

Расчет колебаний для разветвленных механических систем в поле комплексных чисел

Попов И.П.

Курганский государственный университет, КГУ,

ул. Советская, 63/4, Курган, 640020, Россия,

e-mail: ip.popov@yandex.ru

Статья поступила 25.10.2020

Аннотация

Рассмотрены параллельно-последовательное и последовательно-параллельное соединения потребителей механической мощности при вынужденных гармонических колебаниях. Параллельное соединение характеризуется такими параметрами как механические реактанс (инертный и упругий), резистанс и импеданс. Последовательное соединение характеризуется такими параметрами как механические сассептанс (инертный и упругий), кондактанс и адмитанс. Показано, что импеданс и адмитанс являются взаимно обратными величинами. Найдены соотношения, связывающие реактанс и резистанс с кондактансом и сассептансом. Определен адмитанс сложной механической системы как суперпозиция адмитансов ее фрагментов. Определен импеданс сложной механической системы как суперпозиция импедансов ее фрагментов. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями.

Ключевые слова: потребители механической мощности, вынужденные колебания, параллельное, последовательное соединение, резонанс сил, резонанс скоростей.

Введение

Ранее определены следующие величины.

Инертный и упругий реактансы в комплексном изображении –

$$\underline{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t, \quad \underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{k}{\omega}.$$

Резистанс в комплексном изображении – $\underline{r} = r$.

Импеданс в комплексном изображении – $\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Инертный и упругий сассептансы в комплексном изображении –

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{1}{\omega t} = \frac{1}{\underline{x}_m}, \quad \underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}.$$

Кондактанс в комплексном изображении – $\underline{g} = g = \frac{1}{r}$.

Адмитанс в комплексном изображении – $\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega t}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Очевидны выражения

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = Z V e^{i\varphi}, \quad (1)$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}. \quad (2)$$

Целью исследования является значительное упрощение вычислений путем замены необходимости решения дифференциальных уравнений на алгебраические методы.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [1–14]. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли [15, 16]. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями [17–19].

Используется комплексное представление гармонических и связанных с ними величин. Подобный подход широко используется в электротехнике.

Связь между механическими величинами

Теорема 1. Имеет место выражение: $\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}$.

Доказательство. С учетом (1) $\underline{z} = \frac{\dot{F}}{\dot{V}}$.

С учетом (2) $\underline{y} = \frac{\dot{V}}{\dot{F}} = \frac{1}{\underline{z}}$.

Теорема доказана.

Следствие. При $r = 0$ $\underline{b} = 1/\underline{x}$, т.к. при этом $\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{z} = \underline{x}$.

Теорема 2. Для обратных эквивалентных величин имеют место выражения:

$$g^* = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad \underline{b}^* = \frac{x}{r^2 + x^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad r^* = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad \underline{x}^* = \frac{b}{g^2 + b^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство.

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + ix,$$

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r + ix} \frac{r - ix}{r - ix} = \frac{r - ix}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - i \frac{x}{r^2 + x^2} = g^* + \underline{b}^*,$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + ib,$$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} = \frac{1}{g + ib} \frac{g - ib}{g - ib} = \frac{g - ib}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} - i \frac{b}{g^2 + b^2} = r^* + \underline{x}^*.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Для схемы последовательного соединения механических систем имеет место выражение:

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j.$$

Доказательство. Сила \dot{F} является общей величиной. Для любой из механических систем с учетом (2) можно записать

$$\dot{V}_j = \underline{y}_j \dot{F}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \dot{V}_j = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \dot{F} = \dot{F} \sum_{j=1}^n \underline{y}_j = \dot{F} \underline{y}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$\frac{1}{\underline{z}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{z}_j}.$$

Следствие 2.

$$\underline{z} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Следствие 3. Импеданс любой из составляющих механических систем больше эквивалентного импеданса

Следствие 4. Если $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \dots = \underline{z}_j = \dots = \underline{z}_n = \underline{z}^*$, то $\underline{z} = \frac{\underline{z}^*}{n}$.

Следствие 5.

$$\lim_{\underline{z}_1 \rightarrow \infty} \underline{z} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Теорема 4. Для схемы параллельного соединения механических систем имеет место выражение:

$$\underline{z} = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j.$$

Доказательство. Скорость \dot{V} является общей величиной. Для любой из составляющих механических систем с учетом (1) можно записать $\dot{F}_j = \underline{z}_j \dot{V}$.

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\dot{F} = \sum_{j=1}^n \dot{F}_j = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j \dot{V} = \dot{V} \sum_{j=1}^n \underline{z}_j = \dot{V} \underline{z}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$\frac{1}{\underline{y}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{y}_j}.$$

Следствие 2.

$$\underline{y} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Следствие 3. Адмитанс любой из составляющих механических систем больше эквивалентного адмитанса a

Следствие 4. Если $\underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_j = \dots = \underline{y}_n = \underline{y}^*$, то $\underline{y} = \frac{y^*}{n}$.

Следствие 5.

$$\lim_{y_1 \rightarrow \infty} \underline{y} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Схема параллельно-последовательного соединения (рис. 1.)

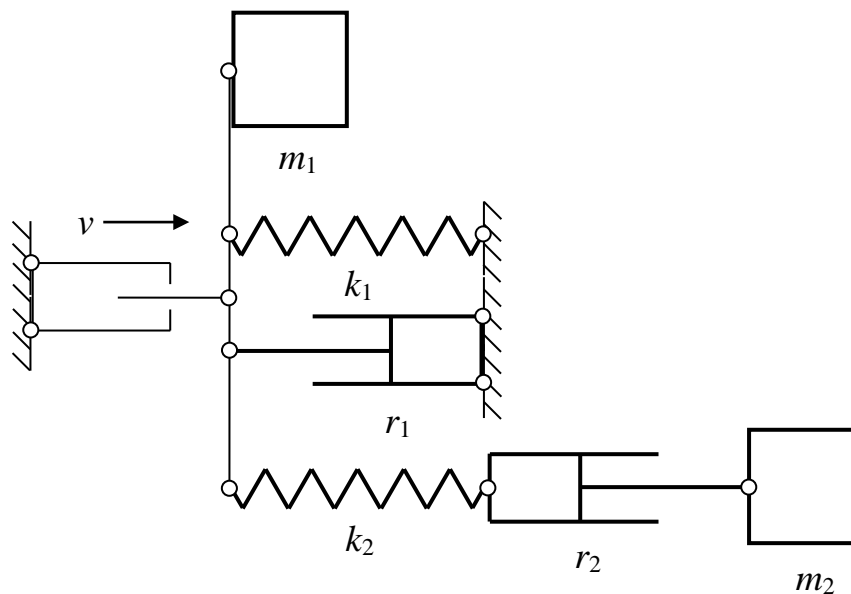


Рис. 1. – Схема параллельно-последовательного соединения

С учетом теоремы 1 $\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2$.

С учетом теоремы 4 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$.

С учетом (1) $\dot{V} = \dot{F}/\underline{z}$.

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ (кг·с⁻²), $r = 7$ (кг·с⁻¹).

Определить все остальные параметры.

$$\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2 = 1/(15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ}) \approx 6,607 e^{-i19,29^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 12,207 e^{i55^\circ} + 6,607 e^{-i19,29^\circ} = 15,372 e^{i30,57^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V} = \dot{F}/\underline{z} = 100/(15,372 e^{i30,57^\circ}) = 6,505 e^{-i30,57^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 6,505 e^{-i30,57^\circ} = 130,1 e^{i59,43^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 10 e^{-i90^\circ} \cdot 6,505 e^{-i30,57^\circ} = 65,05 e^{-i120,57^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{r1} = r_1 \dot{V} = 7 e^{i0} \cdot 6,505 e^{-i30,57^\circ} = 45,535 e^{-i30,57^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_2 = \underline{z}_2 \dot{V} = 6,607 e^{-i19,29^\circ} \cdot 6,505 e^{-i30,57^\circ} = 42,979 e^{-i49,86^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 42,979 e^{-i49,86^\circ} = 2,149 e^{-i139,86^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V}_{k2} = \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 42,979 e^{-i49,86^\circ} = 4,298 e^{i40,14^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 42,979 e^{-i49,86^\circ} = 6,14 e^{-i49,86^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

На рисунке 2 изображены все расчетные параметры.

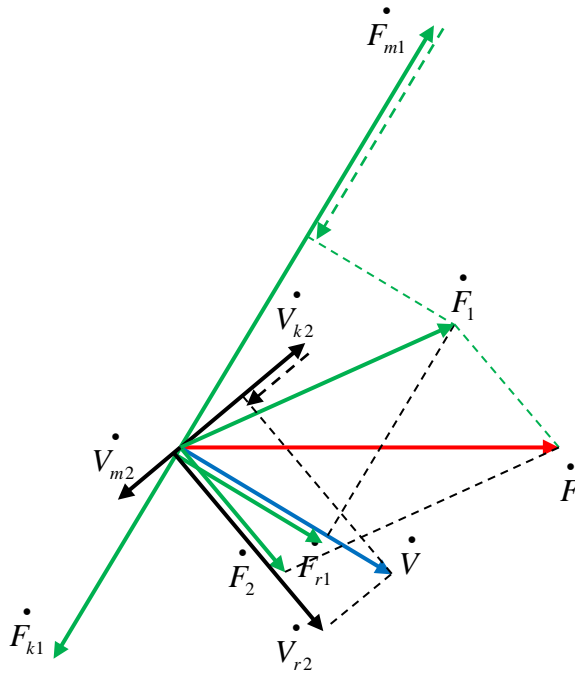


Рис. 2. – Параллельно-последовательное соединение

Пример 2. Для параллельно-последовательного (двойного) резонанса [20].

Отличие от примера 1 состоит в том, что $k = 40$ ($\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$).

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = r = 7e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \quad \underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2r = 14e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V} = \dot{F} / \underline{z} = 100 / (14e^{i0^\circ}) = 7,143e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 142,857e^{i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 20e^{-i90^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 142,857e^{-i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{r1} = \dot{F}_1 = r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_2 = \underline{z}_2 \dot{V} = 7e^{i0^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2,5e^{-i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V}_{k2} = \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2,5e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 50e^{i0^\circ} = 7,143e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

На рисунке 3 изображены все расчетные параметры.

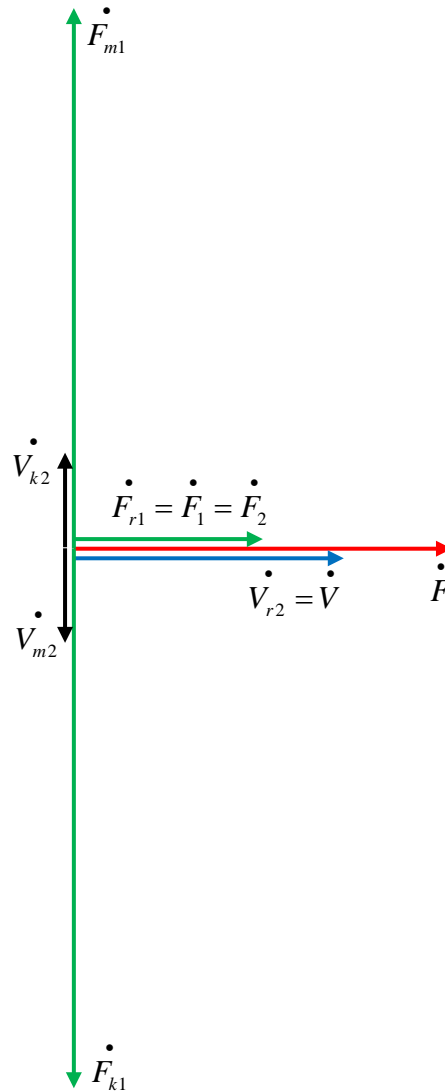


Рис. 3. – Параллельно-последовательный (двойной) резонанс

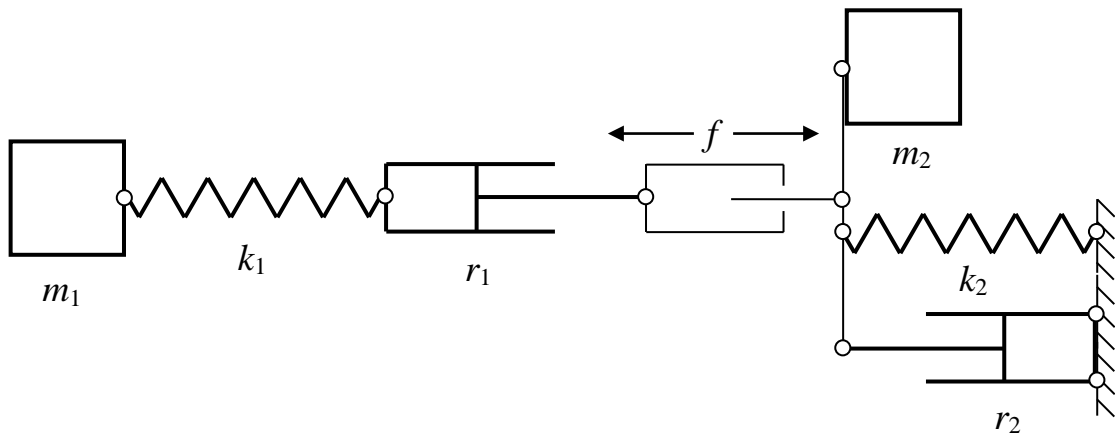
Схема последовательно-параллельного соединения (рис. 4.)

Рис. 4. – Схема последовательно-параллельного соединения

С учетом теоремы 1 $\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2$.

С учетом теоремы 3 $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$.

С учетом (2) скорость штока $\dot{V} = \underline{y} \dot{F}$.

Пример 3. Значения всех величин такие же как в примере 1.

$$\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = 1/(12,207e^{i55^\circ}) = 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} (\text{кз}^{-1} \cdot \text{с}),$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} + 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} (\text{кз}^{-1} \cdot \text{с}),$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 8,192 e^{-i55^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 15,135 e^{i19,29^\circ} + 8,192 e^{-i55^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V}.$$

На рисунке 5 изображены все расчетные параметры.

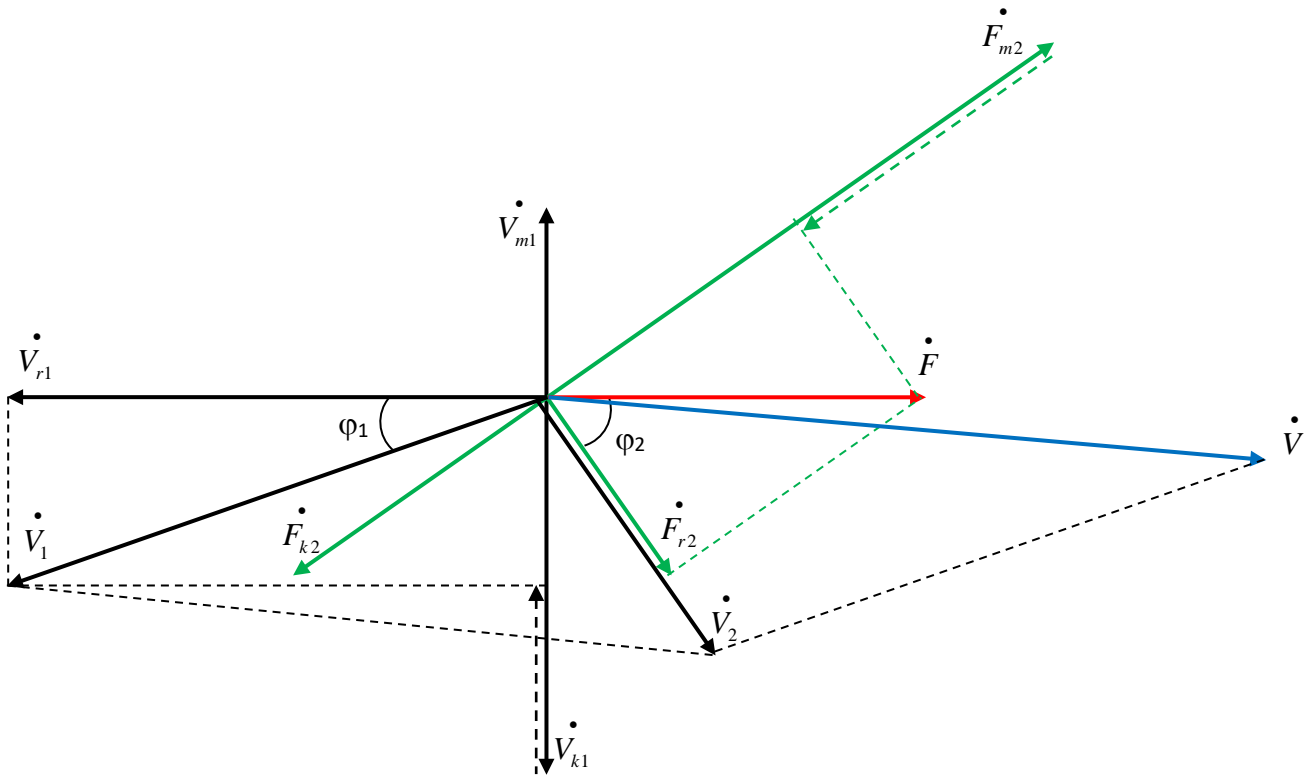


Рис. 5. – Последовательно-параллельное соединение

Пример 4. Для последовательно-параллельного (двойного) резонанса Отличие от примера 2 состоит в том, что элементы соединены последовательно-параллельно.

$$\underline{y}_1 = 1/\underline{z}_1 = g_1 = \underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = g_2 = 1/(12,207e^{i55^\circ}) = 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (к}\Omega^{-1} \cdot \text{с)},$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 2 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (к}\Omega^{-1} \cdot \text{с)},$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28,571 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V} = -\dot{V}_1 + \dot{V}_2,$$

$$-\dot{V}_1 = -\dot{F} \underline{y}_1 = \dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$-\dot{V}_{m1} = \underline{b}_{m1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{-i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$-\dot{V}_{k1} = \underline{b}_{k1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$-\dot{V}_{r1} = -g_1 \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100e^{i0^\circ} = 14,286e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{F}_{m2} = \underline{x}_{m2} \dot{V}_2 = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,714e^{i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{k2} = \underline{x}_{k2} \dot{V}_2 = 20e^{-i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,714e^{-i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_{r2} = \dot{F}_2 = \dot{F} = r_2 \dot{V}_2 = 7e^{i0} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 100e^{i0^\circ} \text{ (Н)}.$$

Данным примера 4 соответствует векторная диаграмма на рисунке 6.

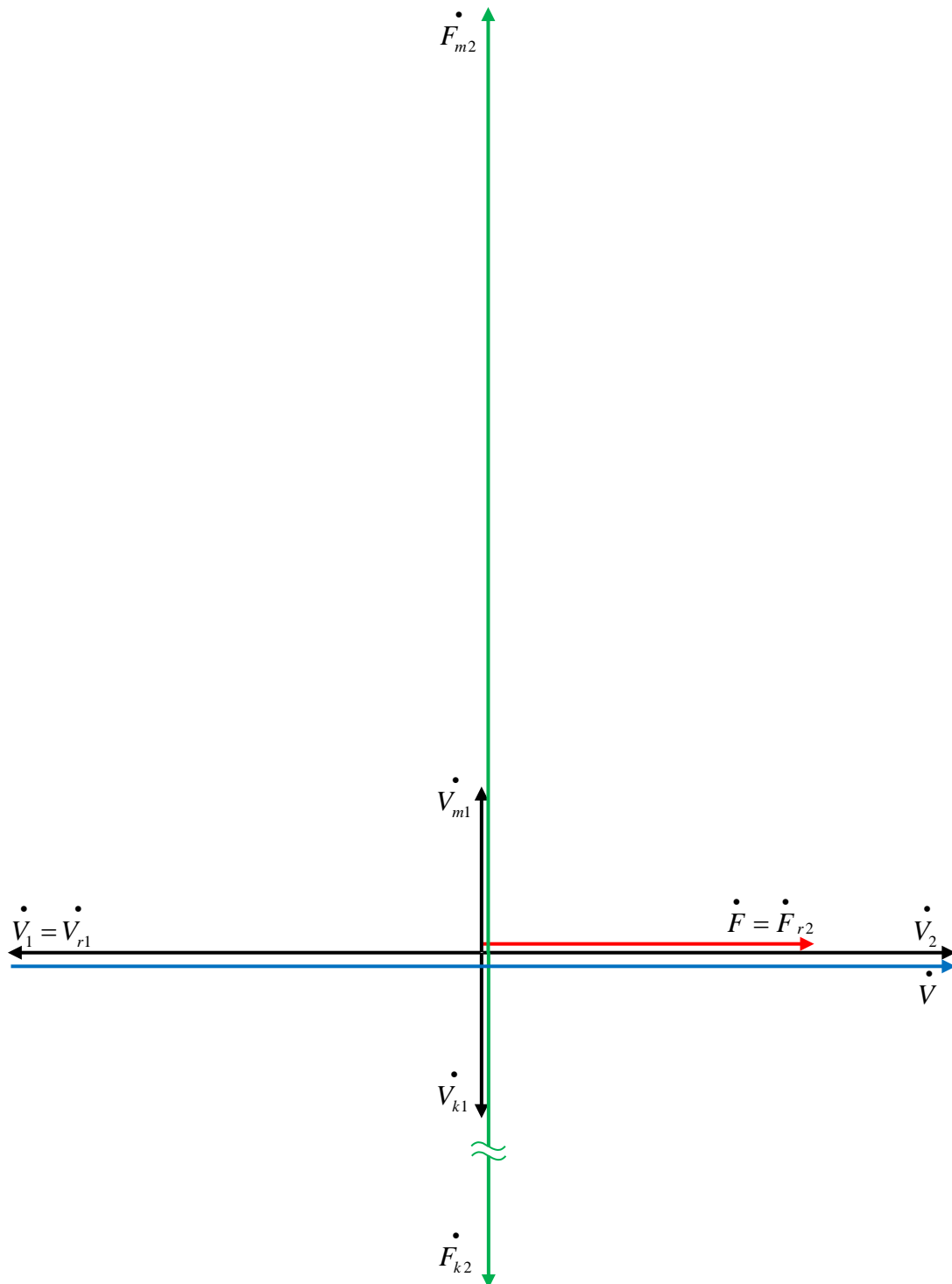


Рис. 6. – Последовательно-параллельный (двойной) резонанс

Характер реактивности импеданса

Если

$$\dot{F} = Fe^{i0},$$

$$\underline{z} = r + \underline{x}_m = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = z e^{i\varphi},$$

то

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F e^{i0}}{z e^{i\varphi}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi}.$$

Пример 5. При тех же количественных значений, что и выше,

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = \sqrt{7^2 + 20^2} e^{i \arctg \frac{20}{7}} \approx 21,19 e^{i70,71^\circ} (\text{к}\Omega \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{21,19 e^{i70,71^\circ}} \approx 4,719 e^{-i70,71^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

На рисунке 7 изображены расчетные параметры.

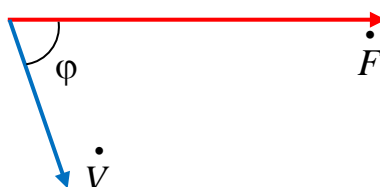


Рис. 7. – «Инертный» импеданс

Пусть теперь $\underline{z} = r + \underline{x}_k = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = z e^{i\varphi}$.

Пример 6. При тех же количественных значений, что и выше,

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = \sqrt{7^2 + 10^2} e^{i \arctg \frac{-10}{7}} \approx 12,207 e^{-i55^\circ} (\text{к}\Omega \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12,207 e^{-i55^\circ}} \approx 8,192 e^{i55^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

На рисунке 8 изображены расчетные параметры.

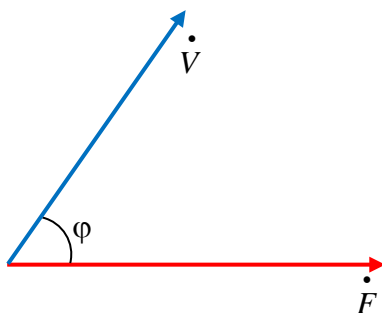


Рис. 8. – «Упругий» импеданс

Из примеров 5 и 6 вытекает доказанная этими примерами

Теорема 5. При диссипативной (резистивной) нагрузке сила и скорость изменяются синфазно. При реактивной – их фазы не совпадают. Сдвиг по фазе положительный при «инертном» импедансе и отрицательный при «упругом».

Замечание. При $\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k$ и $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ импеданс «упругий». При $\underline{x}_m > \underline{x}_k$ импеданс «инертный».

Теорема 6. Если $\underline{x}_m \neq \underline{x}_k$, то реактивный характер импеданса изменяется на противоположный при замене схемы соединения элементов (с последовательного на параллельное или наоборот).

Доказательство. Если $\underline{x}_m > \underline{x}_k$ и соединение параллельное, то

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

С учетом замечания к теореме 5 импеданс является «инертным», при этом фаза $i\pi/2 > 0$.

Если эти же элементы соединить последовательно, то

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega m - k/\omega}{km} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

С учетом следствия из теоремы 1

$$\underline{x} = \frac{1}{\underline{b}} = \frac{km}{\omega m - k/\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Фаза поменяла знак ($-i\pi/2 < 0$). Другими словами, импеданс стал «упругим».

Очевидно, что при $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ дело обстоит точно так же.

Теорема доказана.

Заключение

Расчет комбинированных механизмов традиционными методами представляет собой сложную и трудоемкую задачу.

Использование символического (комплексного) описания механических процессов и систем позволяет применять вместо этого простые и компактные алгебраические методы, трудоемкость которых меньше в десятки раз.

Векторные диаграммы, не являясь необходимой составляющей исследования механических систем, имеют существенное методическое значение, поскольку показывают количественные и фазные соотношения между параметрами систем.

Библиографический список

1. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 393 – 395. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005)
2. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 16 - 20. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)

3. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
4. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
5. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
6. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
7. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
8. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>

9. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
10. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
11. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
12. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
13. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
14. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>

15. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
16. Благодарёва О.В. Применение метода Рунге и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
17. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
19. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>
20. Попов И.П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 4 (47). С. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)

Vibrations computing for ramified mechanical systems in the field of complex numbers

Popov I.P.

Kurgan State University,

63/4, Sovetskaya str., Kurgan, 640020, Russia

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Abstract

The article considers both parallel-series and series-parallel connection of consumers of mechanical power. The purpose of the work consists in developing compact algebraic methods for ramified mechanical systems computing at forced vibrations in the steady-state modes. Speeds of mechanical systems' elements and forces applied to them are being determined algebraically through the known systems parameters and disturbing harmonic impact. A complex representation of harmonic and related mechanical quantities is used. This approach is widely used in electrical engineering. The main research methods within the framework of this work are methods of mathematical modeling and analysis. It is not the physical object itself herewith, which is being studied, but its mathematical model, namely the object "equivalent" reflecting its major properties, i.e. the laws it follows, connections peculiar to its constituent parts etc. As for the considered ramified mechanical systems, classical methods based on solving the second order differential equations are being multiply complicated and require solving the systems of equations, which are being reduced to the systems of higher orders. Symbolic (complex) description employing for the mechanical processes and systems allows apply instead simple and compact algebraic methods, which labor intensity is tenfold less.

A relation between mechanical values for various types of elements connection of mechanical systems was established. Being an unnecessary component of mechanical systems studying, vector diagrams are of great methodological value, since they demonstrate quantitative and phase relationships between systems' parameters.

Keywords: consumers of mechanical power, forced vibrations, parallel, series connection, resonance of forces, resonance of speeds.

References

1. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 393 – 395. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005)
2. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 16 - 20. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)
3. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
4. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=12836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
5. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)

6. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98, URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
7. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>
8. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>
9. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
10. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
11. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
12. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
13. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
14. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
15. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
16. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>

17. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
19. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>
20. Popov I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2019, no. 4 (47), pp. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)