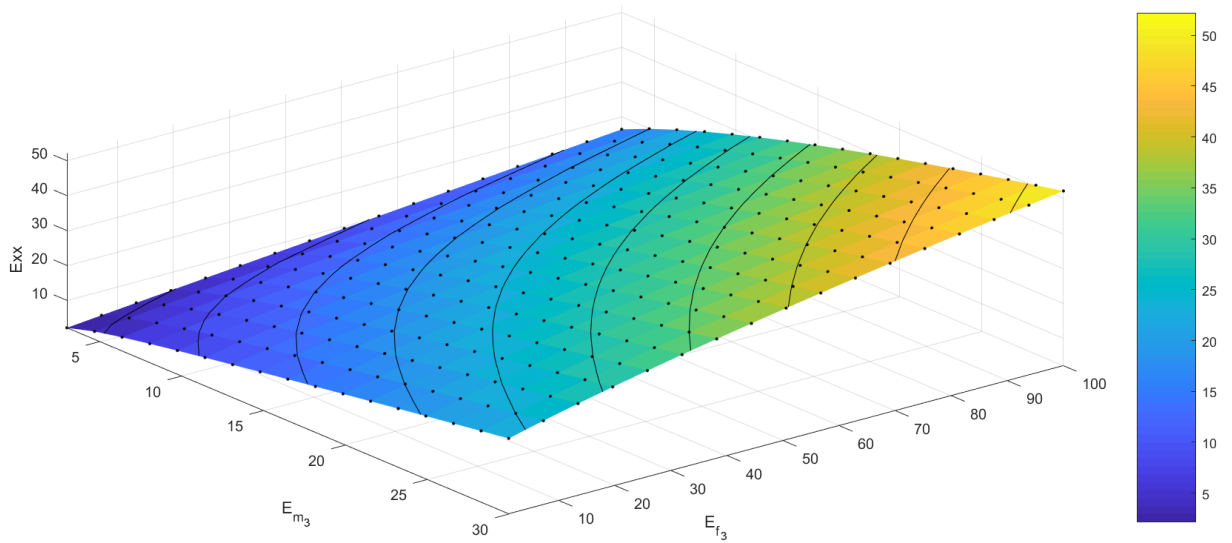


Рисунок 1.20 – Значения безразмерного модуля упругости E_{11} тканевого композиционного материала в зависимости от модулей упругости его КОМПОНЕНТ

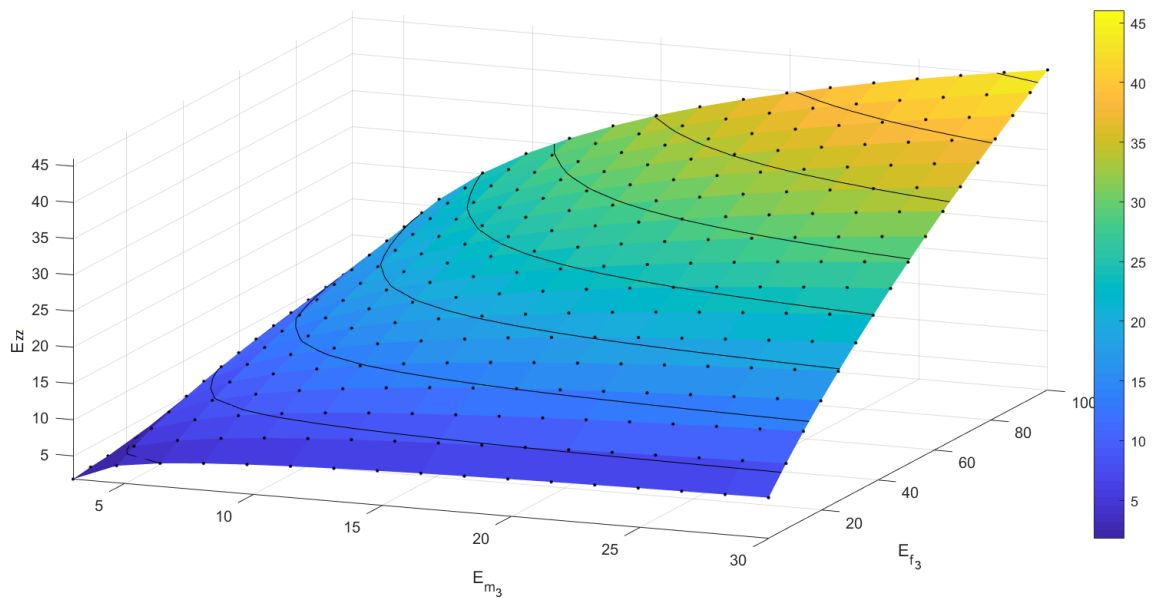


Рисунок 1.21 – Значения безразмерного модуля упругости E_{33} тканевого композиционного материала в зависимости от упругих значений его КОМПОНЕНТ

1.18 Определяющие соотношения для тканевых композитов с многостадийными фазовыми превращениями

После вычисления всех упругих характеристик тканевых композитов с многостадийными фазовыми превращениями, сформулируем 3-х мерные определяющие соотношения для данного класса композитов.

Определяющие соотношения состоят из 2-х групп уравнений, связывающих компоненты тензоров напряжений и деформаций (обобщенный закон Гука), и вектора теплового потока и градиента температуры (закон Фурье)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= A_{ijkl}(\varphi)(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \\ q_i &= -\lambda_{ij}(\varphi) \frac{\partial \theta(x_i)}{\partial x_j},\end{aligned}\tag{1.88}$$

здесь обозначен вектор концентраций для фаз, выделенных в модели композиционного материала, в него войдут концентрации фаз, присутствующих в связующем на 4-м уровне для цепочек (а) и (b), а также концентрации фаз волокон на 3-м уровне: $\varphi = (\varphi_{1w}, \dots, \varphi_{5w}, \varphi_h, \varphi_l)$, $w = \{a, b\}$.

$A_{ijkl}(\varphi)$ – компоненты тензора модулей упругости композита, зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна, и изменяющиеся при нагреве до высоких температур, ε_{kl}^T – компоненты тензора тепловой деформации композита, также зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна; определяемые как $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}(\varphi) \Delta \theta$ функции температуры $\Delta \theta = \theta - \theta_1$, где θ_1 – исходная температура, $\alpha_{kl}(\varphi)$ – компоненты тензора теплового расширения.

$\lambda_{ij}(\varphi)$ – компоненты тензора теплопроводности тканевого композита, зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна.

В главных осях ортотропии компоненты тензора модулей упругости композита $A_{ijkl}(\varphi)$ имеют следующий вид:

$$(A_{ijkl}) = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{1212} \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора $A_{ijkl}(\varphi)$ вычисляются с помощью обращения матрицы компонент тензора упругих податливостей

$$A_{ijkl}(\varphi) = \Pi_{ijkl}^{-1}(\varphi),$$

где $\Pi_{ijkl}(\varphi)$ имеет следующий вид:

$$(\Pi_{ijkl}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}(\varphi)} & \frac{-v_{12}}{E_{11}(\varphi)} & \frac{-v_{13}}{E_{11}(\varphi)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{21}}{E_{22}(\varphi)} & \frac{1}{E_{22}(\varphi)} & \frac{-v_{23}}{E_{22}(\varphi)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{13}}{E_{33}(\varphi)} & \frac{-v_{32}}{E_{33}(\varphi)} & \frac{1}{E_{33}(\varphi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}(\varphi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}(\varphi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}(\varphi)} \end{pmatrix}.$$

В выражение для компонент тензора упругих податливостей входят: $E_{ii}(\varphi)$ – модули упругости, G_{ij} – модули сдвига, v_{ij} – коэффициенты Пуассона композиционного материала на 1-м уровне.

Для объемных концентраций фаз имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}}{\partial t} = J_{svw} \varphi_{vw}, & w = \{a, b\}, s, v = \overline{1, 4} \\ \rho_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = J_h^0 \varphi_h f_h(\theta) \\ \sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma w} = \varphi_{(w)}, & \varphi_h + \varphi_l = \varphi_{f2} \\ t = 0: & \varphi_{\gamma w} = \varphi_{\gamma w}^0, \varphi_h = \varphi_{f2} \end{cases}$$

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ПЛАСТИН С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

2.1 Постановка трехмерной задачи линейной теории термоупругости для тонкой пластины с фазовыми превращениями

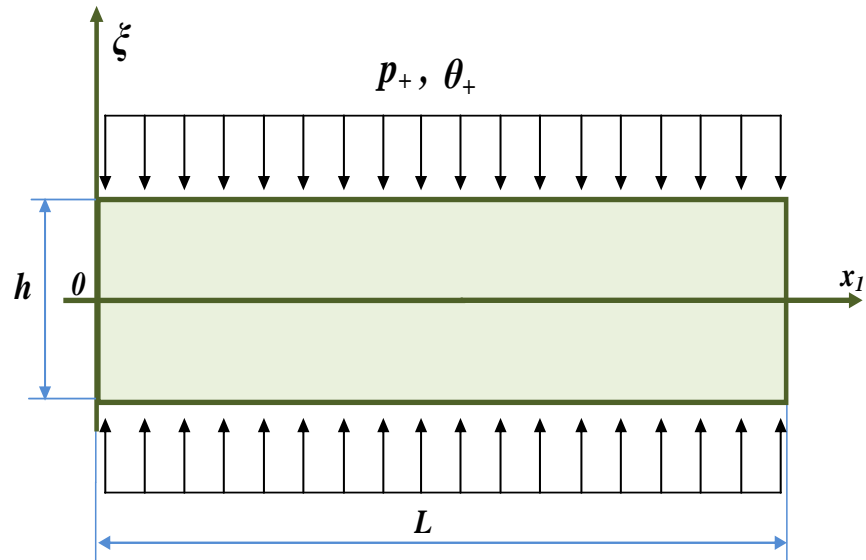


Рисунок 2.1 – Пластина из тканевого КМ

Пусть тонкая пластина из тканевого композиционного материала с многостадийными высокотемпературными фазовыми превращениями имеет постоянную толщину h и характерный размер L , и пусть $h/L = \chi \ll 1$. Обозначим глобальные координаты: $x_k = \hat{x}_k / L$, $k=1,2,3$, где \hat{x}_k – обычные прямоугольные декартовы координаты, такие, что ось $O\hat{x}_3$ сонаправлена с нормалью к верхней и нижней плоскостям пластины, а оси $O\hat{x}_1$, $O\hat{x}_2$ принадлежат срединной плоскости пластины.

Обозначив крышечкой сверху размерные величины, введем безразмерные величины как отношение к характерным значениям величин: $t = \hat{t} / t_0$ – время, $u_j = \hat{u}_j / L$ – компоненты вектора перемещений, $\theta = \hat{\theta} / \theta_0$ – температуру, $\rho = \hat{\rho} / \rho_0$ – плотность, $\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} / \sigma_0$ – компоненты тензора напряжений, $A_{ijkl} = \hat{A}_{ijkl} / \sigma_0$ – компоненты тензора модулей упругости, $c = \hat{c} / c_0$ –

теплоемкость, $\lambda_{ij} = \hat{\lambda}_{ij} / \lambda_0$ – компоненты тензора теплопроводности, $q_i = \hat{q}_i L / \lambda_0 \theta_0$ – компоненты вектора теплового потока. Характерные величины обозначены нижним индексом «0»: t_0 – время исследуемого процесса нагрева, $\rho_0, \sigma_0, c_0, \theta_0, \lambda_0$, – базовые значения плотности, напряжения, удельной теплоемкости, температуры, теплопроводности, напряжения.

Запишем в безразмерном виде трехмерную задачу линейной теории термоупругости для тонкой пластины с температурно-зависящими свойствами, а также систему кинематических уравнений для концентраций фаз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\varphi)}{\chi^2} \frac{\partial \theta(x_I, \xi)}{\partial t} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \\ q_i = -\lambda_{ij}(\varphi) \frac{\partial \theta(x_I, \xi)}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varphi) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\chi^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \\ q_3 = \pm q_{e\pm}, \\ \Sigma_T : q_I n_I = 0, \quad u_i = u_{ei} \\ \Sigma_S : [\theta] = 0, [q_3] = 0, [u_3] = 0, [\sigma_{i3}] = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}}{\partial t} = J_{svw} \varphi_{vw}, \quad w = \{a, b\}, \quad s, v = \overline{1, 4} \\ \rho_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = J_h^0 \varphi_h f_h(\theta) \\ \sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma w} = \varphi_{(w)}, \quad \varphi_h + \varphi_l = \varphi_{f2} \\ t=0: \quad \varphi_{\gamma w} = \varphi_{\gamma w}^0, \quad \varphi_h = \varphi_{f2} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Система (2.1) включает в себя нестационарное уравнение теплопроводности, закон Фурье, уравнение равновесия, соотношения Коши, определяющие соотношения термоупругости, кинематические уравнения для концентраций фаз, граничные условия на верхней и нижней плоскости пластины $\Sigma_{3\pm}$, на торцевой поверхности Σ_T . На поверхности раздела Σ_S слоев пластины выполняются условия идеального контакта. Торцы будем считать теплоизолированными.

В системе (2.1) используются следующие обозначения: u_{ei} – заданные компоненты вектора перемещений на торцах пластины, p_+ – давление и q_{0+} – тепловой поток на внешней поверхности пластины, p_- – давление и q_{0-} – тепловой поток на внутренней поверхности пластины.

В системе (2.1) обозначен вектор концентраций для фаз, выделенных в модели композиционного материала, в него войдут концентрации фаз, присутствующих в связующем на 4-м уровне для цепочек (а) и (б), а также концентрации фаз волокон на 3-м уровне:

$$\varphi = \varphi(x_I, \xi) = (\varphi_{1w}(x_I, \xi), \dots, \varphi_{5w}(x_I, \xi), \varphi_h(x_I, \xi), \varphi_l(x_I, \xi)), \quad w = \{a, b\}.$$

Система (2.2) включает в себя кинематические уравнения для концентраций фаз матрицы и волокна, а также начальные условия.

В системе (2.2) принято обозначение вектора концентраций фаз связующего в виде:

$$\varphi_{sw} = \varphi_{sw}(x_I, \xi) = (\varphi_{1w}(x_I, \xi), \varphi_{2w}(x_I, \xi), \varphi_{3w}(x_I, \xi), \varphi_{4w}(x_I, \xi)). \quad (2.3)$$

В кинематических уравнениях (2.2) используется матрица следующего вида:

$$J_{svw} = \begin{pmatrix} -J_{1w}^0 f_{1w}(\theta) & 0 & 0 \\ J_{1w}^0 f_{1w}(\theta)(1-\Gamma_1) & -J_{2w}^0 f_{2w}(\theta) & 0 \\ 0 & J_{2w}^0 f_{2w}(\theta) & -J_{3w}^0 f_{3w}(\theta) \\ 0 & 0 & J_{3w}^0 f_{3w}(\theta)(1-\Gamma_4) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В матрице J_{wsv} (2.4) присутствует функция, характеризующая скорость реакции в зависимости от температуры $f_\gamma(\theta) = e^{-\frac{\bar{E}_{A\gamma}}{\theta}}$, где $\bar{E}_{A\gamma} = \frac{E_{A\gamma}}{R\theta_0}$ – энергия активации γ -ой фазы. $\varphi_{\gamma w}^0$ – значения относительных объемных концентраций фаз для цепочки (w) в начальный момент времени.

Считаем, что компоненты A_{ijkl} , λ_{ij} , ε_{kl}^T , и массовая теплоемкость $C = \rho c / Fo_0$ для каждого слоя многослойной пластины заданы разные.

$$c(\theta) = \frac{\rho_m(\theta)c_m(\theta)\varphi_m + \rho_f(\theta)c_f(\theta)\varphi_f}{\rho_m\varphi_m + \rho_f\varphi_f}, \text{ а } Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2 \text{ – критерий Фурье.}$$

Для системы (2.1) принимаются три основных допущения:

- а) Длительность нагрева не велика, полагаем, что число Фурье $Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2$ процесса нагрева имеет один порядок малости с χ^2 , т.е. – $Fo = \chi^2 Fo_0$, где Fo_0 число порядка единицы: $Fo_0 = O(1)$;
- б) на верхней и нижней плоскостях пластины давление имеет третий порядок малости $O(\chi^3)$ т.е. $\sigma_{33} = -\chi^3 p_\pm$;
- в) предполагаем, что на расстояниях порядка h изменения теплового потока и давления малы.

2.2 Построение асимптотических разложений

Для описания изменения свойств пластины по толщине воспользуемся локальной безразмерной координатой, такой что: $\xi = x_3 / \chi$, $-\frac{1}{2} < \xi < +\frac{1}{2}$. Для рассматриваемого метода предполагается, что ξ и x_3 независимые координаты [9].

Представим концентрацию каждой фазы матрицы и волокна в виде ряда с малым параметром χ

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \varphi_\gamma^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2 \varphi_\gamma^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3 \varphi_\gamma^{(3)}(x_I, \xi) + \dots, \gamma = \overline{1, N} \quad (2.5)$$

где N – количество фаз в принятое в многоуровневой модели композиционного материала с фазовыми превращениями. Для модели на рисунке 1.1 количество фаз $N=12$. Далее по тексту считаем, что нижние прописные латинские индексы принимают значения 1 и 2, а нижние строчные латинские индексы пробегает значения от 1 до 3.

Обозначим:

$$\tilde{\varphi}_\gamma = \varphi_\gamma^{(1)}(x_I, \xi) + \chi \varphi_\gamma^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^2 \varphi_\gamma^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \quad (2.6)$$

Тогда концентрация фазы γ примет вид:

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_\gamma. \quad (2.7)$$

Обозначим зависимость компонент тензора модулей упругости, компонент матрицы теплового расширения, коэффициента теплоемкости от концентраций фаз:

$$A_{ijkl}(\varphi) = A_{ijkl}(\varphi_1(x_I, \xi), \varphi_2(x_I, \xi), \varphi_3(x_I, \xi), \dots, \varphi_N(x_I, \xi)),$$

$$\alpha_{kl}(\varphi) = \alpha_{kl}(\varphi_1(x_I, \xi), \varphi_2(x_I, \xi), \varphi_3(x_I, \xi), \dots, \varphi_N(x_I, \xi)),$$

$$C(\varphi) = C(\varphi_1(x_I, \xi), \varphi_2(x_I, \xi), \varphi_3(x_I, \xi), \dots, \varphi_N(x_I, \xi)).$$

Компоненты матрицы теплового расширения и компоненты тензора модулей упругости разложим в ряд по малому параметру χ :

$$\begin{aligned} & \alpha_{kl}(\varphi_1^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_1(x_I, \xi), \varphi_2^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_2(x_I, \xi), \dots, \varphi_N^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_N(x_I, \xi)) = \\ & = \alpha_{kl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi)) + \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial \alpha_{kl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi))}{\partial \varphi_\gamma} (\chi \cdot \tilde{\varphi}_\gamma) + \frac{1}{2!} \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & A_{ijkl}(\varphi_1^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_1(x_I, \xi), \varphi_2^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_2(x_I, \xi), \dots, \varphi_N^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \tilde{\varphi}_N(x_I, \xi)) = \\ & = A_{ijkl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi)) + \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial A_{ijkl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi))}{\partial \varphi_\gamma} (\chi \cdot \tilde{\varphi}_\gamma) + \frac{1}{2!} \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

В разложениях (2.8) и (2.9) ограничимся первым членом ряда, аналогично поступим и теплоемкостью, и далее будем использовать сокращенную форму записи:

$$A_{ijkl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi)) = A_{ijkl}(\varphi^{(0)}), \quad \alpha_{kl}(\varphi^{(0)}(x_I, \xi)) = \alpha_{kl}(\varphi^{(0)}), \quad C(\varphi^{(0)}(x_I, \xi)) = C(\varphi^{(0)}).$$

Функцию $f_\gamma(\theta)$ разложим в ряд и ограничимся первым членом ряда, тогда $f_\gamma(\theta) = e^{-\frac{E_{A\gamma}}{\theta}} = e^{-\frac{E_{A\gamma}}{\theta^{(0)}}}$.

Каждую компоненту $J(\varphi, \theta)$ матрицы (2.4) разложим в ряд следующим образом:

$$J(\varphi, \theta) = (\varphi^{(0)} + \chi\tilde{\varphi})f(\theta^{(0)}) = \varphi^{(0)}f(\theta^{(0)}) + \chi\tilde{\varphi}f(\theta^{(0)}) = \varphi^{(0)}f(\theta^{(0)}) + \chi\varphi^{(1)}f(\theta^{(0)}) + \dots \quad (2.10)$$

Ввиду малости параметра χ ограничимся для компонент матрицы первым членом разложения (2.10).

Таким образом, термоупругие характеристики пластины будем рассматривать как функции координаты ξ :

$$\Psi = \Psi(\xi),$$

$$\Psi = \{\lambda_{ij}, C(\varphi), \varepsilon_{kl}^T, A_{ijkl}(\varphi)\}. \quad (2.11)$$

В системе (2.1) присутствует малый параметр χ и локальная координата ξ , тогда решение представимо в виде асимптотических разложений по малому параметру χ , т.е. функций от глобальных и локальной координат:

$$\theta = \theta^{(0)}(x_I, \xi) + \chi\theta^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2\theta^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3\theta^{(3)}(x_I, \xi) + \dots$$

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \chi u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \quad (2.12)$$

Введем выражение для градиента температуры:

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \theta, \quad (2.13)$$

тогда подставляя разложения (2.12) в выражения для деформаций ε_{ij} в системе (2.1), и в выражение для градиента температуры (2.13), при этом пользуясь правилом дифференцирования функций зависящих от локальных координат

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{\chi} \delta_{j3} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$, можно получить разложения для:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \chi\varepsilon_{ij}^{(1)} + \chi^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots,$$

$$g_i = \frac{1}{\chi} g_i^{(-1)} + g_i^{(0)} + \chi g_i^{(1)} + \chi^2 g_i^{(2)} + \dots \quad (2.14)$$

Пусть индекс $n=0,1,2,\dots$, тогда в (2.14) обозначены

$$\begin{aligned}\varepsilon_{IJ}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I^{(n)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(n)}}{\partial x_I} \right), \\ \varepsilon_{I3}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(n+1)}}{\partial \xi} \right),\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = \frac{\partial u_3^{(n+1)}}{\partial \xi},$$

$$g_I^{(-1)} = 0,$$

$$g_3^{(-1)} = \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial \xi},$$

$$g_I^{(n)} = \frac{\theta^{(n)}}{\partial x_I},\tag{2.16}$$

$$g_3^{(n)} = \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial \xi}.$$

При подстановке разложения (2.12) для температуры в формулы (2.11), получим асимптотические разложения для тепловой деформации пластины:

$$\varepsilon_{kl}^T = \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \chi \varepsilon_{kl}^{T(1)} + \chi^2 \varepsilon_{kl}^{T(2)} + \dots$$

$$\varepsilon_{kl}^{T(n)} = \alpha_{kl}(\varphi^{(0)}) \Delta \theta^{(n)},$$

$$\Delta \theta^{(0)} = \theta^{(0)} - \theta_0,\tag{2.17}$$

$$\Delta \theta^{(n)} = \theta^{(n)}.$$

Для получения асимптотического разложения теплового потока и напряжений подставим соотношения (2.14) и (2.17) в систему (2.1), а именно в определяющие соотношения и закон теплопроводности Фурье.

$$q_i = \frac{1}{\chi} q_i^{(-1)} + q_i^{(0)} + \chi q_i^{(1)} + \chi^2 q_i^{(2)} + \dots$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \chi \sigma_{ij}^{(1)} + \chi^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots\tag{2.18}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = A_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(n)} + \tilde{A}_{IJK3}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{k3}^{(n)} - A_{IJKl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(n)},$$

$$\sigma_{i3}^{(n)} = A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(n)} + A_{i3k3}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{k3}^{(n)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(n)},\tag{2.19}$$

$$\lambda_{33} g_3^{(-1)} = -q_i^{(-1)},$$

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} g_j^{(n)} + \lambda_{i3} g_3^{(n)} &= -q_i^{(n)}, \\ \tilde{A}_{ijk3}(\varphi^{(0)}) &= 2A_{ijk3}(\varphi^{(0)}), \\ \tilde{A}_{ij33}(\varphi^{(0)}) &= A_{ijk3}(\varphi^{(0)}).\end{aligned}$$

2.3 Локальные задачи

Соотношения (2.12), (2.14), (2.18) подставляем в уравнение теплопроводности и равновесия, а также в граничные условия системы (2.1), группируя слагаемые, если возможно, по степеням χ :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial q_3^{(-1)}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\chi} \left(\frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial q_l^{(-1)}}{\partial x_l} + \frac{\partial q_3^{(0)}}{\partial \xi} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial q_l^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial q_3^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \chi \dots = 0, \\ & \frac{1}{\chi} \frac{\partial \sigma_{i3}^{(0)}}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{i3}^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \chi \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{i3}^{(2)}}{\partial \xi} \right) + \chi^2 \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{i3}^{(3)}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0 \\ & \Sigma_T : u_i^{(0)} + \chi u_i^{(1)} + \chi^2 u_i^{(2)} + \chi^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}, \\ & \quad \left(\frac{1}{\chi} q_l^{(-1)} + q_l^{(0)} + \chi q_l^{(1)} + \chi^2 \dots \right) n_l = 0, \\ & \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \chi \sigma_{i3}^{(1)} + \chi^2 \sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\chi^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \\ & \quad \frac{1}{\chi} (q_3^{(-1)} \mp q_{e\pm}) + q_3^{(0)} + \chi q_3^{(1)} + \chi^2 \dots = 0\end{aligned} \tag{2.20}$$

Запишем рекуррентную последовательность локальных задач термоупругости с учетом многостадийных фазовых превращений, для этого в граничных условиях, уравнениях равновесия и уравнении теплопроводности системы (2.20) полагаем равными нулю члены при отрицательных степенях χ к нулю, а при оставшихся степенях χ к величинам, не зависящим от локальной координаты ξ , например, $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)} \dots$ и $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)} \dots$. Выпишем локальную задачу термоупругости с учетом фазовых превращений в нулевом приближении:

$$\begin{aligned}
\rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}^{(0)}}{\partial t} &= J_{sw}^{(0)} \varphi_{vw}^{(0)}, \quad w = \{a, b\}, \quad s, v = \overline{1, 4} \\
\rho_h \frac{\partial \varphi_h^{(0)}}{\partial t} &= J_h^{(0)} \varphi_h^{(0)} f_h(\theta^{(0)}) \\
\sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma w}^{(0)} &= \varphi_{(w)}, \quad \varphi_h^{(0)} + \varphi_l^{(0)} = \varphi_f \\
t = 0: \quad \varphi_{\gamma w} &= \varphi_{\gamma w}^0, \quad \varphi_h = \varphi_{f2} \\
\frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial q_3^{(-1)}}{\partial \xi} &= 0, \\
\lambda_{33} g_3^{(-1)} &= -q_3^{(-1)}, \\
g_3^{(-1)} &= \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial \sigma_{i3}^{(0)}}{\partial \xi} &= 0, \\
\sigma_{i3}^{(0)} &= A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_{i3k3}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{k3}^{(0)}, \\
\varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(0)}}{\partial x_I} \right), \\
\varepsilon_{I3}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(1)}}{\partial \xi} \right), \\
\varepsilon_{33}^{(0)} &= \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \xi}, \\
\Sigma_{3\pm} : q_3^{(-1)} &= \pm q_{e\pm}, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \\
\Sigma_S : [q_i^{(-1)}] &= 0, \quad [\theta^{(0)}] = 0, \quad [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0; \\
\int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(1)} d\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

В системе (2.21) присутствуют кинематические уравнения для фаз в нулевом приближении, в задачу для первого и второго приближения кинематические уравнения для фаз не войдут, поскольку в разложение, присутствующих в них функций, ограничено первым членом ряда.

Сформулируем локальную задачу термоупругости в первом приближении.

$$\begin{aligned}
& \frac{C(\varphi^{(0)})\partial\theta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial q_I^{(-1)}}{\partial x_I} + \frac{\partial q_3^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \\
& \lambda_{3J}g_J^{(0)} + \lambda_{33}g_3^{(0)} = -q_3^{(0)}, \\
& g_3^{(0)} = \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial \xi}, \\
& g_J^{(0)} = \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial x_J}, \\
& \frac{\partial\sigma_{i3}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\sigma_{iJ}^{(0)}}{\partial x_J} = y_i^{(0)}, \\
& \sigma_{i3}^{(1)} = A_{i3KL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{A}_{i3k3}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{k3}^{(1)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(1)}, \\
& \varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I^{(1)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(1)}}{\partial x_I}\right), \\
& \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(2)}}{\partial \xi}\right), \\
& \varepsilon_{33}^{(1)} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \xi}, \\
& \Sigma_{3\pm} : q_3^{(0)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0; \\
& \Sigma_S : [q_3^{(0)}] = 0, \quad [\theta^{(1)}] = 0, \quad [\sigma_{i3}^{(1)}] = 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \\
& \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(2)} d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ограничимся формулировками локальных задач для второго (2.23) и третьего приближений (2.24).

$$\begin{aligned}
& \frac{C(\varphi^{(0)})\partial\theta^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial q_I^{(0)}}{\partial x_I} + \frac{\partial q_3^{(1)}}{\partial \xi} = b^{(0)}, \\
& \lambda_{3J}g_J^{(1)} + \lambda_{33}g_3^{(1)} = -q_3^{(1)}, \\
& g_J^{(1)} = \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x_J}, \\
& g_3^{(1)} = \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial \xi}, \\
& \frac{\partial\sigma_{i3}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\sigma_{iJ}^{(1)}}{\partial x_J} = y_i^{(1)}, \\
& \sigma_{i3}^{(2)} = A_{i3KL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(2)} + \tilde{A}_{i3k3}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{k3}^{(2)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(2)}, \\
& \varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I^{(2)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(2)}}{\partial x_I}\right), \\
& \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(3)}}{\partial \xi}\right), \\
& \varepsilon_{33}^{(2)} = \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial \xi}, \\
& \Sigma_{3\pm} : q_3^{(1)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = 0; \\
& \Sigma_S : [q_3^{(1)}] = 0, \quad [\theta^{(2)}] = 0, \quad [\sigma_{i3}^{(2)}] = 0, \quad [u_i^{(3)}] = 0, \\
& \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(3)} d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C(\varphi^{(0)})\partial\theta^{(3)}}{\partial t} + \frac{\partial q_I^{(01)}}{\partial x_I} + \frac{\partial q_3^{(12)}}{\partial \xi} = b^{(1)}, \\
& \lambda_{3J}g_J^{(2)} + \lambda_{33}g_3^{(2)} = -q_3^{(2)}, \\
& g_J^{(2)} = \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x_J}, \\
& g_3^{(2)} = \frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial \xi}, \\
& \frac{\partial\sigma_{i3}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\sigma_{iJ}^{(2)}}{\partial x_J} = y_i^{(2)}, \\
& \sigma_{i3}^{(3)} = A_{i3KL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(3)} + \tilde{A}_{i3k3}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{k3}^{(3)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(3)}, \\
& \varepsilon_{IJ}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I^{(3)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(3)}}{\partial x_I}\right), \\
& \varepsilon_{I3}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(4)}}{\partial \xi}\right), \\
& \varepsilon_{33}^{(3)} = \frac{\partial u_3^{(4)}}{\partial \xi}, \\
& \Sigma_{3\pm} : q_3^{(2)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm}\delta_{i3}; \\
& \Sigma_S : [q_3^{(2)}] = 0, \quad [\theta^{(3)}] = 0, \quad [\sigma_{i3}^{(3)}] = 0, \quad [u_i^{(4)}] = 0; \\
& \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(4)} d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

После введения функций $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)}$ перепишем уравнения равновесия из системы (2.20):

$$y_i^{(0)} + \chi y_i^{(1)} + \chi^2 y_i^{(2)} + \dots = 0. \tag{2.25}$$

Функции $\sigma_{ij}^{(0)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, u_j^{(1)}$ являются решением локальной задачи нулевого приближения (2.21), это решение зависит от перемещений $u_j^{(0)}(x_j)$ и теплового потока (исходные данные), а также от локальной координаты. Далее функции $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ подаются на вход задачи (2.22), после решения которой, получаем функции $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$, в свою очередь последние являются входными данными к задаче (2.23). Решением задачи (2.23) являются функции $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ и т.д.

2.4 Решение задач нулевого приближения

Решение задач (2.21) – (2.24) будем искать в аналитическом виде, это возможно, поскольку задачи являются одномерными по локальной координате.

Задача поиска относительных объемных концентраций фаз и задача нестационарной теплопроводности в системе (2.21) решаются отдельно от задачи механического равновесия, ввиду того, что задача термоупругости является несвязанной. Пусть решена задача теплопроводности (2.26), любым численным методом, и найдено распределение температур $\theta^{(0)}(\xi, x_j, t)$.

$$\begin{aligned} \frac{C(\varphi^{(0)})\partial\theta^{(0)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\lambda_{33} \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial\xi} \right), \\ \Sigma_{3\pm}: \quad -\lambda_{33} \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial\xi} &= \pm q_{e\pm}; \quad \Sigma_s: \quad \left[\lambda_{33} \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial\xi} \right] = 0, \quad [\theta^{(0)}] = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для локальной задачи (2.21) решение уравнений равновесия с граничными условиями принимает вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi: -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}. \quad (2.27)$$

Подставим в (2.27) соотношение (2.19) для $\sigma_{i3}^{(0)}$, при этом получим

$$A_{i3KL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{A}_{i3k3}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{k3}^{(0)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(0)} = 0. \quad (2.28)$$

Из (2.28) легко увидеть, что деформации $\varepsilon_{k3}^{(0)}$ можно записать:

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -\tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \left(A_{i3KL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(0)} - A_{i3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(0)} \right), \quad (2.29)$$

где \tilde{A}_{i3k3}^{-1} обратная к \tilde{A}_{i3k3} матрица. Формулу для деформаций $\varepsilon_{k3}^{(0)}$ из выражений (2.15) подставим в (2.29), тогда после интегрирования с учетом

условий $\int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(1)} d\xi = 0$, запишем перемещения $u_i^{(1)}$ в виде:

$$\begin{aligned} u_I^{(1)} &= -\xi \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} + \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{IKL} - U_I^T, \\ u_3 &= \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL} - U_3^T. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В записи перемещений (2.30) введены обозначения функций с учетом, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_J)$, согласно (2.15), не зависят от локальной координаты ξ :

$$\begin{aligned}
U_{iKL}(\xi) &= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3KL}(\varphi^{(0)}) d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3KL}(\varphi^{(0)}) d\xi = \\
&= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} Z_{iKL} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} Z_{iKL} d\xi = -2 \langle Z_{iKL} \rangle_{\xi} \\
U_i^T(\xi) &= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3kl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3kl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi = \\
&= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} Z_{ikl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} Z_{ikl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi, \\
Z_{iKL}(\varphi^{(0)}) &= \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3KL}(\varphi^{(0)}), \\
Z_{ikl}(\varphi^{(0)}) &= \tilde{A}_{i3j3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{j3kl}(\varphi^{(0)}).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

В (2.31) введены обозначения:

$$\langle f(\xi) \rangle_{\xi} = \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - \left\langle \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \right\rangle, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(1)} d\xi.$$

Если формулу (2.29) учесть в соотношении (2.19), получим отличные от нуля напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$:

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)} - A_{IJkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \tag{2.32}$$

$$A_{IJkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) = A_{IJKl}(\varphi^{(0)}) - A_{IJn3}(\varphi^{(0)}) \tilde{A}_{n3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{i3kl}(\varphi^{(0)}). \tag{2.33}$$

2.5 Построение решений задач первого, второго и третьего приближений

Пусть решения задач теплопроводности

$$\begin{aligned}
\frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(n+1)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{33} \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{3J} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x_J} \right) + \frac{\partial}{\partial x_I} \left(\lambda_{I3} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial \xi} \right) \\
\Sigma_{3\pm} : \quad -\lambda_{33} \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial \xi} &= 0; \quad \Sigma_S : \quad \left[\lambda_{33} \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad [\theta^{(n+1)}] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.34}$$

найжены каким-либо численным методом. Решение задач теплопроводности в (2.22), (2.23) и (2.24) строится рекуррентно и отдельно от задач механического равновесия.

Ограничимся нулевым приближением для температуры, поскольку в выражения для напряжений в пластине, с точностью до главных членов разложения, не содержат поправки к полю температуры порядка χ . Для нулевого приближения $\theta^{(0)}(\xi, x_j, t)$ сформулирована одномерная по локальной координате задача нестационарной теплопроводности (2.26).

Выпишем решение уравнений равновесия для задач (2.22), (2.23) и (2.24) совместно с граничными условиями на поверхностях раздела слоев и на нижней поверхности пластины

$$\sigma_{i3}^{(1)} = y_i^{(0)} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} d\xi, \quad (2.35)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = y_i^{(1)} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} d\xi, \quad (2.36)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = y_i^{(2)} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - p_- \delta_{i3} - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} d\xi, \quad (2.37)$$

Сформируем систему уравнений для поиска неизвестных функций $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)}$, исходя из условий существования решений (2.35) – (2.37) для систем (2.22) – (2.24), при выполнении граничных условий $\sigma_{i3}^{(1)} = 0, \sigma_{i3}^{(2)} = 0, \sigma_{i3}^{(3)} = -p_+$ на верхней поверхности пластины:

$$y_i^{(0)} = \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (2.38)$$

$$y_i^{(1)} = \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (2.39)$$

$$y_i^{(2)} = \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} \right\rangle - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \quad (2.40)$$

Перепишем выражения (2.35) – (2.37) для напряжений $\sigma_{i3}^{(n)}$ принимая во внимание соотношения (2.38) – (2.40):

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right) d\xi, \quad (2.41)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \right) d\xi, \quad (2.42)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -\left(p_- + \Delta p \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right) \delta_{i3} + \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} \rangle - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j}\right) d\xi \quad (2.43)$$

При учете в выражении (2.41) соотношения (2.32) напряжения $\sigma_{i3}^{(1)}$

примут вид:

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_j} \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle - A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)})\right) d\xi - \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{T(0)}}{\partial x_j} \rangle - A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{T(0)}}{\partial x_j}\right) d\xi, \quad (2.44)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0.$$

Выделим первое приближение деформаций $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ из второго выражения в формуле (2.19)

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = \tilde{A}_{i3k3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \left(\sigma_{i3}^{(1)} - A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(1)} + A_{i3jl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{jl}^{T(1)}\right) \quad (2.45)$$

Подставляя в (2.45) выражение для $\sigma_{i3}^{(1)}$ по (2.44), деформации $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k3}^{(1)} = & -\tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{i3jl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{jl}^{T(1)} - \\ & -\tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_j} \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle - A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)})\right) d\xi - \\ & -\tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{T(0)}}{\partial x_j} \rangle - A_{ijkl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{T(0)}}{\partial x_j}\right) d\xi \end{aligned} \quad (2.46)$$

Найдем первое приближение напряжения, для этого учтем соотношение (2.46) в соотношениях для напряжений из (2.19) при $n=1$:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(1)} + V_{IJKLM}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M} - \sigma_{IJ}^{T(1)},$$

$$V_{IJKLM}^{(0)}(\varphi^{(0)}) = -A_{IJK3}(\varphi^{(0)}) \tilde{A}_{k3P3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{PMKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle - A_{PMKL}^{(0)}(\varphi^{(0)})\right) d\xi \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{T(1)} = & A_{IJjl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{jl}^{T(1)} + \\ & + A_{IJK3}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \tilde{A}_{k3P3}^{-1}(\varphi^{(0)}) \int_{-0.5}^{\xi} \left(\langle A_{PQjn}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{jn}^{T(0)}}{\partial x_Q} \rangle - A_{PQjn}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{jn}^{T(0)}}{\partial x_Q}\right) d\xi \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения для деформаций из (2.15) и первое выражение (2.30) деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ запишем следующим образом:

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)} - \Phi_{KL}, \quad (2.48)$$

$$\eta_{KL} = -\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_K \partial x_L}, \quad (2.49)$$

$$\Phi_{KLMNS}(\xi) = \frac{1}{2}(U_{KMN}(\xi)\delta_{LS} + U_{LMN}(\xi)\delta_{KS}), \quad (2.50)$$

$$\Phi_{KL}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_K^T(\xi)}{\partial x_L} - \frac{\partial U_L^T(\xi)}{\partial x_K}\right). \quad (2.51)$$

Перепишем соотношения для напряжений (2.47), используя формулу (2.48):

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(1)} &= \xi A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)})\eta_{KL} + \tilde{V}_{IJKLM}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M} - \tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)} \\ \tilde{V}_{IJKLM}^{(0)}(\varphi^{(0)}) &= V_{IJKLM}^{(0)}(\varphi^{(0)}) + A_{IJSK}^{(0)}(\varphi^{(0)})\Phi_{PKLM}, \\ \tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)} &= \sigma_{IJ}^{T(1)} + A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)})\Phi_{KL}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.6 Осредненные уравнения пластин с многостадийными фазовыми превращениями

При учете в (2.25) соотношений (2.38) – (2.40), получим

$$\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right\rangle + \chi \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \right\rangle + \chi^2 \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} \right\rangle - \Delta p \delta_{i3} \right) + \dots = 0 \quad (2.53)$$

Левую и правую часть уравнения равновесия системы (2.20) умножим на $(\xi \cdot \chi)$ и далее интегрируя по локальной координате и учитывая, что

$$\left\langle \xi \frac{\partial \sigma_{i3}^{(1)}}{\partial \xi} \right\rangle = - \left\langle \sigma_{i3}^{(1)} \right\rangle, \quad \left\langle \xi \frac{\partial \sigma_{i3}^{(2)}}{\partial \xi} \right\rangle = - \left\langle \sigma_{i3}^{(2)} \right\rangle, \quad \text{получим:}$$

$$\chi \left(\left\langle \xi \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \sigma_{i3}^{(1)} \right\rangle \right) + \chi^2 \left(\left\langle \xi \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \sigma_{i3}^{(2)} \right\rangle \right) + \dots = 0 \quad (2.54)$$

Обозначим усилия N_{IJ} , перерезывающие силы Q_I и моменты M_{IJ} и в пластине

$$\begin{aligned} N_{IJ} &= \left\langle \sigma_{IJ}^{(0)} \right\rangle + \chi \left\langle \sigma_{IJ}^{(1)} \right\rangle + \dots, \\ Q_I &= \chi \left\langle \sigma_{I3}^{(1)} \right\rangle + \chi^2 \left\langle \sigma_{I3}^{(2)} \right\rangle + \dots, \\ M_{IJ} &= \chi \left\langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \right\rangle + \chi^2 \left\langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \right\rangle + \dots. \end{aligned} \quad (2.55)$$

С учетом обозначений запишем уравнения (2.53) и (2.54) в известном виде уравнений моментов и уравнений равновесия для тонких пластин [15]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{II}}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial Q_I}{\partial x_j} &= \chi^2 \Delta p, \\ \frac{\partial M_{II}}{\partial x_j} - Q_I &= 0.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Уравнения (2.56) – осредненные уравнения равновесия тонкой многослойной пластины.

Поскольку в данной работе исследуются тканевые композиционных материалы принадлежащие к моноклинному классу анизотропии, то полученные во второй главе выражения можно существенно упростить, поскольку матрица модулей упругости и матрица теплового расширения содержат не более чем 13 независимых упругих модулей A_{ijkl} и 5 коэффициентов теплового расширения соответственно и имеют следующий вид [16]

$$(A_{ijkl}) = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{2212} \\ & & A_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{3312} \\ & & & 2A_{2323} & \sqrt{2}A_{2313} & 0 \\ сим. & & & & 2A_{1313} & 0 \\ & & & & & 2A_{1212} \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

$$(\alpha_{kl}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица $(\tilde{A}_{i_3 j_3}^{-1})$ принимает вид

$$(\tilde{A}_{i_3 j_3}^{-1}) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1313}^{-1} & \tilde{A}_{1323}^{-1} & 0 \\ \tilde{A}_{1323}^{-1} & \tilde{A}_{2323}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{3333}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для таких материалов все компоненты тензора $Z_{IKL}(\varphi^{(0)}) = A_{I3j3}^{-1}(\varphi^{(0)})A_{j3KL}(\varphi^{(0)})$ равны нулю, а значит и компоненты тензора третьего ранга $U_{IKL}(\xi)$ также будут равны нулю. Отличной от нуля будет матрица $U_{3KL}(\xi)$, она имеет следующий вид

$$U_{IKL}(\xi) = 0, \quad (2.58)$$

$$U_{3KL}(\xi) = 2 \left(\int_{-0.5}^{\xi} \frac{A_{33KL}(\varphi^{(0)})}{A_{3333}(\varphi^{(0)})} d\xi \right) - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{A_{33KL}(\varphi^{(0)})}{A_{3333}(\varphi^{(0)})} d\xi.$$

В ноль обратятся функции $\Phi_{KLMNS}(\xi)$, Φ_{KL} , $V_{IJKLM}^{(0)}(\varphi^{(0)})$, $\tilde{V}_{IJKLM}^{(0)}(\varphi^{(0)})$.

Для исследуемого класса материалов функции $U_i^T(\xi)$ (2.31) являются нулевыми, отличной от нуля будет лишь $U_3^T(\xi)$:

$$U_i^T(\xi) = 0, \quad (2.59)$$

$$U_3^T(\xi) = 2 \left(\int_{-0.5}^{\xi} \frac{A_{33KL}(\varphi^{(0)})}{A_{3333}(\varphi^{(0)})} \varepsilon_{KL}^{T(0)} d\xi \right) - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{A_{33KL}(\varphi^{(0)})}{A_{3333}(\varphi^{(0)})} \varepsilon_{KL}^{T(0)} d\xi.$$

Температурные напряжения 1-го приближения (2.47) принимают вид

$$\sigma_{IJ}^{T(1)} = A_{IjJl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{jl}^{T(1)}. \quad (2.60)$$

2.7 Асимптотическая теория пластин типа Тимошенко с фазовыми превращениями на основе учета перемещений 2-го приближения

Разработанный выше алгоритм до этого этапа вычислений соответствует асимптотической теории пластин типа Кирхгофа-Лява (асимптотическая теория 1-го порядка точности по перемещениям) [15].

Для нахождения перемещений $u_i^{(0)}$ и $u_3^{(0)}$ в этой теории используются осредненные уравнения равновесия (2.54).

Используя кинематическое соотношение из локальной задачи для первого приближения (2.22) находим перемещение $u_3^{(2)}$

$$u_3^{(2)} = \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_\xi = \langle \xi Z_{3KL} \rangle_\xi \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_K \partial x_L} + \langle Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{T(1)} \rangle_\xi \quad (2.61)$$

Для повышения точности теории, дополнительно рассмотрим перемещения не только нулевого и первого, но и 2-го приближения $u_I^{(2)}$ и 3-го приближения $u_3^{(3)}$.

Если алгоритм их вычисления повторить по аналогии с 1-ым приближением, с помощью решения локальных задач (2.22) - (2.24), то получим снова вариант теории пластин Кирхгофа-Лява, так как $u_k^{(2)}$ будут снова выражены через $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$. Применим другой метод – положим, что перемещения $u_I^{(2)}$ имеют линейную зависимость от координаты ξ аналогичную $u_I^{(1)}$ (формула (2.30)), а перемещение $u_3^{(3)}$ – аналогичную $u_3^{(2)}$

$$\begin{aligned} u_I^{(2)} &= \xi \beta_I^{(2)}, \\ u_3^{(3)} &= - \langle \xi Z_{3KL} \rangle_\xi \frac{\partial \beta_K^{(2)}}{\partial x_L} + \langle Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{T(2)} \rangle_\xi. \end{aligned} \quad (2.62)$$

где $\beta_I^{(2)}(x_I)$ – новые неизвестные функции глобальных координат.

Тогда, подставляя (2.62), в (2.15), находим деформации $\varepsilon_{II}^{(2)}$, $\varepsilon_{33}^{(2)}$ и $\tilde{\varepsilon}_{I3}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I^{(2)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(2)}}{\partial x_I} \right) = \xi \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_I^{(2)}}{\partial x_J} + \frac{\partial \beta_J^{(2)}}{\partial x_I} \right), \\ \varepsilon_{33}^{(2)} &= \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial \xi} = - \xi Z_{3KL} \frac{\partial \beta_K^{(2)}}{\partial x_L} + Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{T(2)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{I3}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(2)}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} \left(U_{3KL} \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_I} + \beta_I^{(2)} - U_3^T \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Поскольку сдвиговые деформации $\varepsilon_{I3}^{(1)}$ были вычислены ранее по формуле (2.46) с помощью перемещений нулевого приближения, то для сдвиговых деформаций, вычисляемых с помощью перемещений 2-го приближения, будем использовать специальное обозначение $\tilde{\varepsilon}_{I3}^{(1)}$.

2.8 Соотношения для напряжений более высоких приближений

Подставляя (2.63) в определяющие соотношения системы (2.19), находим напряжения 2-го приближения

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}^{(2)} &= A_{IJKL}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(2)} + A_{IJ33}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{33}^{(2)} - A_{IJKl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(2)} = \\ &= \xi A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)})\frac{\partial\beta_K^{(2)}}{\partial x_L} - A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(2)}\end{aligned}\quad (2.64)$$

А также касательные напряжения 1-го порядка

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)} &= 2A_{I3M3}(\varphi^{(0)})\tilde{\varepsilon}_{M3}^{(1)} - A_{I3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(1)} = \\ &= A_{I3M3}(\varphi^{(0)})\left(U_{3KL}\frac{\partial\varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M} + \beta_M^{(2)}\right) - A_{I3kl}(\varphi^{(0)})\frac{\partial U_3^T}{\partial x_M} - A_{I3kl}(\varphi^{(0)})\varepsilon_{kl}^{T(1)}\end{aligned}\quad (2.65)$$

Поскольку касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)}$ уже вычислены ранее с помощью перемещений нулевого приближения, то для касательных напряжений, вычисляемых с помощью перемещений 2-го приближения, по аналогии со сдвиговыми деформациями будем использовать специальное обозначение $\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)}$.

2.9 Осредненные определяющие соотношения для пластин с фазовыми превращениями

Подставляя выражения (2.32), (2.52) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$ и выражения (2.64), (2.65) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(2)}$, $\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)}$ в интегралы формул (2.55), получим

$$\begin{aligned}N_{IJ} &= \langle A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle \varepsilon_{KL}^{(0)} + \chi \langle \xi A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle \left(-\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_K \partial x_L} + \chi \frac{\partial \beta_K^{(2)}}{\partial x_L} \right) - \\ &\quad - \langle A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle - \chi \langle A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle - \chi^2 \langle A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(2)} \rangle\end{aligned}\quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}M_{IJ} &= \chi \langle \xi A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle \varepsilon_{KL}^{(0)} + \chi^2 \langle \xi^2 A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \rangle \left(-\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_K \partial x_L} + \chi \frac{\partial \beta_K^{(2)}}{\partial x_L} \right) - \\ &\quad - \chi \langle \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle - \chi^2 \langle \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle - \chi^3 \langle \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(2)} \rangle\end{aligned}\quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
Q_I = \chi < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) > \beta_M^{(2)} + \chi < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) U_{3KL} > \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M} - \\
- \chi < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial U_3^T}{\partial x_M} > - \chi < A_{I3kl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} >
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Введем обозначения для мембранных, смешанных, изгибных а также сдвиговых жесткостей пластины

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) &= < A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) > = < A_{IJKL}(\varphi^{(0)}) > - < A_{IJK3}(\varphi^{(0)}) \tilde{A}_{k3i3}^{-1}(\varphi^{(0)}) A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) > \\
B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) &= \chi < \xi A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) >, \\
\bar{D}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) &= \chi^2 < \xi^2 A_{IJKL}^{(0)}(\varphi^{(0)}) >, \\
G_{IM}(\varphi^{(0)}) &= < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) >, \\
R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) &= \chi < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) U_{3KL} >,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

и для тепловых усилий N_{IJ}^T , моментов M_{IJ}^T и перерезывающих сил Q_I^T в пластине

$$\begin{aligned}
N_{IJ}^T &= < A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} > + \chi < A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} > + \chi^2 < A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(2)} >, \\
M_{IJ}^T &= \chi < A_{I3M3}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial U_3^T}{\partial x_M} > + \chi < A_{I3kl}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} >, \\
Q_I^T &= \chi < \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(0)} > + \chi^2 < \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(1)} > + \chi^3 < \xi A_{IJKl}^{(0)}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{kl}^{T(2)} >
\end{aligned} \tag{2.70}$$

2.10 Осредненный вид кинематических соотношений

Введем углы поворота нормали к срединной поверхности пластины

$$\beta_I = -\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} + \chi \cdot \beta_I^{(2)} \tag{2.71}$$

Тогда

$$\chi \cdot \beta_I^{(2)} = \beta_I + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} \tag{2.72}$$

Введем искривления срединной поверхности пластины

$$\eta_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_I}{\partial x_J} + \frac{\partial \beta_J}{\partial x_I} \right), \tag{2.73}$$

$$\eta_{3J} = \frac{1}{2} \left(\beta_I + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} \right).$$

Тогда выражения для градиентов деформации $\frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_N}$ срединной плоскости и сами деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, зависящие от функций глобальных координат $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J^{(0)}}{\partial x_I} \right), \\ \varepsilon_{IJ,K}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_I^{(0)}}{\partial x_J \partial x_K} + \frac{\partial^2 u_J^{(0)}}{\partial x_I \partial x_K} \right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.11 Осредненный вид системы уравнений равновесия для пластины типа Тимошенко с фазовыми превращениями

С учетом (2.69) – (2.74) осредненные определяющие соотношения (2.66) – (2.68) примут вид

$$N_{IJ} = \bar{A}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \eta_{KL} - N_{IJ}^T, \quad (2.75)$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)} + \bar{D}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \eta_{KL} - M_{IJ}^T, \quad (2.76)$$

$$Q_I = G_{IM}(\varphi^{(0)}) \eta_{3M} + R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M} - Q_I^T. \quad (2.77)$$

Эти выражения отличаются от традиционных уравнений пластин Тимошенко только членом $R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_{KL}^{(0)}}{\partial x_M}$ в выражении для перерезывающей силы и тепловыми членами.

Подставляя далее выражения (2.75) – (2.77) и (2.74) в систему (2.56), с учетом (2.71) – (2.73) получаем систему 5-ти уравнений относительно 5-ти неизвестных функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, β_I :

$$\bar{A}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_J} + B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 \beta_K}{\partial x_L \partial x_J} - \frac{\partial N_{IJ}^T}{\partial x_J} = 0 \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
& B_{IKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_J} + \bar{D}_{IKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 \beta_K}{\partial x_L \partial x_J} - \frac{1}{2} G_{IM}(\varphi^{(0)}) \left(\beta_M + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_M} \right) + \\
& \quad + R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_M} - \frac{\partial M_{IJ}^T}{\partial x_J} - Q_I^T = 0 \\
& \frac{1}{2} G_{IM}(\varphi^{(0)}) \left(\frac{\partial \beta_M}{\partial x_I} + \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_M \partial x_I} \right) + R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^3 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_M \partial x_I} - \frac{\partial^2 M_{IJ}^T}{\partial x_J \partial x_I} - \frac{\partial Q_I^T}{\partial x_I} = \chi^2 \Delta p
\end{aligned}$$

2.12 Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине с фазовыми превращениями

Если из осредненной системы (2.78) получены функции $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, β_I тогда деформации вычисляем из осредненных кинематических соотношений (2.74), и далее из соотношений (2.32) можно получить напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$.

Нулевое приближение поперечного напряжения $\sigma_{33}^{(0)}$ и касательного напряжения $\sigma_{I3}^{(0)}$ обращаются в ноль согласно соотношениям (2.27). Согласно соотношениям (2.44) отличными от нуля являются первое приближение касательных напряжений $\sigma_{I3}^{(1)}$. Первое отличное от нуля нормальное напряжение $\sigma_{33}^{(2)}$ появляется в ряду при χ^2 .

$$\sigma_{33} = -\chi^2 \int_{-0.5}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{3J}^{(1)}}{\partial x_J} \right\rangle - \frac{\partial \sigma_{3J}^{(1)}}{\partial x_J} \right) d\xi + \chi^3 \left(-p_- - \Delta p \left(\xi + \frac{1}{2} \right) + \int_{-0.5}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{3J}^{(2)}}{\partial x_J} \right\rangle - \frac{\partial \sigma_{3J}^{(2)}}{\partial x_J} \right) d\xi \right) \quad (2.79)$$

$$\sigma_{I3} = \chi \sigma_{I3}^{(1)} + \chi^2 \int_{-0.5}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma_{IJ}^{(1)}}{\partial x_J} \right\rangle - \frac{\partial \sigma_{IJ}^{(1)}}{\partial x_J} \right) d\xi \quad (2.80)$$

В формулах (2.79), (2.80) напряжения $\sigma_{I3}^{(1)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$ и $\sigma_{I3}^{(2)}$ вычисляются по формулам (2.44), (2.47) и (2.42).

2.13 Система уравнений термоупругости для пластин из композиционного материала с многостадийными фазовыми превращениями

Запишем итоговую систему уравнений, в которую войдут: система уравнений, описывающая изменения фазового состава композиционного материала в нулевом приближении, уравнение теплопроводности в нулевом приближении, осредненные уравнения равновесия для пластин:

$$\begin{aligned}
 \rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}^{(0)}}{\partial t} &= J_{svw}^{(0)} \varphi_{vw}^{(0)}, \quad w = \{a, b\}, \quad s, v = \overline{1, 4} \\
 \rho_h \frac{\partial \varphi_h^{(0)}}{\partial t} &= J_h^{(0)} \varphi_h^{(0)} f_h(\theta^{(0)}) \\
 \frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\lambda_{33}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial \xi} \right) &= 0, \\
 \bar{A}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_J} + B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 \beta_K}{\partial x_L \partial x_J} - \frac{\partial N_{IJ}^T}{\partial x_J} &= 0, \\
 B_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_J} + \bar{D}_{IJKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 \beta_K}{\partial x_L \partial x_J} - \frac{1}{2} G_{IM}(\varphi^{(0)}) \left(\beta_M + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_M} \right) + \\
 + R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^2 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_M} - \frac{\partial M_{IJ}^T}{\partial x_J} - Q_I^T &= 0 \tag{2.81} \\
 \frac{1}{2} G_{IM}(\varphi^{(0)}) \left(\frac{\partial \beta_M}{\partial x_I} + \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_M \partial x_I} \right) + R_{IMKL}(\varphi^{(0)}) \frac{\partial^3 u_K^{(0)}}{\partial x_L \partial x_M \partial x_I} - \frac{\partial^2 M_{IJ}^T}{\partial x_J \partial x_I} - \frac{\partial Q_I^T}{\partial x_I} &= \chi^2 \Delta p.
 \end{aligned}$$

Система (2.81) дополняется начальными условиями для концентраций фаз, начальными и граничными условиями для уравнения теплопроводности, а также граничными условиями на торцах пластины.

ГЛАВА 3. РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С МНОГОСТАДИЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И ИЗГИБЕ

3.1 Аналитическое решение задачи о прогибе

Построим аналитическое решение задачи о прогибе многослойной пластины из композиционного материала под воздействием равномерно распределенного давления и внешнего равномерного температурного поля, не зависящих от x_1 . Далее по тексту опущено t , так как все величины зависят от времени. Также опущена зависимость от φ , поскольку все величины зависят от вектора концентраций фаз.

Запишем осредненные уравнения равновесия и определяющие соотношения для многослойной пластины из ортотропного материала, учитывая что

$$A_{1111}^{(0)} \neq 0, A_{1122}^{(0)} \neq 0, A_{2323}^{(0)} \neq 0, A_{1212}^{(0)} \neq 0, A_{2222}^{(0)} \neq 0, A_{1133}^{(0)} \neq 0, A_{1313}^{(0)} \neq 0, A_{3333}^{(0)} \neq 0.$$

Из формулы (2.75) получим соотношения для усилий (индексы в (2.75) - (2.77) большие латинские):

$$\begin{aligned} N_{11} &= \bar{A}_{1111} \varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{A}_{1122} \varepsilon_{22}^{(0)} + B_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + B_{1122} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{11}^T, \\ N_{22} &= \bar{A}_{2211} \varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{A}_{2222} \varepsilon_{22}^{(0)} + B_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + B_{2222} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{22}^T, \\ N_{12} &= 2\bar{A}_{1212} \varepsilon_{12}^{(0)} + B_{1212} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + B_{1221} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - N_{12}^T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнениях для усилий (3.1) воспользуемся выражением для осредненных кинематических соотношений (2.74):

$$\begin{aligned} N_{11} &= \bar{A}_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \bar{A}_{1122} \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} + B_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + B_{1122} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{11}^T, \\ N_{22} &= \bar{A}_{2211} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \bar{A}_{2222} \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} + B_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + B_{2222} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{22}^T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$N_{12} = \bar{A}_{1212} \left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} \right) + B_{1212} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + B_{1221} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - N_{12}^T.$$

Аналогично, используя формулы (2.76) можно записать определяющие соотношения для моментов:

$$\begin{aligned} M_{11} &= B_{1111} \varepsilon_{11}^{(0)} + B_{1122} \varepsilon_{22}^{(0)} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \bar{D}_{1122} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - M_{11}^T, \\ M_{22} &= B_{2211} \varepsilon_{11}^{(0)} + B_{2222} \varepsilon_{22}^{(0)} + \bar{D}_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \bar{D}_{2222} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - M_{22}^T, \\ M_{12} &= 2B_{1212} \varepsilon_{12}^{(0)} + \bar{D}_{1212} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \bar{D}_{1221} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - M_{12}^T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Учтем в (3.3) осредненные кинематические соотношения (2.74), получим

$$\begin{aligned} M_{11} &= B_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + B_{1122} \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \bar{D}_{1122} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - M_{11}^T, \\ M_{22} &= B_{2211} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + B_{2222} \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} + \bar{D}_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \bar{D}_{2222} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - M_{22}^T, \\ M_{12} &= B_{1212} \left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} \right) + \bar{D}_{1212} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \bar{D}_{1221} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - M_{12}^T. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно (2.58) в выражение для компонент тензора $U_{3KL}(\xi)$ входят константы $A_{3333} \neq 0$ и A_{33KL} , не равные нулю, при индексах $K=L$, тогда лишь $U_{311} \neq 0$ и $U_{322} \neq 0$. Из (2.69) легко заметить, что выражение для R_{IMKL} имеет смысл только при индексах $K=L$ и $I=M$ (поскольку $A_{I3M3} \neq 0$), а именно отличны от нуля $R_{IKK} \neq 0$ т.е. $R_{1111} \neq 0$, $R_{1122} \neq 0$, $R_{2211} \neq 0$, $R_{2222} \neq 0$. Аналогично, поскольку лишь $A_{I3I3} \neq 0$, тогда сдвиговые жесткости пластины $G_{II} \neq 0$. Оставляя в (2.77) только не равные нулю величины, перепишем выражение для перерезывающих сил:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{G_{11}}{2} \left(\beta_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right) + R_{1111} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + R_{1122} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(0)}}{\partial x_1} - Q_1^T, \\ Q_2 &= \frac{G_{22}}{2} \left(\beta_2 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} \right) + R_{2211} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_2} + R_{2222} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(0)}}{\partial x_2} - Q_2^T. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заменим в (3.5) градиент деформаций, используя осредненные кинематические соотношения (2.74):

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{G_{11}}{2} \left(\beta_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right) + R_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + R_{1122} \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x_2 \partial x_1} - Q_1^T \\
Q_2 &= \frac{G_{22}}{2} \left(\beta_2 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} \right) + R_{2211} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2} + R_{2222} \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x_2^2} - Q_2^T
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Пусть температура зависит только от координаты ξ (зависимость от времени опущена) и не зависит от координат x_i т.е. $\theta^{(0)}(\xi, t)$, при этом любое приближение для тепловой деформации имеет вид: $\varepsilon_{ij}^{T(m)}(\xi) = \alpha_{ij} \theta^{(m)}(\xi)$, а значит тепловые усилия, моменты и перерезывающие силы зависят только от специальной координаты ξ .

Решение сводится к одномерной задаче т.е. искомые величины зависят только от одной координаты $u_3^{(0)}(x_1)$ $u_1^{(0)}(x_1)$ $u_2^{(0)}(x_1)$ $\beta_1(x_1)$. Предполагаем, что перемещения $u_2(x_1) = 0$, тогда по (2.71) $\beta_2 = 0$.

Поскольку $u_1^{(0)}$ не зависит от координаты x_2 , тогда

$$\xi_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Из осредненных уравнений равновесия (2.56) $\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} = 0$ получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Из формулы (2.70) следует, что $\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0$

Так как рассматривается изгиб и одноосное растяжение многослойной пластины $u_2^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{12}^{(0)} = 0$, из формулы (3.2) очевидно, что $N_{12} = -N_{12}^T$, тогда система (3.7) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Учитывая предположения, сделанные выше, перепишем выражения для моментов, исключая нулевые слагаемые из (3.4):

$$\begin{aligned} M_{11} &= B_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - M_{11}^T, \\ M_{22} &= B_{2211} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \bar{D}_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - M_{22}^T, \\ M_{12} &= -M_{12}^T. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогично, получим новые соотношения для перерезывающих сил из формул (3.6)

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{G_{11}}{2} \left(\beta_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right) + R_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} - Q_1^T, \\ Q_2 &= -Q_2^T. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Запишем уравнения для моментов из (2.56) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полученные соотношения для моментов (3.9) подставим в уравнения моментов (3.11), дифференцируя по соответствующим координатам: Получили систему:

$$\begin{aligned} B_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1^2} - Q_1^T &= 0, \\ Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим что, по (3.10) и $Q_2^T = 0$.

Подставим выражение для перерезывающей силы (3.10) в (3.12), получим:

$$B_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1^2} - \frac{G_{11}}{2} \left(\beta_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right) - R_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + Q_1^T = 0. \quad (3.13)$$

Запишем уравнение для перерезывающих сил из системы (2.56) в виде:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \Delta \bar{p}. \quad (3.14)$$

Подставим выражение для перерезывающей силы (3.10) в (3.14), получим:

$$\frac{G_{11}}{2} \left(\beta_{1,1} + \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_1^2} \right) + R_{1111} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \Delta \bar{p}. \quad (3.15)$$

Уравнения для усилий в системе (2.56) запишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) легко сделать вывод, что:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \bar{A}_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + B_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - N_{11}^T = const, \\ N_{22} &= \bar{A}_{2211} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + B_{2211} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - N_{22}^T = const(x_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Продифференцируем (3.13) по координате x_1 и сложим с уравнением (3.15):

$$B_{1111} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial^3 \beta_1}{\partial x_1^3} = \Delta p. \quad (3.18)$$

Будем считать что, граничные условия для задачи таковы, что правый и левый края пластины свободно оперты, а именно при $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ положим $u_3^{(0)} = 0$, $M_{11} = 0$, $N_{11} = 0$.

Тогда подставляя граничные условия в первое уравнение равновесия (3.17) получим $\bar{A}_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + B_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - N_{11}^T = 0$, отсюда выразим $\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}. \quad (3.19)$$

Подстановка соотношения (3.19) в формулу (3.18) приводит к выражению (3.20), которое может быть записано в виде (3.21).

$$B_{1111} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} + \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \Delta \bar{p}, \quad (3.20)$$

$$\left[\frac{(B_{1111})^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \right] \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \Delta \bar{p}. \quad (3.21)$$

Из (3.21) получим:

$$\frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{(B_{1111})^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}} = f(\xi). \quad (3.22)$$

Продифференцируем (3.22) два раза по x_1 , получим

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2. \quad (3.23)$$

Выразим $\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_1^2}$ из (3.15):

$$\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_1^2} = \frac{2\Delta \bar{p}}{G_{11}} - \frac{2R_{1111}}{G_{11}} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}. \quad (3.24)$$

Подставим (3.22), (3.19) и (3.23) в (3.24), получим:

$$\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_1^2} = \frac{2\Delta \bar{p}}{G_{11}} - \frac{2R_{1111}}{G_{11}} \cdot \frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{(B_{1111})^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}} - \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right). \quad (3.25)$$

Для удобства записи введем обозначение:

$$g(\xi) = \frac{2\Delta \bar{p}}{G_{11}} - \frac{2R_{1111}}{G_{11}} \cdot \frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{(B_{1111})^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}} - \frac{N_{11}^T}{B_{1111}}. \quad (3.26)$$

Раскроем скобки в формуле (3.25) и проинтегрируем 2 раза

$$\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{f(\xi) \bar{A}_{1111}}{6B_{1111}} x_1^3 + \frac{\bar{A}_{1111}}{2B_{1111}} C_1 x_1^2 + \left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2 \right) x_1 + C_3, \quad (3.27)$$

$$u_3^{(0)} = \frac{f(\xi) \bar{A}_{1111}}{24B_{1111}} x_1^4 + \frac{\bar{A}_{1111}}{6B_{1111}} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} \left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2 \right) x_1^2 + C_3 x_1 + C_4. \quad (3.28)$$

Количество констант совпадает с количеством граничных условий.

Поскольку на правом и левом краях пластины заданы граничные условия

$u_3^{(0)}(x_1 = 0, x_1 = 1) = 0$, то из (3.28) получаем, что $C_4 = 0$, а также:

$$\frac{f(\xi) \bar{A}_{1111}}{24B_{1111}} + \frac{\bar{A}_{1111}}{6B_{1111}} C_1 + \frac{1}{2} \left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2 \right) + C_3 = 0. \quad (3.29)$$

Учтем в (3.9) граничное условие $M_{11} = 0$, получим

$$B_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - M_{11}^T = 0. \quad (3.30)$$

В выражение (3.19) для $\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}$ подставим соотношение для $\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}$ по (3.23),

получим:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right). \quad (3.31)$$

Заметим, что при $x_1 = 0$ формула (3.23) имеет вид:

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} = C_2. \quad (3.32)$$

При учете (3.32) соотношение (3.31) упрощается:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2. \quad (3.33)$$

Подставим (3.32) и (3.33) в (3.30), получаем

$$B_{1111} C_2 + \bar{D}_{1111} \left(\frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2 \right) = M_{11}^T. \quad (3.34)$$

Из (3.34) можно явно выразить константу C_2 :

$$C_2 = \frac{B_{1111} M_{11}^T - \bar{D}_{1111} N_{11}^T}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}. \quad (3.35)$$

На правом конце при $x_1 = 1$ формулы (3.23) и (3.31) приобретают вид:

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{f(\xi)}{2} + C_1 + C_2, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_1 + C_2 \right). \quad (3.37)$$

Произведем подстановку (3.36), (3.37) в соотношение (3.30)

$$B_{1111} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_1 + C_2 \right) + \bar{D}_{1111} \left(\frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_1 + C_2 \right) \right) = M_{11}^T. \quad (3.38)$$

откуда выразим C_1

$$C_1 \left(B_{1111} - \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \right) = M_{11}^T - B_{1111} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_2 \right) - \bar{D}_{1111} \left(\frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_2 \right) \right) \quad (3.39)$$

$$C_1 = \frac{M_{11}^T - B_{1111} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_2 \right) - \bar{D}_{1111} \left(\frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} + C_2 \right) \right)}{\left(B_{1111} - \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \right)}. \quad (3.40)$$

Из (3.29) можно выразить C_3

$$C_3 = -\frac{f(\xi) \bar{A}_{1111}}{24 B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{6 B_{1111}} C_1 - \frac{1}{2} \left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} C_2 \right). \quad (3.41)$$

Таким образом, C_1 находим из граничного условия $M_{11} \Big|_{(x_1=1)} = 0$,

C_2 находим из $M_{11} \Big|_{(x_1=0)} = 0$, C_3 находим из $u_3^{(0)} \Big|_{(x_1=1)} = 0$,

C_4 находим из $u_3^{(0)} \Big|_{(x_1=0)} = 0$,

Интегрируя (3.23) запишем соотношение для перемещения

$$u_1^{(0)} = \frac{f(\xi)}{6} x_1^3 + C_1 \frac{x_1^2}{2} + C_2 x_1 + C_5. \quad (3.42)$$

Интегрируя (3.19) запишем соотношение для угла поворота нормали относительно срединной поверхности:

$$\beta_1 = -\frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} u_1^{(0)} + \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} x_1 + C_6. \quad (3.43)$$

Остались граничные условия на усилия $N_{11} \Big|_{(x_1=0)} = 0$, $N_{11} \Big|_{(x_1=1)} = 0$, но в N_{11} не входят C_5 , C_6

C_6 можно найти из условий (2.56) и (3.11).

C_5 можно найти из условия $u_3^{(0)} \Big|_{(x_1=0,5)} = 0,5$.

Рассмотрим случай решения задачи о прогибе, когда левый конец пластины закреплен, а правый свободно оперт. В этом случае имеем

при $x_1 = 0$:

$$u_3^{(0)} = 0, u_1^{(0)} = 0, \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} = 0, \beta_1 = 0, \quad (3.44)$$

а при $x_1 = 1$:

$$u_3^{(0)} = 0, N_{11} = 0, M_{11} = 0. \quad (3.45)$$

Подставим в первое уравнение (3.16) граничное условие для правого конца и выразим $\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}. \quad (3.46)$$

Продифференцируем (3.46) два раза по x_1 и подставим в (3.18)

$$B_{1111} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\bar{D}_{1111} N_{11}^T}{B_{1111}} \right) - \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \Delta p. \quad (3.47)$$

В последнем соотношении второе слагаемое обнуляется, тогда выражение для $\frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3}$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} = \frac{\Delta p B_{1111}}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}. \quad (3.48)$$

Обозначим правую часть (3.48) как

$$f(\xi) = \frac{\Delta p B_{1111}}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}. \quad (3.49)$$

Тогда после интегрирования (3.48) получим выражение для $u_1^{(0)}$

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2, \quad (3.50)$$

$$u_1^{(0)} = \frac{f(\xi)}{6} x_1^3 + \frac{C_1}{2} x_1^2 + C_2 x_1 + C_5. \quad (3.51)$$

После интегрирования (3.46) будет иметь вид:

$$\beta_1 = -\frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} u_1^{(0)} + \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} x_1 + C_6.$$

Из (3.27) и (3.28) знаем выражения для $u_3^{(0)}$ и $u_{3,1}^{(0)}$, принимая во внимание граничные условия на левом конце можно заключить, что из условий

$$u_1^{(0)} \Big|_{(x_1=0)} = 0, \quad \gamma_1 \Big|_{(x_1=0)} = 0, \quad u_3^{(0)} \Big|_{(x_1=0)} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \Big|_{(x_1=0)} = 0.$$

обращаются в ноль соответствующие константы, а именно $C_5 = 0$, $C_6 = 0$, $C_4 = 0$, $C_3 = 0$.

В соотношении для моментов (3.9) учтем граничные условия на правом конце

$$B_{1111} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} \Big|_{(x_1=1)} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \Big|_{(x_1=1)} - M_{11}^T = 0. \quad (3.52)$$

В выражение (3.46) подставим (3.50):

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right). \quad (3.53)$$

В соотношение для моментов (3.9) подставим (3.50) и (3.53) и преобразуем:

$$B_{1111} \left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right) + \bar{D}_{1111} \frac{N_{11}^T}{B_{1111}} - \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right) - M_{11}^T = 0 \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{f(\xi)}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right) \left(B_{1111} - \frac{\bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}{B_{1111}} \right) = M_{11}^T - \bar{D}_{1111} \frac{N_{11}^T}{B_{1111}}. \quad (3.55)$$

Тогда из (3.55) имеем:

$$\left(\frac{f}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right) = \frac{B_{1111} M_{11}^T - \bar{D}_{1111} N_{11}^T}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}}. \quad (3.56)$$

Обозначим $C_1 + C_2 = h$, и используя граничное условие для правого конца, получим:

$$h = \frac{B_{1111} M_{11}^T - \bar{D}_{1111} N_{11}^T}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111} \bar{A}_{1111}} - \frac{f(\xi)}{2}, \quad (3.57)$$

где функция $f(\xi)$ определена в (3.49).

Из (3.28) и граничного условия $u_3^{(0)} \Big|_{(x_1=1)} = 0$ получаем второе уравнение для

поиска неизвестных констант интегрирования:

$$\frac{f(\xi)\bar{A}_{1111}}{24B_{1111}} + \frac{\bar{A}_{1111}}{6B_{1111}}C_1 + \frac{1}{2}\left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}}C_2\right) = 0. \quad (3.58)$$

Из системы уравнений (3.57) и (3.58) выражения для констант примут вид:

$$C_2 = -\frac{f(\xi)}{8} - \frac{3g(\xi)B_{1111}}{2\bar{A}_{1111}} - \frac{h}{2}, \quad (3.59)$$

$$C_1 = h - C_2.$$

3.2 Тестирование аналитического решения

Построим аналитическое решение задачи о прогибе многослойной пластины из композиционного материала с ортотропными свойствами без воздействия температурного поля, но при действии постоянного давления.

Исключая температурные слагаемые из (3.8), (3.13), (3.15) уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + B_{1111} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1^2} &= 0, \\ \beta_{1,1} + \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_1^2} + R_{1111} \frac{\partial^3 u_1^{(0)}}{\partial x_1^3} &= \frac{2\Delta\bar{p}}{G_{11}}, \\ B_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + \bar{D}_{1111} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1^2} - \frac{G_{11}}{2} \left(\beta_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right) - R_{1111} \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x_1^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Дополним систему граничными условиями, положим на левом и правом концах пластины $u_1^{(0)} = 0$, $u_3^{(0)} = 0$, $\beta_1 = 0$.

Аналитическое решение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= C_1 (x_1^3 - 2x_1^2 + x_1) + C_2 (x_1 - x_1^2), \\ u_3^{(0)} &= C_3 (x_1^4 - 2x_1^3 + x_1^2) + C_4 (x_1 - x_1^2), \\ \beta_1 &= 4C_3 \left(-x_1^3 + \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 \right). \end{aligned}$$

где обозначены константы C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , имеющие вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{B_{1111}\Delta\bar{p}}{6(B_{1111}^2 - \bar{A}_{1111}\bar{D}_{1111})}, \quad C_2 = \frac{-B_{1111}\Delta\bar{p}}{4(B_{1111}^2 - \bar{A}_{1111}\bar{D}_{1111})}, \\ C_3 &= \frac{\bar{A}_{1111}\Delta\bar{p}}{24(B_{1111}^2 - \bar{A}_{1111}\bar{D}_{1111})}, \quad C_4 = \frac{\Delta\bar{p}}{G_{11}} \frac{R_{1111}B_{1111}}{(B_{1111}^2 - \bar{A}_{1111}\bar{D}_{1111})} - \frac{\Delta\bar{p}}{G_{11}}. \end{aligned}$$

Получили, что $u_3^{(0)}$ зависит от модуля сдвига G_{11} , определяемого по соотношению (2.69), именно этим слагаемым отличаются решение для системы (2.78) от асимптотического решения 1-го порядка точности, где перемещения рассматриваются только до 1-го порядка (по напряжениям – более высокого порядка) [15].

3.3. Результаты расчетов для несимметричной многослойной пластины

На рисунках 2.2 – 2.10 приведены результаты численных расчетов для задачи (2.81) о прогибе многослойной пластины равномерным давлением, без учета температурных превращений в материале. Параметры двух расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ пластины	Параметр χ	Толщина, ширина пластины, мм	Давление на верхней поверхности, МПа	Давление на нижней поверхности, МПа
П1	0,025	21	1	0,1
П2	0,07		10	1

Пластина состоит из 3-х слоев, вектор относительных толщин каждого слоя (0,477, 0,237, 0,286). Слои пластины имеют свойства, согласно таблице 2. Первый слой соответствует отрезку $\xi \in [-0,5 - 0,023]$.

Таблица 2

№ слоя	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	E_3 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	7	7	2,7	0,9	0,38	0,38	0,4	0,07	0,08
3	21	21	8	2,7	1,13	1,13	0,12	0,21	0,23

Решение, полученное по асимптотической теории 2-го порядка точности (с учетом перемещений 2-го порядка специальным образом) приведено в сравнении с трехмерным решением, полученным с помощью программного комплекса конечно-элементного анализа ANSYS. Также, к сравнению добавлено решение, полученное с использованием асимптотической теории пластин 1-го порядка точности (1-го порядок по перемещениям, по напряжениям более высокого). Значения напряжений и перемещений

приведены в безразмерном виде. Максимальный прогиб для пластины П2 по асимптотической теории 1-го порядка составляет 59,8% от максимального прогиба трехмерного решения, в то время как максимальный прогиб, рассчитанный по асимптотической теории 2-го порядка составляет 86,1% от максимального прогиба трехмерного решения (рисунок 2.2). Максимальный прогиб пластины П1 по асимптотической теории 1-го порядка точности составляет 87% от максимального прогиба, полученного для трехмерного решения. Максимальный прогиб по уточненной асимптотической теории 2-го порядка составляет 92% по отношению к максимальному прогибу трехмерного решения (рисунок 2.3).

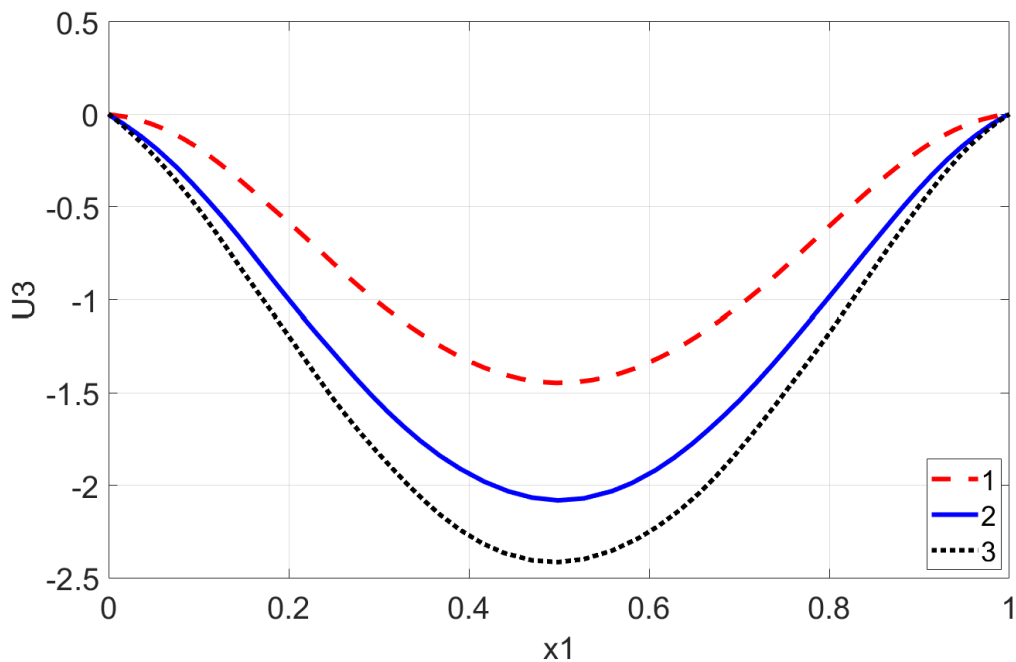


Рисунок 2.2 – Распределение прогиба $u_3^{(0)}$ для пластины П2: 1 – решение по асимптотической теории 1-го порядка, 2 – решение по асимптотической теории 2-го порядка, 3 – трехмерное решение для П2

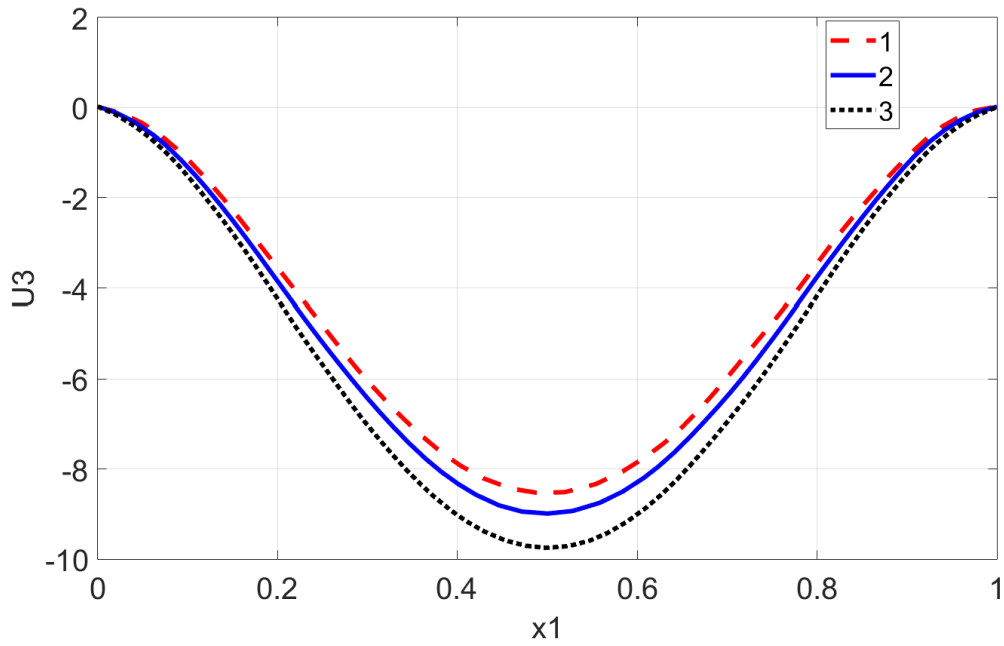


Рисунок 2.3 – Распределение прогиба $u_3^{(0)}$ для пластины П1: 1 – решение по асимптотической теории 1-го порядка, 2 – решение по асимптотической теории 2-го порядка, 3 – трехмерное решение для П1

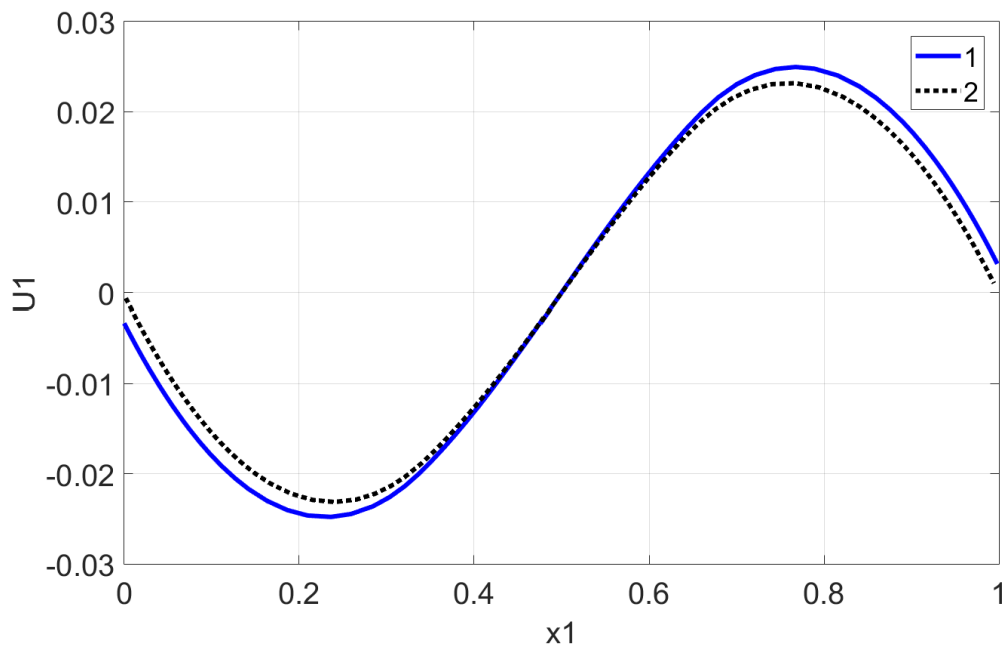


Рисунок 2.4 – Распределение продольного перемещения $u_1^{(0)}$ для пластины П1
1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка,
2 – трехмерное решение для П1

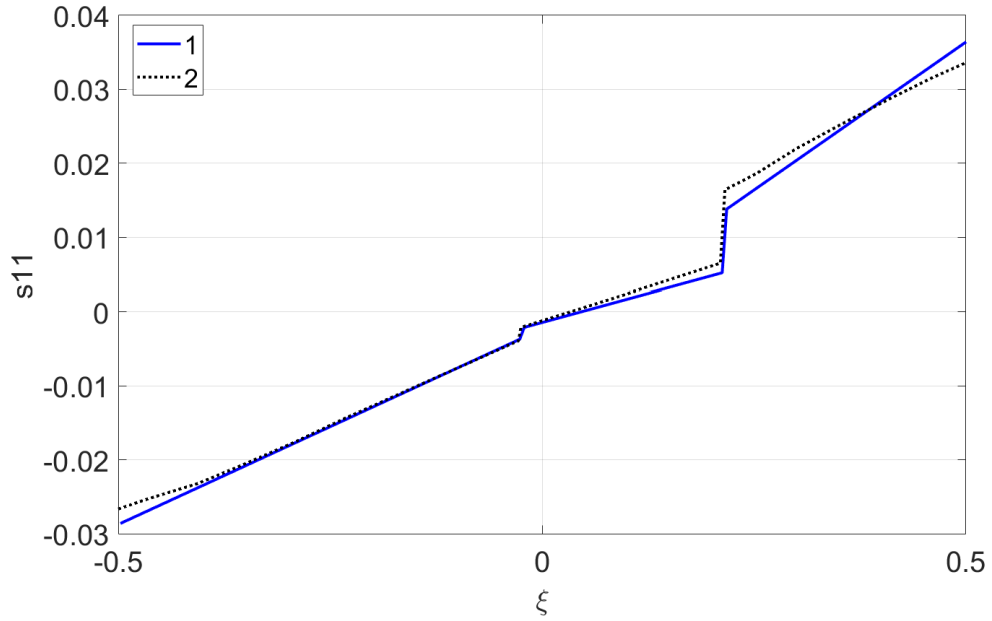


Рисунок 2.5 – Распределение напряжений σ_{11} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П2: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П2

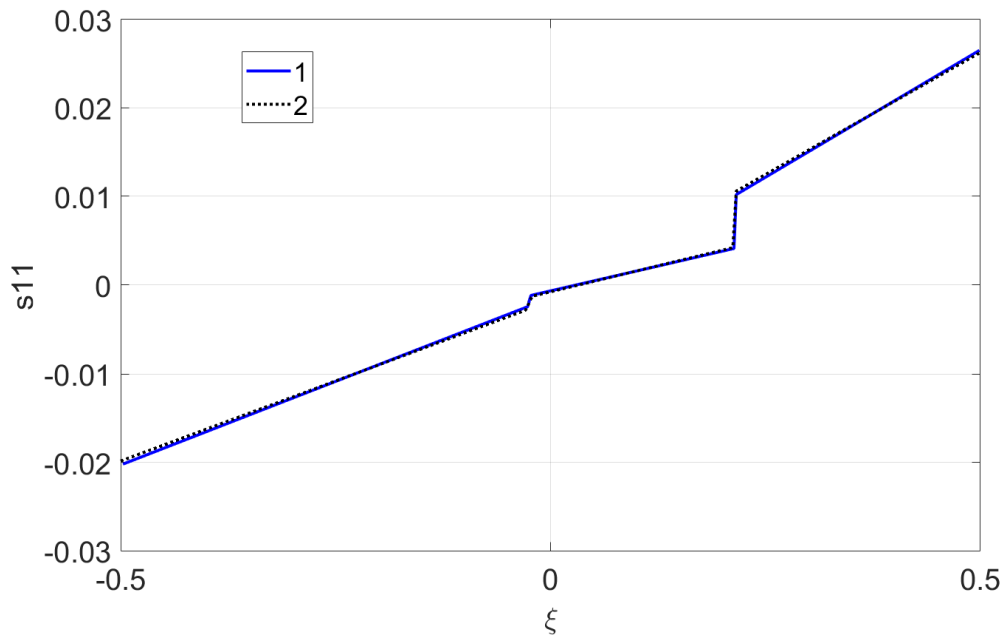


Рисунок 2.6 – Распределение напряжений σ_{11} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П1: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П1

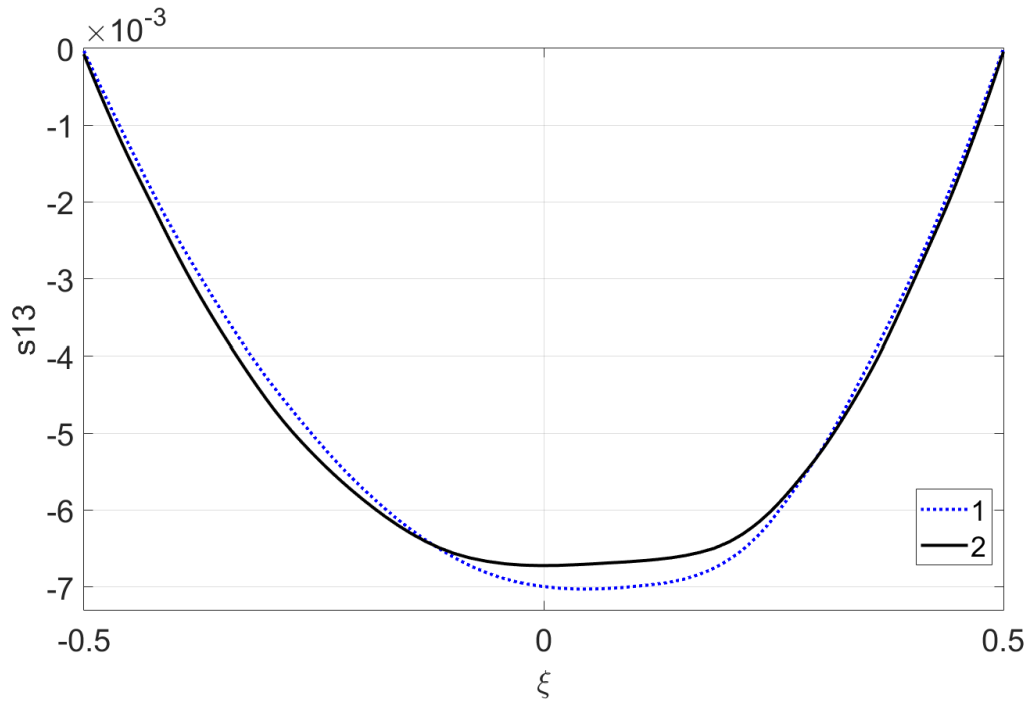


Рисунок 2.7 – Распределение напряжений σ_{13} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П2: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П2

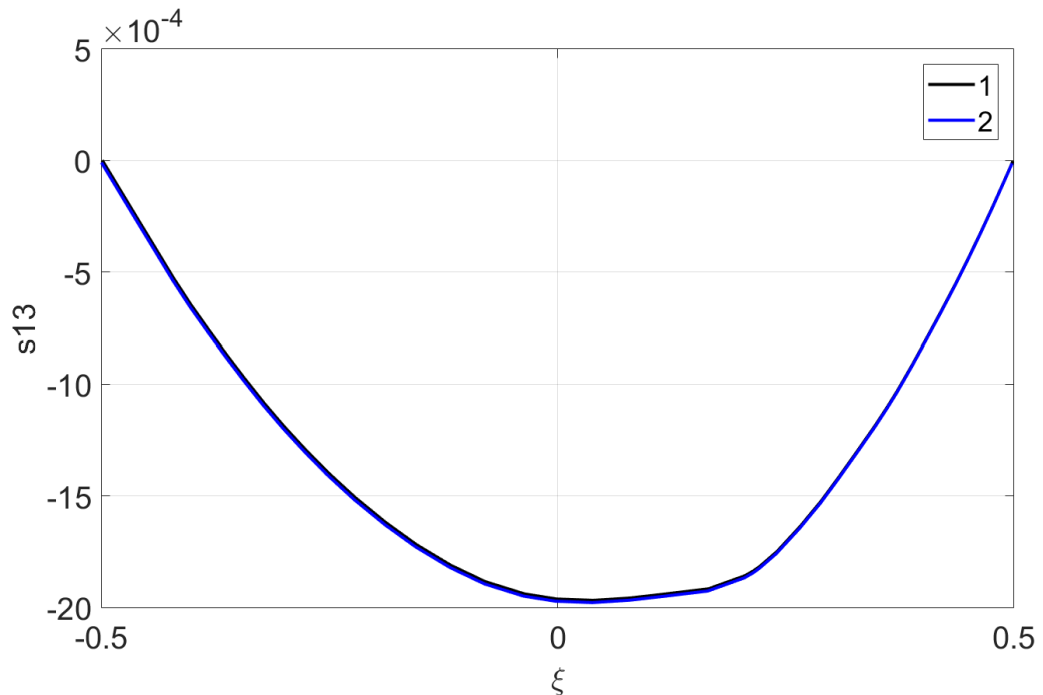


Рисунок 2.8 – Распределение напряжений σ_{13} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П1: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П1

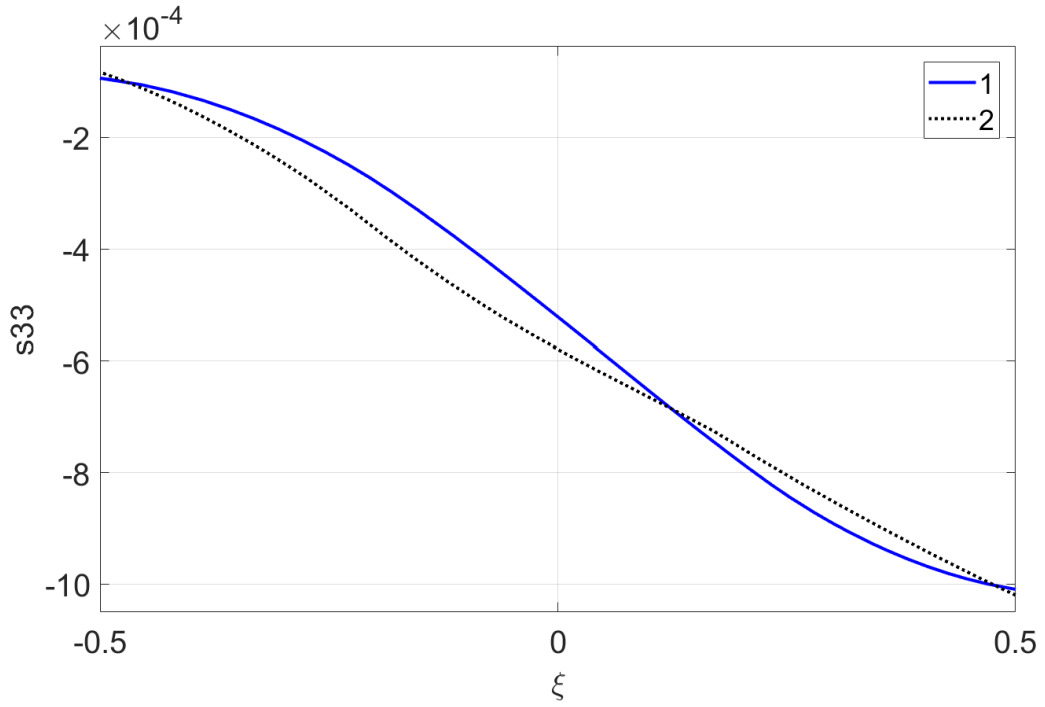


Рисунок 2.9 – Распределение напряжений σ_{33} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П2: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П2

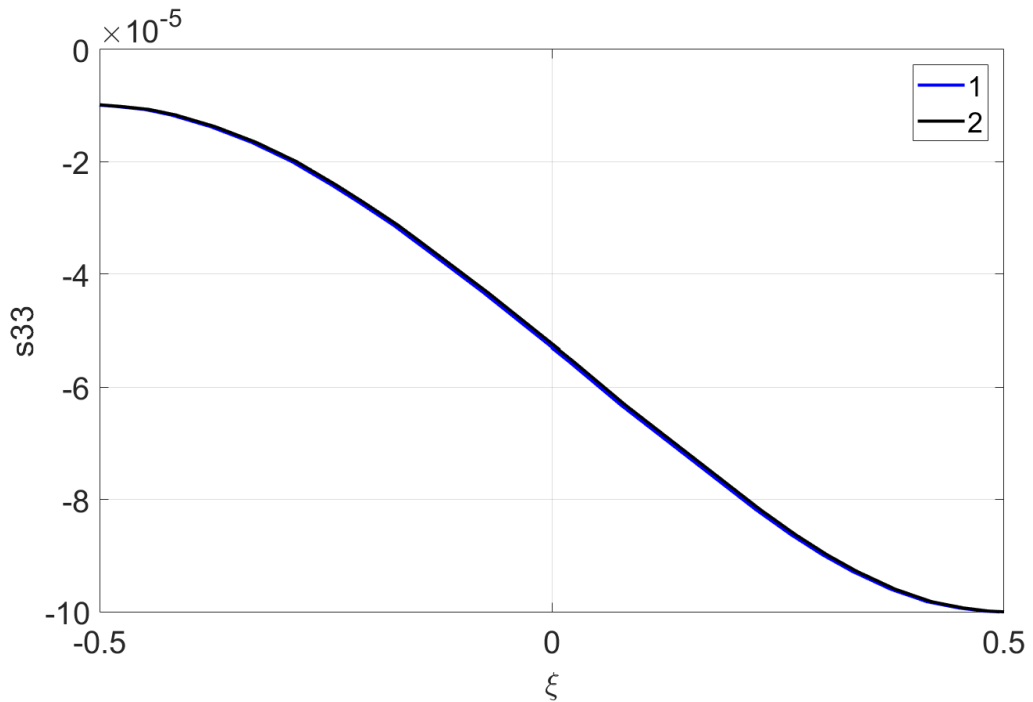


Рисунок 2.10 – Распределение напряжений σ_{33} по толщине в сечении $x_1 = 0.25$ для пластины П1: 1 – решение по асимптотической теории 1-го и 2-го порядка, 2 – трехмерное решение для П1

3.4 Результаты численного расчета деформирования и напряжений в тонкой пластине при неравномерном нагреве и изгибе

На рисунках 3.1 – 3.12 приведены результаты численного моделирования решения задачи о прогибе многослойной пластины при воздействии на верхней поверхности ($\xi = 0,5$) равномерно распределенного давления $p_+ = 0.1$ МПа и равномерного температурного поля θ_{0+} . Левый конец пластины зажат, правый свободно оперт, нижняя поверхность ($\xi = -0,5$) теплоизолирована, толщина пластины 0,025 м, длина 1 м.

На рисунке 3.1 приведено изменение температуры во времени на различных расстояниях от поверхности нагрева. Как показано на рисунке 3.1 на верхней поверхности задана постоянная температура, а слой пластины, находящийся на расстоянии 0,25 от верхней поверхности ($\xi = 0,25$) прогревается быстрее чем слой посередине пластины ($\xi = 0$) и нижняя поверхность ($\xi = -0,5$).

На рисунке 3.2 приведено относительное изменение концентраций пяти фаз в связующем (4-й уровень) в точке при $\xi = 0,25$. В начале прогрева в матрице композиционного материала присутствовала только первая фаза, в конце прогрева остались фазы 4 и 5.

На рисунке 3.3 показано как с увеличением времени прогрева уменьшается концентрация “аморфной” фазы волокна и увеличивается концентрация “кристаллической” фазы волокна на расстоянии 0,25 от верхней поверхности пластины. Для нахождения распределения объемных концентраций в зависимости от температуры для связующего на 4-м и волокна на 3-м структурном уровне использовался неявный метод Эйлера решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3) – (1.6). На рисунках 3.1 – 3.3 время отнесено к характерному времени прогрева.

На рисунке 3.4 приведены графики изменения температуры по толщине в относительные моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4 , такие что $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ в

сечении пластины по координате $x_l=0,75$. Легко увидеть, что максимальное значение температуры 1800 К – на верхней поверхности пластины, а за время t_1 срединная поверхность пластины успевает прогреться до температуры порядка 700 К, в то время как нижняя поверхность прогревается лишь до 400 К. Изменение температуры носит нелинейный характер распределения по толщине, хотя при увеличении времени прогрева можно предположить, что с увеличением времени характер будет стремиться к линейному, об этом свидетельствуют кривые для моментов времени t_2, t_3, t_4 .

Распределение концентраций фаз матрицы и волокна по толщине в сечении $x_l=0,75$ в момент времени t_3 представлено на рисунках 3.5 и 3.6. Согласно рисунку 3.5 на верхней поверхности пластины связующее представляет собой комбинацию 4-й фазы и газовой 5-й фазы, в то время, как на срединной поверхности пластины к моменту времени t_3 1-я фаза отсутствует, основной объем занимают 2 и 3 фазы. На нижней поверхности в связующем к моменту времени t_3 присутствуют две первые фазы: вторая фаза в большем объеме, чем первая.

Согласно рисунку 3.6 на верхней поверхности пластины содержание “аморфной” фазы волокна почти в 4 раза меньше чем “кристаллической”. К моменту времени t_3 на срединной поверхности процесс образования новой фазы волокна только начинается, а на нижней поверхности в волокне присутствует лишь исходная аморфная фаза, это говорит о том, что фазовые превращения в волокне для нижней поверхности к моменту времени t_3 ещё не начались.

Распределения модулей упругости матрицы и волокна в сечении $x_l=0,75$ в три различных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ приведено на рисунке 3.7 (значение модуля упругости отнесено к характерному значению). К моменту времени t_1 фазовые превращения в связующем и волокне начались лишь в части пластины выше срединной поверхности, о чем говорит неизменный модуль упругости по толщине в нижней части пластины. В

момент времени t_1 в точке $\xi = 0,3$ модуль упругости связующего значительно выше чем на верхней поверхности пластины, это показывает, что существует соотношение фаз связующего в некотором диапазоне температур, при котором упругие свойства будут больше, чем при максимальном значении температуры. Это является особенностью предложенной модели фазовых превращений связующего, для которой характерен рост упругих свойств связующего в диапазоне температур 800-1100 К [21].

Распределение компонент тензора модулей упругости тканевого композиционного материала по толщине пластины для сечения $x_1=0,75$ в момент времени t_1 и t_2 приведено на рисунках 3.8 и 3.9, при их сравнении видно, что экстремум модуля упругости композита смещается с течением времени по толщине пластины к нижней поверхности пластины. На рисунке 3.9 наблюдается рост упругих свойств композита как раз до того момента пока идет рост упругих свойств связующего, а упругие свойства волокна только начинают идти на спад. Также присутствует совпадение компонент модуля упругости, например, A_{1111} совпали с A_{2222} , это связано с тем, что волокна направлены по осям Ox_1 и Ox_2 .

На рисунках 3.10 – 3.13 приведены изменения напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{13} по толщине пластины в сечении $x_1=0,75$ в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Поперечные напряжения σ_{11} , σ_{22} повторяют характер изменения модуля упругости: при данных значениях времени прогрева наблюдается рост и максимум в верхних слоях пластины. Изгибное напряжение σ_{33} имеет схожий характер во все 4 момента времени, максимум наблюдается на верхней поверхности, и минимум на нижней поверхности. Касательное напряжение σ_{13} , приведенное на рисунке 3.13, на концах пластины не меняется, но присутствует максимум по толщине пластины, который растет с увеличением времени прогрева и сдвигается к нижней поверхности пластины.

На рисунке 3.14 приведено изменение прогиба пластины по длине в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Прогиб пластины увеличивается с течением времени нелинейно.

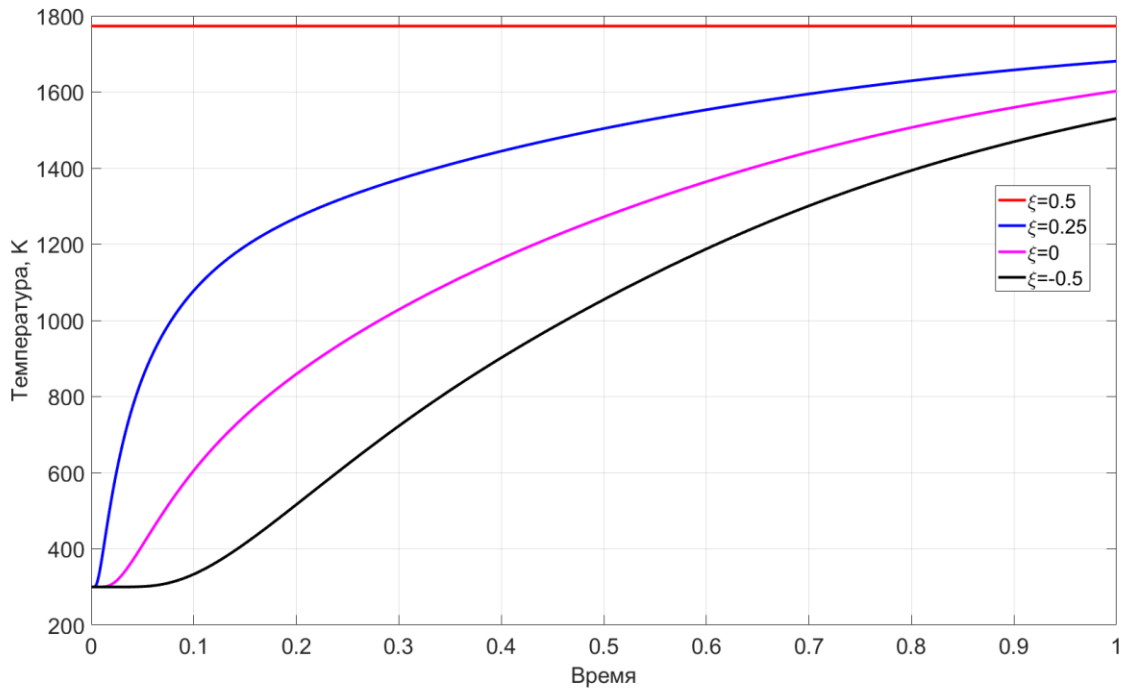


Рисунок 3.1 – Изменение температуры от времени прогрева при $\xi = 0,5, \xi = 0,25, \xi = 0, \xi = -0,5$

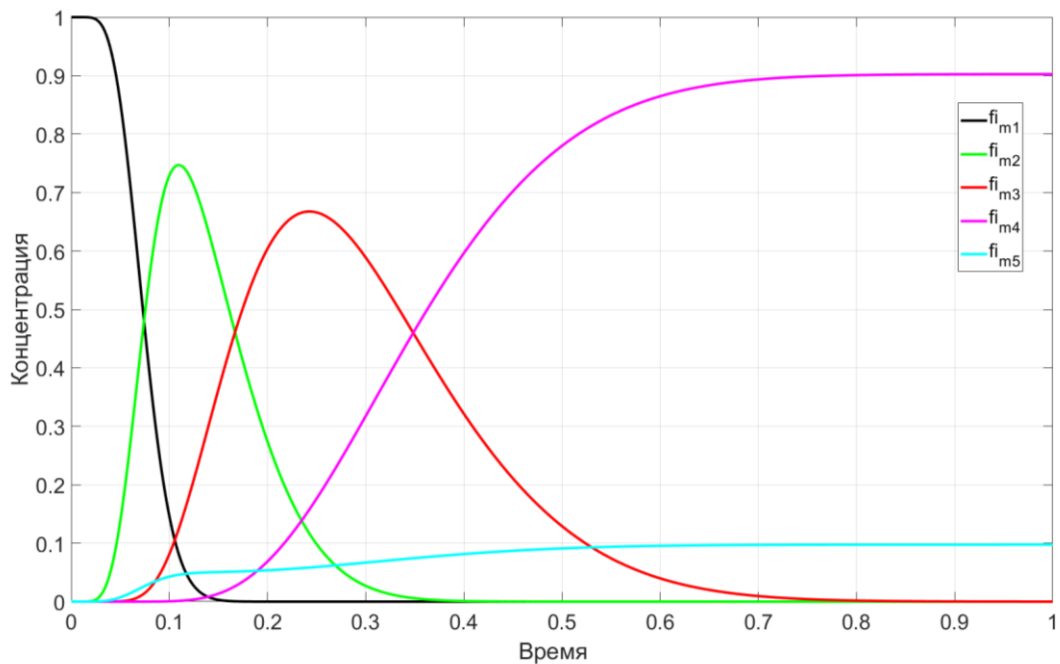


Рисунок 3.2 – Изменение концентраций фаз связующего при $\xi = 0,25$

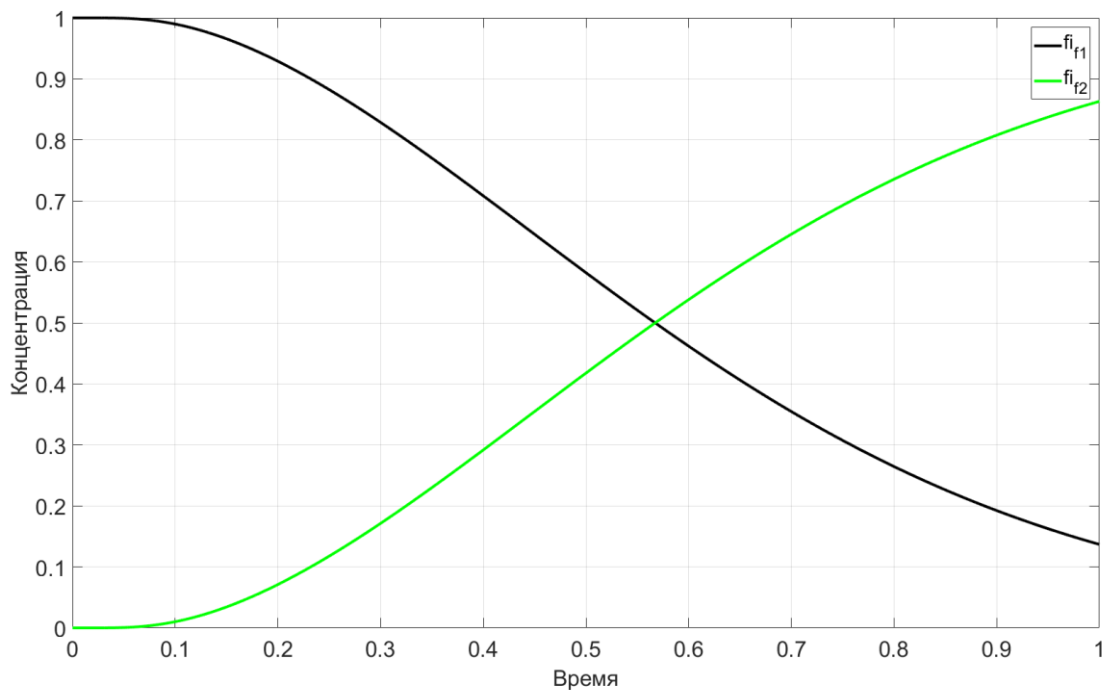


Рисунок 3.3 – Изменение концентрации фаз волокна при $\xi = 0,25$

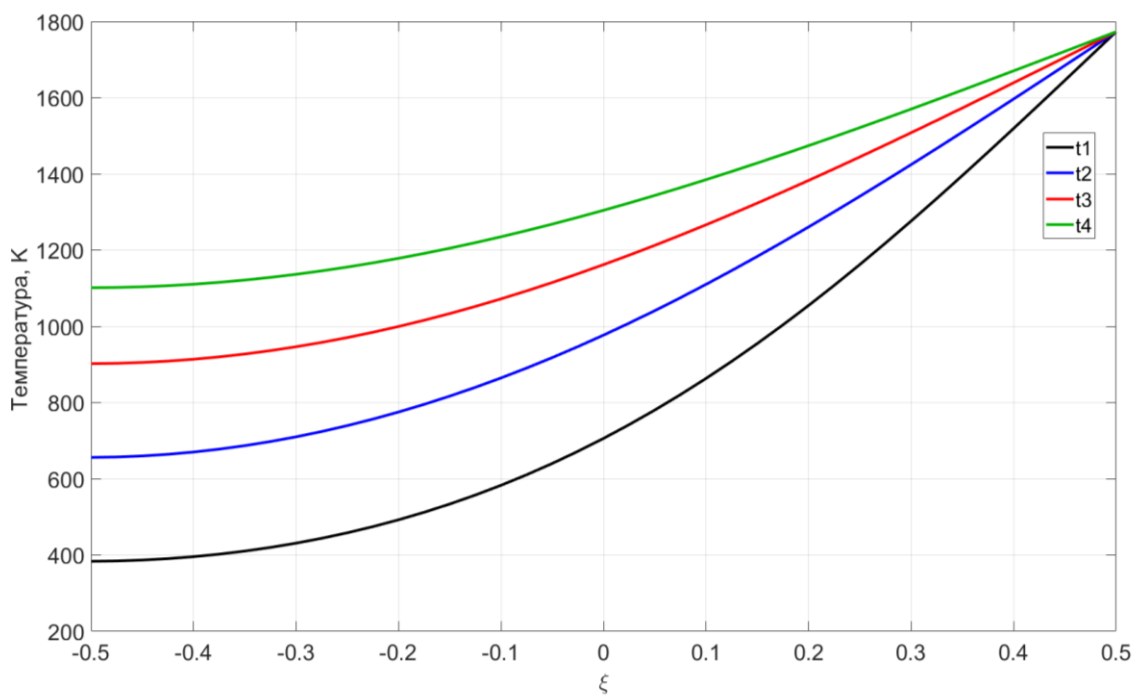


Рисунок 3.4 – Изменение температуры по толщине в сечении пластины по координате $x_l = 0,75$ в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

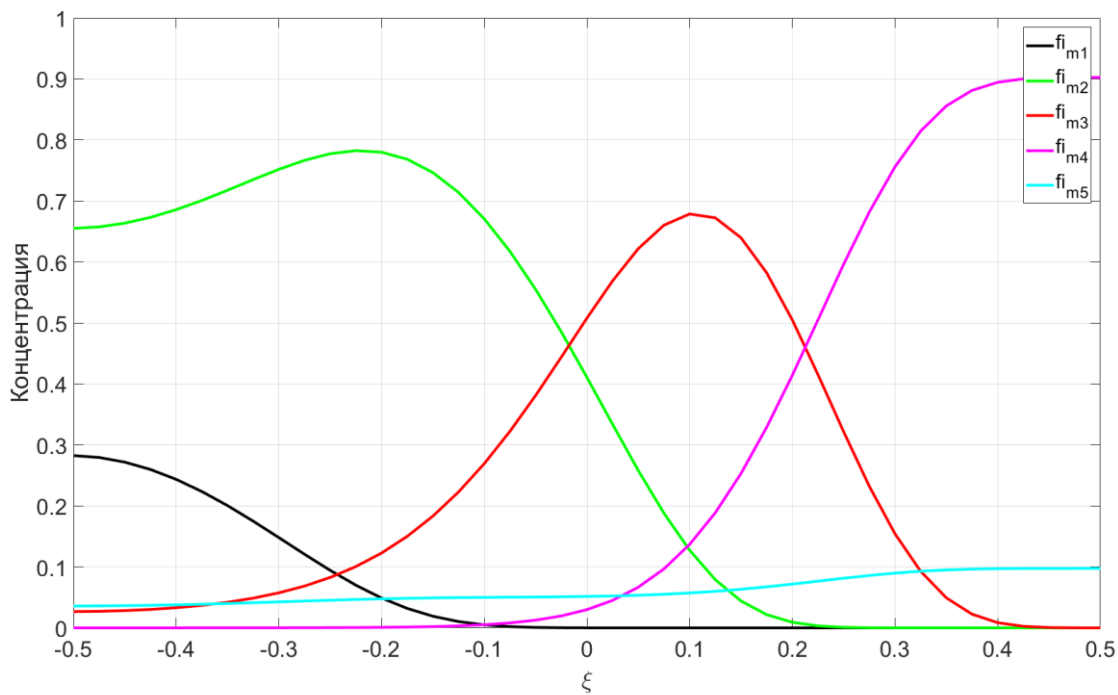


Рисунок 3.5 – Изменение концентрации фаз связующего по толщине
в сечении $x_l=0,75$ в момент времени t_3

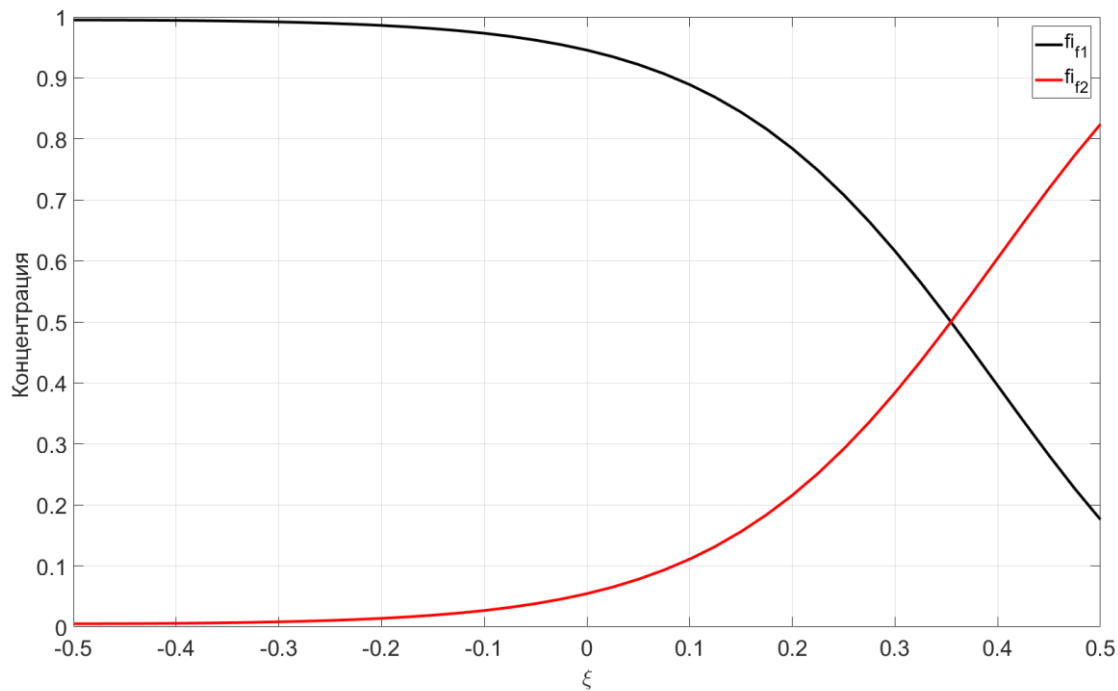


Рисунок 3.6 – Изменение концентрации фаз волокна по толщине
в сечении $x_l=0,75$ в момент времени t_3

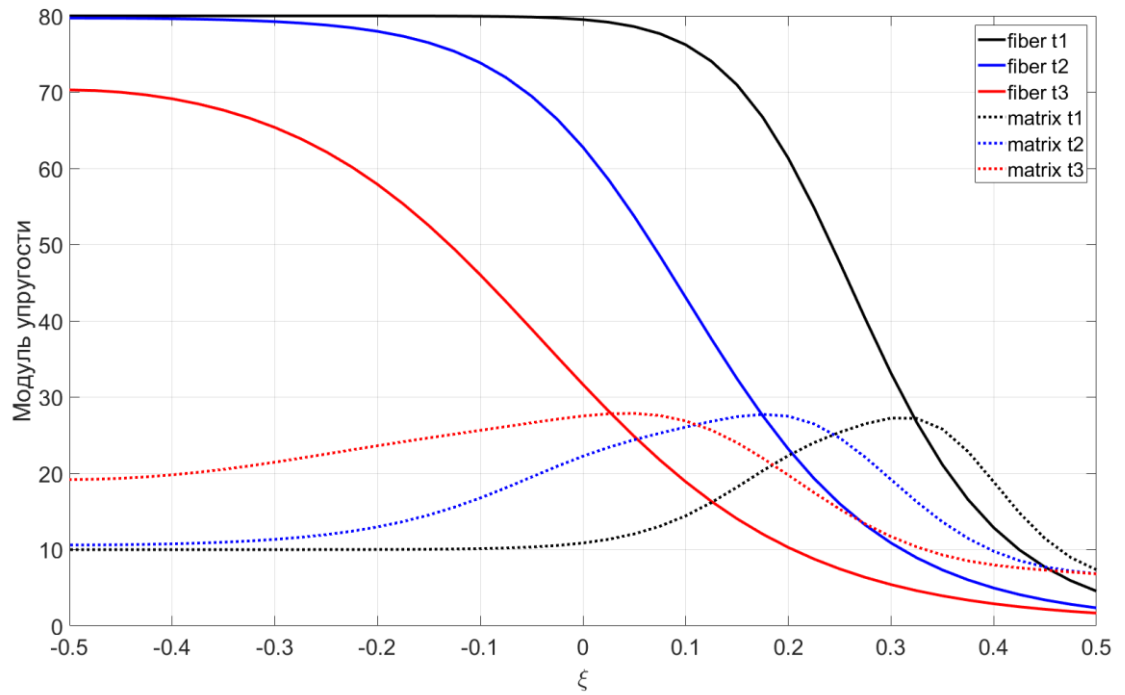


Рисунок 3.7 – Изменение модуля упругости матрицы и волокна в сечении $x_1=0,75$ в три различных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$

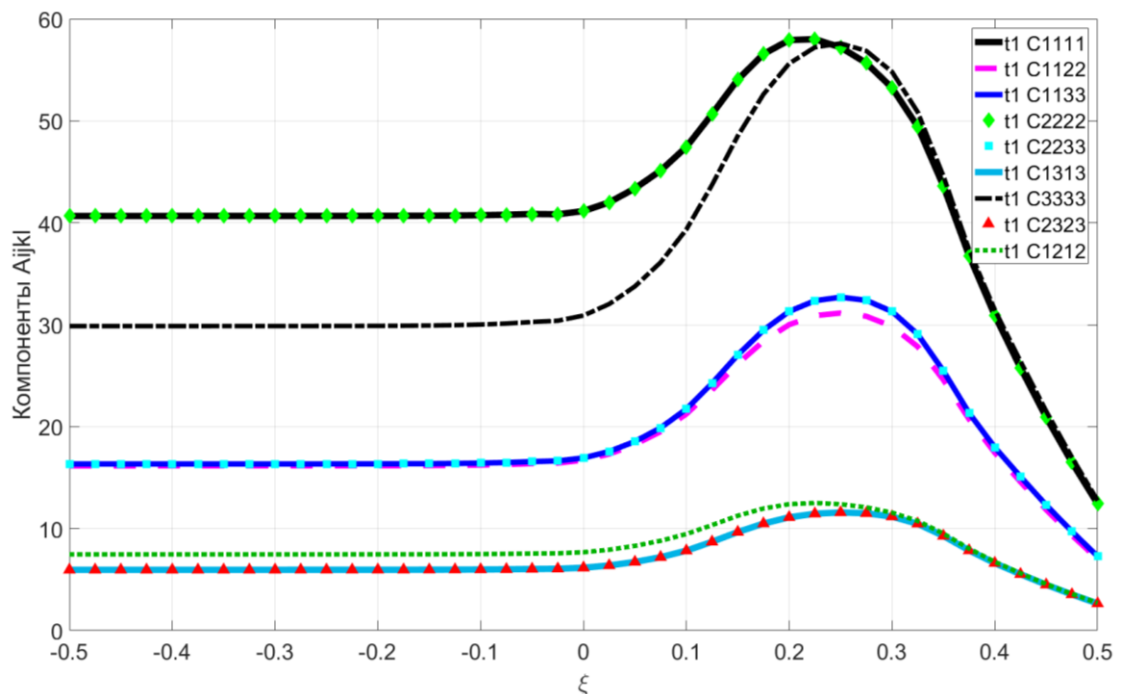


Рисунок 3.8 – Изменение компонент тензора модулей упругости композита A_{ijkl} в сечении $x_1=0,75$ при t_1

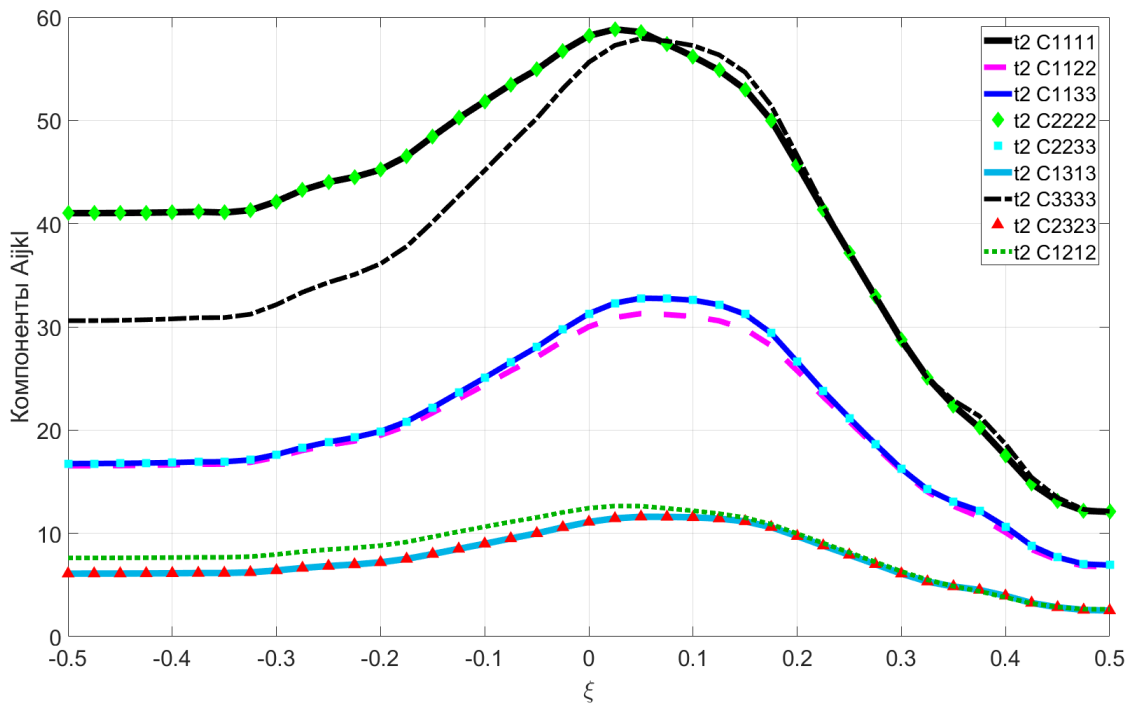


Рисунок 3.9 – Изменение компонент тензора модулей упругости композита A_{ijkl} в сечении $x_I=0,75$ при t_2

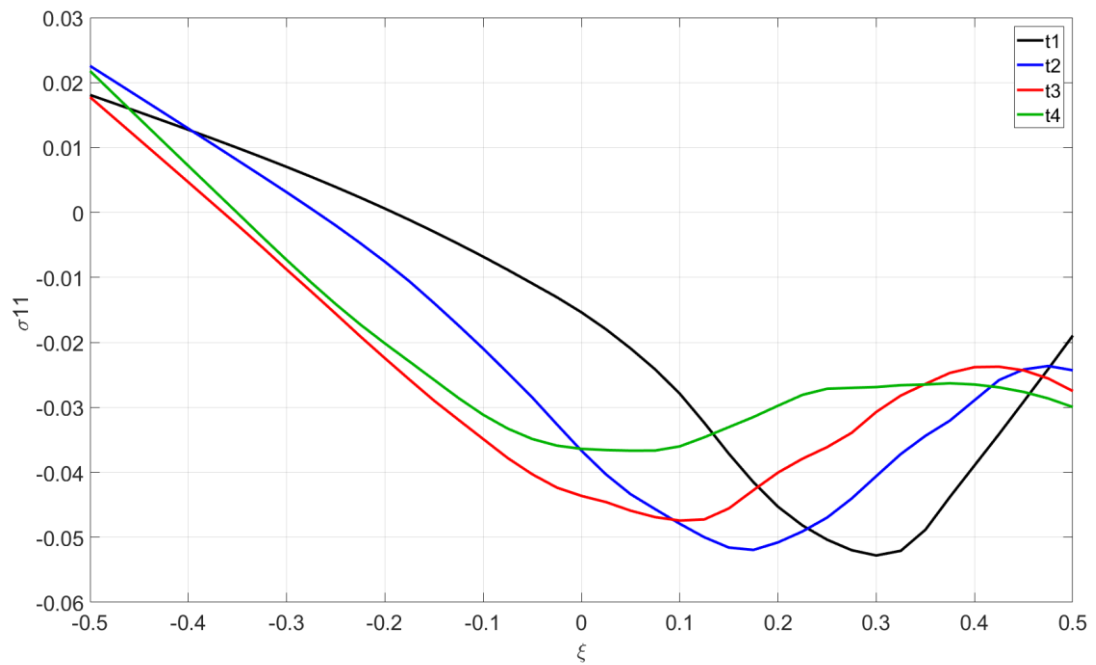


Рисунок 3.10 – Изменение нормального напряжения σ_{11} в сечении $x_I=0,75$

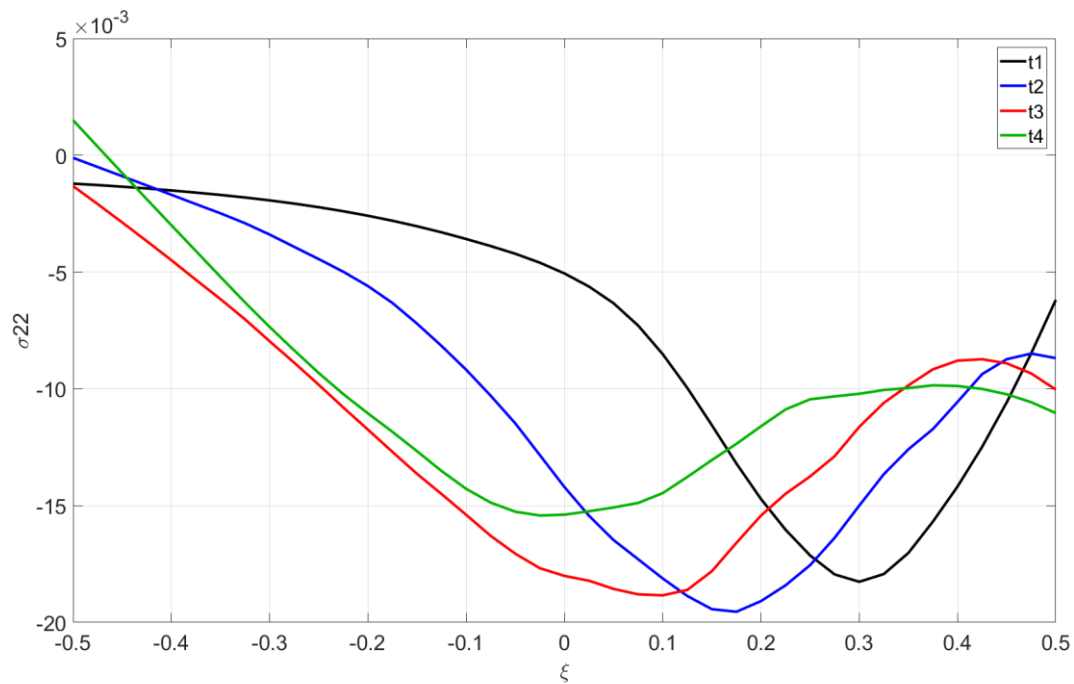


Рисунок 3.11 – Изменение нормального напряжения σ_{22} в сечении $x_I=0,75$

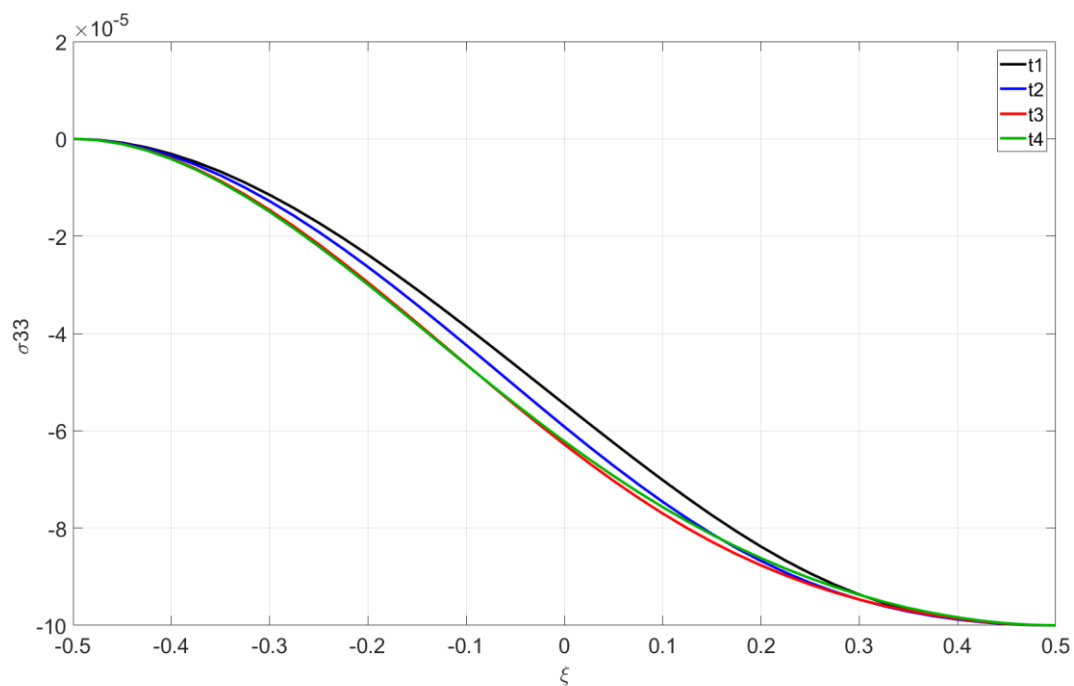


Рисунок 3.12 – Изменение нормального напряжения σ_{33} в сечении $x_I=0,75$

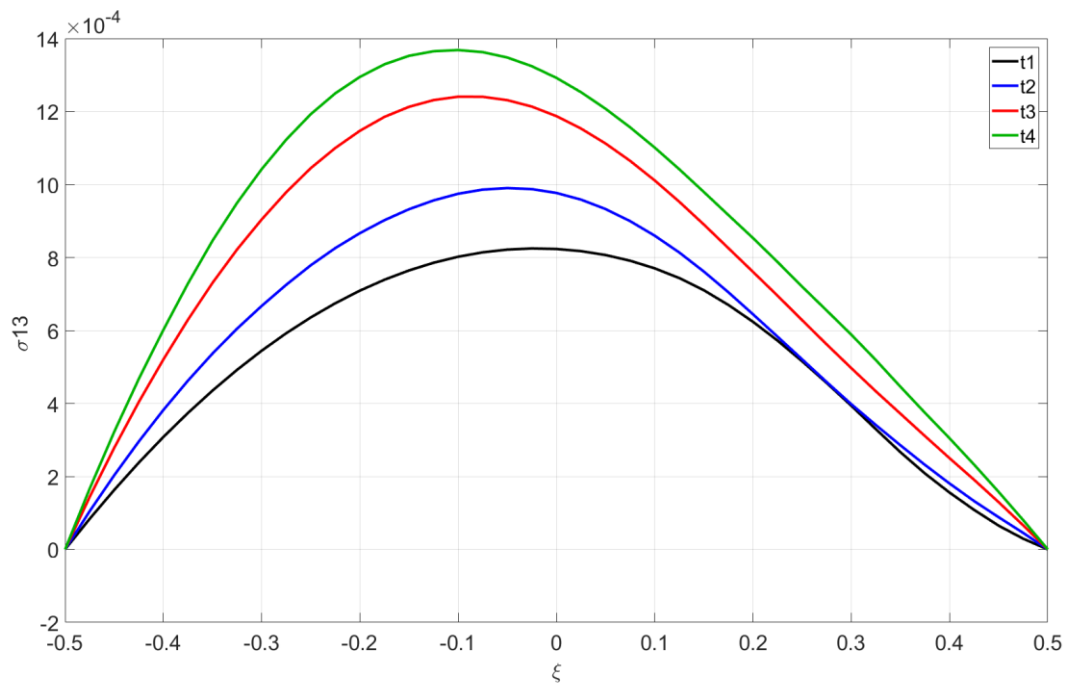


Рисунок 3.13 – Изменение касательного напряжения σ_{13} в сечении $x_1=0,75$

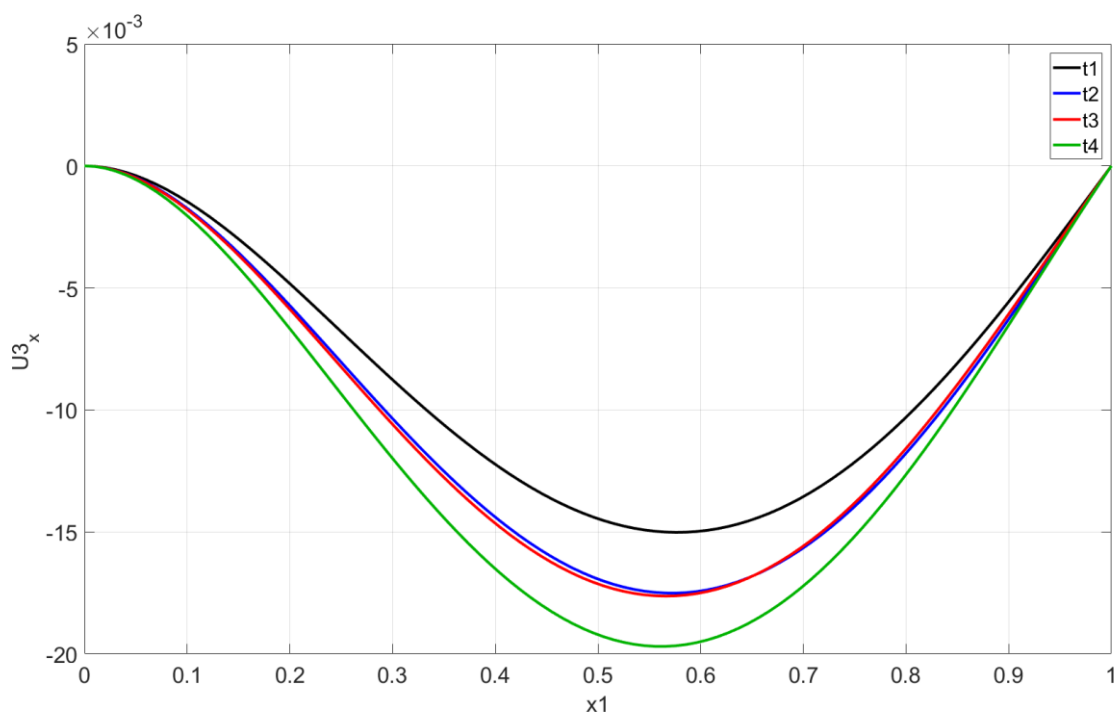


Рисунок 3.14 – Изменение прогиба по длине пластины

На рисунках 3.15 – 3.19 приведены результаты численного моделирования решения задачи о прогибе многослойной пластины для случая когда правый и левый концы пластины свободно оперты. Изменение граничных условий не влияет на распределения величин, приведенных на рисунках 3.1 – 3.9. Характеры распределения напряжений по толщине пластины в целом аналогичен характеру распределения для случая когда левый конец пластины защимлен, а правый свободен. Прогиб пластины растет с увеличением времени прогрева.

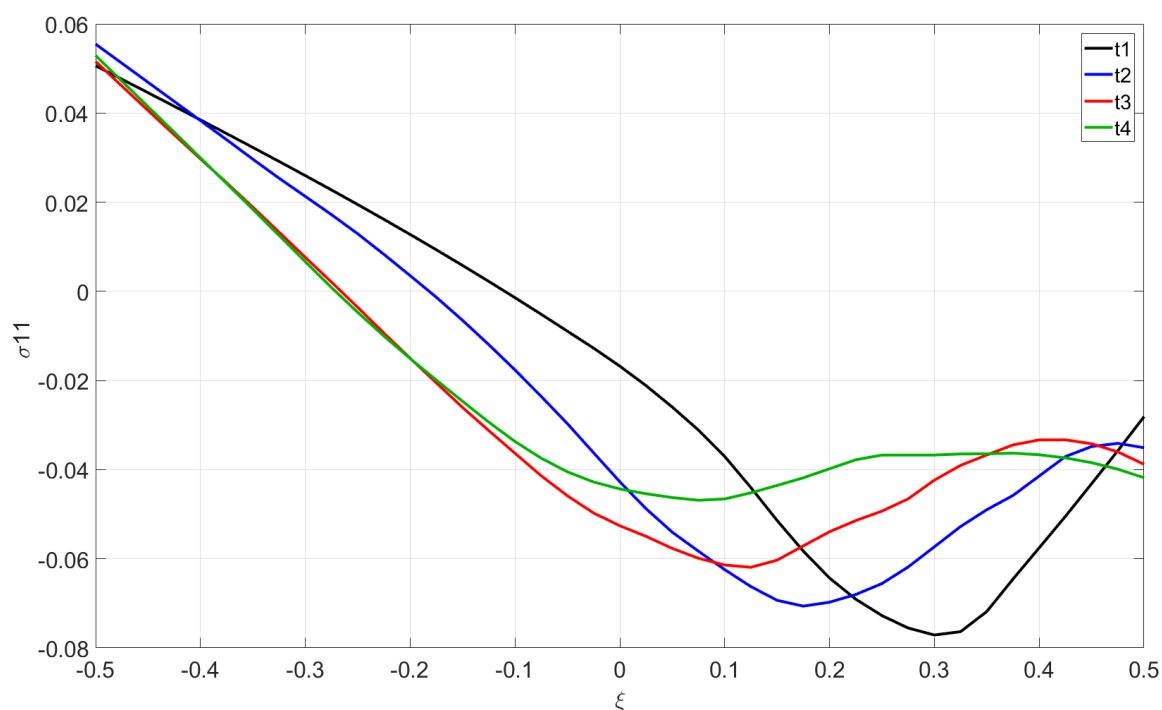


Рисунок 3.15 – Изменение нормального напряжения σ_{11} в сечении $x_l=0,75$

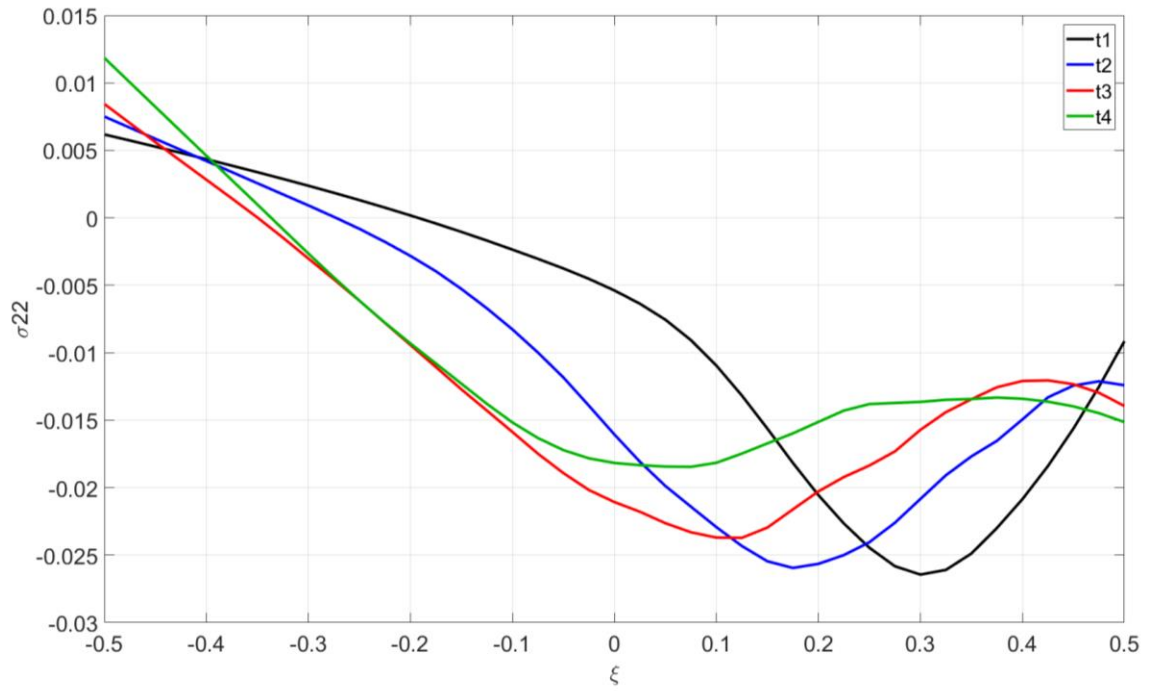


Рисунок 3.16 – Изменение нормального напряжения σ_{22} в сечении $x_I=0,75$

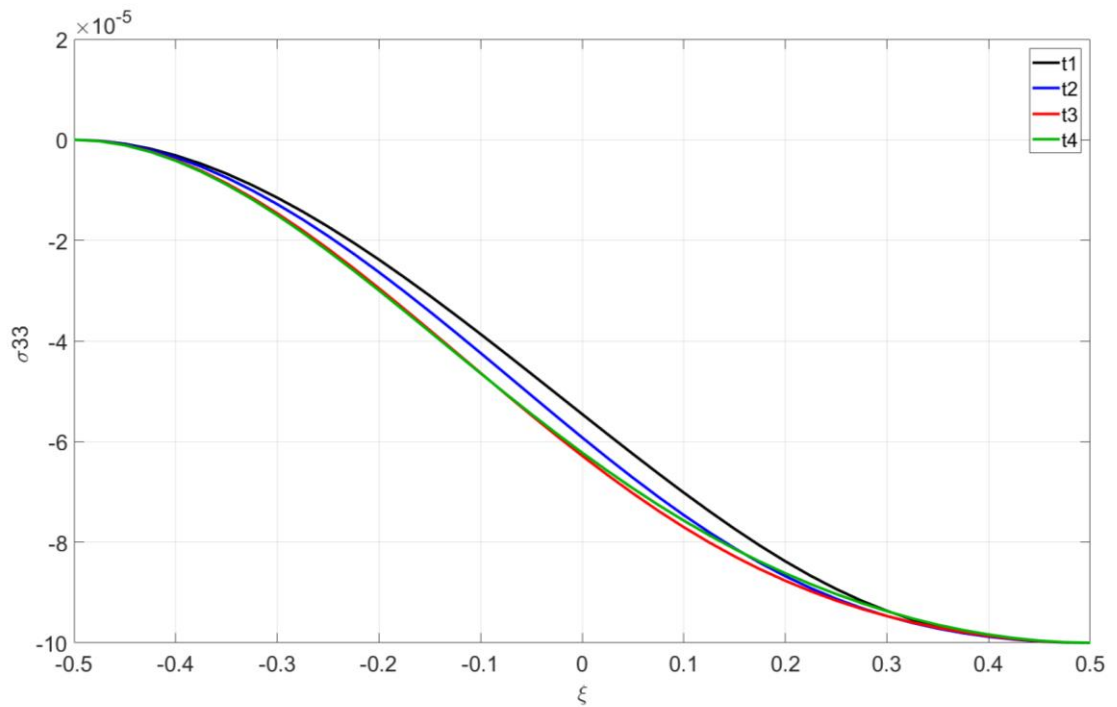


Рисунок 3.17 – Изменение нормального напряжения σ_{33} в сечении $x_I=0,75$

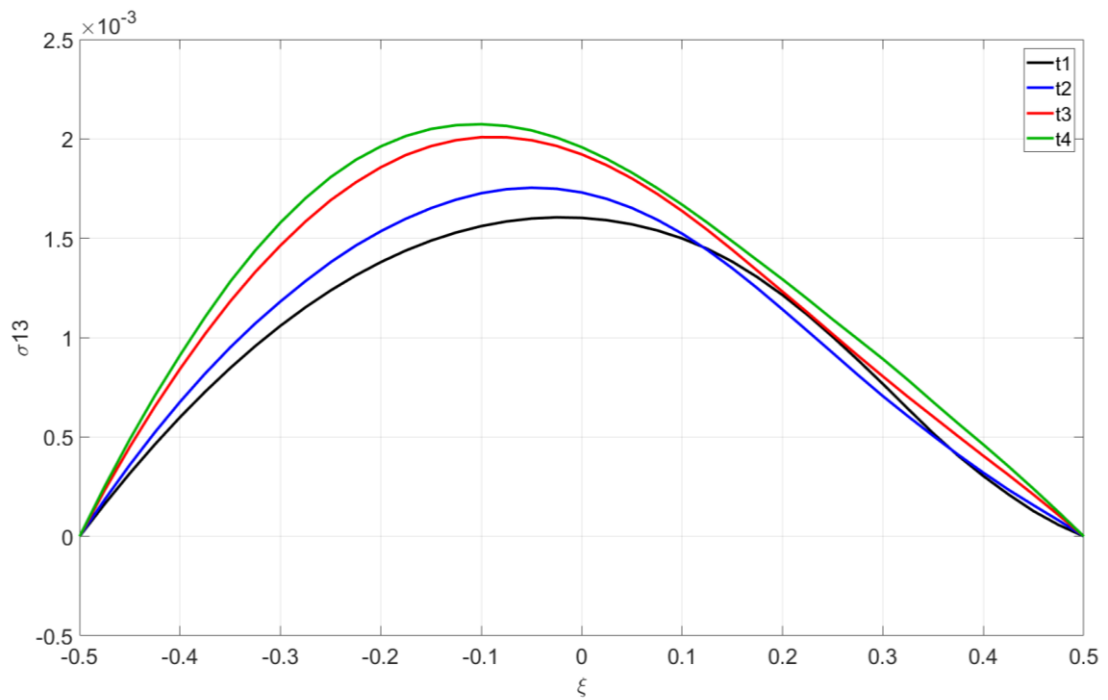


Рисунок 3.18 – Изменение касательного напряжения σ_{13} в сечении $x_1 = 0,75$

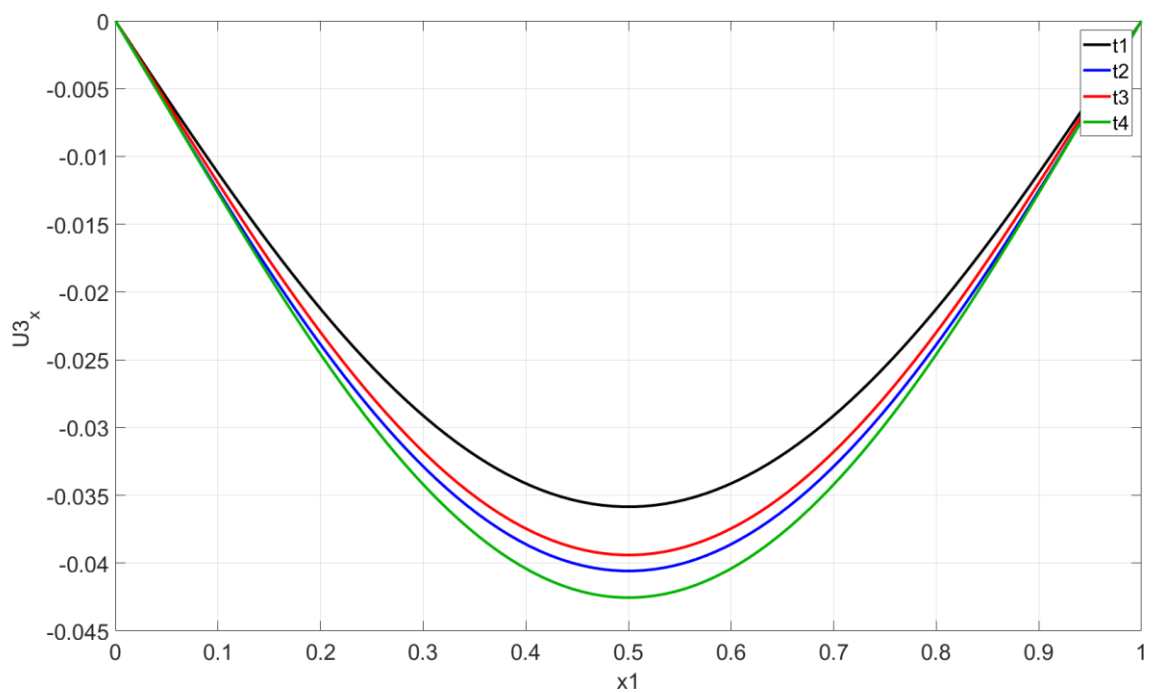


Рисунок 3.19 – Изменение прогиба по длине пластины

Выводы и заключение

1. Разработана математическая многоуровневая модель для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах.
2. Построены определяющие соотношения для ортотропных композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями, основанные на многоуровневой модели композита.
3. Разработан модифицированный вариант асимптотической теории расчета тонких упругих многослойных пластин из высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, учитывающий конечные значения сдвиговых характеристик композитов.
4. Проведенные тестовые расчеты напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин по модифицированной теории с учетом асимптотических разложений для перемещений 2-го приближения показали, что модифицированная асимптотическая теория обеспечивает более высокую точность расчетов перемещений для относительно коротких пластин, по сравнению с классической асимптотической теорией, использующих только 1-е приближение для перемещений.
5. Получено численно-аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкостенной пластины из тканевого композиционного материала с высокотемпературными фазовыми превращениями при неравномерном нестационарном нагреве и равномерном давлении.
6. Проведенные расчеты напряженно-деформированного состояния тонкой пластины из композита с многостадийными фазовыми превращениями позволили установить эффект влияния фазовых превращений на кинетику изменения напряженно-деформированного состояния пластины для различных моментов времени, в частности появление внутренних зон упрочнения материала после предварительного нагрева до начала промежуточных стадий фазовых превращений, и, как следствие повышения в этих зонах уровня изгибаемых напряжений.

Список литературы

1. Абзгильдин Ф.Ю., Тесвятский С.Г. Асбо-фосфатные материалы. Киев, Наукова думка, 1980.-99 с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.:Машиностроение. – 1980. – 324 с.
3. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: издательство НГТУ, 2000, 70 с
4. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры – Москва: Едиториал УРСС, 2003, 376 с.
5. Баринов С.М., Шевченко В.Я. Прочность технической керамики. М.: Наука. 1996. 159 с.
6. Баринов С.М., Крылов А.В., Шевченко В .Я. и др. Влияние размера нитевидных кристаллов SiC на трещиностойкость композиционных материалов с алюмооксидной матрицей // Огнеупоры и техническая керамика. 1997. №3. С.10-13.
7. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Доклады Академии Наук СССР, том 268, № 4, с. 836-840, 1983.
8. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные модули композитов, армированных системой пластин и стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики, том 38, №5, 1998, с 813.
9. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – Москва: Наука, 1984.
10. Бердичевский В.Л. Пространственное осреднение периодических структур // Доклады Академии Наук СССР, т. 222, № 3, с. 565-567, 1975.

11. Бердичевский В.Л., Вариационные принципы механики сплошной среды, М: Наука, 1983.
12. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций, М Машиностроение, 1980.
13. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры, Днепропетровск: Пороги, 2008.
14. Геворкян Г.А. Расчет упругих прогибов тонких жестких пластин на основе метода конечных элементов без использования гипотезы Кирхгофа// Механика машин, механизмов и материалов. 2017. № 1 (38). с. 39-44.
15. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. серия Естественные науки, 2012, №3, с. 86-100.
16. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела. Механика сплошной среды. том 4 – Изд. МГТУ им. Баумана, 2013, 580 с.
17. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки, 2015 ,№4 с. 67-87.
18. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007, №1, с 26-46.
19. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Разработка конечно-элементного метода решения локальных задач теории упругости “на ячейке периодичности” для композитов с периодической пространственной структурой // Математика в современном мире: Под ред. Ю.А. Дробышева. – Калуга: Изд. КГПУ, 2004. – С. 177–191.

20. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Еголева Е.С., Мальцева А.А. Многомасштабное моделирование высокотемпературных упруго-прочностных свойств композиционных материалов на неорганической матрице //Математическое моделирование. 2015. том 27. № 11. С. 3-20.
21. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. моделирование термоупругих характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 11. С. 497-518.
22. Свид. 2013615353 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программа gcdfes_MHSSStrength для численного моделирования эффективных пределов прочности композиционных материалов / Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В., Еголева Е.С.; заявитель и правообладатель: МГТУ им. Н.Э. Баумана (RU). – №2013615353; заявл. 28.02.13; опубл. 05.06.13, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.
23. Свид. 2013615352 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программа gcdfes_MHSSurface для численного моделирования поверхности первоначальной пластичности композиционных материалов на основе конечно-элементных расчетов микронапряжений в ячейках периодичности / Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Юрин Ю.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А.; заявитель и правообладатель: МГТУ им. Н.Э. Баумана (RU). – №2013615352; заявл. 28.02.13; опубл. 05.06.13, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.
24. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С. Моделирование термо-механических и теплофизических характеристик деструктирующих теплозащитных композитов на основе конечно-элементного микроструктурного анализа // *Тепловые процессы в*

- технике*, 2016, № 12, с.564-573. http://www.nait.ru/journals/number.php?p_number_id=2544
25. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Еголева Е.С. Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 48–59.
 26. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Моделирование упруго-прочностных характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих при высоких температурах // тезисы международной научной конференции "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана 17-19 ноября 2014 года. 2014. с.23-24.
 27. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Яковлев Д.О. Моделирование термонапряжений в композитных пластинах на неорганической матрице // Ключевые тренды в композитах: наука и технологии: сборник материалов международной научно-практической конференции. Москва, 5-8 декабря 2018, с. 211-220.
 28. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Конечно-элементное моделирование микронапряжений и высокотемпературной прочности композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих // Тезисы докл. научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики им. профессора Н.Е. Жуковского, 2013 г, с 55.
 29. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997.-368 с.
 30. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В. Моделирование микро-разрушения тканевых композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э.

- Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. выпуск № 3 «Математическое моделирование». – 2012. с. 5-19.
31. Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Численное моделирование процессов тепломассопереноса и кинетики напряжений в термодеструктурирующих композитных оболочках//Вычислительные технологии.-2012.-т.17.-№2.-С.44-60.
 32. Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование внутреннего тепломассопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве// Математическое моделирование.- 2011, т. 23, № 9, с.14-32.
 33. Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование термомеханических процессов в композитных оболочках при локальном нагреве излучением// Механика композиционных материалов и конструкций.- №1.- т.17.-2011 г.-с.71-91.
 34. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О., Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трёхмерной теории упругости. // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, №. 12.
 35. Епифановский И.С., Димитриенко Ю.И., Ширяев А.В. Композиция для керамического электроизоляционного материала. Патент №2028993 Кл. С04В35/48, С04В35/80, номер заявки 5020360/33, дата подачи 27.11.1991, дата публикации 20.02.1995.
 36. Зверяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2016. №33, 25 с.
 37. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
 38. Ивахненко Ю.А., Варрик Н.М., Максимов В.Г. Высокотемпературные радиопрозрачные керамические композиционные материалы для

- обтекателей антенн и других изделий авиационной техники (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2016. №5. Ст. 05.
39. Каблов Е.Н., Д.В. Гращенков, Н.В. Исаева, С.С. Солнцев Перспективные высокотемпературные керамические композиционные материалы //Российский химический журнал т. LIV № 1, 2010
40. Костиков В.И., Варенков А.Н. Сверхвысокотемпературные композиционные материалы. М.: Интермет Инжиниринг, 2003.
41. Копейкин В.А., Петрова А.П., Рашкован И.П. В кн., Материалы на основе металлофосфатов. М., Химия, 1976.
42. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Расчет композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных элементов // Вестник СибГАУ. Том 17, №3, с. 587-594.
43. Милейко С.Т. Композиты и наноструктуры // Композиты и наноструктуры. 2009. №1. С.6-37
44. Михеев С.В., Строганов Г.Б., Ромашин А.Г. Керамические и композиционные материалы в авиационной технике. М.: Альтекс, 2002. 276 с.
45. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГТУ, 1984, 366 с.
46. Попов Б.Г. Расчёт многослойных конструкций вариационно-матричными методами: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ,1993. 294 с
47. Сорокин О.Ю., Гращенков Д.В., Солнцев С. Ст., Евдокимов С.А. Керамические композиционные материалы с высокой окислительной стойкостью для перспективных летательных аппаратов (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2014. №6. Ст. 08.
48. Сычев М.М. Неорганические клеи. Л., Химия, 1974.
49. Технология и свойства фосфатных материалов. Под ред. В.А. Копейкина.-М.:Стройиздат, 1974.-224 с.

50. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы. М. Машиностроение.—1987. 224 с.
51. Товстик П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек. //Известия Сарат. универ. Нов. сер. Сер. Матем.. Мех.. Инф., 2008, т. 8, № 3, с. 72–85.
52. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двумерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Известия РАН. Мех. тв. тела, 2017, №2, с 32-45.
53. Товстик П.Е. Двумерная модель анизотропной пластины второго порядка точности // Вестник СПбГУ. Матем. Мех. Астр. 2019. т. 6, выпуск 1, с. 157-169.
54. Толстогузов В.Б. Неорганические полимеры. М., Наука, 1967.
55. Фирсанов Вал. В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, №6, 35-43
56. Фрейдин А.Б., Чискис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. 4.2. Несжимаемые материалы с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов тензора деформаций. // Изв. РАН. МТТ.- 1994.- № 5.- С. 46-58.
57. Хачатурян А.Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов.— М.: Наука. 1974.— 384 с.
58. Шаталин А.С., Ромашин А.Г. // Новые конструкционные материалы на основе керамики и композитов с керамической матрицей. Часть II. Композиты с керамической матрицей. Перспективные материалы. 2002. №2. С. 13-22.
59. Шевченко В.Я., Баринов С.М. Техническая керамика. М.: Наука, 1993.187 с.

60. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический метод получения уравнений теории пластин Рейсснера-Миндлина. Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Матем. механика, 2013, №2, 65-67.
61. Dimitrienko Yu.I., Epifanovsky I.S. Investigation of High Temperature Deformations of Composites on an Inorganic Matrix. Moscow International Composites Conference, 1990 (MICC 90). Eds: I. N. Fridlyander, V. I. Kostikov.- Springer.-1990.-pp.1206-1210 (DOI: 10.1007/978-94-011-3676-1_232).
62. Dimitrienko Yu.I. Inorganic Matrix Composite Materials: Peculiarities, modelling, testing //ECC8. European Conf. on Composite Materials. Science. Technology and Applications. 3-6 June, Napoly, Italy.-WoodHead Publishing Limited.-1998. v.4—pp.201-208.
63. Yu I Dimitrienko, S V Sborschikov, E S Egoleva, D O Yakovlev Modeling of thermal stresses in inorganic matrix composite plates based on the asymptotic theory IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2019. volume 683 № 012010 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012010 pp.1-6.
64. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // J. Elasticity- 2004 Vol. 74 — № 1 — 67-86.
65. R. Abeyaratne, J. K. Knowles Evolution of phase transitions.— Cambridge University Press.— 2006.
66. Kablov E.N., Grashchenkov D.V., Isaeva N.V., Solntsev S.S., Sevastyanov V.G. Glass and ceramics based high-temperature composite materials for use in aviation technology // Glass and Ceramics. 2012. Vol. 69. No. 3–4. p. 109–112
67. Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solid and Struct. 1984, V. 20, № 4. p. 333-350.
68. Kolpakov A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.

69. Kolpakov A.G., Andrianov I.V., Markert B. asymptotic decomposition in the problem of joined elastic plates// ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2015. T. 95. № 11. C. 1268-1281.
70. Lewinski T.,Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore, New Jersey, London World Sci. Publ.,1999, 758 p.