

На правах рукописи



Земсков Андрей Владимирович

**Нестационарные механо-диффузионные
возмущения в многокомпонентных упругих
средах с плоскими границами**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»*.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Тарлаковский Д.В.

Официальные оппоненты:

Индейцев Дмитрий Анатольевич, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель ФГБУН Института проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН);

Князева Анна Георгиевна, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики высоких технологий в машиностроении Национального исследовательского Томского политехнического университета;

Ерофеев Владимир Иванович, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института проблем машиностроения Российской академии наук.

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН.

Защита состоится 31 октября 2018 года в 15-00 часов на заседании диссертационного совета *Д. 212.125.05* при *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»*, расположенном по адресу: *125993, г.Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»* и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=92305.

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета  *Федотенков Григорий Валерьевич*.

Общая характеристика работы

Использование функциональных элементов машин и приборов, работающих в условиях интенсивных нагрузок различной физической природы с учетом явлений массопереноса обуславливает необходимость исследования механодиффузионного поведения этих элементов при таких внешних воздействиях. Количественное описание и прогнозирования свойств тел из упомянутых материалов основывается на теоретических моделях механики сплошной среды, которые в рамках континуальных представлений учитывают взаимосвязь физико-механических полей в телах сложной внутренней структуры.

Различные постановки и методы решения задач механодиффузии в последние десятилетия рассматривались в работах Асташкина В.И., Бурака Я.И., Гачкевича А.Р., Дасюка Я.И., Еремеева В.С., Индейцева Д.А., Князевой А.Г., Подстригача Я.С., Павлиной В.С., Раврика М.С., Швеца Р.Н., Новацкого В., Aifantis E.C., Aouadi M., Chawla V., Chu J.L., Deswal S., Elhagary M.A., Hwang C.C., Kalkal K.K., Kansal T., Kubic J., Kumar R., Lee S., Sharma J.N., Sherief H.H. и других авторов.

Из приведенного в работе анализа публикаций следует, что в настоящее время не существует общих методов аналитического исследования нестационарных задач механики связанных полей, и в частности, задач механодиффузии.

В диссертации дана общая постановка нестационарных задач связанной термоэлектромагнитомеханодиффузии с конечной скоростью распространения тепла и диффузии для произвольных анизотропных сред, в том числе, ее частных случаев: упругая диффузия многокомпонентного ортотропного слоя, полупространства и пространства в прямоугольной декартовой системе координат. С помощью аппарата поверхностных и объёмных функций влияния и разложения по собственным функциям упругодиффузионного оператора разработаны и реализованы методы решения классов одномерных, двумерных и трехмерных нестационарных задач для тел и областей указанной геометрии.

Актуальность работы связана с недостаточной исследованностью проблемы решения нестационарных задач механодиффузии, хотя этой темати-

ке посвящено достаточно большое число публикаций как в России, так и за рубежом. Подобный интерес с практической точки зрения объясняется тем, что взаимодействие полей различной физической природы может оказывать нежелательное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий. Поэтому для более точного описания функционирования вышеназванных систем требуется использование моделей, учитывающих всевозможные эффекты взаимодействия механических и диффузионных полей. Анализ этих эффектов невозможен без разработки методов решения соответствующих начально-краевых задач механодиффузии. Всё это в целом обуславливает актуальность исследований, представленных в данной работе.

Целью диссертационной работы является развитие моделей нестационарного взаимодействия механических и диффузионных полей в упругих средах, включая постановки и исследование новых классов задач, а также совершенствование некоторых известных методов решения нестационарных задач механики связанных полей.

Методы исследования. Используется аппарат линейной теории упругости в совокупности с термодинамическими подходами к описанию совместного проявления механодиффузионных эффектов. Для построения решений используется метод разложений по собственным функциям, преобразования Лапласа и Фурье, аппараты функций Грина и обобщённых функций. Также применяется разработанный метод эквивалентных граничных условий описанный в главе 4 и асимптотический метод малого параметра описанный в главе 5. Оригиналы преобразования Лапласа определяются с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Оригиналы экспоненциального преобразования Фурье и синус-, косинус-преобразования находятся численно с помощью квадратурных формул.

Научная новизна работы состоит:

- в построении общей модели нестационарной термоэлектромагнитомеханодиффузии для многокомпонентных анизотропных сред в произвольной криволинейной системе координат;

- в построении методов решений и их реализации для новых классов одномерных, двумерных и трехмерных нестационарных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой системе координат для пространства, полупространства и слоя находящихся под действием поверхностных и объемных возмущений.

Впервые предложены и реализованы:

- метод решения начально-краевых задач механодиффузии, основанный на построении интегральных соотношений между правыми частями граничных условий различных типов, для одних и тех же дифференциальных уравнений, позволяющий строить функцию Грина только для одной задачи данного класса. Решения всех остальных задач может быть выражено через указанную функцию Грина, посредством вышеназванных интегральных соотношений;

- асимптотический метод разделения переменных для начально-краевых задач механодиффузии, позволяющий многомерную задачу свести к рекуррентной последовательности одномерных задач.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается использованием известных методов построения моделей механики деформируемого твёрдого тела и термодинамики, апробированных методов решения начально-краевых задач и строго доказанных утверждений. Кроме того, проведено сравнение результатов с известными решениями задач теории упругости. Для одномерных задач также выполнялась проверка путем перехода к решениям соответствующих статических задач.

Практическая значимость состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций работающих в условиях нестационарных внешних воздействий с учетом протекающих в них явлений массопереноса. Кроме того, предложенные методы могут быть применимы не только для описанного класса моделей, но и для любых задач, постановка которых включает в себя системы уравнений гиперболического или параболического типов.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- общая математическая постановка задач связанной нестационарной термоэлектромагнитоупругой диффузии с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса для анизотропных многокомпонентных тел в произвольной криволинейной системе координат; из нее как частный случай получены начально-краевые задачи для механодиффузии с бесконечной скоростью распространения тепла и массопереноса в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных сред;

- метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой координат, основанный на представлении искомым полей перемещений и приращений концентраций в виде разложений по собственным функциям;

- метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в случае произвольных граничных условий основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий различных типов;

- асимптотический метод решения класса многомерных нестационарных связанных задач механодиффузии позволяющий при определенных условиях свести многомерную задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач.

Апробация работы. Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кременки, 2011 – 2018);

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2014 – 2017)

- XV International conference «Dynamical system modelling and stability investigation MODELLING END STABILITY» (Kyiv, Ukraine, 2011);

- Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Львов, 2013);

- Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2011, 2013);
- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций (Ялта, Запорожье, 2011, 2012);
- Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львов, 2014);
- Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике». (Москва, 2014, 2017);
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». (Тула, 2014);
- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);
- V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела (Астрахань, 2011);
- Украинско-российский научный семинар «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012);
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2012 – 2018 г.);
- Международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, 2013);
- Международная научная конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, 2013);
- VII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 2013);
- VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014);
- X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017);
- IV Международная научно-практическая конференция «Строительство

и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2015);

- VIII Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2017);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 2016);

- XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2015 – 2017);

- Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016);

- III Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», СКТеММ'16 (Москва, 2016);

- 24-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, XXIV ICTAM (Montreal, 2016);

- 14th International Conference on Fracture, ICF 14 (Rhodes, Greece, 2017);

- XLIII международная молодежная научно-практическая конференция «Гагаринские чтения». (Москва, 2017, 2018);

- Всероссийская конференция по строительной механике корабля посвященная памяти д.т.н., профессора В.А. Постнова (Санкт-Петербург, 2017);

- Всероссийская конференция молодых ученых механиков (Сочи, 2017).

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (коды проектов 11-08-00064, 14-08-01161, 17-08-00663).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 43 печатных работах, из них 14 статей в рецензируемых журналах, 2 статьи в энциклопедии, 27 в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 345 наименований. Общий объем диссертации 248 страниц, включая 41 рисунок.

Содержание работы

Во введении приведено краткое содержание диссертации по главам, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе дан аналитический обзор основных работ по тематике диссертационного исследования с обоснованием его необходимости. Приводится вывод связанной замкнутой системы линейных уравнений нестационарного движения однородной термоэлектромагнитоупругой многокомпонентной анизотропной среды с учетом явлений массопереноса. Математическая модель включает в себя линейные уравнения движения сплошной среды и соотношения Коши для деформаций (начальное состояние недеформированное). В термодинамическую составляющую включено линеаризованное уравнение баланса энтропии, законы теплопроводности Фурье и массопереноса Фика с конечными скоростями распространения возмущений. Электромагнитная часть модели состоит из линеаризованных уравнений Максвелла, обобщенного закона Ома (с учетом скорости движения среды), выражений для силы Лоренца и притока тепловой и электромагнитной энергии. Физические соотношения строятся для среды с произвольной анизотропией с использованием квадратичного приближения свободной энергии как функции деформаций, изменения температуры, концентрации веществ, входящих в состав среды, и компонент векторов электрической и магнитной индукции.

От общей модели осуществлен переход к рассматриваемому в работе частному случаю – упругодиффузионной модели для ортотропных многокомпонентных сред без релаксации тепловых и диффузионных потоков. Уравнения движения анизотропной среды, представляющей собой N – компонентный твердый раствор в этом случае принимает вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)}}{\rho R T_0} D_{ij}^{(q)} \alpha_{kl}^{(q)} n_0^{(q)}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} = D_{ij}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_i \partial x_j} - \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + F^{(q)} \quad (q = \overline{1, N}),$$

где t – время, x_i – прямоугольные декартовы координаты; u_i и F_i – компоненты векторов перемещения и массовых сил (здесь и далее по повторяющимся латинским индексам, кроме заключенных в круглые скобки, проводится суммирование от 1 до 3); ρ – плотность среды; $F^{(q)}$ – объёмная плотность источников q -ой компоненты вещества в составе N -компонентной среды; C_{ijkl} – компоненты тензоров упругих постоянных; T_0 – начальная температура среды; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – изменение концентрации; $n_0^{(q)}$, $n^{(q)}$ – начальная и актуальная концентрации (массовые доли) компоненты q -го вещества; коэффициенты $\alpha_{ij}^{(q)}$ характеризуют объёмное расширение за счет массопереноса; R – универсальная газовая постоянная, $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса компоненты с номером q .

Полученные замкнутые системы уравнений дополняются начальными и граничными условиями. В качестве геометрической области решения задачи рассматриваются одномерный, двумерный и трехмерный плоский слой, полупространство и пространство.

Вводятся следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании они обозначаются штрихом, который в дальнейшем изложении будет опускаться, m – размерность задачи):

$$x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{C_{1111}}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha'_{ij} = \frac{\alpha_{ij}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad (2)$$

$$D_{ij}^q = \frac{D_{ij}^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_{ijkl}^q = \frac{\Lambda_{ijkl}^{(q)}}{CL}, \quad F'_i = \frac{\rho F_i}{C_{1111}}, \quad F_{q+m} = \frac{F^{(q)}L}{C}.$$

В этих величинах уравнение (1) принимает вид (точки здесь и далее обозначают производную по безразмерному времени τ , суммирование по индексу, обозначающему номер диффундирующей компоненты не производится):

$$\begin{aligned}\ddot{u}_i &= C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_j} + F_i \quad (q = \overline{1, N}), \\ \dot{\eta}_q &= D_{ij}^q \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_i \partial x_j} - \Lambda_{ijkl}^q \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + F_{q+m}.\end{aligned}\quad (3)$$

Соотношения (3) совместно с граничными и начальными условиями образуют замкнутую постановку задач упругости с учётом диффузии в декартовой системе координат.

В работе рассматриваются следующие модели.

1. *Одномерные процессы:* $u = u(x, \tau)$, $F_1 = F(x, \tau)$, $\eta_q = \eta^{(q)}(x, \tau)$, $F_{q+1} = F_{q+1}(x, \tau)$, $x = x_1$. Соответствующие уравнения движения имеют вид (штрих означает производную по переменной x):

$$\ddot{u} = u'' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' + F_1, \quad \dot{\eta}_q = D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' + F_{q+1} \quad (q = \overline{1, N}). \quad (4)$$

Здесь

$$D_q = D_{11}^{(q)}, \quad \alpha_q = \alpha_{11}^{(q)}, \quad \Lambda_q = \Lambda_{1111}^{(q)}.$$

2. *Двумерные процессы для ортотропной среды:*

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x_1, x_2, \tau), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, \tau), \quad \eta_q = \eta_q(x_1, x_2, \tau), \\ F_1 &= F_1(x_1, x_2, \tau), \quad F_2 = F_2(x_1, x_2, \tau), \quad F_{q+2} = F_{q+2}(x_1, x_2, \tau).\end{aligned}$$

Соответствующие уравнения записываются так ($q = \overline{1, N}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \ddot{u}_1 + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1}, \\ C_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + C_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} &= \ddot{u}_2 + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2}, \\ D_1^q \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_2^2} &= \dot{\eta}_q + \Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3}.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}C_{11} &= C_{1111} = 1, \quad C_{22} = C_{2222}, \quad C_{12} = C_{1212}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^q = \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^q, \quad \alpha_\alpha^q = \alpha_{\alpha\alpha}^q, \\ C_{21} &= C_{1122} + C_{1221}, \quad C_0 = C_{21} - C_{12}, \quad D_\alpha^q = D_{\alpha\alpha}^q.\end{aligned}\quad (6)$$

3. *Трехмерные процессы для ортотропной среды.* Здесь используются уравнения в форме (3). При этом наряду с (6) используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_{33} &= C_{3333}, & C_{13} &= C_{1313} = C_{3131}, & C_{23} &= C_{2323} = C_{3232}, \\ C_{31} &= C_{1133} + C_{1313}, & C_{32} &= C_{2233} + C_{2332}, & C_1 &= C_{31} - C_{13}, & C_2 &= C_{32} - C_{23}. \end{aligned}$$

Кроме того, для описания некоторых алгоритмов глав 4 и 5 применяется *общая постановка начально-краевых задач в операторной форме*:

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) + \mathbf{F} = 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{y})|_{\Gamma} = \mathbf{f}(\mathbf{s}, \tau), \quad \mathbf{s} \in \Gamma; \quad (8)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{y})|_{\tau=0} = 0, \quad (9)$$

где \mathbf{L} – линейный матричный дифференциальный оператор соответствующий уравнениям (3), (4) или (5); \mathbf{M} ($i = \overline{1, 2}$) – матричный дифференциальный оператор граничных условий; \mathbf{N} – матричный дифференциальный оператор начальных условий; \mathbf{y} – вектор неизвестных; \mathbf{f} – вектор-функция правых частей краевых условий (8); \mathbf{F} – вектор-функция объемных возмущений; $\Gamma = \partial D$; D – область решения задачи (7) – (9).

Результаты первой главы опубликованы в работах [15, 17, 27, 42].

Во второй главе рассматриваются одномерные нестационарные задачи механодиффузии, описываемые системой уравнений (4). Решение ищется в виде сверток функций Грина с правыми частями граничных условий. Сами функции Грина представляются в виде интегралов и рядов по собственным функциям, которые определяются как решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Доказывается, что таковыми функциями являются $\sin \lambda_n x$ и $\cos \lambda_n x$, где $\lambda_n = \pi n$ или $\lambda_n = \pi(2n - 1)/2$. Причем они могут быть найдены только при определенных видах граничных условий типичными представителями которых являются следующие условия

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & (\Lambda_q u'' - D_q \eta'_q)|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & (\Lambda_q u'' - D_q \eta'_q)|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \quad \eta_q|_{x=0} = f_{q+1,1}(\tau), \\ \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \quad \eta_q|_{x=1} = f_{q+1,2}(\tau), \end{aligned} \quad (11)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta'_q) \Big|_{x=0} = f_{q+1,1}(\tau), \\ \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \quad \eta_q|_{x=1} = f_{q+1,2}(\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритм решения подробно излагается на примере задачи (4), (11) с нулевыми начальными условиями. Решение ищется в виде («*» обозначает свертку по времени)

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{q+1,k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{q+1,k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь f_{km} – правые части граничных условий; G_{ik} ($i, k = \overline{1, N+1}$) – функции Грина задачи, определяемой системой (4), нулевыми начальными условиями и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \left(G'_{1k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad G_{q+1,k}|_{x=0} = \delta_{q+1,k} \delta(\tau), \\ \left(G'_{1k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad G_{q+1,k}|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{qr} – символ Кронекера.

Для нахождения функций Грина к исходной системе (4) применяется преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье (индекс « L » обозначает трансформанту Лапласа):

$$u^L = \sum_{n=0}^{\infty} u^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_q^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (15)$$

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $u^{Lc}(\lambda_n, s)$ и $\eta_q^{Ls}(\lambda_n, s)$, решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned}
u^L &= \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^L f_{k1}^L, \quad \eta_{qn}^L = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^L f_{k1}^L, \\
G_{1k}^L(x, s) &= -\frac{\delta_{1k}}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \\
G_{q+1,1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q \lambda_n}{s + D_q \lambda_n^2} + G_{q+1,1}^{Ls}(\lambda_n, s) \right] \sin \lambda_n x, \\
G_{q+1,p+1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\lambda_n (D_q \delta_{pq} - \alpha_p \Lambda_q)}{s + D_q \lambda_n^2} + G_{q+1,p+1}^{Ls}(\lambda_n, s) \right] \sin \lambda_n x, \\
G_{q+1,k}^{Ls}(\lambda_n, s) &= \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad p = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N+1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

где $P_{ik}(\lambda_n, s)$, $Q_q(\lambda_n, s)$ и $P(\lambda_n, s)$ – рациональные функции явный вид которых здесь не приводится.

Оригиналы полученных изображений находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления:

$$\begin{aligned}
G_{1k}(x, \tau) &= -\delta_{1k} \tau + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\
G_{q+1,1}(x, \tau) &= \Lambda_q \frac{\partial}{\partial x} \left[\vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, \\
G_{q+1,p+1}(x, \tau) &= (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq}) \frac{\partial}{\partial x} \left[\vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,p+1}^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x \quad (p = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N+1}); \\
G_{1k}^c(\lambda_n, \tau) &= e^{\gamma \tau} \left(A_{1k}^{(1)} \cos \beta \tau - A_{1k}^{(2)} \sin \beta \tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{1k}^{(j)} e^{s_j + 2\tau},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$A_{1k}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{1k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \quad B_{1k}^{(j)} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_{j+2,n})}{P'(\lambda_n, s_{j+2})}, \tag{18}$$

$$G_{q+1,k}^s(\lambda_n, \tau) = e^{\gamma\tau} \left(A_{q+1,k}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{q+1,k}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \sum_{j=1}^{N+1} B_{q+1,k}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau},$$

$$A_{q+1,k}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{q+1,k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)},$$

$$B_{q+1,k}^{(j)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_{j+2})}{Q'_q(\lambda_n, s_{j+2})}, \quad B_{q+1,k}^{(N+1)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{Q'_q(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}.$$

где $\gamma(\lambda_n) = \operatorname{Re}[s_1(\lambda_n)]$; $\beta(\lambda_n) = \operatorname{Im}[s_1(\lambda_n)]$; $s_2 = \bar{s}_1$; $s_{q+2}(\lambda_n) \in \Re$; $\gamma, s_{q+2} < 0$; s_l ($l = \overline{1, N+2}$) – нули многочлена $P(\lambda_n, s)$; $s_{N+3}(\lambda_n) = -D_q \lambda_n^2$.

Аналогичным образом решаются задачи с граничными условиями (10) и (12). В первом случае вместо рядов (15) используются следующие представления:

$$u^L = \sum_{n=1}^{\infty} u^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (19)$$

В задаче с граничными условиями (12) используются ряды (19), где $\lambda_n = \pi(2n-1)/2$. Для примера рассмотрен ряд задач для однокомпонентного и двухкомпонентного пространства, полупространства и слоя. В качестве однокомпонентной среды рассматривается алюминий, имеющий следующие физические характеристики

$$\begin{aligned} \lambda &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, & \mu &= 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, & T_0 &= 800 \text{ К}, \\ \alpha &= 4.2 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, & \rho &= 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & D &= 7.73 \cdot 10^{-14} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, & L &= 1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (20)$$

В правых частях условий (11) полагаем:

$$f_{11}(\tau) = f_{12}(\tau) = H(\tau), \quad f_{21}(\tau) = f_{22}(\tau) = 0.$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Результаты вычислений для перемещений и приращения концентрации по формулам (13), (17) и (18) в различных точках слоя показаны на рис. 1 – 3.

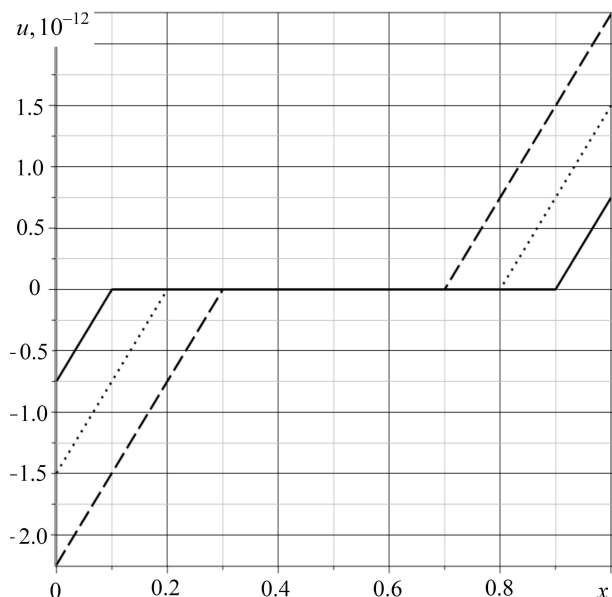


Рис. 1. Зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x : сплошная линия соответствует $\tau = 10^{-1}$, пунктирная – $\tau = 2 \cdot 10^{-1}$, штриховая – $\tau = 3 \cdot 10^{-1}$.

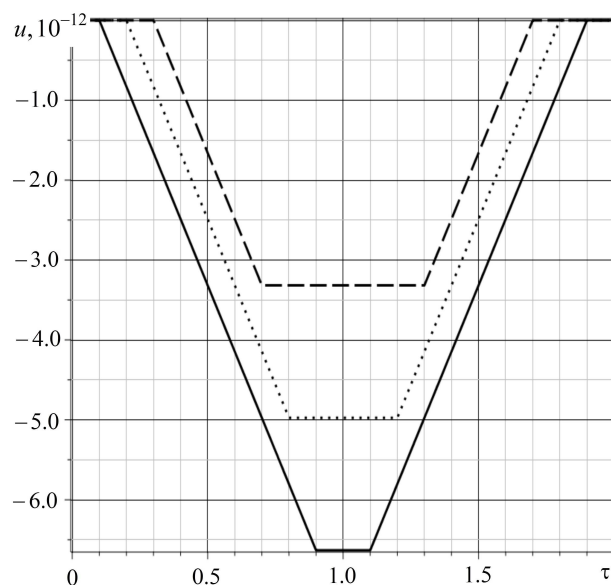


Рис. 2. Зависимость $u(x, \tau)$ от координаты t : сплошная линия соответствует $x = 10^{-1}$, пунктирная – $x = 2 \cdot 10^{-1}$, штриховая – $x = 3 \cdot 10^{-1}$.

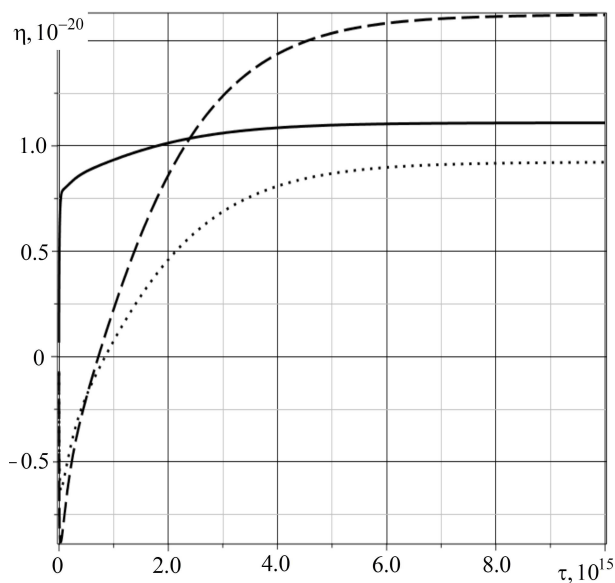


Рис. 3. Зависимость $\eta(x, \tau)$ от τ : сплошная линия соответствует $x = 0.1$, пунктирная – $x = 0.5$, штриховая – $x = 0.9$.

В качестве двухкомпонентной среды выбирается дюралюминий, для которого основные диффундирующие вещества алюминий (компонент 1) и медь (компонент 2). Ему соответствуют следующие физические параметры:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad \mu = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad T_0 = 800 \text{ К}, \\
D_1 &= 7.74 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad D_2 = 3.11 \cdot 10^{-18} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad \rho = 2780 \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3}, \\
\alpha_1 &= 4.2 \cdot 10^4 \frac{\text{ДЖ}}{\text{МОЛЬ}}, \quad \alpha_2 = 2.3 \cdot 10^4 \frac{\text{ДЖ}}{\text{МОЛЬ}}, \quad L = 1 \text{ м}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь для примера рассматривается задача (4), (10). В правых частях условий (10) полагаем:

$$f_{21}(\tau) = H(\tau), \quad f_{11}(\tau) = f_{31}(\tau) = 0.$$

Результаты вычислений для перемещений и приращения концентрации в различных точках слоя показаны на рис. 4 – 6

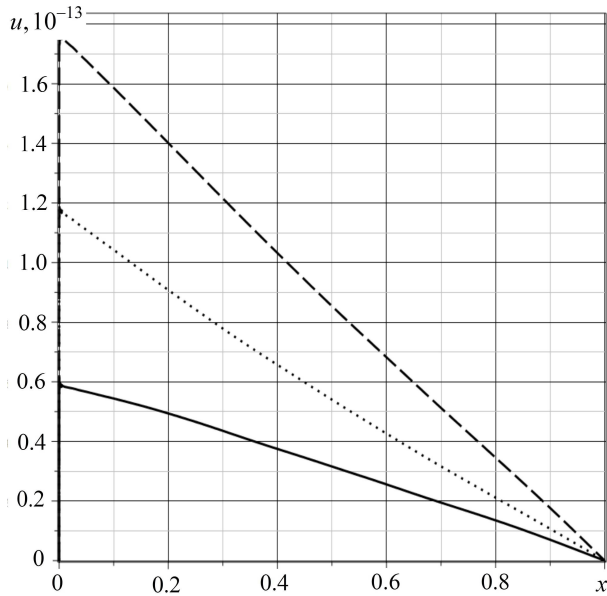


Рис. 4. Зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x : сплошная линия соответствует $\tau = 10^2$, пунктирная – $\tau = 2 \cdot 10^2$, штриховая – $\tau = 3 \cdot 10^2$.

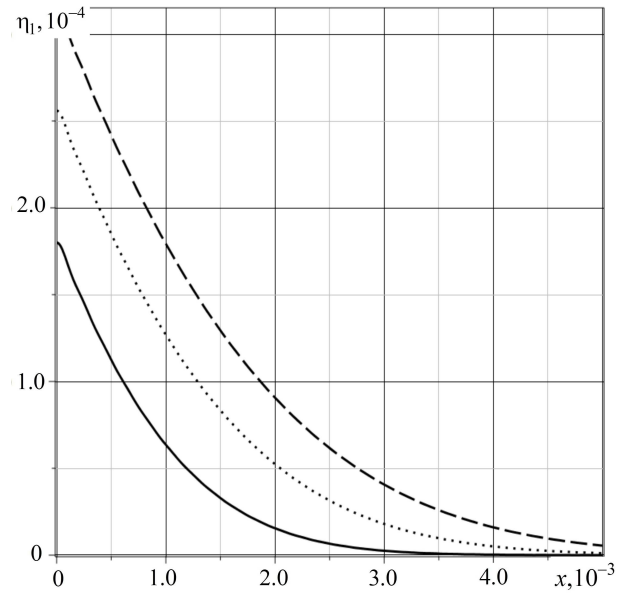


Рис. 5. Зависимость $\eta_1(x, \tau)$ от координаты x : сплошная линия соответствует $\tau = 10^{11}$, пунктирная – $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая – $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

При рассмотрении задач для полупространства вместо разложения в ряды Фурье используется синус-, косинус-преобразования Фурье. Также рассматриваются вопросы связанные с распространением объемных механодиффузионных возмущений в одномерном пространстве, полупространстве и слое.

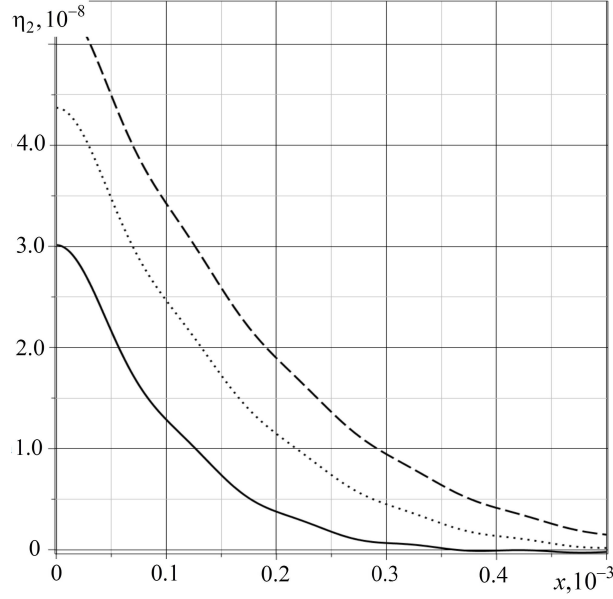


Рис. 6. Зависимость $\eta_2(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия соответствует $\tau = 10^{14}$, пунктирная – $\tau = 2 \cdot 10^{14}$, штриховая – $3 \cdot 10^{14}$.

Результаты второй главы опубликованы в работах [3–7, 18, 19, 21–23, 33, 34].

В третьей главе Исследуются двумерные механодиффузионные процессы в ортотропных средах. Постановка задачи включает в себя уравнения (5), нулевые начальные условия и граничные условия одного из следующих трёх видов (для физических констант используются обозначения (6))

$$\begin{aligned}
 & u_2|_{x_2=0} = f_{21}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau), \\
 & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} = f_{11}(x_1, \tau), \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau), \\
 & \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = f_{q+2,1}(x_1, \tau), \\
 & \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau),
 \end{aligned} \tag{22}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 & \eta_q|_{x_2=0} = f_{q+2,1}(x_1, \tau), \quad \eta_q|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau), \\
 & u_1|_{x_2=0} = f_{11}(x_1, \tau), \quad u_1|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\left. \left(C_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j \right) \right|_{x_2=0} = f_{21}(x_1, \tau),$$

$$\left. \left(C_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j \right) \right|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau),$$

ИЛИ

$$\left. \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right|_{x_2=0} = f_{11}(x_1, \tau), \quad \eta_q|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau),$$

$$\left. \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_2} \right) \right|_{x_2=0} = f_{q+2,1}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=0} = f_{21}(x_1, \tau), \quad (24)$$

$$u_1|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau), \quad \left. \left(C_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j \right) \right|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau).$$

Для решения этих задач с нулевыми начальными условиями также используются интегральные представления искомых функций в виде свёрток функций Грина с правыми частями граничных условий (звездочки обозначают свертки по времени τ и координате x_1):

$$u_i = \sum_{k=1}^{N+2} \sum_{l=1}^2 G_{ikl} * * f_{kl}, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+2} \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl} * * f_{kl}, \quad q = \overline{1, N},$$

$$f * * g = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\tau} f(x_1 - \xi, \tau - t) g(\xi, t) dt. \quad (25)$$

Здесь G_{mkl} ($m, k = \overline{1, N+2}, l = 1, 2$) - поверхностные функции Грина, которые определяются как решения задач, включающих в себя уравнения (5), нулевые начальные условия и следующие граничные условия:

- для задачи (5), (22)

$$G_{2kl}|_{x_2=0} = \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{2kl}|_{x_2=1} = \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$\left. \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \right|_{x_2=0} = \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad \left. \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \right|_{x_2=1} = \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Bigg|_{x_2=0} = \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ & \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Bigg|_{x_2=1} = \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau); \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

- для задачи (5), (23)

$$\begin{aligned} G_{1kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Bigg|_{x_2=0} &= \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ G_{1kl}|_{x_2=1} &= \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x_2=1} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Bigg|_{x_2=1} &= \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \end{aligned} \quad (27)$$

- для задачи (5), (24)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \Bigg|_{x_2=0} &= \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), & G_{2kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Bigg|_{x_2=0} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ G_{1kl}|_{x_2=1} &= \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), & G_{q+2,kl}|_{x_2=1} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Bigg|_{x_2=1} &= \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau). \end{aligned} \quad (28)$$

Для построения решений используются преобразования Лапласа по времени, Фурье по пространственной координате x_1 и разложение в тригонометрические ряды. При этом:

- для граничных условий (22) применяются разложения

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{array} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_1^c(x_1, \lambda_n, \tau) \\ \eta_q^c(x_1, \lambda_n, \tau) \end{array} \right\} \cos \lambda_n x_2, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_2^s(x_1, \lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2, \quad \lambda_n = \pi n, \end{aligned} \quad (29)$$

- для граничных условий (23) используются ряды

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{array} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_1^s(x_1, \lambda_n, \tau) \\ \eta_q^s(x_1, \lambda_n, \tau) \end{array} \right\} \sin \lambda_n x_2, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_2^c(x_1, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2, \quad \lambda_n = \pi n, . \end{aligned} \quad (30)$$

- для граничных условий (24) используются ряды (29), где $\lambda_n = \pi(2n - 1)/2$.

Алгоритм решения двумерных задач в работе подробно излагается на примере задач с граничными условиями (22) и (23) и с нулевыми начальными условиями. При этом также как и в случае одномерных задач решения этих задач получается в явном виде, аналогичном (17) и (18). В задачах для полупространства вместо разложений (29) и (30) используются синус- и косинус-преобразования Фурье.

В качестве примера рассматривается анизотропный однокомпонентный материал ($N = 1$), имеющий следующие характеристики:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= 1.40 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad C_{2222} = 1.36 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad T_0 = 800 \text{ К}, \\ C_{1212} &= 3.14 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad C_{1122} = 1.03 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \rho = 5815 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ \alpha_{11} &= 5.34 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \quad \alpha_{22} = 4.8 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \\ D_{11} &= 3.86 \cdot 10^{-14} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad D_{22} = 6.23 \cdot 10^{-18} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad L = 1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (31)$$

Полагается, что правые части граничных условий (23) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{31}(x_1, \tau) &= f_{11}(x_1, \tau) = f_{12}(x_1, \tau) = f_{32}(x_1, \tau) \equiv 0, \\ f_{21}(x_1, \tau) &= f_{22}(x_1, \tau) = e^{-\varepsilon^2 x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.1. \end{aligned}$$

Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 7 – 9.

Аналогичным образом рассматриваются задачи с поверхностными возмущениями заданными условиями (23), исследуются двумерные объёмные возмущения для плоскости, полуплоскости и полосы. Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 9–11, 25, 35, 40].

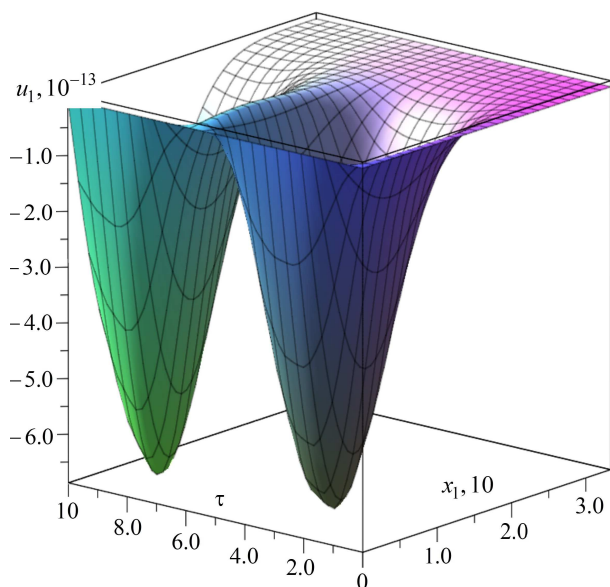


Рис. 7. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

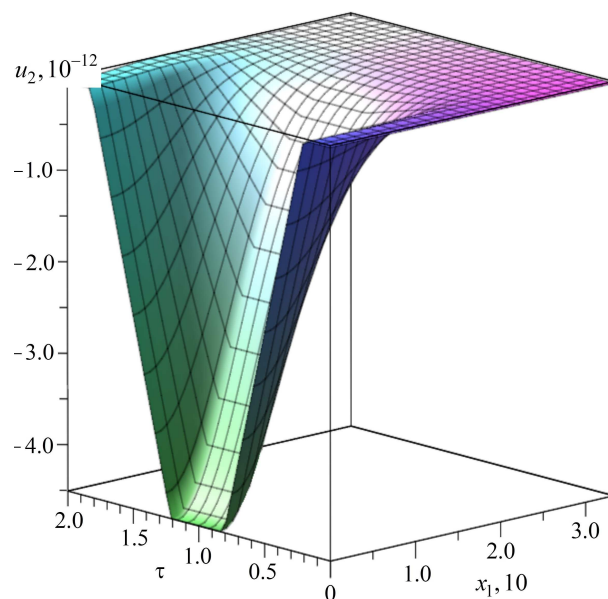


Рис. 8. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

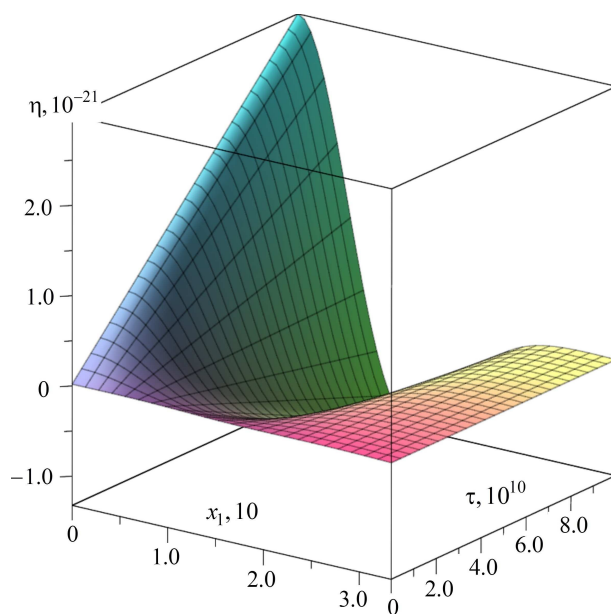


Рис. 9. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

В четвертой главе рассматриваются вопросы, связанные с построением решений задач механо-диффузии с произвольными граничными условиями (кроме тех, что рассматривались в главах 2 и 3). Общая схема алгоритма решения указанных задач выглядит следующим образом. Решение начально-краевой задачи (7) – (9) записывается так:

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{N+M} \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)] \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) d\Gamma dt, \quad (32)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)$ – матрица поверхностных функций Грина задачи (7) – (9); $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{z} = (z^1, z^2, z^3)$, x^i, z^i – криволинейные координаты.

Наряду с ней рассматривается начально-краевая задача определяемая уравнением (7), нулевыми начальными условиями и следующими граничными условиями

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \Big|_{\Gamma} = \mathbf{g}(\mathbf{s}, \tau), \quad \mathbf{s} = (x^1, x^2, x^3) \in \Gamma. \quad (33)$$

Полагая, что решение (32) задачи (7) – (9) удовлетворяет граничным условиям (33), получаем уравнение относительно функции \mathbf{f} :

$$\sum_{k=1}^{N+M} \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} \widetilde{\mathbf{M}}[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)] \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) d\Gamma dt = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tau). \quad (34)$$

Оно устанавливает связь между правыми частями граничных условий (8) и (33). Таким образом, найдя функции Грина задачи (7) – (9), которую в дальнейшем будем называть «эталонной» или «вспомогательной», и решив уравнение (34), получаем решение задачи (7), (33), (9).

В качестве эталонных задач рассматриваются задачи со специальными граничными условиями, решения которых было получено в главах 2 и 3. Само уравнение (34) решается численно с помощью квадратурных формул.

Для демонстрации алгоритма рассматривается два примера.

1. Одномерная начально-краевая задачу для уравнения (4) с нулевыми начальными условиями и с граничными условиями:

$$u|_{x=0} = f_{11}^1(\tau) = H(\tau), \quad \eta|_{x=0} = 0, \quad \eta|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0. \quad (35)$$

Результаты вычислений для однокомпонентной среды из алюминия физические характеристики которой заданы соотношениями (21) представлены на рис. 10.

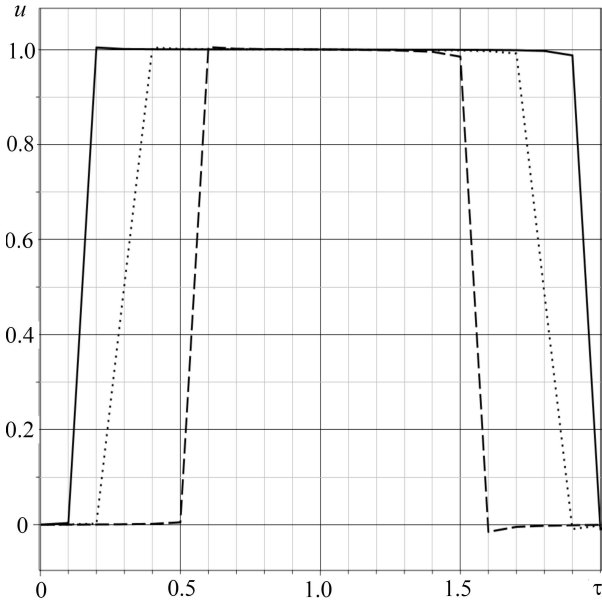


Рис. 10. Зависимость $u(x, \tau)$ от времени: $x = 0.1$ – сплошная линия, $x = 0.25$ – точечная линия, $x = 0.5$ – пунктирная линия.

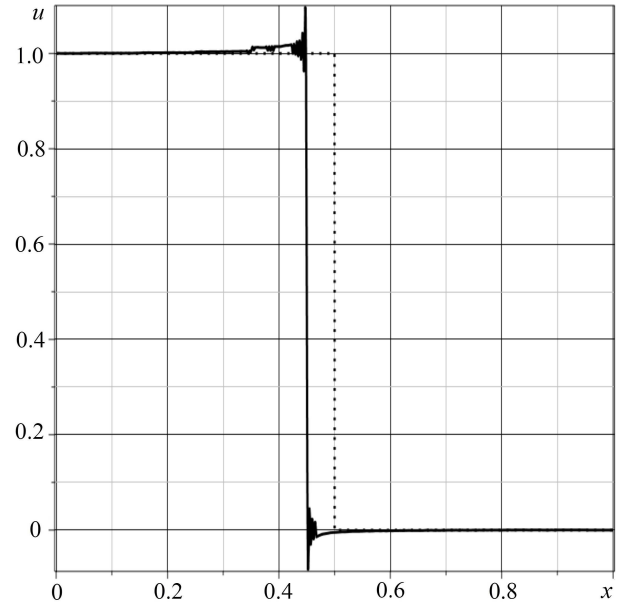


Рис. 11. Зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x : сплошная линия соответствует решению задачи (4), (35) при $\tau = 0.5$; точечная линия – решению чисто упругой задачи при $\tau = 0.5$.

На рис. 11 изображен результат сравнения полученного здесь решения с решением чисто упругой задачи с граничными условиями 1-го рода

$$u|_{x=0} = H(\tau), \quad u|_{x=1} = 0.$$

2. Двумерная задача для однокомпонентной ($N = 1$) ортотропной полосы, ограниченной прямыми $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ (Ox_1x_2 - прямоугольная декартова система координат). Соответствующие физико-механические процессы в среде описываются моделью связанной упругой диффузии, включающей уравнения (5), нулевые начальные условия и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad u_2|_{x_2=0} = 0, \quad \eta|_{x_2=0} = e^{-\varepsilon x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.01, \\ \sigma_{12}|_{x_2=1} = 0, \quad u_2|_{x_2=1} = 0, \quad \eta|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Полагаем, что материал обладает физическими характеристиками (31). Результаты вычислений представлены на рис. 12 – 14.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [8, 12, 14, 29, 37–39, 43].

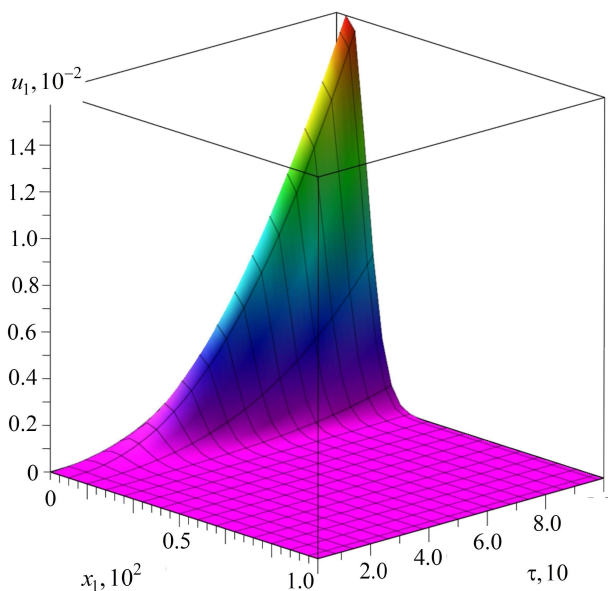


Рис. 12. Перемещения $u_1(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.

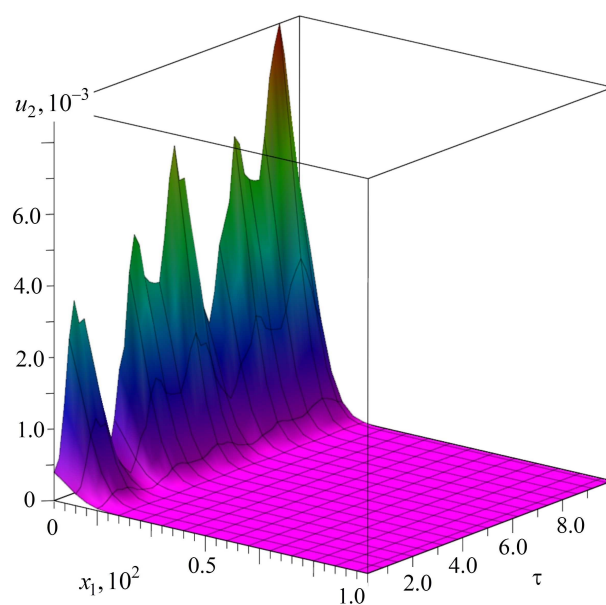


Рис. 13. Перемещения $u_2(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.

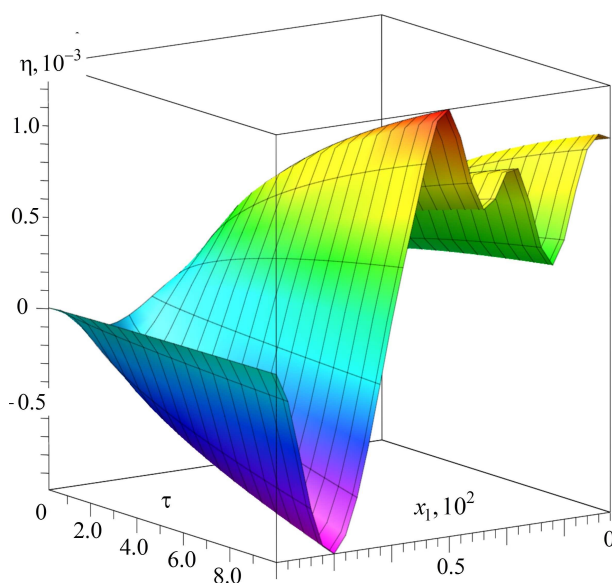


Рис. 14. Приращение концентрации $\eta(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.

В пятой главе рассматриваются асимптотические методы исследования нестационарных задач механодиффузии. Первая часть главы посвящена вопросам перехода от решений задач динамики, полученных в главе 2 к решениям соответствующих статических задач. Для этого исследуется статический аналог задачи (7) – (9) при отсутствии объёмных возмущений

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{M}(\mathbf{y})|_{\Gamma} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Gamma. \quad (37)$$

Чтобы получить решение этой задачи, в (8) следует положить

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) H(\tau)$$

и после вычисления сверток перейти к пределу при $\tau \rightarrow \infty$.

Используя предельное соотношение между оригиналом и его изображением

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s f^L(s),$$

получаем решение $\mathbf{y}^{(s)}$ статической задачи (37) (здесь \mathbf{G} – матрица Грина задачи (7) – (9))

$$\mathbf{y}^{(s)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) * \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) H(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}^L(\mathbf{x}, s) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \mathbf{G}^L(\mathbf{x}, 0) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}). \quad (38)$$

Таким образом, для получения решений задач статики из решений задач динамики необходимо найти предельные значения трансформант Лапласа функций Грина при $s \rightarrow 0$. В таблице 1 приведены несколько примеров сравнения решений задач статики с решениями, полученными из задач динамики путем предельного перехода (38) (начальные условия в задачах динамики нулевые).

Как видно, решения задач статики совпадает с решением, полученным путем предельного перехода (38), с точностью до некоторой произвольной постоянной. Там, где статическая задача не имеет решения, указанный предел не существует. Полученные несоответствия можно объяснить тем, что статические задачи в отличие от динамических не содержат в своей математической постановке начальных условий, фиксирующих пространственное распределение физических полей в некоторый начальный момент времени. Поэтому решение в них определяется с точностью до слагаемых являющихся, вообще говоря, функциями начальных состояний системы. Значения этих величин в решениях, полученных путем предельного перехода из динамики в статику, как раз соответствуют нулевым начальным условиям.

Таблица 1: сравнение решений задач статики с решениями, полученными из задач динамики.

Решения статических задач	Решения, полученные путем предельного перехода из задач динамики
$u'' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' = 0,$ $D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' = 0, \quad (q = \overline{1, N}).$	$u'' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' = \ddot{u},$ $D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' = \dot{\eta}_q \quad (q = \overline{1, N}).$
$u _{x=0} = 1, \quad u _{x=1} = 0,$ $(\Lambda_q u'' - D_q \eta_q') _{x=0} = 0,$ $(\Lambda_q u'' - D_q \eta_q') _{x=1} = 0,$ $u^{(s)} = 1 - x, \quad \eta_q^{(s)} = const;$	$u _{x=0} = H(\tau), \quad u _{x=1} = 0,$ $(\Lambda_q u'' - D_q \eta_q') _{x=0} = 0,$ $(\Lambda_q u'' - D_q \eta_q') _{x=1} = 0,$ $u^{(s)} = 1 - x, \quad \eta_q^{(s)} = 0;$
$\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=0} = 1,$ $\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=1} = 0,$ $\eta_q _{x=0} = 0, \quad \eta_q _{x=1} = 0,$ <p>решения нет;</p>	$\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=0} = H(\tau),$ $\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=1} = 0,$ $\eta_q _{x=0} = 0, \quad \eta_q _{x=1} = 0,$ <p>предел не существует;</p>
$\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=0} = 1,$ $\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=1} = 1,$ $\eta_q _{x=0} = 0, \quad \eta_q _{x=1} = 0,$ $u^{(s)} = x + const, \quad \eta_q^{(s)} = 0;$	$\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=0} = H(\tau),$ $\left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big _{x=1} = H(\tau),$ $\eta_q _{x=0} = 0, \quad \eta_q _{x=1} = 0,$ $u^{(s)} = x - \frac{1}{2}, \quad \eta_q^{(s)} = 0;$

В этом смысле предельный переход (38) из динамики в статику можно считать *естественной регуляризацией* решений статических задач механодиффузии. Полученные таким образом решения могут выступать в роли *регуляризованных решений* для соответствующих задач статики.

Вторая часть главы посвящена решению многомерных задач механодиффузии с помощью процедуры асимптотического разделения переменных. Рассматривается начально-краевая (7) – (9) в декартовой системе координат. Полагается, что область решения задачи имеет вид $D = \mathfrak{R}^2 \times [a, b]$. Таким образом, границей Γ области D являются плоскости $x_3 = a$ и $x_3 = b$. В случае, когда неоднородность в граничных условиях имеет слабовыраженный характер, она формально учитывается введением малого параметра ε как множителя перед аргументами функции \mathbf{f} , т.е. предполагается, что $\mathbf{f} = \mathbf{g}(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \tau)$. Тем самым вводятся в рассмотрение два масштаба: «тождественный» $\xi_\alpha = x_\alpha$ и «медленный» $\zeta_\alpha = \varepsilon x_\alpha$, ($\alpha = 1, 2$). Решение задачи (7) – (9) ищется в виде ряда (\mathbf{y}_l – приближение номер l)

$$\mathbf{y}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{y}_l(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau). \quad (39)$$

Производные по переменным x_α , ξ_α и ζ_α , ($\alpha = 1, 2$) связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\beta \partial \zeta_\alpha} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta}, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Далее операторы \mathbf{L} и \mathbf{M} в задаче (7) – (9) представляются в виде сумм

$$\mathbf{L} = \sum_{l=0}^n \varepsilon^l \mathbf{L}^l, \quad \mathbf{M} = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^l \mathbf{M}^l. \quad (41)$$

Здесь \mathbf{L}^l и \mathbf{M}^l – линейные дифференциальные операторы тех же порядков, что и операторы \mathbf{L} и \mathbf{M} .

Подстановка рядов (39) и сумм (41) в уравнения (7) и граничные условия (8) приводит к рекуррентной последовательности начально-краевых задач

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{y}_0 = 0, \quad \mathbf{M}^0 \mathbf{y}_0|_{\Gamma} = \mathbf{g}(\zeta_1, \zeta_2, \tau); \quad (42)$$

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{y}_1 = -\mathbf{L}^1 \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{M}^0 \mathbf{y}_1|_{\Gamma} = -\mathbf{M}^1 \mathbf{y}_0|_{\Gamma}; \quad (43)$$

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{y}_2 = -\mathbf{L}^1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{L}^2 \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{M}^0 \mathbf{y}_2|_{\Gamma} = -(\mathbf{M}^1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{M}^2 \mathbf{y}_0)|_{\Gamma}; \quad (44)$$

и т.д.

Отметим, что в задачу (42) переменные ζ_1 и ζ_2 входят как параметры, и, кроме того, как следует из граничных условий, нулевое приближение \mathbf{y}_0 не зависит от переменных ξ_1 и ξ_2 . Это означает, что задача (42) в отличие от исходной задачи (7) – (9) является одномерной и как следствие более простой. Все последующие приближения также не зависят от переменных ξ_1 и ξ_2 , т.е. задачи (43) и (44) также являются одномерными.

Таким образом, изложенная асимптотическая процедура разделения переменных позволяет при определённых граничных условиях свести многомерную начально-краевую задачу к рекуррентной последовательности одномерных начально-краевых задач.

В качестве примера рассматривается двумерная начально-краевая задача (5), (22) с нулевыми начальными условиями для ортотропного однокомпонентного ($N = 1$) слоя с физическими характеристиками (31). При этом полагаем

$$\begin{aligned} f_{11}(x_1, \tau) = f_{21}(x_1, \tau) = f_{12}(x_1, \tau) = f_{22}(x_1, \tau) = f_{32}(x_1, \tau) &\equiv 0, \\ f_{31}(x_1, \tau) = g(\varepsilon x_1) H(\tau), \quad g(\varepsilon x_1) = e^{-\varepsilon^2 x_1^2} \quad \varepsilon = 0.1. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 16, 17.

Сравнение полученных здесь результатов с расчетами полученными для аналогичной задачи в главе 3 (рис. 8, 9) позволяет утверждать, что метод асимптотического разделения переменных даёт хорошую точность вычислений в случае когда неравномерность поверхностных возмущений носит слабо выраженный характер.

Также была рассмотрена трехмерная задача с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_i|_{x_3=0} = f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \quad u_i|_{x_3=1} = f_{i2}(x_1, x_2, \tau) \quad (i = 1, 2), \\ u_3|_{x_3=0} = f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=0} = f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau) \quad (i = 1, 2), \\ u_3|_{x_3=1} = f_{32}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau). \end{aligned} \quad (45)$$

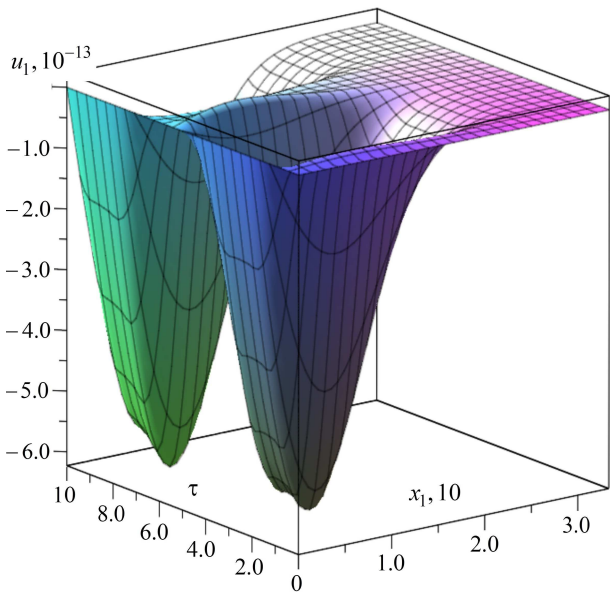


Рис. 15. Зависимость $u_1(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

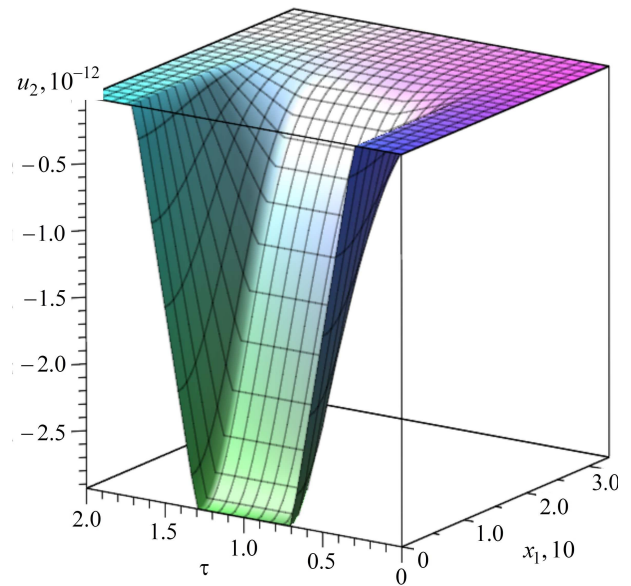


Рис. 16. Зависимость $u_2(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

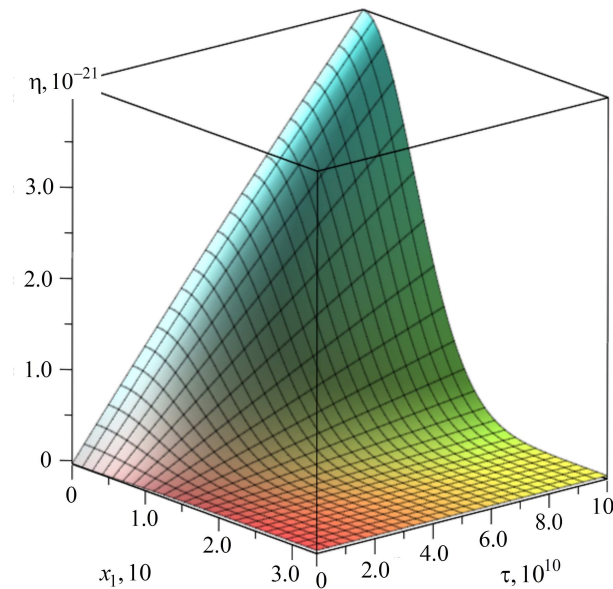


Рис. 17. Зависимость $\eta(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

для слоя из алюминия (20).

Графики полученных решений представлены на рис. 18 – 20.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [2, 13, 16, 20, 24].

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы:

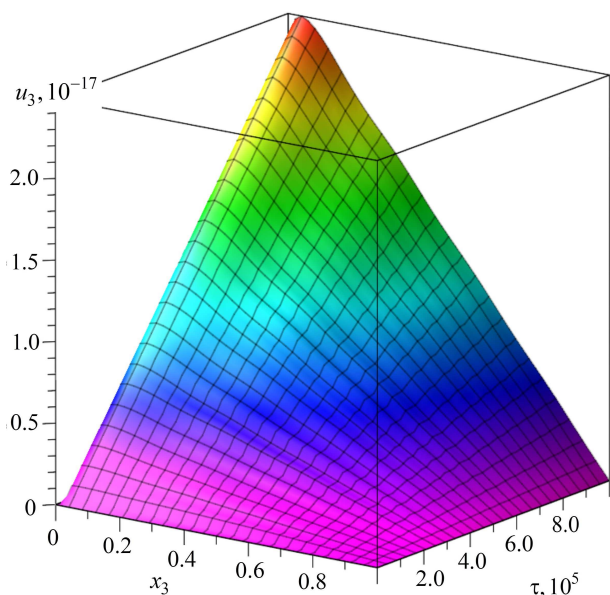


Рис. 18. Зависимость $u_3(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1$.

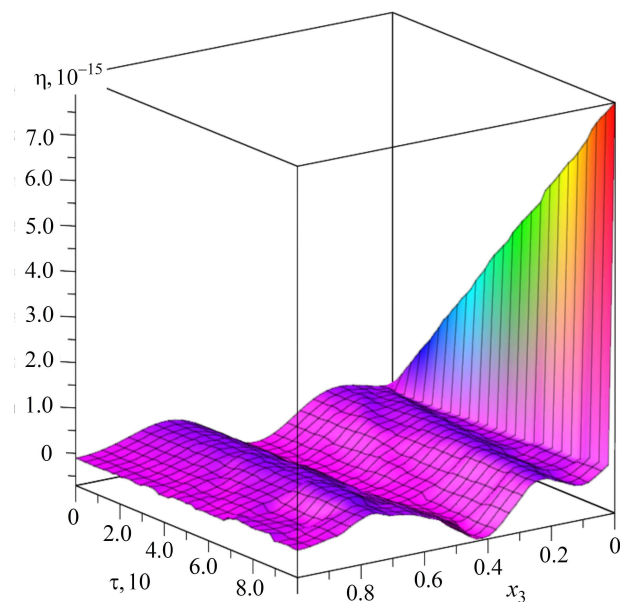


Рис. 19. Зависимость $\eta(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1$.

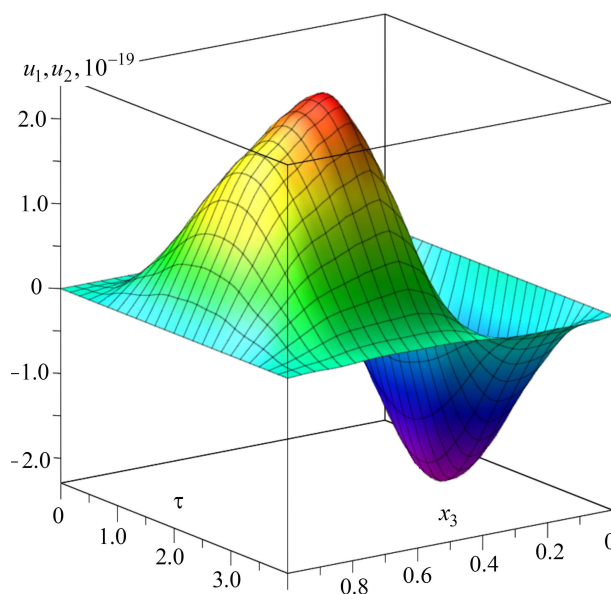


Рис. 20. Зависимость $u_1(x_1, x_2, x_3, \tau)$ и $u_2(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1$.

1. Дана общая математическая постановка задач нестационарной связанной термоэлектромагнитоупругой диффузии с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса для анизотропных многокомпонентных тел в произвольной криволинейной системе координат. Из нее как частный случай получены начально-краевые задачи для механодиф-

фузии с бесконечной скоростью распространения тепла и массопереноса в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных сред.

2. На основании найденных частных решений задачи Штурма-Лиувилля для упругодиффузионного оператора предложен и реализован метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой координат основанный на представлении искомых полей перемещений и приращений концентраций в виде разложений по собственным функциям. Сформулированы условия, накладываемые на начально-краевые задачи, допускающие представление решений в виде разложений по собственным функциям.
3. Предложен и реализован метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в случае произвольных граничных условий основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий различных типов. Указанные соотношения позволяют выразить решение произвольной задачи через известное решение какой-либо задачи, найденное с помощью разложений по собственным функциям.
4. Предложен и реализован асимптотический метод решения класса многомерных нестационарных связанных задач механодиффузии позволяющий при определенных условиях свести многомерную задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач.
5. Получены решения новых нестационарных связанных одномерных, двумерных и трехмерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных многокомпонентных сред.
6. Построены нестационарные поверхностные и объемные функции Грина для упругодиффузионного пространства, полупространства и слоя в одномерном и двумерном случаях.

Основные публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК

1. *Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для ортотропной однокомпонентной полуплоскости // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 5–13.
2. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Фёдоров И.А.* Асимптотическое разделение переменных в задаче термоупругости для анизотропного слоя с неоднородными краевыми условиями // Известия Саратовского университета. Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, Вып. 3. – С. 50–56.
3. *Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Известия Саратовского университета. Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 2, Вып. 4, Ч. 1. – С. 52–59.
4. *Гойхбург Д.М., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений // Вестник Московского авиационного института. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 226–237.
5. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
6. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-матема-

тические науки. – 2014. – Т. 2, Кн. 4. – С. 70–79 = *Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2015. – V. 36, No 4. – P. 503–509.

7. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47
8. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Решение двумерных задач механо-диффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2016. – № 1. – С. 49–56.
9. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. – 2015. – Т.157, Кн. 4. – С. 103–111.
10. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропного однокомпонентного слоя // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2015. – Т.56, № 6. – С. 102–111 = *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2015. – V.56, No 6. – С. 1023–1030.
11. *Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V.* A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – Vol. 38, No 5. – P. 808–817.
12. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // *Materials Physics and Mechanics*. – 2016. – Vol. 28, No. 1/2. – P. 72–76.

13. *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 203, Is 1. – P. 221–238.
14. *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, No 1. – P. 36–41.

Публикации в других изданиях

15. *Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermoelastomagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // Encyclopedia of thermal stress, volume 2. – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P. 1064–1071.
16. *Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Method of Asymptotic Separation of Variables in Problems of Thermoelasticity // Encyclopedia of thermal stress, volume 6. – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P. 2977–2982.
17. *Афанасьева О.А., Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель связанных динамических процессов в термоэлектромагнитоупругих средах с учётом диффузии // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы X Международной научной конференции (19-22 августа 2011). – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2013. – С. 27–32.
18. *Афанасьева О.А., Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием нестационарных диффузионных потоков // Современные проблемы механики деформированного твёрдого тела. Тезисы докладов международной научной конференции. – Одесса: «Астропринт», 2013. – С. 17–19
19. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение одномерной задачи упругой диффузии для полупространства //

Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы IX Международной научной конференции. – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2011. – С. 47–51.

20. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение трёхмерной задачи об упругой диффузии для ортотропного слоя // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной природы. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, 2012. – С. 12–16.
21. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Одномерная нестационарная задача упругой диффузии для двухкомпонентного слоя // Современные проблемы математики и механики: В 3-х томах. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, 2013. –Т. 1. – С. 70–72.
22. Ахметова Е.Р., Давыдов С.А., Земсков А.В. Применение линейной нестационарной модели механодиффузии в расчёте технологических процессов на примере ионной имплантации // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 25–27.
23. *Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение одномерной задачи связанной термоупругой диффузии для полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вып. 16.– С. 60–68.
24. *Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Асимптотическое разделение переменных в задаче упругой диффузии для полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вып. 16.– С. 60–68.

цій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вып. 20.– С. 74–82.

25. *Бугаев Н.М., Тарлаковский Д.В.* Двумерная модель нестационарной механодиффузии для упругого полупространства // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 602–604.
26. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Исследование распространения связанных термоупругодиффузионных возмущений с конечной скоростью в средах с плоскими границами // Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти профессора В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения. – С.-Пб, 2017. – Т. 2. – С. 135–137.
27. *Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Линейная модель связанной термоупругости с учётом диффузии для неоднородных анизотропных сред // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. – М.: ООО ТР-принт, 2011. – Т. 2. – С. 96–106.
28. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Релаксационные одномерные нестационарные упругодиффузионные процессы в сплошных средах. // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТРП», 2018. – С. 39–41
29. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод эквивалентных граничных условий в одномерной задаче механодиффузии для полупространства // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 168–174
30. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель термомеханодиффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузи-

онных возмущений // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VIII Международная научно-практическая конференция, посвященная году науки: в 2 ч. Ч. 2 – Гомель: БелГУТ, 2017. – С. 183–185

31. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Связанная нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 38–40.
32. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Моделирование связанных термоупругодиффузионных процессов при разработке новых материалов // Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2018. – С. 46–48.
33. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель нестационарной механодиффузии для двухкомпонентного слоя // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела: в 2 т. Т. 1. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. – С. 223–228.
34. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Термоупругая диффузионная пластина под действием одномерных нестационарных возмущений // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур. Материалы международной научной конференции. – Минск: Издательский центр БГУ, 2013. – С. 72–74.
35. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для слоя // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 48–51.

36. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Первая краевая задача упругой диффузии для слоя // *Материалы VIII всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела: в 2 ч. Ч.1 / под ред. Н.Ф.Морозова, Б.Г.Миронова, А.В.Манжирова.* – Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет, 2014. – С. 165–168.
37. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Учёт симметрии граничных условий в краевых задачах упругой диффузии // *Материалы IV Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений»:* В 2 ч. Ч. 1 / под общ. ред. А.А. Поддубного; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2015. – С. 385–388.
38. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод решения нестационарных задач упругой диффузии с произвольными граничными условиями // *Вестник Запорожского национального университета.* – 2015. – № 1. – С. 51–59.
39. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Обобщение метода решения нестационарной двумерной задачи упругой диффузии для случая произвольных граничных условий // *Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике»:* сборник тезисов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – с. 43–47.
40. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для ортотропного однокомпонентного полупространства // *Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина.* – М.: Изд-во Московского университета, 2016. – С. 162–165.
41. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Объемные функции Грина в двумерных нестационарных задачах механодиффузии // *Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2-х томах. Т.1.* – Самара: СамГТУ, 2017. – С. 247–251

42. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Постановка одномерной задачи термоэлектромагнитоупругой диффузии // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2018 – С.
43. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. General algorithm of solution of 2-dimension problems of mechanodiffusion // 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Book of papers. – Montreal, Canada, 2016. – P. 2454–2455.