УДК 539.3

Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин

Старовойтов Э.И.,[1]* Локтева Н.А.,[2] Старовойтова Е.Э.[1]**

[1]Белорусский государственный университет транспорта, БелГУТ, ул. Кирова, 34, Гомель, 246653, Республика Беларусь

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: dstar@mail.by*

***e-mail: nlok@rambler.ru*

Аннотация

Рассмотрен изгиб упругой прямоугольной ортотропной трехслойной пластины с жестким заполнителем и композитными слоями. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Дифференциальная система уравнений равновесия получена с помощью вариационного принципа Лагранжа. Аналитическое решение выписано в определителях. Проведен числовой параметрический анализ напряженно-деформированного состояния пластины под действием локальных нагрузок.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, колебания, локальные нагрузки, напряженно-деформированное состояние, композиты.

Введение

Слоистые элементы конструкций широко используются в современном авиа- и ракетостроении, в том числе при изготовлении крыльев, хвостового оперения и топливных баков. Так же актуально использование подобных элементов конструкций в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (транспортное машиностроение, реакторное оборудование и т.д.). Трехслойные пластины в условиях деформации изгиба оказываются наиболее рациональными с точки зрения прочности и жесткости. В публикациях [1–4] рассмотрено деформирование трехслойных пластин, набранных из ортотропных материалов. В монографиях и статьях [5–8] исследован изгиб трехслойных стержней и круговых пластин, связанных и несвязанных с упругим основанием. В работах [9,10] исследован процесс неравномерного нагрева слоистой пластины. В работах [11-13] исследованы колебания трехслойных стержня и оболочки под воздействием различных нагрузок.

Здесь приводится математическая постановка задачи об изгибе прямоугольной трехслойной ортотропной пластины локальными нагрузками, ее аналитическое решение и численный параметрический анализ полученного решения.

1. Постановка и решение задачи

Постановка задачи проводится в прямоугольной системе координат x, y, z, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). В дальнейшем принято, что пластина шарнирно оперта по контуру.

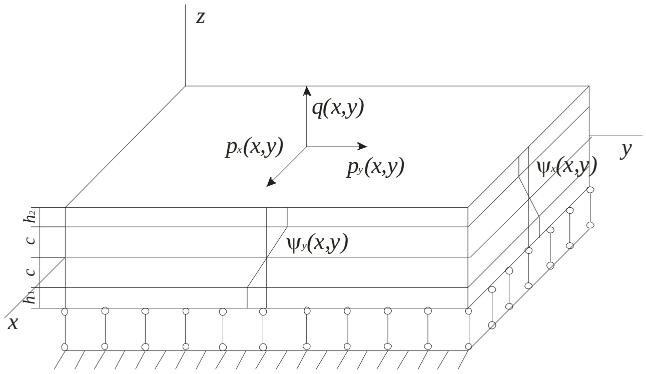

Рис. 1. Расчетная схема прямоугольной трехслойной ортотропной пластины

На пластину действует внешняя распределенная поверхностная нагрузка, проекции которой на координатные оси $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, $q(x, y)$. Через $w(x, y)$ и $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ обозначены прогиб и продольные перемещения срединной плоскости заполнителя вдоль координатных осей; h_k – толщина k-го слоя ($h_3 = 2c, k = 1, 2, 3$); l_x, l_y – размеры пластины вдоль соответствующих осей.

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатными осями x, y величины $\psi_x(x, y)$ и $\psi_y(x, y)$ соответственно. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Деформации малые.

Следуя из введенных геометрических гипотез, выражения для продольных перемещений в слоях через пять искомых функции $w(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $\psi_x(x, y)$ и $\psi_y(x, y)$ принимают вид:

$$u_x^{(1)} = u_x + c\psi_x - zw,_x \ \left(c \le z \le c + h_1\right);$$

$$u_x^{(3)} = u_x + z\psi_x - zw,_x \ \left(-c \le z \le c\right);$$

$$u_x^{(2)} = u_x - c\psi_x - zw,_x \ \left(-c - h_2 \le z \le -c\right);$$

$$u_y^{(1)} = u_y + c\psi_y - zw,_y \ \left(c \le z \le c + h_1\right);$$

$$u_y^{(3)} = u_y + z\psi_y - zw,_y \ \left(-c \le z \le c\right);$$

$$u_y^{(2)} = u_y - c\psi_y - zw,_y \ \left(-c - h_2 \le z \le -c\right), \qquad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $(u_i + c\psi_i)$ – величина смещения внешнего несущего слоя 1 в направлении i-ой оси за счет деформации заполнителя, для несущего слоя 2 это смещение равно $(u_i - c\psi_i)$ $(i = x, y)$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций выражаются через искомые функции с помощью перемещений (1) и соотношений Коши.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0. \qquad (2)$$

Здесь вариация работы внешней поверхностной нагрузки:

$$\delta A=\iint\limits_S (p_x\delta u_x + p_y\delta u_y + q\delta w)dS\,,$$

вариация работы внутренних напряжений:

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3}\iiint\limits_V \sigma_{ij}^{(k)}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)}dV=$$

$$=\iint\limits_S\sum_{k=1}^{3}(\int\limits_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)}dz+\int\limits_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)}\delta\varepsilon_{yy}^{(k)}dz+$$

$$+2\int\limits_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)}\delta\varepsilon_{xy}^{(k)}dz+2\int\limits_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}dz+2\int\limits_{h_3}\sigma_{yz}^{(3)}\delta\varepsilon_{yz}^{(3)}dz)dS\,. \qquad (3)$$

Так как материалы слоёв пластины приняты ортотропными, выражения для напряжениий через деформации имеют вид ($\varepsilon_{zz}^{(k)}=0$):

$$\sigma_{xy}^{(k)}=\varepsilon_{xy}^{(k)}G_{xy}^{(k)},\ \sigma_{yz}^{(k)}=\varepsilon_{yz}^{(k)}G_{yz}^{(k)},\ \sigma_{zx}^{(k)}=\varepsilon_{zx}^{(k)}G_{zx}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)}=A_3^{(k)}\varepsilon_{yy}^{(k)}+A_4^{(k)}\varepsilon_{xx}^{(k)},\ \sigma_{yy}^{(k)}=A_1^{(k)}\varepsilon_{yy}^{(k)}+A_2^{(k)}\varepsilon_{xx}^{(k)}, \qquad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_1^{(k)}=\frac{(1-\nu_{xz}^{(k)}\nu_{zx}^{(k)})E_y^{(k)}}{A^{(k)}},\ A_2^{(k)}=\frac{(\nu_{yx}^{(k)}+\nu_{yz}^{(k)}\nu_{zx}^{(k)})E_y^{(k)}}{A^{(k)}},$$

$$A_3^{(k)}=\frac{(\nu_{xy}^{(k)}+\nu_{xz}^{(k)}\nu_{zy}^{(k)})E_x^{(k)}}{A^{(k)}},\ A_4^{(k)}=\frac{(\nu_{xy}^{(k)}+\nu_{xz}^{(k)}\nu_{xy}^{(k)})E_x^{(k)}}{A^{(k)}},$$

где $E_i^{(k)}$, $\nu_{ij}^{(k)}$, $G_{ij}^{(k)}$ – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига материала k-го слоя,

$$A^{(k)}=(1-\nu_{yz}^{(k)}\nu_{zy}^{(k)})(1-\nu_{xz}^{(k)}\nu_{zx}^{(k)})-$$

$$-(\nu_{yx}^{(k)}+\nu_{yz}^{(k)}\nu_{zx}^{(k)})(\nu_{xy}^{(k)}+\nu_{xz}^{(k)}\nu_{zy}^{(k)})\,.$$

Если выразить вариации деформаций в (3) через пять искомых функции $w(x,\, y)$, $u_x(x,\, y)$, $u_y(x,\, y)$, $\psi_x(x,\, y)$ и $\psi_y(x,\, y)$ при помощи соотношений (4),, провести интегрирование по толщине слоев, с учетом (1), то в итоге из (2) следует система пяти дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$a_1 u_x,_{yy} + a_2 u_y,_{xy} + a_3 u_x,_{xx} + a_4 \Psi_x,_{yy} + a_5 \Psi_y,_{xy} +$$

$$+ a_6 \Psi_x,_{xx} - a_7 w,_{xxx} - a_8 w,_{xyy} + p_x = 0;$$

$$a_1 u_y,_{xx} + a_9 u_x,_{xy} + a_{10} u_y,_{yy} + a_4 \Psi_y,_{xx} + a_{11} \Psi_x,_{xy} +$$

$$+ a_{12} \Psi_y,_{yy} - a_{13} w,_{yyy} - a_{14} w,_{xxy} + p_x = 0;$$

$$a_7 u_x,_{xxx} + a_{13} u_y,_{yyy} + a_{15} u_x,_{xyy} + a_{16} u_y,_{xxy} +$$

$$+ a_{17} \Psi_x,_{xxx} + a_{18} \Psi_y,_{yyy} + a_{19} \Psi_x,_{xyy} + a_{20} \Psi_y,_{xxy} -$$

$$- a_{21} w,_{xxxx} - a_{22} w,_{yyyy} - a_{23} w,_{xxyy} + q = 0;$$

$$a_6 u_x,_{xx} + a_5 u_y,_{xy} + a_4 u_x,_{yy} + a_{24} \Psi_x,_{xx} + a_{25} \Psi_y,_{xy} +$$

$$+ a_{30} \Psi_{x,yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \Psi_x = 0;$$

$$a_{12} u_y,_{yy} + a_{11} u_x,_{xy} + a_4 u_y,_{xx} + a_{28} \Psi_y,_{yy} +$$

$$a_{29} \Psi_x,_{xy} + a_{30} \Psi_y,_{xx} - a_{31} w,_{yxx} - a_{32} w,_{yyy} - G_{yz}^{(3)} c \Psi_y = 0. \qquad (5)$$

Здесь коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев:

$$a_1 = 0,5 G_{xy}^{(1)} h_1 + c G_{xy}^{(3)} + 0,5 G_{xy}^{(2)} h_2;$$

$$a_2 = 0,5 G_{xy}^{(1)} h_1 + c G_{xy}^{(3)} + 0,5 G_{xy}^{(2)} h_2 + A_3^{(1)} h_1 + 2c A_3^{(3)} + A_3^{(2)} h_2;$$

$$a_3 = A_4^{(1)} h_1 + 2c A_4^{(3)} + A_4^{(2)} h_2; \; a_4 = 0,5 G_{xy}^{(1)} c h_1 - 0,5 G_{xy}^{(2)} c h_2;$$

$$a_5 = 0{,}5G_{xy}^{(1)}ch_1 - 0{,}5G_{xy}^{(2)}ch_2 + A_3^{(1)}ch_1 - A_3^{(2)}ch_2;\ a_6 = A_4^{(1)}ch_1 - A_4^{(2)}ch_2$$

$$a_7 = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)A_4^{(1)} - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)A_4^{(2)};$$

$$a_8 = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)(A_3^{(1)} + G_{xy}^{(1)}) - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)(A_3^{(2)} + G_{xy}^{(2)});$$

$$a_9 = 0{,}5G_{xy}^{(1)}h_1 + cG_{xy}^{(3)} + 0{,}5G_{xy}^{(2)}h_2 + A_2^{(1)}h_1 + 2cA_2^{(3)} + A_2^{(2)}h_2;$$

$$a_{10} = A_1^{(1)}h_1 + 2cA_1^{(3)} + A_1^{(2)}h_2;\ a_{11} = 0{,}5G_{xy}^{(1)}ch_1 - 0{,}5G_{xy}^{(2)}ch_2 + A_2^{(1)}ch_1 - A_2^{(2)}ch_2;$$

$$a_{12} = A_1^{(1)}ch_1 - A_1^{(2)}ch_2;\ a_{13} = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)A_1^{(1)} - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)A_1^{(2)};$$

$$a_{14} = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)(A_2^{(1)} + G_{xy}^{(1)}) - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)(A_2^{(2)} + G_{xy}^{(2)});$$

$$a_{15} = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)(A_2^{(1)} + 0{,}5G_{xy}^{(1)}) - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)(A_2^{(2)} + 0{,}5G_{xy}^{(2)});$$

$$a_{16} = 0{,}5(h_1^2 + 2h_1c)(A_3^{(1)} + 0{,}5G_{xy}^{(1)}) - 0{,}5(h_2^2 + 2h_2c)(A_3^{(2)} + 0{,}5G_{xy}^{(2)});$$

$$a_{17} = 0{,}5c(h_1^2 + 2h_1c)A_4^{(1)} + 0{,}5c(h_2^2 + 2h_2c)A_4^{(2)} + \frac{2}{3}c^3A_4^{(3)};$$

$$a_{18} = 0{,}5c(h_1^2 + 2h_1c)A_1^{(1)} + 0{,}5c(h_2^2 + 2h_2c)A_1^{(2)} + \frac{2}{3}c^3A_1^{(3)};$$

$$a_{19} = 0{,}5c(h_1^2 + 2h_1c)(A_2^{(1)} + 0{,}5G_{xy}^{(1)}) +$$

$$+0{,}5c(h_2^2 + 2h_2c)(A_2^{(2)} + 0{,}5G_{xy}^{(2)}) + \frac{2}{3}c^3A_2^{(3)} + \frac{1}{3}G_{xy}^{(3)}c^3;$$

$$a_{20} = 0{,}5c(h_1^2 + 2h_1c)(A_3^{(1)} + 0{,}5G_{xy}^{(1)}) +$$

$$+0{,}5c(h_2^2 + 2h_2c)(A_3^{(2)} + 0{,}5G_{xy}^{(2)}) + \frac{2}{3}c^3A_3^{(3)} + \frac{1}{3}G_{xy}^{(3)}c^3;$$

$$a_{21} = (h_1^2c + h_1c^2 + \tfrac{1}{3}h_1^3)A_4^{(1)} - (h_2^2c + h_2c^2 + \tfrac{1}{3}h_2^3)A_4^{(2)} + \frac{2}{3}c^3A_4^{(3)};$$

$$a_{22} = (h_1^2 c + h_1 c^2 + \tfrac{1}{3} h_1^3) A_1^{(1)} - (h_2^2 c + h_2 c^2 + \tfrac{1}{3} h_2^3) A_1^{(2)} + \frac{2}{3} c^3 A_1^{(3)};$$

$$a_{23} = (h_1^2 c + h_1 c^2 + \tfrac{1}{3} h_1^3)(A_2^{(1)} + A_3^{(1)} + 0{,}5 G_{xy}^{(1)}) +$$

$$+(h_2^2 c + h_2 c^2 + \tfrac{1}{3} h_2^3)(A_2^{(2)} + A_3^{(2)} + 0{,}5 G_{xy}^{(2)}) + \frac{2}{3} c^3 (A_2^{(3)} + A_3^{(3)} + G_{xy}^{(3)});$$

$$a_{24} = A_4^{(1)} c^2 h_1 + A_4^{(2)} c^2 h_2;$$

$$a_{25} = A_3^{(1)} c h_1 + A_3^{(2)} c^2 h_2 + \frac{2}{3} c^3 A_3^{(3)} + 0{,}5 G_{xy}^{(1)} h_1 c^2 + 0{,}5 G_{xy}^{(2)} h_2 c^2 + \frac{1}{3} c^3 G_{xy}^{(3)};$$

$$a_{26} = 0{,}5 c (h_1^2 + 2 h_1 c)(A_3^{(1)} + G_{xy}^{(1)}) +$$

$$+0{,}5 c (h_2^2 + 2 h_2 c)(A_3^{(2)} + G_{xy}^{(2)}) + \frac{1}{3} c^3 G_{xy}^{(3)} + \frac{2}{3} c^3 A_1^{(3)};$$

$$a_{27} = 0{,}5 c (h_1^2 + 2 h_1 c) A_4^{(1)} + 0{,}5 c (h_2^2 + 2 h_2 c) A_4^{(2)}; \; a_{28} = A_2^{(1)} c^2 h_1 + A_2^{(2)} c^2 h_2;$$

$$a_{29} = A_2^{(1)} c^2 h_1 + A_2^{(2)} c^2 h_2 + \frac{2}{3} c^3 A_2^{(3)} + 0{,}5 G_{xy}^{(1)} h_1 c^2 + 0{,}5 G_{xy}^{(2)} h_2 c^2 + \frac{1}{3} c^3 G_{xy}^{(3)};$$

$$a_{30} = 0{,}5 G_{xy}^{(1)} c^2 h_1 + 0{,}5 G_{xy}^{(2)} c^2 h_2 + \frac{1}{3} c^3 G_{xy}^{(3)};$$

$$a_{31} = 0{,}5 c (h_1^2 + 2 h_1 c) A_1^{(1)} + 0{,}5 c (h_2^2 + 2 h_2 c) A_1^{(2)} + \frac{2}{3} c^3 A_1^{(3)};$$

$$a_{32} = 0{,}5 c (h_1^2 + 2 h_1 c) A_2^{(1)} + 0{,}5 c (h_2^2 + 2 h_2 c) A_2^{(2)}. \qquad (6)$$

В качестве условий закрепления принято свободное опирание пластины по контуру $x, y = 0, l$ на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в сечениях $x = 0, l_x$; $y = 0, l_y$ в перемещениях имеют вид:

$$w = u_x,_x = u_y,_y = w,_{xx} = w,_{yy} = 0\,. \qquad (7)$$

Искомое итерационное решение краевой задачи принимается в двойных тригонометрических рядах:

$$\psi_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{xmn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y};\ \psi_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{ymn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y};$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y};$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{xmn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y};\ u_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{ymn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}. \quad (8)$$

где u_{xmn}, u_{ymn}, ψ_{xmn}, ψ_{ymn}, w_{mn} – искомые амплитудные значения соответствующих перемещений.

Проекции нагрузки представимы в виде разложения в следующие ряды:

$$p_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}p_{xmn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y};$$

$$p_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}p_{ymn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y};$$

$$q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y}. \quad (9)$$

Здесь коэффициенты разложения имеют вид:

$$q_{mn} = \frac{4}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} q\cdot\sin\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y}dxdy;$$

$$p_{xmn} = \frac{4}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} p_x\cdot\cos\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y}dxdy;$$

$$p_{ymn} = \frac{4}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} p_y\cdot\sin\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}dxdy. \quad (10)$$

В этом случае граничные условия (7) выполняются автоматически, а для нахождения амплитуд перемещений u_{xmn}, u_{ymn}, ψ_{xmn}, ψ_{ymn}, w_{mn} используется система линейных алгебраических уравнений, которая следует из подстановки выражений (8) и (9) в уравнения (5):

$$\begin{aligned}
&b_{11}u_{xmn} + b_{12}u_{ymn} + b_{13}\psi_{xmn} + b_{14}\psi_{ymn} - b_{15}w_{mn} = p_{xmn},\\
&b_{21}u_{xmn} + b_{22}u_{ymn} + b_{23}\psi_{xmn} + b_{24}\psi_{ymn} - b_{25}w_{mn} = p_{ymn},\\
&b_{31}u_{xmn} + b_{32}u_{ymn} + b_{33}\psi_{xmn} + b_{34}\psi_{ymn} - b_{35}w_{mn} = -q_{mn},,\\
&b_{41}u_{xmn} + b_{42}u_{ymn} + b_{43}\psi_{xmn} + b_{44}\psi_{ymn} - b_{45}w_{mn} = 0,\\
&b_{51}u_{xmn} + b_{52}u_{ymn} + b_{53}\psi_{xmn} + b_{54}\psi_{ymn} - b_{55}w_{mn} = 0,
\end{aligned} \qquad (11)$$

где величины b_{ij} определяются через параметры m, n и коэффициенты (6).

Аналитическое решение системы (11) можно выписать в определителях:

$$u_{xmn} = \frac{\Delta_{1mn}}{\Delta_{mn}};\ u_{ymn} = \frac{\Delta_{2mn}}{\Delta_{mn}};\ \psi_{xmn} = \frac{\Delta_{3mn}}{\Delta_{mn}};\ \psi_{ymn} = \frac{\Delta_{4mn}}{\Delta_{mn}};\ w_{mn} = \frac{\Delta_{5mn}}{\Delta_{mn}},$$

где Δ_{mn} – определитель системы (11), а определители Δ_{imn} следуют из него при замене i-го столбца на столбец свободных членов.

В случае граничных условий отличных от (7) вид решения будет отличаться от (9). Например, если две грани шарнирно оперты, а две другие защемлены, то решение можно строить в одинарных тригонометрических рядах.

2. Действие локальных нагрузок

Локальная равномерно распределенная нагрузка. Поверхностная нагрузка равномерно распределена по площадке, заключенной между прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ ($x_2 > x_1$); $y = y_1$, $y = y_2$ ($y_2 > y_1$):

$$q(x,y) = q_0\left[H\left(x_2 - x\right) - H\left(x_1 - x\right)\right]\left[H\left(y_2 - y\right) - H\left(y_1 - y\right)\right], \qquad (12)$$

где q_0 – постоянная величина, H – функция Хевисайда.

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд получены вычислением первого из интегралов (11) с учетом (13):

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{mn\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi n y_1}{l_y}\right) - \cos\left(\frac{\pi n y_2}{l_y}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\pi m x_1}{l_x}\right) - \cos\left(\frac{\pi m x_2}{l_x}\right)\right]. \qquad (13)$$

Амплитуды находятся после подстановки полученных значений в систему (11), перемещения следуют из (8), напряжения – из (4).

Сосредоточенная сила P приложена в точке $x = x_p$, $y = y_p$. Решение получено предельным переходом. Предполагается, что ранее рассмотренная локальная поверхностная нагрузка $q(x,y)$ действует в некой малой окрестности точки $(x_p; y_p)$ с размерами ξ_x, ξ_y. Тогда выражение для нагрузки принимает вид:

$$q(x,y) = q_0\left[H\left(x_p + \xi_x - x\right) - H\left(x_p - \xi_x - x\right)\right]\times$$

$$\times\left[H\left(y_p + \xi_y - y\right) - H\left(y_p - \xi_y - y\right)\right]. \qquad (14)$$

Равнодействующая этой нагрузки:

$$P = 4q_0\xi_x\xi_y \qquad (15)$$

После подстановки (15) в (14) и устремления ξ_x, ξ_y к нулю выражение для коэффициентов (13) разложения нагрузки в ряд примет следующий вид:

$$q_{mn} = \frac{4P}{l_x l_y} \sin\left(\frac{\pi m x_p}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_p}{l_y}\right). \qquad (16)$$

Ход дальнейшего решения задачи аналогичен вышеприведенному для локально распределенной нагрузки.

Сосредоточенный момент M_y, вектор которого сонаправлен с осью oy, действует в точке $x = x_M$, $y = y_M$. Считается, что он образован парой противоположно направленных сосредоточенных сил P, равных по величине и действующих в окрестности точки $(x_M; y_M)$, разнесенных на бесконечно малое расстояние 2ξ вдоль оси ox.

В результате предельного перехода с использованием (16) и учетом того, что $M_y = 2\xi P$, выражения для коэффициентов q_{mn} принимают вид:

$$q_{mn} = \frac{4M_y m\pi}{l_x^2 l_y} \left[\cos\left(\frac{m\pi x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_M}{l_y}\right) \right].$$

3. Численные результаты

Получены для трёхслойной квадратной ортотропной пластины, пакет которой следующий: несущие слои – высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем; заполнитель – политетрафторэтилен. Механические характеристики используемых материалов приведены в табл. 1. Толщины слоёв: $h_1 = 0{,}03$, $h_2 = 0{,}03$, $c = 0{,}1$ м, линейные размеры $l_x = l_y = 1$ м.

Таблица 1. Механические характеристики используемых материалов

Параметры	Высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем	Политетрафторэтилен
E_x, *МПа*	1,265·105	268,29
E_y, *МПа*	0,105·105	268,29
E_z, *МПа*		268,29
G_{xy}, *МПа*	0,562·104	90
G_{yz}, *МПа*		90
G_{zx}, *МПа*		90
ν_{xy}	0,27	0,49
ν_{yx}	0,02	0,49

Численное исследование сходимости рядов (9) показало, что при их суммировании достаточно удерживать 20 первых слагаемых. Добавление еще 80 слагаемых изменяет результат менее чем на 0,1 %. Дальнейшее увеличение количества членов ряда не влияет на величину перемещений.

На рис. 2, показаны перемещения при действии локальных нагрузок с одинаковой равнодействующей: *1* – поверхностная нагрузка с интенсивностью $q_0 = 0{,}1$ МПа, равномерно распределенная по всей внешней поверхности слоя *1* пластины; *2* – $q_0 = 0{,}4$ МПа, равномерно распределена по площадке $x \in [0,25;\ 0,75]$, $y \in [0.25;\ 0,75]$; *3* – сосредоточенная сила $P = 100$ кН, действующая в середине пластины. Здесь и далее сплошными линиями показаны перемещения *w*, ψ_y вдоль оси *y* при $x = 0,5$, пунктирными – перемещения *w*, ψ_x вдоль оси *x* при $y = 0,5$; *а* – прогиб; *б* – относительный сдвиг в заполнителе

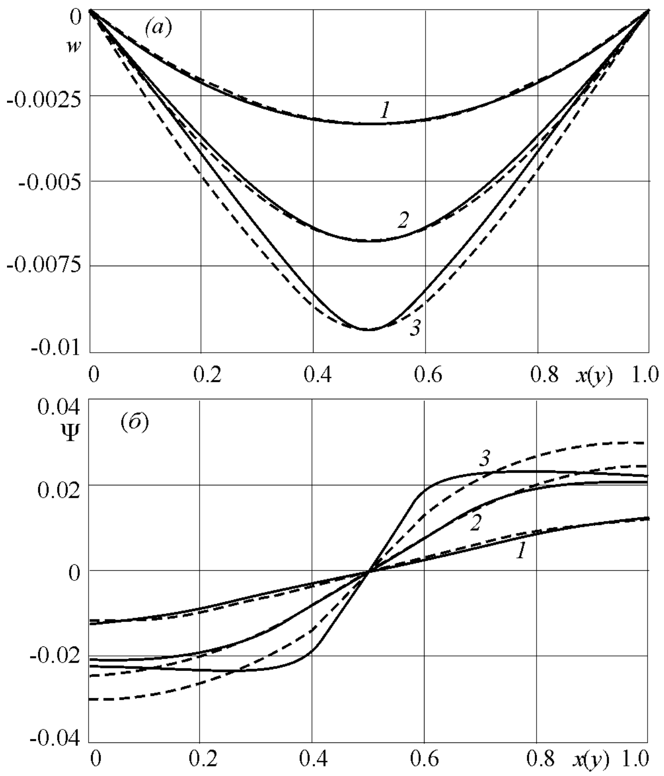

Рис. 2. Перемещения в пластине при действии нагрузок с одинаковой равнодействующей

Как видно из рис. 2, при одинаковой равнодействующей перемещения больше от нагрузок стянутых к центру пластины. Различия в величине перемещений вдоль разных осей объясняется ортотропностью материалов несущих слоев.

На рис. 3 показаны напряжения $\sigma_{xx}^{(k)}$ – *а*, $\sigma_{yy}^{(k)}$ – *б* при действии различных нагрузок с одинаковой равнодействующей. Обозначения, как и на рис. 2. Масштаб для кривых *1* и *2* на рис. 3 *б* увеличен в 10 раз. Переход от равномерно распределенной нагрузки к сосредоточенной силе вызывает увеличение напряжений в несущих слоях примерно в 9 раз, в заполнителе – в 33 раза.

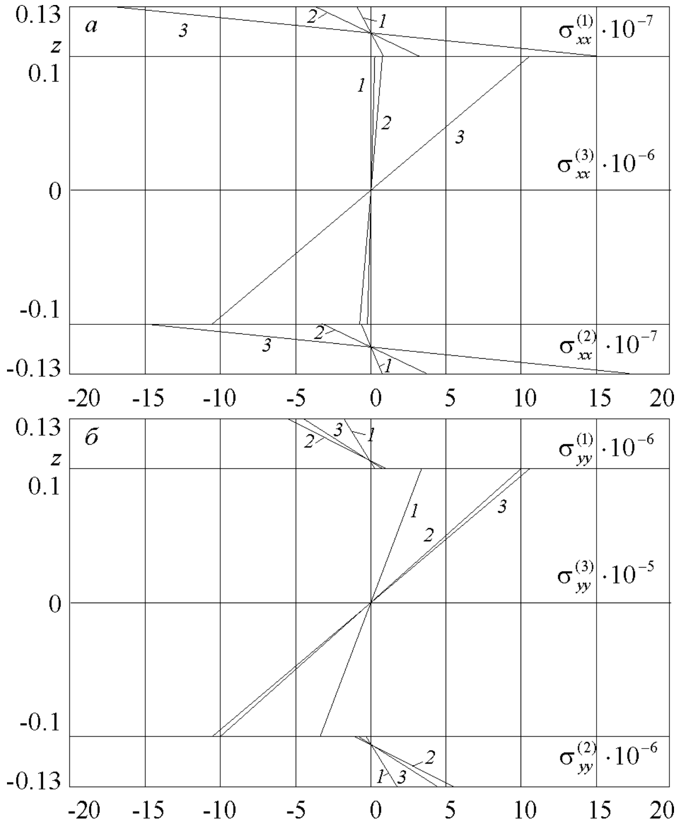

Рис. 3. Напряжения в пластине при действии нагрузок с одинаковой равнодействующей

На рис. 4 показаны перемещения при действии сосредоточенной силы $P = 100$ кН в различных точках поверхности пластины: *1* – $x_p = y_p = 0{,}125$; *2* – $x_p = y_p = 0{,}25$; *3* – $x_p = y_p = 0{,}375$.

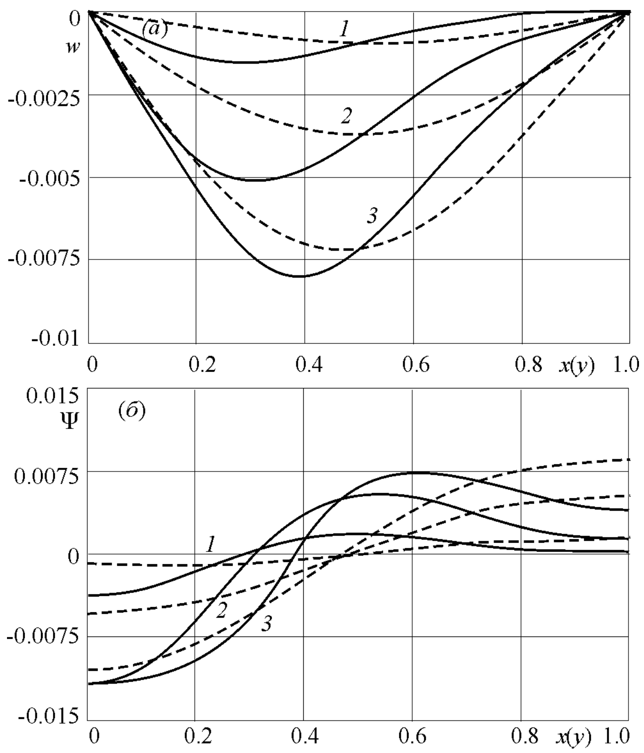

Рис. 4. Перемещения в пластине при действии сосредоточенной силы

Здесь также при продвижении нагрузки к центру пластины перемещения возрастают.

На рис. 5 показаны перемещения в пластине при действии сосредоточенного момента $M_y = 40$ кНм в различных точках поверхности пластины: *1* – в центре пластины ($x_m = y_m = 0,5$); *2* – в точке $x_m = y_m = 0,25$, перемещения вдоль линий, проходящих через центр пластины; *3* – в точке $x_m = y_m = 0,25$, перемещения вдоль линий, проходящих через точку приложения нагрузки, точечные кривые w, ψ_y при $x = x_m$, штрихпунктирные – w, ψ_x при $y = y_m$. При действии момента в центре пластины, перемещения возникают только вдоль оси x; эксцентриситет нагрузки вызывает перемещения вдоль обеих осей.

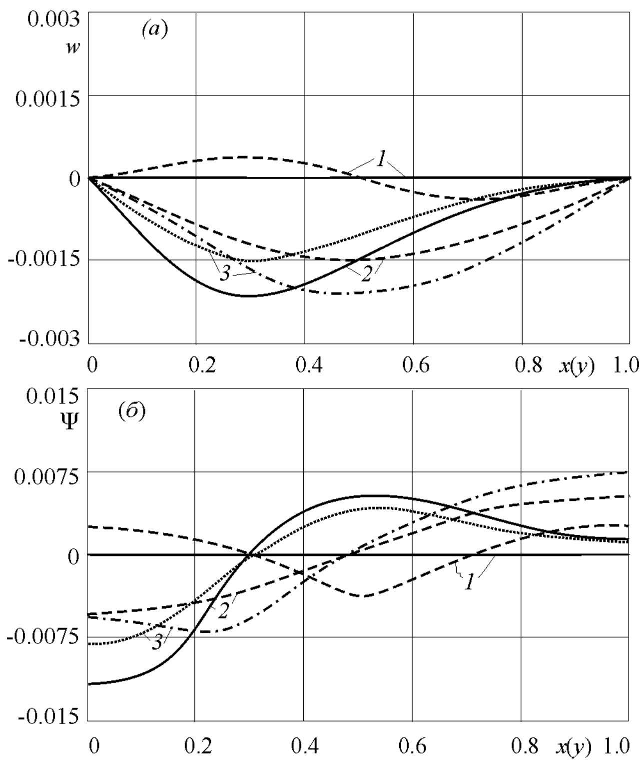

Рис. 5. Перемещения в пластине при действии сосредоточенного момента

Выводы

Приведенный метод расчета прямоугольных трехслойных ортотропных пластин позволяет получать достаточно точные для инженерной практики параметры напряженно-деформированного состояния. Ортотропность материалов несущих слоев существенно влияет на перемещения и напряжения в пластине.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-49-00091).

Библиографический список

1. Тамуров Н. Г. Некоторые задачи изгиба прямоугольных трехслойных ортотропных пластин. – Днепропетровск, Изд-во ДГУ, 1959. - 18 с.

2. Jeon J. S., Hong C. S. Bending of tapered anisotropic sandwich plates with arbitrary edge conditions, AIAA Journal. 1992. no 7. pp. 1762–1769.

3. Katori H., Nishimura T. Shear deflection of anisotropic plate // Нихон кикай гаккай ромбунсю. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. 1992. no 545. pp. 133–139.

4. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. - М.: Наука, 1989. – 373 с.

5. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.

6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39. no. 12. pp. 1458–1463.

7. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45–52.

8. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический

вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. № 1. – С. 16–22.

9. Вестяк В.А., Земсков А.В., Федотенков Г.В. Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 6. С. 152 – 158.

10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Сулейман М. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55–62.

11. Леоненко Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм // Материалы, технологии, инструменты. 2004. Т. 9. № 2. С. 23–27.

12. Леоненко Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 3 (12). С. 53–56.

13. Леоненко Д.В. Вынужденные колебания трехслойного стержня ВЫНУ на упругом безинерционном основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2007. № 3. С. 70–74.