

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

ВАХТЕРОВА ЯНА АНДРЕЕВНА



**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК И ДЕФЕКТОВ  
В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ**

Специальность 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель – д.ф.–м.н., доцент Федотенков Г.В.

Москва – 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>13</b>
§ 1.1. Современное состояние исследований.....	13
§ 1.2. Уравнения движения для стержней .....	24
§ 1.3. Постановка нестационарных геометрических обратных задач для стержней .....	28
§ 1.4. Постановка нестационарных ретроспективных обратных задач для стержней .....	31
<b>ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ .....</b>	<b>36</b>
§ 2.1. Функции влияния для стержней.....	38
§ 2.2. Нестационарные прямые задачи для стержней.....	57
<b>ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ .....</b>	<b>80</b>
§ 3.1. Обратная геометрическая задача стержня .....	80
§ 3.2. Обратные ретроспективные задачи для стержней .....	87
§ 3.3. Анализ результатов, выводы, рекомендации .....	113
Заключение.....	114
Список литературы .....	115

## Введение

Обратные задачи относятся к специальному типу задач, которые часто возникают во многих разделах науки. Их целью является определение значений геометрических или физических параметров модели, восстановление воздействующих на неё внешних нагрузок, идентификация начальных или граничных условий и другие задачи идентификации с использованием наблюдаемых данных.

На протяжении веков физиков интересовал вопрос: можно ли зная следствия, найти причины возникновения физического процесса? Исторический пример – вычисления Адамса и Леверье, которые привели к открытию Нептуна по нарушенной траектории Урана. Однако серьёзные научные исследования в области обратных задач начались только в XX веке.

Один из самых ранних примеров решения обратной задачи был сформулирован и опубликован в 1911 году Германом Вейлем. Он исследовал асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами [141]. Результатом этих исследований является закон, известный как закон Вейля. Его, пожалуй, легче всего представить, как ответ на вопрос: «Можно ли услышать форму барабана?». Вейль предположил, что собственные частоты барабана будут связаны с площадью и периметром барабана определённым уравнением. Соответственно, определив собственные частоты из эксперимента, можно с определённой точностью восстановить геометрические параметры барабана. Этот результат улучшили более поздние работы других исследователей.

Позже область обратных задач была затронута советско–армянским физиком Виктором Амбарцумяном [119]. Ещё будучи студентом, Амбарцумян досконально изучил теорию строения атома, образование уровней энергии, уравнение Шредингера и его свойства, а когда он овладел методами теории дифференциальных уравнений, он указал на очевидную аналогию между дискретными уровнями энергии, и собственными значениями краевых задач

для дифференциальных уравнений. Затем он поставил вопрос: можно ли по семейству собственных значений найти вид уравнений, собственными значениями которых они являются? По сути, Амбарцумян рассматривал обратную задачу Штурма – Лиувилля, которая касалась определения уравнения колебаний струны. Эта статья была опубликована в 1929 г. в немецком физическом журнале *Zeitschrift für Physik* и долгое время оставалась в забвении. Описывая эту ситуацию по прошествии многих десятилетий, Амбарцумян сказал: «Если астроном опубликует в физическом журнале статью с математическим содержанием, то, скорее всего, с ним произойдет забвение».

Тем не менее, ближе к концу Второй мировой войны эта статья, написанная 20-летним Амбарцумяном, была найдена шведскими математиками и послужила отправной точкой для целой области исследований обратных задач, став основой всей дисциплины.

Обратные задачи обычно являются некорректными, в отличие от корректно поставленных задач, более типичных при моделировании физических ситуаций, когда параметры модели или свойства материала известны. Из трех условий корректной задачи, предложенных Жаком Адамаром (существование, единственность, устойчивость решения или решений) [1], чаще всего нарушается условие устойчивости. В смысле функционального анализа обратная задача описывает отображение между метрическими пространствами. Хотя обратные задачи часто формулируются в бесконечномерных пространствах, на практике при построении методов решений могут быть использованы сужения на пространства конечного числа измерений и практическое рассмотрение восстановления только конечного числа неизвестных параметров. Это приводит к преобразованию проблемы из непрерывной формы в дискретную. В этой ситуации обратная задача обычно плохо обусловлена. В этих случаях можно использовать методы регуляризации. Многие примеры регуляризованных обратных задач можно интерпретировать как частные случаи Байесовского вывода [114].

Таким образом, обратные задачи являются одной из наиболее важных и наименее изученных математических проблем естествознания и математики. Обратные задачи возникают во многих областях науки и техники, в том числе: компьютерное зрение, машинное обучение, статистика, статистический вывод, геофизика, медицинская визуализация (например, компьютерная аксиальная томография и ЭЭГ), дистанционное зондирование, акустическая томография океана, неразрушающий контроль, астрономия, физика и многие другие области.

В диссертационной работе исследуются обратные нестационарные задачи для деформируемых стержней. В настоящее время эти задачи приобретают все большую актуальность как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Задачи этого класса относятся к некорректно поставленным – малым возмущениям исходных данных, в принципе, могут соответствовать большие изменения решения. Отметим, что исходные данные для задач такого рода, как правило, искажены, поскольку они определяются экспериментально. Поэтому необходимо использовать специальные методы решения, которые будут иметь приемлемую точность и для случая «зашумленности» исходных данных, выражающейся в их искажении вследствие случайной погрешности измерений и вычислительных преобразований. Следует отметить несомненную актуальность этого типа задач для авиационной и аэрокосмической отраслей промышленности, поскольку значительная часть конструкции летательных аппаратов выполнена из балочных и стержневых элементов, работающих в условиях нестационарных нагрузок. Это режимы взлета и посадки, выполнения различных маневров, а также различные внештатные ситуации.

Прямая нестационарная задача для балки или упругого стержня состоит в определении решения, которое удовлетворяет заданному уравнению или системе уравнений нестационарных колебаний в частных производных, а также заданным начальным и граничным условиям.

В обратных задачах уравнение нестационарных колебаний (его коэффициенты и/или правая часть) не заданы полностью, но зато имеется некоторая дополнительная информация.

Нестационарные обратные задачи для твёрдых деформируемых тел, в том числе для стержней, можно разделить на несколько характерных типов.

1. Коэффициентные обратные задачи. В этих задачах коэффициенты уравнения нестационарных колебаний (плотность, модуль Юнга, площадь поперечного сечения) не заданы полностью. Задача состоит в восстановлении неизвестных коэффициентов при известных начальных и граничных условиях, а также по некоторой дополнительной информации, например, информации о поведении решения в некоторых определенных точках стержня в зависимости от времени.

2. Граничные обратные задачи. В этих задачах неизвестными являются граничные условия (условия закрепления).

3. Эволюционные обратные задачи. Они связаны с необходимостью определения незадаваемых начальных условий.

4. Ретроспективные обратные задачи. В этих задачах требуется восстановить неизвестную нагрузку (её зависимость от времени, характер распределения по балке/упругому стержню). Т.е. в этом случае не заданной является правая часть уравнения колебаний.

5. Геометрические обратные задачи, в которых требуется определить наличие и характер повреждений. В определенном смысле эти задачи родственны обратным коэффициентным задачам, поскольку повреждение в балке/упругом стержне связано с локальным изменением площади его поперечного сечения, или/и физических характеристик балки/упругого стержня.

Из перечисленных выше типов обратных задач в диссертации основное внимание уделено коэффициентным и ретроспективным обратным задачам.

Актуальность работы. Нестационарные обратные задачи чрезвычайно актуальны и в настоящее время являются наименее исследованными. Все

предлагаемые задачи диссертационного исследования являются новыми, методы построения решений – оригинальны.

Предлагаемые постановки и методы решений нестационарных обратных задач могут послужить основой создания комплексов мониторинга конструкций в реальном времени. Они позволят непосредственно во время эксплуатации следить и вовремя предотвращать возникновение и развитие повреждений, отслеживать различные структурные превращения, восстанавливать пространственно–временные законы воздействующих на конструкцию внешних нагрузок. В связи с бурным развитием ЭВМ, автоматизации и робототехники, задачи этого класса выходят на передовой край современной науки.

Целями работы является получение решений новых нестационарных коэффициентных обратных задач для упругого стержня, в том числе задач по определению наличия и расположения дефектов, и идентификации их типов, размеров и степени поврежденности, а также, получение решений новых нестационарных ретроспективных обратных задач по восстановлению нагрузки, действующей на стержни (её зависимость от времени, характер распределения по стержню).

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

- Постановки новых нестационарных обратных геометрических и ретроспективных задач для балки Тимошенко и упругого стержня.
- Нестационарные функции влияния для упругого стержня и балки Тимошенко, в том числе с кусочно–постоянными по длине характеристиками.
- Решение прямых нестационарных задач для балки Тимошенко и упругого стержня с переменными геометрическими характеристиками.
- Решения нестационарных обратных геометрических задач для упругого стержня и ретроспективных задач для упругого стержня и балки Тимошенко.
- Реализованные на ЭВМ алгоритмы решения нестационарных прямых и обратных задач для упругого стержня и балки Тимошенко с переменными геометрическими характеристиками. Проверка работы алгоритмов при

различных геометрических параметрах и различных внешних нагрузках. Проверка устойчивости работы алгоритмов для прямых и обратных задач.

— Анализ полученных результатов, выработка рекомендаций и направлений дальнейших исследований.

Практическая значимость. Полученные в работе результаты и разработанные алгоритмы могут быть использованы в различных отраслях промышленности с целью предотвращения разрушения и осуществления неразрушающего контроля элементов конструкций под воздействием нестационарных возмущений.

#### Методы исследования.

Для решения прямых задач используются два подхода. Первый подход заключается в применении метода функций влияния, которая используется в каждой сведенной подзадаче в вычислении интегрального уравнения типа свертки, ядрами которых выступают упомянутые далее функции влияния. Второй подход основан на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью по пространственной координате, при котором решение прямой задачи для стержня с одним кусочно–постоянным параметром поддается аналитическому решению.

Решение обратных задач строится с применением следующих подходов. Первый, как и в случае прямой задачи, базируется на методе функций влияния. Его суть состоит в использовании интегральной связи между нестационарными перемещениями исследуемого деформируемого тела и воздействующими на него нагрузками, которая приводит к разрешающим интегральным уравнениям. При этом ядрами соответствующих интегральных операторов являются функции влияния для исследуемых объектов. Разрешающие интегральные уравнения кроме внешних нагрузок содержат также и все параметры модели: плотность материала, упругие константы, геометрические параметры. В различных постановках часть параметров модели или внешние нагрузки являются искомыми неизвестными, которые требуется определить из решения обратной задачи, сводящейся к указанным



разрешающим уравнениям. При использовании этого подхода основополагающими являются решения прямых задач о построении функций влияния для деформируемых тел, в данной работе – для упругих стержней. Эти функции по сути представляют собой перемещения в ответ на воздействия сосредоточенных нагрузок. При этом они разделяются на граничные функции влияния (в случае, когда сосредоточенная нагрузка приложена к одному из концов стержня) и погонные функции влияния (когда сосредоточенная нагрузка соответствует воздействию распределенного усилия). Для математического описания таких нагрузок используется аппарат обобщённых функций. Эти задачи решены аналитическими методами с получением соответствующих решений в явной форме. Функции влияния также являются обобщёнными и, в отличие от обычных функций перемещений, могут иметь разрывы и даже более сильные особенности. Для построения решений задач о функциях влияния использованы интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственным переменным, в случае протяженных стержней, когда влияние границ может не учитываться. В случае стержней конечных размеров дополнительно использован аппарат разложений в ряды по собственным функциям соответствующих задач. Для решения обратных задач, описанным выше методом, используется метод механических квадратур в сочетании с быстрым преобразованием Фурье.

Второй подход, основан на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью по пространственной координате. Этот подход применяется к решению обратных геометрических задач о поиске локального дефекта в упругом стержне. При этом решение прямой задачи для стержня с одним дефектом поддается аналитическому решению. В результате получено аналитическое решение прямой задачи, в котором искомые параметры дефекта (координаты его расположения, протяжённость и площадь поперечного сечения в зоне дефекта) содержатся явно в виде параметров. Данный подход позволяет свести обратную геометрическую задачу для стержня к системе нелинейных функциональных

уравнений относительно искомым параметров дефекта, которая корректна и решается численно. В результате определяются все параметры дефекта.

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой задач, применением апробированных математических методов решения нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, анализом сходимости предложенных алгоритмов решения. Полученные результаты в частных случаях полностью совпадают с известными результатами других авторов и не противоречат имеющимся физическим представлениям.

#### Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на:

- XXIII–XXVIII ежегодных Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова» (г. Москва, 2017–2022 гг.);
- Ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2016–2022 гг.);
- XLII–XLVII Международных молодёжных научных конференциях «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2016–2022 гг.);
- III–VII Международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (г. Москва, 2015–2018 гг.);
- Научных конференциях «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (г. Нижний Новгород, 2018–2019 гг.);
- Всероссийские конференции «молодых–ученых механиков» МГУ, (г. Сочи 2017–2021 гг.);
- XII научно–практической Международной конференции, посвященной 160–летию Белорусской железной дороги (Гомель, 2022 г.)

– Конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения (г. Санкт-Петербург, 2017 г.);

– XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Уфа 2019 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 39 публикаций в журналах, индексируемых в РИНЦ 32, научных статей в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации 2, Scopus и Web of Science 5, а также получено 1 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 141 наименование. Общий объем диссертации составляет 130 страниц, включая 84 рисунка и 2 таблицы.

В первой главе приведён аналитический обзор научных работ, связанных с темой диссертационного исследования, приведены уравнения движения для стержней, а также математические постановки нестационарных обратных задач для стержней, включающие уравнения движения, начальные и граничные условия. Указан способ сведения математических постановок нестационарных обратных задач к системам разрешающих уравнений.

Вторая глава посвящена нестационарным функциям влияния для стержней. Приведены постановки нестационарных задач о функциях влияния для упругого стержня и балки Тимошенко. Дано их решение и проведено исследование функций влияния. Решены прямые нестационарные задачи для стержней. Предложен и реализован аналитический алгоритм решения.

Третья глава посвящена решению нестационарных обратных задач для стержней. Решена обратная геометрическая и ретроспективная задача для упругого стержня. Решение геометрической обратной задачи основано на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью, по пространственной координате которое сводится к системе

нелинейных функциональных уравнений относительно искомых параметров дефекта. Решена обратная ретроспективная задача для упругого стержня и балки Тимошенко. Решение обратной ретроспективной задачи, базируется на методе функций влияния. С его применением обратная задача сводится к решению системы интегральных уравнений типа Вольтера II–го рода по времени относительно искомой нагрузки для балки/ упругого стержня. Для его решения используется метод механических квадратур в сочетании с быстрым преобразованием Фурье.

# ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

## § 1.1. Современное состояние исследований

С точки зрения соотношения причина–следствие все задачи математического моделирования можно условно разделить на два больших класса: прямые задачи и обратные.

Прямая задача – тип задач, состоящий в определении наблюдаемых данных зная значения параметров модели.

Обратная задача противоположна прямой – значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных. При этом обычно исследователю бывают доступны лишь некоторые косвенные проявления (следствия) скрытых от непосредственного наблюдения закономерностей (причин). Обратные задачи в математике считаются некорректными. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее. Понятие корректности задачи математической физики было введено Ж. Адамаром [1] в начале прошлого столетия. Им было высказано мнение о том, что корректная постановка является неизменным условием, которому должна удовлетворять всякая математическая модель, соответствующая физической реальности. Эта точка зрения не подвергалась сомнению в течение многих лет. Корректные модели хороши тем, что классическая вычислительная математика позволяет решать задачи традиционными методами. При этом зачастую удается ответить на вопрос о сходимости предложенного алгоритма и оценке возникающей здесь погрешности. Конечно, появляются дополнительные трудности реализации алгоритма на компьютере, учете погрешностей округления, представления данных и результатов вычислений и т.д. Но эти проблемы обычно успешно решаются, особенно если учесть, что технические возможности современных

компьютеров расширяются очень быстро. Однако часто имеющаяся у исследователя информация позволяет построить лишь такую математическую модель, для которой нет теорем существования решения в естественных функциональных пространствах и, самое главное, нет доказательства устойчивости решения по входным данным задачи. Для такой модели нельзя получить регулярные вычислительные алгоритмы с помощью традиционных методов.

В 1943 году появилась работа А.Н. Тихонова [104], в которой впервые была указана практическая важность неустойчивых по входным данным (некорректно поставленных) задач, и принципиальная возможность их успешного решения в условиях принадлежности точного решения компактному множеству. В середине 50–х годов и, особенно интенсивно, в начале 60–х годов прошлого столетия началась систематическое изучение некорректных задач. Образовалось новое направление, лежащее на стыке функционального анализа и вычислительной математики, которое затем оформилось в самостоятельную область науки. Основополагающие подходы для теории некорректных задач связаны с именами А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова.

В первой отечественной монографии по некорректным задачам М.М. Лаврентьевым было введено понятие корректности по Тихонову [77] задачи математической физики, на основе которого М.М. Лаврентьевым, его учениками и последователями получены глубокие результаты по регуляризации широкого спектра некорректных в классическом смысле задач, таких, например, как задача аналитического продолжения, обратные задачи для многих классов дифференциальных уравнений, задачи интегральной геометрии и многие другие. Многие результаты в этой области отражены в монографии М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [79]. Там же приведена обширная библиография по данному вопросу.

В 1963 году А.Н. Тихоновым в работах [102,103] было сформулировано понятие регуляризирующего алгоритма (регуляризирующего оператора,

регуляризатора) для некорректно поставленной задачи как однопараметрического семейства операторов, специальным образом аппроксимирующего обратный оператор и обеспечивающего при согласовании параметра с уровнем погрешности исходных данных устойчивое восстановление искомого решения. Для корректных по Адамару задач в качестве формального регуляризирующего алгоритма может быть взят сам обратный оператор. Другое дело, что такой алгоритм может оказаться неконструктивным (практически нереализуемым). Понятие регуляризирующего алгоритма оказалось весьма эффективным и работоспособным. Казалось, что для любой некорректной задачи можно построить соответствующий регуляризирующий алгоритм. Как отмечено в [84, стр. 14]: «В отличие от господствовавшего прежде мнения, что все задачи, описывающие физическую реальность, корректны, по современным представлениям каждая реальная задача регуляризуема, т.е. имеет хотя бы один регуляризатор». Однако оказалось не все так просто. Как показано, например, в работах Л.Д. Менихеса [87, 88], некоторые линейные интегральные уравнения первого рода могут быть не регуляризуемы.

В работах [102, 103] А.Н. Тихоновым предложен универсальный способ построения регуляризирующего алгоритма (метод регуляризации), основанный на введении так называемого сглаживающего функционала. Универсальность метода А.Н. Тихонова заключается в том, что он применим к существенно некорректным задачам [105].

Работы А.Б. Бакушинского и Б.Т. Поляка [9, 10] по итеративной регуляризации некорректных задач позволили создать концепцию регуляризации различных итерационных процессов (например, метода Ньютона–Канторовича или простой итерации), которая дает возможность получить сильную сходимость в том случае, когда отсутствие непрерывного обратного оператора или его производной исключает использование классических схем.

Понятие регуляризирующего алгоритма имело революционное значение в вычислительной математике и фактически послужило основой для развития новой математической дисциплины. Большой вклад в эту область внесли А.Л. Агеев, Я.И. Альбер, В.Я. Арсенин, А.Б. Бакушинский, Г.М. Вайникко, Ф.П. Васильев, В.В. Васин, А. Ю. Веретенников, В.А. Винокуров, Ю.Л. Гапоненко, А.М. Денисов, С.И. Кабанихин, А.С. Леонов, О.А. Лисковец, И.В. Мельникова, В.А. Морозов, В.Г. Романов, В.Н. Страхов, В.П. Танана, А.Г. Ягола и многие другие.

К настоящему времени созданы общие принципы конструирования регуляризирующих алгоритмов для широких классов некорректных задач. Было показано, в частности, что многие классические схемы, например, итерационные методы решения линейных операторных уравнений, могут быть успешно использованы и при построении регуляризирующих алгоритмов для них. Процесс должен быть дополнен только правилом окончания (останова) итерационного процесса в зависимости от величины погрешности входных данных задачи [11, 20, 21, 22].

В монографии В.В. Васина и А.Л. Агеева [23] систематически изложены регулярные методы решения неустойчивых задач, позволяющие учитывать дополнительную априорную информацию о решении (сведения о форме описываемого объекта, более детальные свойства гладкости, тонкую структуру решения, вытекающую из физической сущности задачи). Учет дополнительных сведений о решении особенно важен при рассмотрении математических моделей с неединственным решением базового уравнения. Много внимания в монографии уделено развитию регуляризации, основанной на введении корректирующих (демпфирующих) множителей, идея которой восходит к работам Ф. Браудера и Б. Гальперина [116, 25].

Из зарубежных исследований по некорректным задачам необходимо упомянуть результаты Ж.–Л. Лионса и Р. Латтеса [128, 80], предложивших способ регуляризации некорректных задач математической физики, известный как метод квазиобращения. В [83] А. Neubauer и О. Scherzer



обосновали сходимость дискретных аппроксимаций (полученных проекционным методом) регуляризованных по Тихонову решений нелинейного операторного уравнения первого рода. Также установлены условия, гарантирующие оптимальную по порядку скорость сходимости конечномерных приближений для случая зашумленных исходных данных. В работах [134] (O. Scherzer, H.W. Engl, K. Kunisch), [135] (K. Kunisch, W. Ring), [130] (U. Tautenhahn) изучены возможности априорного и апостериорного выборов параметра регуляризации в методе Тихонова для нелинейных задач, а также оценены скорости сходимости регуляризованных решений. Библиография по теоретическим и прикладным аспектам методов регуляризации систематизирована в литературе [139, 11, 21, 23, 67, 77, 79, 84, 90, 91, 102, 108].

Обратные задачи обычно формулируются в бесконечномерных пространствах, но ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к изменению задачи в дискретной форме. В этом случае используют метод регуляризации для того, чтобы получить корректное решение обратной задачи. Существенную роль в становлении теории обратных задач сыграло интенсивное развитие в последние несколько десятилетий теории некорректных задач. Дело в том, что измерения результатов наблюдений и экспериментов (входных данных) сопровождаются неизбежными ошибками, поэтому искомые решения обратных задач также будут определяться с погрешностью. И оказывается, что в большинстве своем обратные задачи естественного происхождения неустойчивы, т.е. сколь угодно малым погрешностям изменений входных данных могут соответствовать большие погрешности в искомом решении обратной задачи. Это обстоятельство затрудняет применение обычных методов для поиска решения обратных задач и требует привлечения для этих целей специальных методов, называемых методами регуляризации, разработанных в рамках общей теории некорректных задач

[102, 103, 104, 105, 108]. Прямые же задачи имеют, как правило, корректное решение.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и задачи по неразрушающему контролю.

Обратные задачи сформировались как самостоятельная область математики в основном в последние 35–40 лет, хотя первые работы относятся к 30–м годам прошлого столетия. Всё большая часть математических моделей приобретает стройность и достоверность, как раз благодаря достижениям теории обратных задач. Так, с ее помощью достигнут впечатляющий прогресс в компьютерной томографии [97]. Стремительное распространение этого метода обусловлено его эффективным применением в медицине, биологии, диагностике плазмы.

Внедрение метода компьютерной томографии произвело революцию в медицинской диагностике и электронной микроскопии биологических макромолекул. Создание компьютерных томографов (А. Кормак и Г.Н. Хаунсфилд) и их применение в биохимии (А. Клуг) отмечены Нобелевскими премиями (1979 и 1982 гг.). Отметим, что основные математические задачи вычислительной диагностики плазмы сводятся к решению операторных уравнений 1–го рода. При нахождении их приближенных решений необходимо использовать методы регуляризации, позволяющие учитывать дополнительную информацию о решении.

Обратные задачи также применяются в задачах геофизики и разведки полезных ископаемых. В настоящее время, в связи со все большим усложнением моделей, используемых в геофизике, совершенствуется и методика решений обратных задач. Метод акустической разведки полезных ископаемых несравнимо удешевляет нахождение полезных ископаемых, в сравнении с простым бурением пробных скважин. Вместе с тем геоакустика дает возможность получать более точную информацию о состоянии недр, а

звуковые волны, как известно, являются хорошо пригодным для локации недр видом возмущения. Отметим, что в последние годы интенсивно обсуждается проект глобального вибрационного просвечивания Земли с целью уточнения ее строения.

Задачи ультразвукового неразрушающего контроля также требуют совершенствования моделей в связи с широким внедрением в практику композиционных материалов, клеевых соединений, функциональных материалов и покрытий применительно к деталям авиационных двигателей, агрегатов крыла, элементов, работающих в условиях интенсивного циклического нагружения, которые обладают различными механическими свойствами по различным направлениям (анизотропией), что влечет за собой усложнение алгоритмов решения обратных задач. Для этого класса задач очень важен учет свободной границы (для обнаружения приповерхностных дефектов) и анизотропии материала модели. Обратные задачи об определении формы дефекта приводят к последовательному решению систем интегральных уравнений 1-го рода либо к решению некоторого нелинейного дифференциального уравнения. В последнее время задачи, возникающие в этой области, привлекают внимание математиков–теоретиков. Это связано как с новыми постановками и новыми моделями, так и с развитием методов решения соответствующих задач.

Наконец, отметим, что акустическое зондирование Мирового океана является уникальным и весьма эффективным методом, поскольку радиоволны плохо распространяются в морской воде из-за ее хорошей электропроводности. Например, свет мощного лазера проникает в океанские глубины на расстояние порядка сотен метров, тогда как звук даже не очень сильного взрыва может быть зарегистрирован на расстоянии десятков тысяч километров. Процессы, происходящие в океане, оказывают определяющее влияние на климат многих районов Земли. Кроме того, океан, мало исследованный по существу, является чрезвычайно богатым источником различных сырьевых ресурсов. Спецификой обратных задач акустики океана

является достаточно сильная зашумленность полезного сигнала, а также необходимость при их решении обрабатывать огромные массивы данных.

Отметим также, что очень важную в нефтегазовой науке задачу идентификации параметров нефтегазоносного пласта можно рассматривать также и как обратную задачу теории фильтрации [96, 106].

Нестационарные обратные задачи механики деформированного твердого тела являются одними из наименее исследованных. Это связано в первую очередь с повышением размерности нестационарных задач на единицу по сравнению со стационарными и статическими задачами. Поскольку основные законы природы выражаются, как правило, на языке дифференциальных уравнений, мы в результате приходим к обратным задачам для дифференциальных уравнений. При этом упомянутые выше "причины" конкретизируются в виде неизвестных коэффициентов, правой части, начальных условий, неизвестной области определения дифференциального уравнения. В качестве же "следствий" выступают функционалы от решения дифференциального уравнения. Обычно это следы решения на некоторых многообразиях или какие-то его усредненные характеристики. Математически тот факт, что причина всегда предшествует следствию находит свое отражение в том, что многие обратные задачи сводятся к решению операторных уравнений, являющихся в том или ином смысле уравнениями типа Вольтера.

Кроме того, как и в других обратных задачах, здесь возникает проблема, связанная с некорректностью математической постановки, которая в данной диссертационной работе решается представленными методами. Практическая значимость этих задач настолько велика, что за последние пол века возникла по сути дела новая область математики – теория некорректных задач, основы которой были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова.

Методика решения обратных задач механики деформируемого твердого тела построена на методе функций влияния, которая сводится к решению

интегральных уравнений типа Вольтера I–го рода. Отметим некоторые задачи, исследование которых связано с уравнениями типа Вольтера. Различные вопросы, связанные с решением нестационарных задач для тел и конструкций (создание математических моделей нестационарного взаимодействия, теоретические и численные методы исследования нестационарных задач динамики), изложены в работах Горшкова А.Г., Тарлаковского Д.В. и др. [60], Поручикова В.Б. [96], Работнова Ю.Н. [98], Исраилова М.Ш. [71], Гельфанда И.М., Шилова Г.Е. [59], Бабакова И.М. [6], Слепяна Л.И., Яковлева Ю.С. [101], Деч Г. [66].

Первые результаты по обратным задачам для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка были получены В.А. Амбарцумяном, Г. Боргом, А.Н. Тихоновым, Л.А. Чудовым, Н. Левинсоном. В известном смысле законченная теория этих задач была создана в работах В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна. Результаты всех этих работ давно стали классическими и вошли в соответствующие монографии [81, 82, 86]. Многомерные аналоги этих задач как в точной, так и в разностной постановках впервые рассмотрел Ю.М. Березанский [15, 16]. Наиболее мощными методами исследования одномерных обратных задач оказались метод операторов преобразования и метод факторизации.

В обоих методах главная роль принадлежит вольтеровым операторам. В дальнейшем метод факторизации получил существенное развитие в работах Л.Д. Фаддеева [109] Л.П. Нижника [93] в результате чего он был распространен на некоторые многомерные обратные задачи.

Систематическое изучение многомерных обратных задач для гиперболических уравнений было начато в работах М.М. Лаврентьева и В.Г. Романова [78, 99, 100]. Рассмотренные ими задачи оказались тесно связанными с операторными и многомерными уравнениями типа Вольтера. В 1970 году на международном математическом конгрессе в Ницце М.Г. Лаврентьевым была поставлена задача исследования различных классов таких

уравнений. Решение обратных задач изложенными методами посвящена основная часть диссертации.

Во Франции в 80–е годы основоположником обратных задач был А. Тарантола. Тарантола решал обратные задачи обработки геофизических данных в основном с помощью вероятностных моделей (байесовский подход). Тарантола является автором нескольких книг [138] и множества статей [133] по этой теме. Двенадцать лет спустя, приемником работ А. Тарантола стал Х.Д. Буй. Исследовательская группа «Обратные задачи–идентификации–оптимизации» из Лаборатории механической обработки твердых веществ при политехнической школе объединила вокруг Буи многих активных исследователей, таких как М. Бонне, А. Константинеску и К. Штольц (см. [125], [115], [126], [132], [131]). [127] – которые решали обратные задачи механики материалов. Применения предложенных им методов идентификации включают: неразрушающее контроль; идентификация внутренних дефектов, однородностей и неоднородностей; выявление особенностей механики разрушения; и определение физических параметров материалов. Недавний специальный выпуск *Comptes Rendus* Академии наук [117], посвященный Х.Д. Буи, был посвящен обратным и нелинейным задачам в знак признания их важности в современной механике деформируемого твердого тела.

В заключение отметим, что теория обратных задач – это бурно развивающаяся в настоящее время область современной математики, которая находит многочисленные приложения.

Основы решения нестационарных обратных задач изложены в фундаментальных трудах Nadamard J. [124], Маркова Е.В. [85], Тихонова А.Н. [75, 76] и др., Ватульяна А.О. и др. [17, 18, 26–29]. Различные вопросы, связанные с решением нестационарных задач для тел и конструкций (создание математических моделей нестационарного взаимодействия, теоретические и численные методы исследования нестационарных задач динамики), изложены в работах Горшкова А.Г., Тарлаковского Д.В. и др. [62], Вахтеровой Я.А.,

Федотенкова Г.В и др. [7], [120–123, 5, 30–57, 110–113], Поручикова В.Б. [96], Работнова Ю.Н. [98], Исраилова М.Ш. [71], Гельфанда И.М., Шилова Г.Е. [59], Деч Г. [66], Бабакова И.М. [6], Слепяна Л. И., Яковлева Ю.С. [101]. В статье [118] Downer J. D., Park K. C. выполнили постановку и получили решение обратной задачи для струны. Karve P. M., Na S. W. и др. в работе [129] продемонстрировали решение обратной задачи для балок и рам Тимошенко, в том числе показали возможности обнаружения повреждений и способы восстановления профиля балок.

## § 1.2. Уравнения движения для стержней

Для описания движения изотропных упругих стержней будем использовать уравнения в перемещениях, в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$ . Ось  $Ox$  направлена вдоль средней линии упругого стержня, а  $Oy$  перпендикулярно оси  $Ox$ . Полагаем, что искомые и заданные функции зависят только от координаты  $x$  и времени  $t$ .

Для решения прямых задач по определению перемещений или прогиба для стержней, а также обратных нестационарных ретроспективных задач для стержней, запишем математическую постановку в которой содержатся уравнения продольных колебаний или система уравнений поперечных колебаний для стержня, а также граничные и начальные условия.

Система уравнений поперечных колебаний балки Тимошенко, граничные и начальные условия имеют вид [62]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa^2 c_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \chi \right) + \frac{P(x,t)}{\rho F}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c_p^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{c_2^2 F \kappa^2}{I_z} \left( \chi - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (0.0.1)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_{x=0,l} = 0, \quad w|_{x=0,l} = 0, \quad w|_{t=0} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Уравнение продольных колебаний консольно закреплённого упругого стержня, а также граничные и начальные условия имеют вид [62]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P(x,t)}{\rho}, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (0.0.2)$$

Применительно к задачам идентификации дефектов в упругом стержне, рассматривается стержень ступенчатого поперечного сечения. В этом случае кроме уравнений продольных колебаний, граничных и начальных условий должны выполняться условия сопряжения в точках  $x_n$  изменения площади поперечного сечения ( $n$  – номер участка стержня с постоянным поперечным сечением,  $N$  – число этих участков):



$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad n = \overline{1,3}, \\
u_n|_{x=x_n} &= u_{n+1}|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1,2}, \\
EF_n u_n'|_{x=x_n} &= EF_{n+1} u_{n+1}'|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1,2}, \\
u_1|_{x=0} &= 0, \quad EF_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=l} = -P(t), \\
u_n|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad n = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{0.0.3}$$

Введем безразмерные параметры для балки Тимошенко (они обозначены штрихом):

$$\begin{aligned}
x' = \frac{x}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad F' = \frac{FL}{c_1^2}, \quad p' = \frac{PL^3}{EI_z}, \quad Q' = \frac{Q_y L^2}{EI_z}, \quad m' = \frac{M_z L}{EI_z}, \\
\chi = \chi_x L, \quad \gamma = \frac{L}{i_z}, \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \eta^2 = \frac{c_p^2}{c_2^2}.
\end{aligned} \tag{0.0.4}$$

И для упругого стержня

$$u' = \frac{u}{L}, \quad F' = \frac{F}{F_0}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad c = c_p, \quad p' = \frac{P}{EF_0}. \tag{0.0.5}$$

В (1.2.4) и (1.2.5)  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$  – перемещение стержня и прогиб балки в плоскости  $Oxy$ ;  $u_n(x, t)$  – перемещение стержня в пределах участка с номером  $n$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Oz$ ;  $i_z$  – радиус инерции;  $\rho$  – плотность материала;  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $c_1$  – скорости распространения волн растяжения–сжатия;  $c_2$  – скорость волн сдвига;  $c_p$  – скорость изгибных волн;  $c$  – скорость распространения продольных волн в стержне;  $\chi$  – угол поворота поперечного сечения за счет сдвиговых деформаций;  $\kappa = \sqrt{5/6}$  – коэффициент сдвига;  $t$  – время,  $P(t)$  – внешняя погонная поперечная сила;  $Q_y$  – перерезывающая сила;  $M_z$  – изгибающий момент;  $L$  – некоторый характерный размер;  $\tau$  –

безразмерное время,  $P(x, t)$  – продольная распределенная нагрузка. В качестве параметра  $L$  будем использовать длину стержня. Тогда в безразмерном виде длина стержня будет равна 1.

С учётом системы безразмерных величин все уравнения будем записывать в безразмерном виде. Штрихи при записи безразмерных величин в дальнейшем опускаются.

Запишем математические постановки прямых задач в безразмерном виде:

для балки Тимошенко

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \kappa^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + p(x, \tau), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} = \eta^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \kappa^2 \gamma^2 \left( \chi - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (0.0.6)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_{x=0,1} = 0, \quad w|_{x=0,1} = 0, \quad (0.0.7)$$

$$w|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \chi|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (0.0.8)$$

для упругого стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, \tau), \quad (0.0.9)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (0.0.10)$$

$$u|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (0.0.11)$$

Также запишем в безразмерном виде уравнения продольных нестационарных колебаний, граничные и начальные условия, и условия сопряжения в точках  $x_n$  изменения площади поперечного сечения ступенчатого стержня:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (0.0.12)$$

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad F_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x=1} = -P(\tau), \quad (0.0.13)$$

$$u_n|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (0.0.14)$$

$$u_n|_{x=x_n} = u_{n+1}|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$F_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \Big|_{x=x_n} = F_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (0.0.15)$$

### § 1.3. Постановка нестационарных геометрических обратных задач для стержней

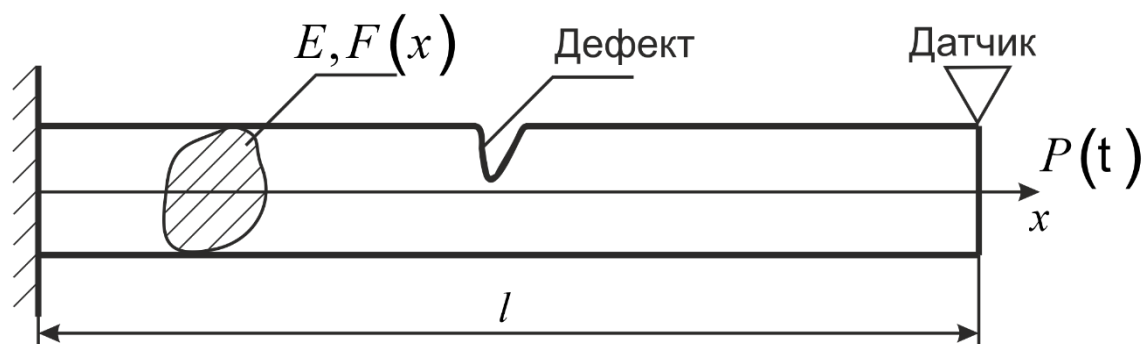


Рис. 1.1 Постановка задачи.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный от закрепления. В начальный момент времени на стержень начинает воздействовать заданная сосредоточенная нестационарная нагрузка, приложенная к правому концу стержня. Предполагается, что на правом конце стержня дополнительно известно перемещение как функция времени. На практике эта информация может поступать с датчика измерения продольных перемещений, скоростей или ускорений, установленного на свободном конце стержня. При этом перемещения правого конца стержня должны с определённой точностью совпадать с перемещениями, регистрируемыми датчиком (рисунок 1.1). В случае наличия дефекта стержень будет иметь переменную по длине геометрическую характеристику – площадь поперечного сечения. При этом параметрами дефекта являются площадь поперечного сечения стержня в месте его расположения, а также координаты начала и конца изменения площади поперечного сечения. Указанные выше геометрические характеристики будем называть параметрами дефекта стержня. Отметим, что даже в такой постановке получить точное аналитическое решение поставленной прямой задачи не представляется возможным.

Для построения аналитического решения задачи, истинный дефект приближенно заменяется модельным аналогом, который представляет собой скачкообразное изменение площади поперечного сечения на некотором заранее неизвестном участке стержня (рисунок 1.2).

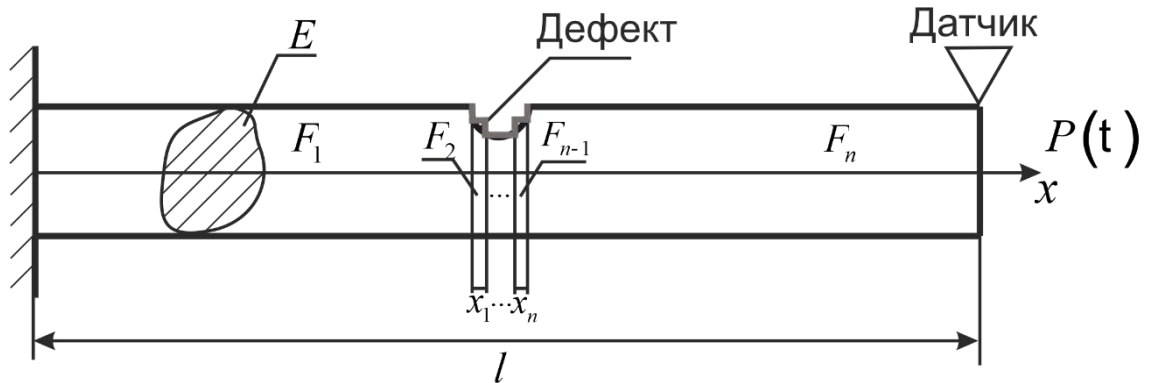


Рис. 1.2 Преставление дефекта в виде ступеней.

В этом случае, задача сводится к представлению стержня с реальным дефектом в виде ступенчатого стержня.

Постановка обратной задачи включает в себя уравнения и соотношения (1.2.12) – (1.2.15), в которых неизвестными являются как перемещения  $u_n(x, \tau)$ , так и система параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n$ , описывающая искомый дефект. Однако, дополнительно имеется информация о перемещениях на свободном конце стержня  $u(1, \tau) = U_d(\tau)$ , поступающая с датчика перемещений.  $U_d(\tau)$  – перемещение конца стержня, регистрируемое датчиком.

Метод решения обратной задачи состоит в следующем. Допустим, удаётся найти аналитическое решение  $u(x, \tau)$  прямой задачи для ступенчатого стержня при произвольных значениях параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n$ . Тогда указанное выше дополнительное условие приводит к уравнению:

$$u(1, \tau) = u(1, \tau; x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n) = U_d(\tau), \quad (0.1.1)$$

Уравнение (1.3.1) в заданный момент времени  $\tau$ , представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с  $2n$  неизвестными в качестве которых,

выступают параметры дефекта. Таким образом, для получения замкнутой системы  $2n$  уравнений относительно  $2n$  неизвестных достаточно зафиксировать  $2n$  моментов времени  $\tau_k$ ,  $k=1,2,\dots,2n$  и получить соответственно  $2n$  уравнений, из которых могут быть определены искомые неизвестные параметры:

$$U_k(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (0.1.2)$$

где  $U_k(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) = u(1, \tau_k, x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) - U_{dk}$ ,  $U_{dk} = U_d(\tau_k)$ .

## § 1.4. Постановка нестационарных ретроспективных обратных задач для стержней

### Обратная задача по идентификации сосредоточенной силы для упругого стержня

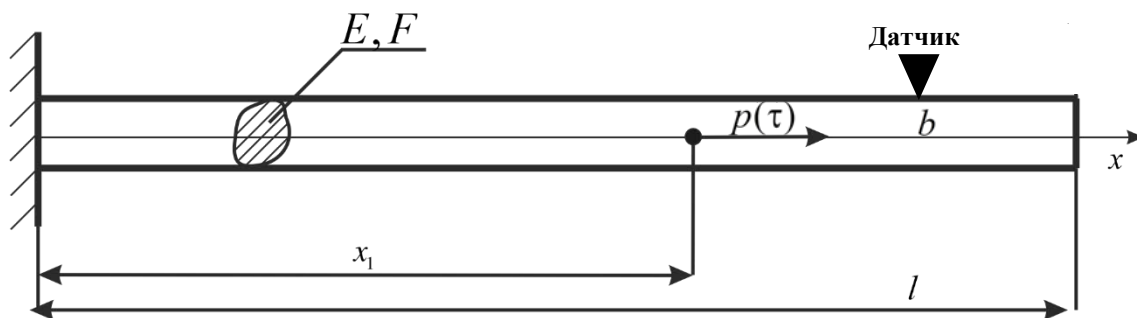


Рис. 1.3 Схема нагружения для упругого стержня.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный. В начальный момент времени на стержень в заданной точке начинает воздействовать сосредоточенная нагрузка, зависимость нагрузки от времени подлежит определению в процессе решения обратной задачи.

В обратной задаче полагается, что перемещения  $u(x, \tau)$  в некоторой точке  $b$  стержня известны. На практике эта информация может поступать с датчика перемещений, скоростей или ускорений, который установлен в сечении стержня  $x = b$  (рисунок 1.3). Требуется, по данным, полученным с датчика перемещений, установленном в точке  $b$ , восстановить осевую нагрузку  $p(\tau)$ .

## Обратная задача по идентификации распределённой силы для упругого стержня

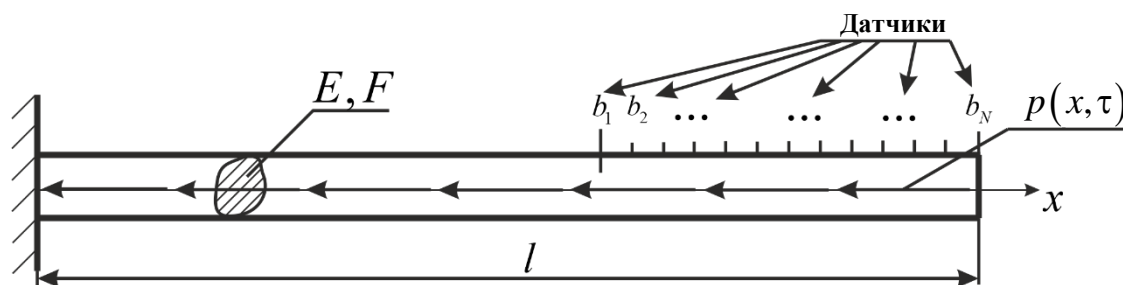


Рис. 1.4 Схема нагружения для упругого стержня.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный. В начальный момент времени на стержень начинает действовать распределенная нестационарная нагрузка, зависимость которой от времени и закон распределения по координате неизвестны и подлежат определению в процессе решения обратной задачи.

В обратной задаче полагается, что перемещения, скорости или ускорения в некоторой окрестности  $x \in [b_1, b_N]$  свободного конца стержня известны. На практике эта информация может поступать с датчиков, установленных в сечениях стержня  $x = b_1, b_2, \dots, b_N$  (рисунок 1.4). Требуется, по данным, полученным с датчиков, установленных в точках  $b_1, \dots, b_N$ , восстановить осевую нагрузку  $p(x, \tau)$ .

Таким образом, математическая постановка обратной задачи состоит из уравнения (1.2.9) с неизвестной правой частью  $p(x, \tau)$ , граничных (1.2.10) и начальных условий (1.2.11), а так же дополнительных условий

$$u(b_n, \tau) = U_n(\tau), \quad n = \overline{1, N}, \quad (0.3.1)$$

где  $U_n(\tau)$  – известные функции времени. На практике они представляют собой значения перемещений, поступающие с датчиков.



## Обратная задача по идентификации сосредоточенной силы для балки Тимошенко

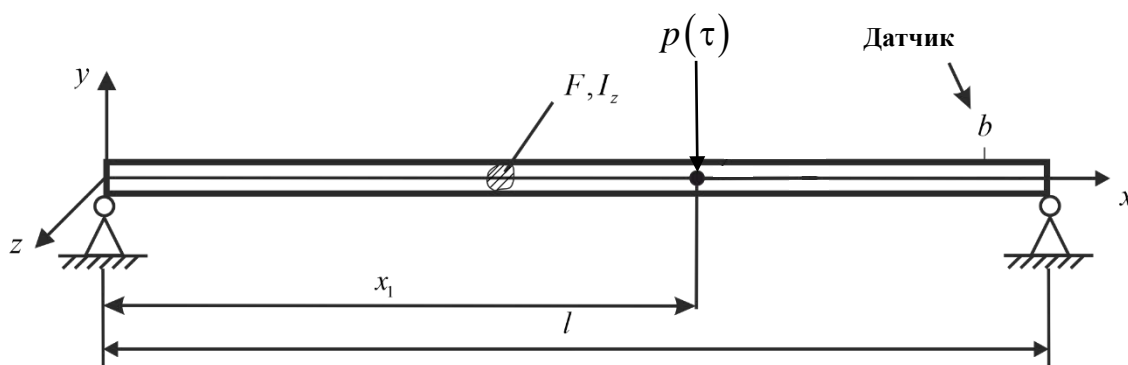


Рис. 1.5 Схема нагружения для балки Тимошенко.

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается однородная изотропная балка конечной длины поперечные колебания которой описываются уравнениями на основе уточненной теории, соответствующей модели С.П. Тимошенко [62]. В качестве граничных условий используются условия шарнирного опирания [62]. Начальные условия нулевые [62].

В обратной задаче полагается, что прогиб, скорость или ускорение в некоторой точке  $b$  балки известны. На практике эта информация может поступать с датчика, который установлен в сечении балки  $x = b$  (рисунок 1.5). Требуется, по данным, полученным с датчика, установленного в точке  $b$ , восстановить поперечную нагрузку  $p(\tau)$ .

## Обратная задача по идентификации распределённой нагрузки для балки Тимошенко

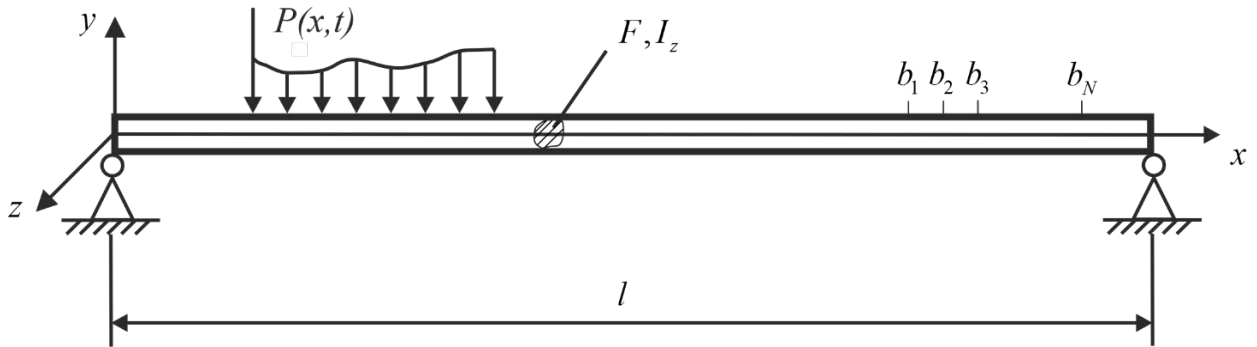


Рис. 1.6 Схема нагружения для балки Тимошенко.

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается однородная изотропная балка конечной длины поперечные колебания которой описываются уравнениями на основе уточненной теории, соответствующей модели С.П. Тимошенко [62]. В качестве граничных условий используются условия шарнирного опирания [62]. Начальные условия нулевые [62]. В начальный момент времени к балке прикладывается распределенная нагрузка, зависящая от координаты и времени. Требуется идентифицировать нестационарную нагрузку, воздействующую на балку Тимошенко.

В обратной задаче полагается, что прогиб  $w(x, \tau)$  в некоторой окрестности  $x \in [b_1, b_N]$  свободного конца балки известен. Эта информация поступает с датчиков, установленных в сечениях балки  $x = b_1, b_2, \dots, b_N$  (рисунок 1.6). Требуется, по данным, полученным с датчиков, установленных в точках  $b_1, \dots, b_N$ , восстановить распределенную нагрузку  $p(x, \tau)$ .

Математическая постановка обратной ретроспективной задачи для балки Тимошенко состоит из уравнения (1.2.6) с неизвестной нестационарной

нагрузкой  $p(x, \tau)$ , граничных (1.2.7) и начальных условий (1.2.8), а так же дополнительных условий

$$w(b_n, \tau) = W_n(\tau), \quad n = \overline{1, N}, \quad (0.3.2)$$

где  $W_n(\tau)$  – известные функции времени. На практике они представляют собой значения прогибов, полученных с датчиков.

## ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

### § 2.1 Функции влияния для стержней

Для решения прямой и обратной задачи используем принцип суперпозиции. При этом требуется построить так называемые функции влияния  $G(x, \xi, \tau)$  (фундаментальные решения, функции Грина) [62].

Для нахождения реальной нагрузки, решается задача о построении функции влияния для одноступенчатого и трехступенчатого стержня (рисунок 2.1), а также балки Тимошенко (рисунок 2.2). Она представляет собой перемещения стержня в ответ на действие нагрузки вида  $P(x, \xi, \tau) = \delta(x - \xi)\delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  – дельта функция Дирака. Функция влияния удобна тем, что решение задачи при произвольной нагрузке выражается следующим образом

$$u(x, \tau) = G^{**}P = \int_0^{\tau} \int_0^1 G(x, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt. \quad (1.1.1)$$

Знак «\*\*» в формуле (2.1.1) означает операцию интегрирования по переменной  $\xi$  вдоль оси стержня и свертку по времени функции влияния с реальной нагрузкой  $p(x, \tau)$  по времени  $\tau$ .

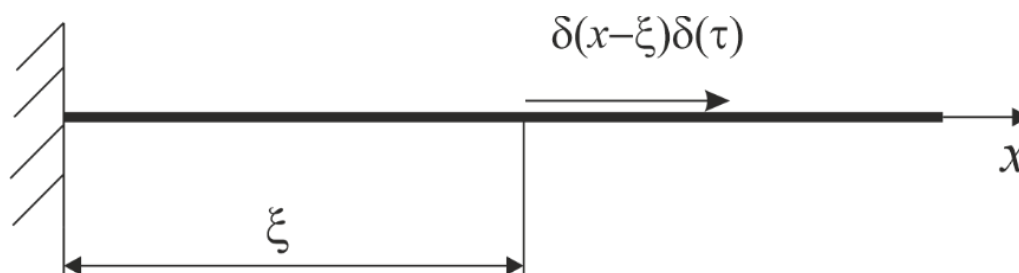


Рис. 2.1 Воздействие на стержень мгновенной сосредоточенной нагрузки.

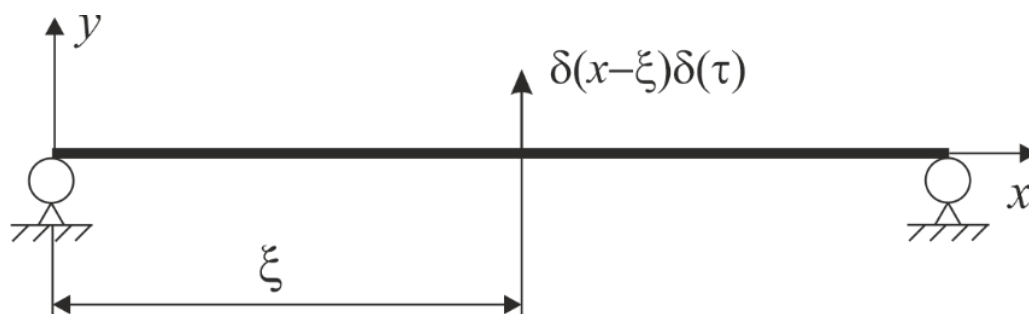


Рис. 2.2 Воздействие на балку мгновенной сосредоточенной нагрузки.

В случае, когда сосредоточенная сила прикладывается в крайнем сечении стержня, т.е. является правой частью соответствующего граничного условия (см. задачу (1.2.12) и рисунок 2.3), соответствующая функция влияния  $G(x, \tau)$  будет является функцией только двух переменных. А интегральное представление, аналогичное (2.1.1), имеет вид одномерного интеграла свёртки по времени:

$$u(x, \tau) = G * P = \int_0^{\tau} G(x, \tau - t) P(t) dt. \quad (1.1.2)$$

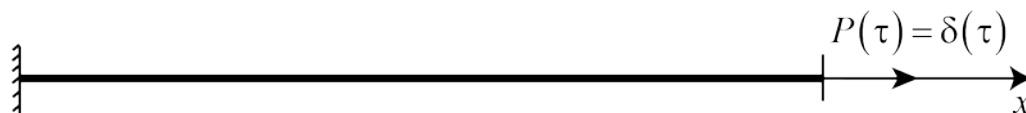


Рис. 2.3 Воздействие на стержень сосредоточенной нагрузки, приложенной в крайнем сечении.

## § 2.1. Функции влияния для стержней

### Функция влияния для одноступенчатого стержня

Для решения прямой и обратной ретроспективной задачи построим функцию влияния  $G(x, \xi, \tau)$  [62].

Она есть решения задачи (1.2.9) – (1.2.11), с заменой нагрузки  $p(x, \tau)$  единичной нагрузкой  $\delta(x - \xi)\delta(\tau)$ :

$$\frac{\partial^2 G(x, \xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 G(x, \xi, \tau)}{\partial x^2} + \delta(x - \xi)\delta(\tau),$$
$$G(x, \xi, \tau)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial G(x, \xi, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0;$$

$$G(x, \xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial G(x, \xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0.$$

Найдём собственные функции и собственные значения однородной задачи (1.2.9). Для этого применим метод разделения переменных Фурье. Подставим  $u(x, \tau) = X(x)T(\tau)$  в (1.2.9), тогда

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2,$$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X'(1) = 0,$$

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad X_n(x) = \sin \lambda_n x.$$

Таким образом  $X_n(x) = \sin \lambda_n x$  – собственные функции, а  $\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi$  – собственные значения однородной задачи (1.2.9).

Для решения (2.1.3), (2.1.4) применим метод неполного разделения переменных. Представим искомую функцию  $G(x, \tau)$  и функцию  $\delta(x - \xi)\delta(\tau)$  в виде ряда Фурье по собственным функциям:

$$G(x, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi, \tau) \sin \lambda_n x,$$

$$\delta(x - \xi)\delta(\tau) = \delta(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\xi) \sin \lambda_n x, \quad (1.1.5)$$

$$\delta_n(\xi) = 2 \int_0^1 \delta(x - \xi) \sin \lambda_n x dx = 2 \sin \lambda_n \xi.$$

Подставляя (2.1.5) в (2.1.3), (2.1.4) приходим к задаче в коэффициентах рядов (2.1.5)

$$\ddot{G}_n(\xi, \tau) = -\lambda_n^2 G_n(\xi, \tau) + 2\delta(\tau) \sin \lambda_n \xi,$$

$$G_n(\xi, 0) = 0, \quad \dot{G}_n(\xi, 0) = 0. \quad (1.1.6)$$

Применяя к (2.1.6) интегральное преобразование Лапласа по времени, приходим к уравнению относительно изображений по Лапласу коэффициентов ряда разложения функции влияния ( $s$  – параметр преобразования,  $\delta^L(s) = 1$ ):

$$s^2 G_n^L(\xi, s) = -\lambda_n^2 G_n^L(\xi, s) + 2 \sin \lambda_n \xi,$$

решая которое находим

$$s^2 G_n^L(\xi, s) = -\lambda_n^2 G_n^L(\xi, s) + 2 \sin \lambda_n \xi,$$

$$G_n^L(\xi, s) = 2 \frac{\sin \lambda_n \xi}{s^2 + \lambda_n^2}. \quad (1.1.7)$$

Здесь и далее верхний индекс «L» у функции означает её преобразование по Лапласу.

Выполняя обратное преобразование, получаем оригиналы искомых коэффициентов

$$G_n(\xi, \tau) = 2 \frac{\sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n \tau}{\lambda_n}. \quad (1.1.8)$$

Тогда оригинал функции влияния будет иметь вид:

$$G(x, \xi, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n \tau \sin \lambda_n x}{\lambda_n}. \quad (1.1.9)$$

Для того, чтобы уменьшить влияние эффекта Гиббса и сгладить функцию влияния, проведем суммирование ряда с использованием сигма-множителей Ланцоша  $\sigma_n = \sin \frac{\pi n}{N} / \frac{\pi n}{N}$  [64], тогда функция влияния для решения прямой и обратной задачи примет вид:

$$G(x, \xi, \tau) \approx 2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n \tau \sin \lambda_n x}{\lambda_n} \sigma_n. \quad (1.1.10)$$

На рисунках 2.4-2.6 представлены графики зависимости функции влияния от времени с использованием и без использования сигма-множителей Ланцоша. При этом  $\xi = 0.5$ ,  $x = 0.5$ . На рисунке 2.4 представлены результаты при учёте  $N = 3$  первых членов ряда в правой части формулы (2.1.10), на рисунке 2.5 –  $N = 10$ , на рисунке 2.6 –  $N = 20$ . Штриховая линия, функция влияния без  $\sigma_n$  (2.1.9), сплошная линия – с  $\sigma_n$  (2.1.10). Как видно из этого рисунка, множители Ланцоша сглаживают функцию влияния, что в дальнейшем благоприятно влияет на решение прямой и обратной задачи.

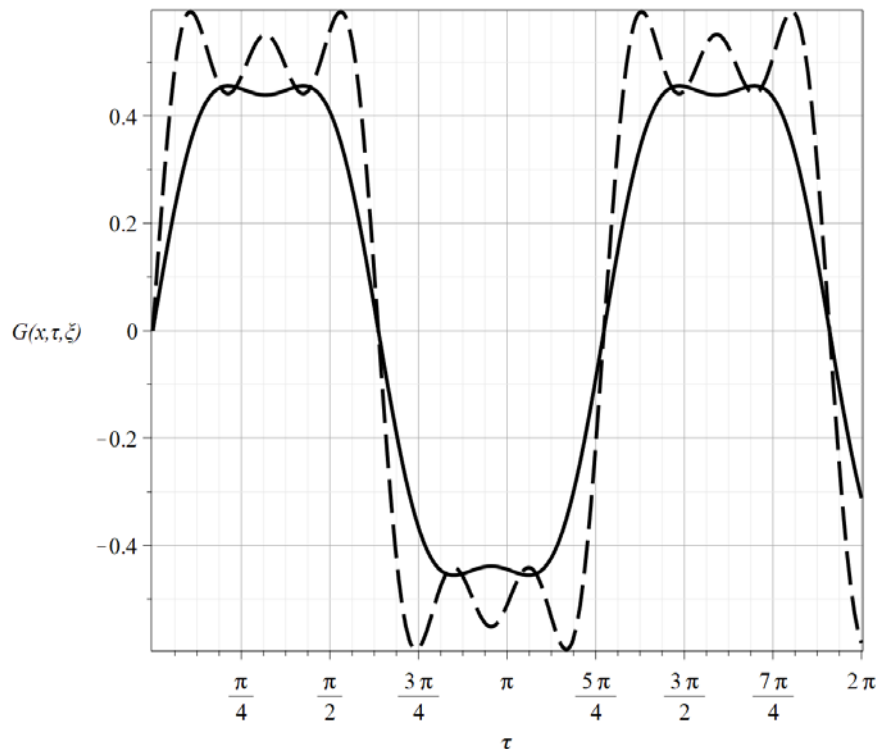


Рис. 2.4



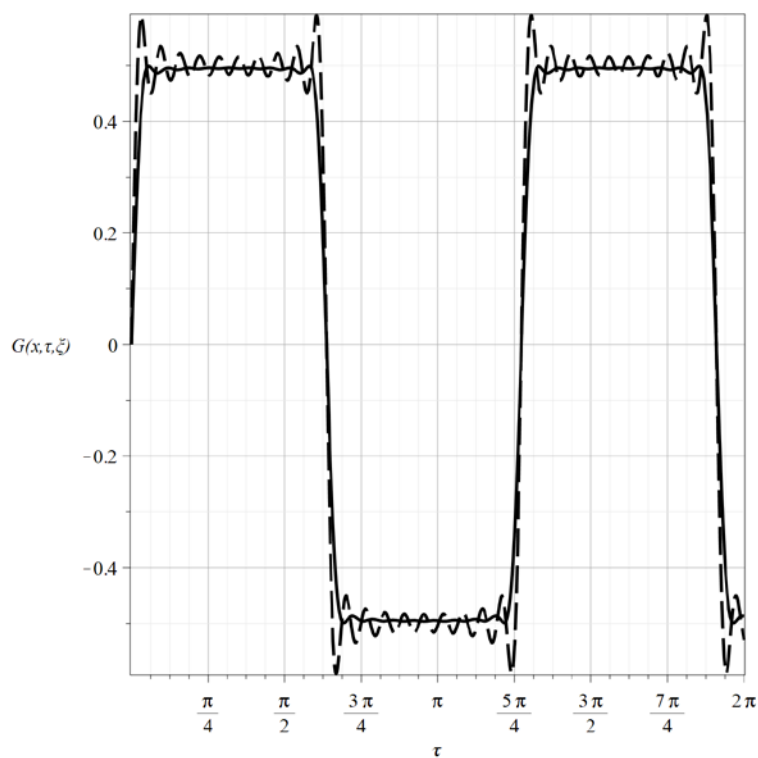


Рис. 2.5

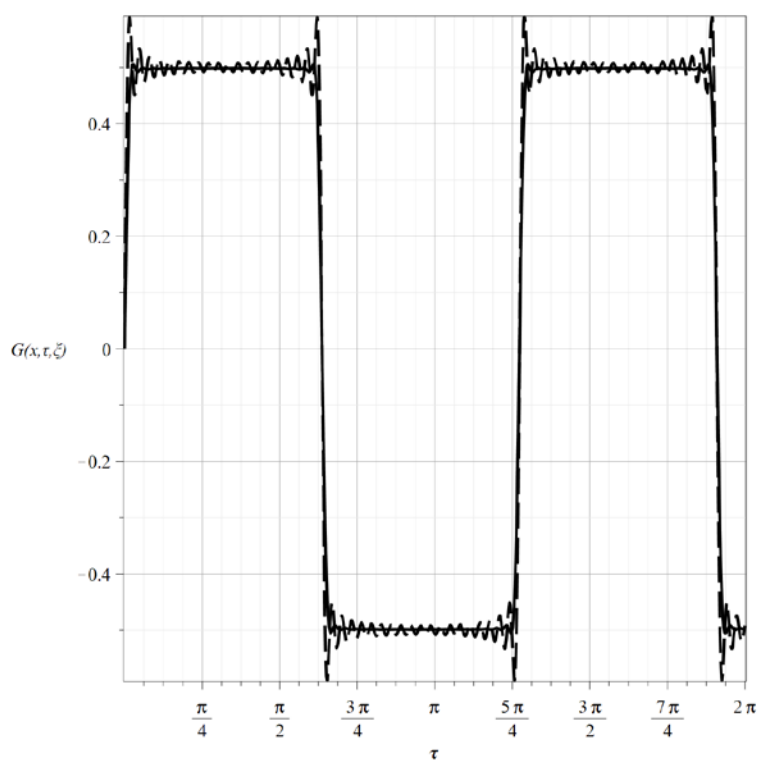


Рис. 2.6

На рисунках 2.7 и 2.8 представлен графический анализ сходимости ряда разложения для функции влияния  $G(x, \xi, \tau)$  при учёте разного количества

членов ряда. Рисунок 2.7 – без  $\sigma_n$ , рисунок 2.8 – с  $\sigma_n$ . При этом  $\xi = 0.5$ ,  $x = 0.5$ . Сплошная линия соответствует  $N = 20$ , штриховая линия –  $N = 100$ .

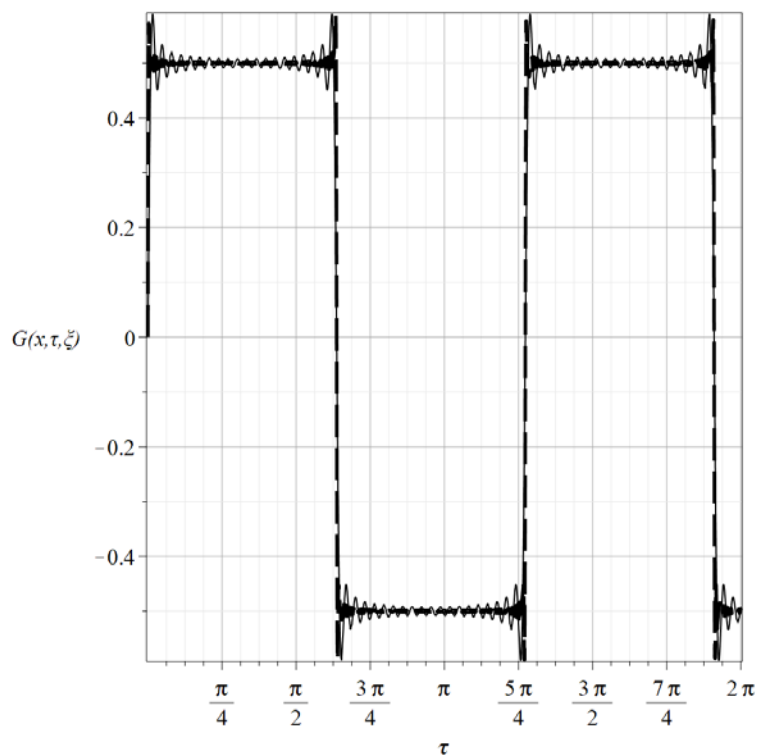


Рис. 2.7

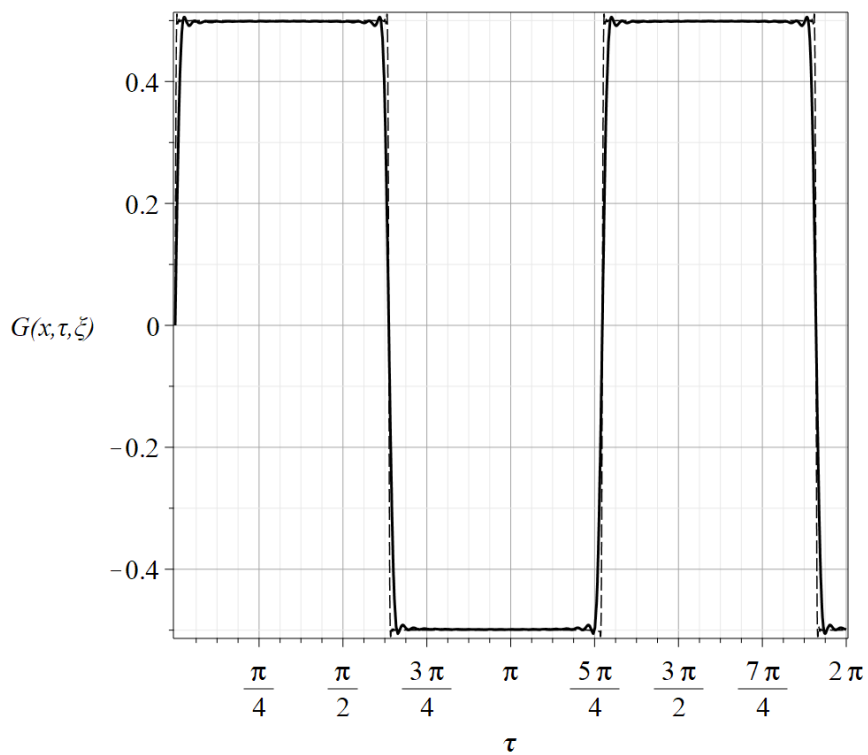


Рис. 2.8

Далее будем использовать функцию влияния с учётом сигма-множителей Ланцоша (2.1.10).

На рисунке 2.9 приведен график зависимости функции влияния от времени в различных точках  $x$ . Здесь сплошная линия  $x=0.1$ , штриховая линия  $x=0.3$ , штрихпунктирная линия  $x=0.6$ , точечная  $x=0.9$ ,  $\xi=0.5$ ,  $N=10$ .

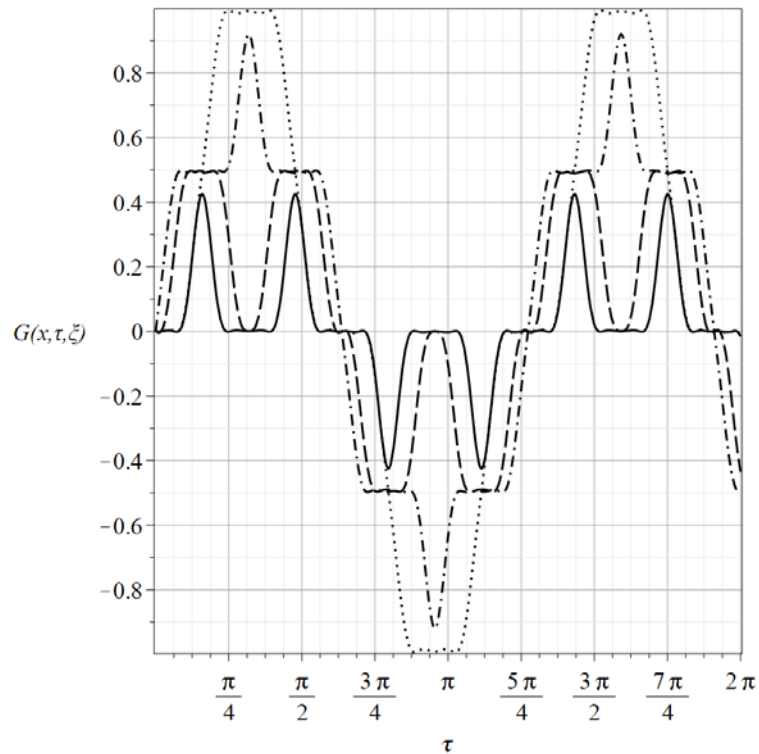


Рис. 2.9

На рисунке 2.10 и 2.11 приведено распределение функции влияния по координате  $x$  при различных значениях  $\xi$ . Рисунок 2.10 – без  $\sigma_n$ , рисунок 2.11 – с  $\sigma_n$ . Здесь сплошная линия соответствует  $\xi=0.1$ , штриховая линия –  $\xi=0.3$ , штрихпунктирная линия –  $\xi=0.6$ , точечная –  $\xi=0.9$ . При этом  $\tau=5$ ,  $N=10$ .

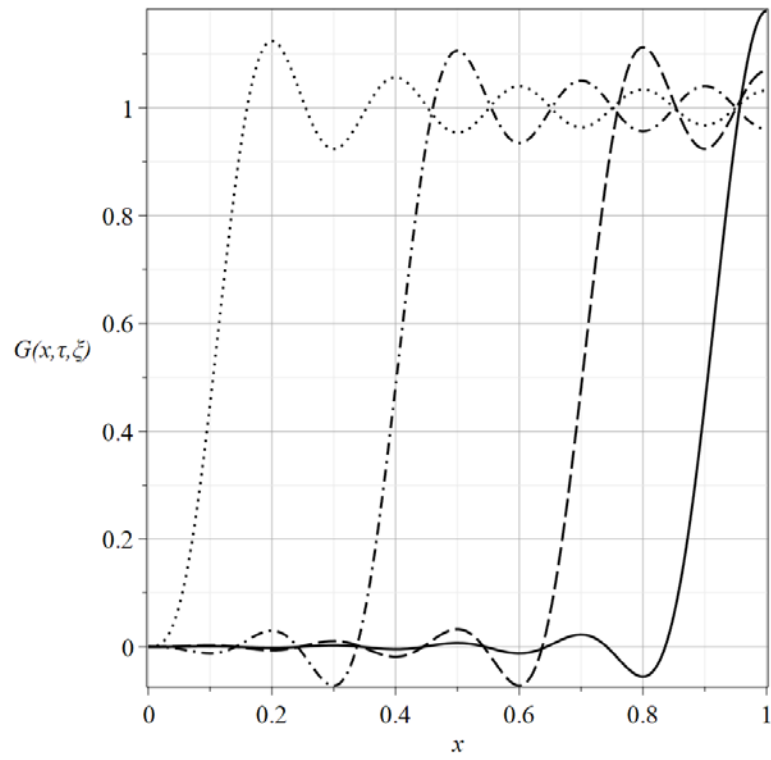


Рис. 2.10

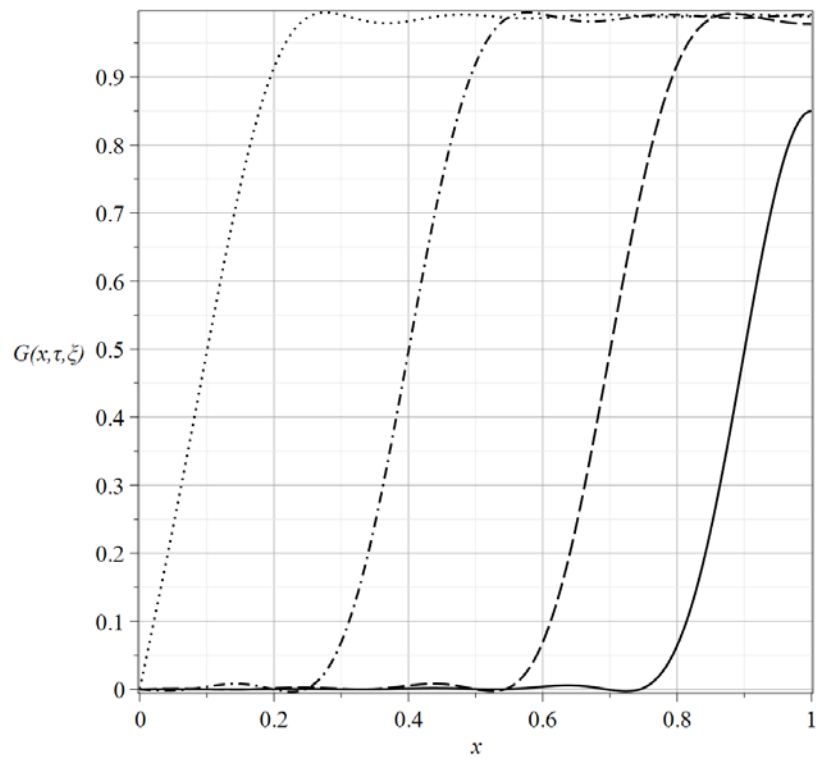


Рис. 2.11

## Функция влияния для трёхступенчатого стержня

Для решения обратных геометрических задач понадобится функция влияния для ступенчатого стержня. Найдем функцию влияния для трехступенчатого стержня как решение задачи (1.2.12) – (1.2.15). Нагрузку зададим с помощью дельта-функции Дирака  $P(\tau) = \delta(\tau)$ .

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени к задаче (1.2.12) – (1.2.15), с учетом введённого обозначения для функции влияния и свойства дельта-функции ( $\delta^L(\tau) = 1$ ) получаем следующую задачу в изображениях:

$$\begin{aligned}
 s^2 G_n^L(x, s) &= \frac{\partial^2 G_n^L(x, s)}{\partial x^2}, \quad n = \overline{1, 3}, \\
 G_1^L(x, s) \Big|_{x=0} &= 0, \quad F_n \frac{\partial G_n^L(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=1} = -1, \\
 G_n^L(x, s) \Big|_{x=x_n} &= G_{n+1}^L(x, s) \Big|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, 2}, \\
 F_n \frac{\partial G_n^L(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=x_n} &= F_{n+1} \frac{\partial G_{n+1}^L(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, 2}.
 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Решая дифференциальное уравнение из (2.1.11) получим:

$$G_n^L = A_n e^{sx} + B_n e^{-sx}, \quad n = \overline{1, 3}. \tag{1.1.12}$$

Для удовлетворения граничных условий и условий сопряжения найдем первую производную по  $x$  выражения (2.1.12):

$$G_n'^L = A_n s e^{sx} - B_n s e^{-sx}, \quad n = \overline{1, 3}. \tag{1.1.13}$$

Подставляя (2.1.12) и (2.1.13) в граничные условия задачи (2.1.11), приходим к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + B_1 = 0, \\ F_3(A_3se^s - B_3se^{-s}) = -1, \\ A_1e^{sx_1} + B_1e^{-sx_1} = A_2e^{sx_1} + B_2e^{-sx_1} \\ A_2e^{sx_2} + B_2e^{-sx_2} = A_3e^{sx_2} + B_3e^{-sx_2}, \\ F_1(A_1se^{sx_1} - B_1se^{-sx_1}) = F_2(A_2se^{sx_1} - B_2se^{-sx_1}), \\ F_2(A_2se^{sx_2} - B_2se^{-sx_2}) = F_3(A_3se^{sx_2} - B_3se^{-sx_2}). \end{array} \right. \quad (1.1.14)$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов получаем:

$$\begin{aligned} A_1 = -B_1 &= \frac{-4e^{-s}F_{13}}{s} f^L(s), \\ A_2 &= -\frac{2(e^{-s(2x_1+1)}F_{12} + e^{-s})F_{321}}{s} f^L(s), \\ B_2 &= \frac{2(e^{-s(1-2x_1)}F_{12} + e^{-s})F_{321}}{s} f^L(s), \\ A_3 &= -\frac{e^{-s(2x_1+1)}F_{123} + e^{-s(2x_2+1)}F_{213} + e^{-s(1-2x_1+2x_2)}F_{312} + e^{-s}}{sF_3} f^L(s), \\ B_3 &= \frac{e^{-s(1-2x_1)}F_{123} + e^{-s(1-2x_2)}F_{213} + e^{-s(2x_1-2x_2+1)}F_{312} + e^{-s}}{sF_3} f^L(s), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{123} &= \frac{F_1F_2 + F_1F_3 - F_2F_3 - F_2^2}{F_1F_2 + F_1F_3 + F_2F_3 + F_2^2}; F_{213} = \frac{F_1F_2 - F_1F_3 - F_2F_3 + F_2^2}{F_1F_2 + F_1F_3 + F_2F_3 + F_2^2}; \\ F_{213} &= \frac{F_1F_2 - F_1F_3 - F_2F_3 + F_2^2}{F_1F_2 + F_1F_3 + F_2F_3 + F_2^2}; F_{312} = \frac{F_1F_2 - F_1F_3 + F_2F_3 - F_2^2}{F_1F_2 + F_1F_3 + F_2F_3 + F_2^2}; \\ F_{12} &= \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}; F_{13} = \frac{F_2}{F_1F_2 + F_1F_3 + F_3F_2 + F_2^2}; f^L(s) = \frac{1}{G1}; \\ G1 &= 1 + e^{-2s} + F_{123}(e^{-2sx_1} + e^{-2s(1-x_1)}) + F_{213}(e^{-2sx_2} + e^{-2s(1-x_2)}) + \\ &+ F_{312}(e^{-2s(x_1-x_2+1)} + e^{-2s(x_2-x_1)}). \end{aligned}$$

Разложим функцию  $f^L(s)$  в ряд по экспонентам:

$$f^L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} F_{\alpha} e^{-2s\varphi(\alpha, x_1, x_2)}, \quad (1.1.15)$$

$$\mathbf{z}_{\alpha,n} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \alpha_4! \alpha_5! \alpha_6! \alpha_7!},$$

$$F_{\alpha} = F_{123}^{\alpha_2+\alpha_3} F_{213}^{\alpha_4+\alpha_5} F_{312}^{\alpha_6+\alpha_7},$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^7 \alpha_i,$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, x_1, x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 (1 - x_1) + \\ &+ \alpha_4 x_2 + \alpha_5 (1 - x_2) + \alpha_6 (x_1 - x_2 + 1) + \alpha_7 (x_2 - x_1), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}_{\alpha,n}$  – мультиномиальный коэффициент,  $\varphi(\alpha, x_1, x_2) > 0$ .

Подставляя разложение (2.1.15) в выражения для коэффициентов  $A_n$ ,  $B_n$ , а затем в (2.1.12), с использованием функции Хевисайда приходим к изображению искомой функции влияния в пространстве преобразований Лапласа:

$$G^L = G_1^L H(x_1 - x) + G_2^L H(x - x_1) H(x_2 - x) + G_3^L H(x - x_2),$$

$$G_1^L = -\frac{4}{s} F_{13} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} e^{-sy_j},$$

$$G_2^L = -\frac{2F_{321}}{s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \sum_{m=1}^4 a_m e^{-sy_m},$$

$$G_3^L = -\frac{1}{sF_3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \sum_{k=1}^8 b_k e^{-sy_k},$$

$$a_1 = -a_4 = 1, \quad a_2 = -a_3 = F_{12}, \quad b_2 = -b_1 = 1, \quad b_3 = -b_4 = F_{123}, \quad b_5 = -b_6 = F_{213},$$

$$b_7 = -b_8 = F_{312}.$$

$$y_1 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) - x; \quad y_2 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) + x,$$

$$y_3 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) - x - 2x_1; \quad y_4 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) + x - 2x_1,$$

$$y_5 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) + x + 2x_2; \quad y_6 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) - x - 2x_2,$$

$$y_7 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) + x - 2x_1 + 2x_2; \quad y_8 = 1 + 2\varphi(\alpha, x_1, x_2) - x + 2x_1 - 2x_2.$$

Построение оригинала не представляет большой сложности, однако для решения задачи с произвольной нагрузкой, основываясь лишь на свойствах преобразования Лапласа, достаточно знания только изображения функции влияния, так как его структура позволяет решить задачу с произвольной нагрузкой без операции вычисления интеграла типа свертки (2.1.2). Отметим, что при заданном значении  $\tau$ , выражение для  $u_n$  будет содержать лишь конечное число ненулевых слагаемых.



## Функция влияния для балки Тимошенко

Для решения прямой и обратной задачи, требуется построить функцию влияния  $G_w(x, \xi, \tau)$  для балки Тимошенко.

Она есть нормальное перемещение как решение задачи (1.2.6) – (1.2.8) с заменой нагрузки  $p(x, \tau)$  единичной мгновенной сосредоточенной нагрузкой  $\delta(x - \xi)\delta(\tau)$  (рисунок 2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_w}{\partial \tau^2} &= \kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G_w}{\partial x} - G_\chi \right) + \delta(x - \xi)\delta(\tau), \\ \frac{\partial^2 G_\chi}{\partial \tau^2} &= \eta^2 \frac{\partial^2 G_\chi}{\partial x^2} - \kappa^2 \gamma^2 \left( G_\chi - \frac{\partial G_w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial G_\chi}{\partial x} \Big|_{x=0,1} &= 0, \quad G_w \Big|_{x=0,1} = 0, \\ G_w \Big|_{\tau=0} &= \frac{\partial G_w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = G_\chi \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G_\chi}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Для построения функции влияния, применим к задаче (2.1.16) преобразование Лапласа по времени:

$$\begin{aligned} G_w^L &= G_w^L(x, \xi, s), \quad G_\chi^L = G_\chi^L(x, \xi, s): \\ s^2 G_w^L &= \kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G_w^L}{\partial x} - G_\chi^L \right) + \delta(x - \xi), \\ s^2 G_\chi^L &= \eta^2 \frac{\partial^2 G_\chi^L}{\partial x^2} - \kappa^2 \gamma^2 \left( G_\chi^L - \frac{\partial G_w^L}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial G_\chi^L}{\partial x} \Big|_{x=0,1} &= 0, \quad G_w^L \Big|_{x=0,1} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

С учетом граничных условий (1.2.7), решение этой задачи будем искать в виде тригонометрических рядов Фурье

$$G_w^L = \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}^L(\xi, \tau) \sin \lambda_n x, \quad (1.1.18)$$

$$G_\chi^L = \frac{G_{\chi 0}^L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\chi n}^L(\xi, \tau) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n.$$

Также представим в виде ряда функцию  $\delta(x - \xi)$

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\xi) \sin \lambda_n x, \quad (1.1.19)$$

$$\delta_n(\xi) = 2 \int_0^1 \delta(x - \xi) \sin \lambda_n x dx = 2 \sin \lambda_n \xi.$$

Подставляя (2.1.18), (2.1.19) в (2.1.17), приходим к уравнениям в коэффициентах рядов (2.1.19).

При  $n = 0$ , получаем:

$$(s^2 + \kappa^2 \gamma^2) G_{\chi 0}^L = 0, \Rightarrow G_{\chi 0}^L = 0, G_{\chi 0}(\tau) = 0,$$

При  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} (s^2 + \kappa^2 \lambda_n^2) G_{wn}^L - \kappa^2 \lambda_n G_{\chi n}^L &= \delta_n(\xi), \\ -\kappa^2 \gamma^2 \lambda_n G_{wn}^L + (s^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \kappa^2 \gamma^2) G_{\chi n}^L &= 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Решение (2.1.20) имеет вид

$$G_{wn}^L = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} \delta_n(\xi) \quad \text{и} \quad G_{\chi n}^L = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \delta_n(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (s^2 + \kappa^2 \lambda_n^2)(s^2 + \eta^2 \lambda_n^2) + s^2 \kappa^2 \gamma^2, \\ \Delta_{1n}(s) &= (s^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \kappa^2 \gamma^2), \\ \Delta_{2n}(s) &= \kappa^2 \gamma^2 \lambda_n. \end{aligned}$$

Оригиналы  $G_{wn}^L$  и  $G_{\chi n}^L$  находятся с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа:

$$G_{wn}^L = \delta_n(\xi) \sum_{l=1}^4 \operatorname{res}_{s=s_{nl}} \left[ \frac{\Delta_{1n}(s)}{\Delta_n(s)} \right] e^{s\tau}, \quad G_{\chi n}^L = \delta_n(\xi) \sum_{l=1}^4 \operatorname{res}_{s=s_{nl}} \left[ \frac{\Delta_{2n}(s)}{\Delta_n(s)} \right] e^{s\tau},$$

где  $s_{nl}$  – нули характеристического многочлена  $\Delta_n$ ,  $\operatorname{res} f(s)_{s=s_{nl}}$  – вычет функции  $f(s)$  в точке  $s_{nl}$ . Нули характеристического уравнения имеют вид:

$$s_{nl} = \pm \sqrt{\frac{-\kappa^2 \lambda_n^2 - \eta^2 \lambda_n^2 - \kappa^2 \gamma^2 \pm \sqrt{D_n}}{2}}, \quad (1.1.21)$$

$$D_n = (\kappa^2 \lambda_n^2 - \eta^2 \lambda_n^2)^2 + \kappa^4 \gamma^4 + 2\gamma^2 \kappa^4 \lambda_n^2 + 2\eta^2 \gamma^2 \lambda_n^2 \kappa^2 > 0.$$

Вид оригиналов будет зависеть от характера нулей многочлена  $\Delta_n$ . Из (2.1.21) следует, что все корни простые и чисто мнимые, т.к.

$$\sqrt{D_n} < \kappa^2 \lambda_n^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \kappa^2 \gamma^2.$$

Обозначим

$$s_{n1,n2} = \pm i \alpha_n,$$

$$s_{n3,n4} = \pm i \beta_n,$$

$$\alpha_n = \pm i \sqrt{\frac{\kappa^2 \lambda_n^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \kappa^2 \gamma^2 - \sqrt{D_n}}{2}},$$

$$\beta_n = \pm i \sqrt{\frac{\kappa^2 \lambda_n^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \kappa^2 \gamma^2 + \sqrt{D_n}}{2}}.$$

тогда

$$G_{wn}^L = \delta_n(\xi) \sum_{l=1}^4 \left[ \frac{\Delta_{1n}(s_{nl})}{\Delta_{nl}(s_{nl})} \right] e^{s_{nl}\tau}, \quad \Delta_{nl}(s_{nl}) = \left. \frac{\Delta_n(s)}{s - s_{nl}} \right|_{s=s_{nl}},$$

$$G_{\chi n}^L = \delta_n(\xi) \sum_{l=1}^4 \left[ \frac{\Delta_{2n}(s_{nl})}{\Delta_{nl}(s_{nl})} \right] e^{s_{nl}\tau}, \quad \Delta_{nl}(s_{nl}) = \left. \frac{\Delta_n(s)}{s - s_{nl}} \right|_{s=s_{nl}}.$$

Введем обозначения  $\frac{\Delta_{1n}(s_{nl})}{\Delta_{nl}(s_{nl})} = A_{1nl}$   $\frac{\Delta_{2n}(s_{nl})}{\Delta_{nl}(s_{nl})} = A_{2nl}$ , тогда

$$G_{w,\chi,n}^L = \sum_{l=1}^4 A_{jnl} e^{s_{nl}\tau} \quad j=1,2.$$

В дальнейшем нам понадобится лишь функция влияния  $G_w(x, \xi, \tau)$ .

Учтем, что  $\Delta_{jn}(s_{n1}) = \Delta_{jn}(s_{n2})$ ,  $\Delta_{jn}(s_{n3}) = \Delta_{jn}(s_{n4})$ ,  $A_{jn2} = -A_{jn1}$ ,

$$A_{jn4} = -A_{jn3}.$$

С учетом введенных обозначений, оригинал функции влияния  $G_w(x, \xi, \tau)$  принимает вид:

$$G_w(x, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}(\xi, \tau) \sin \lambda_n x, \quad (1.1.22)$$

$$G_{wn}(\xi, \tau) = \delta_n(\xi) \tilde{G}_{wn}(\tau), \quad \tilde{G}_{wn}(\tau) = (A_{jn} \sin \alpha_n \tau + B_{jn} \sin \beta_n \tau),$$

$$A_{jn} = \frac{\Delta_{jn}(i\alpha_n)}{\alpha_n(\alpha_n^2 - \beta_n^2)}, \quad B_{jn} = \frac{\Delta_{jn}(i\beta_n)}{\beta_n(\alpha_n^2 - \beta_n^2)}.$$

Для того, чтобы уменьшить влияние эффекта Гиббса и сгладить функцию влияния, проведем суммирование ряда с использованием сигма-множителей Ланцоша  $\sigma_n = \sin \frac{\pi n}{N} / \frac{\pi n}{N}$ .

В качестве примера здесь и далее рассмотрим задачу о воздействии нестационарной нагрузки на балку, выполненную из стали со следующими размерными параметрами:  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7.69 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\lambda = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 0.1l$ ,  $d = 0.3l$ ,  $l = 1 \text{ м}$ , поперечное сечение балки имеет форму прямоугольника с размерами  $10^{-2} \text{ м} \times 10^{-2} \text{ м}$

Соответствующие безразмерные параметры:

$$\eta = 1.6, \quad \kappa^2 = \frac{5}{6}, \quad l = 1, \quad \gamma = 346.4, \quad a = 0.1, \quad d = 0.3.$$

На рисунке 2.12 представлен анализ сходимости разложения (2.1.22) функции влияния  $G(x, \xi, \tau)$  при учёте разного количества членов ряда. Здесь и на рисунке 2.13  $\xi = 0.5$ ,  $\tau = 0.5$ . Сплошной линия соответствует  $N = 10$ , штриховая –  $N = 20$ , штрихпунктирная –  $N = 100$ .

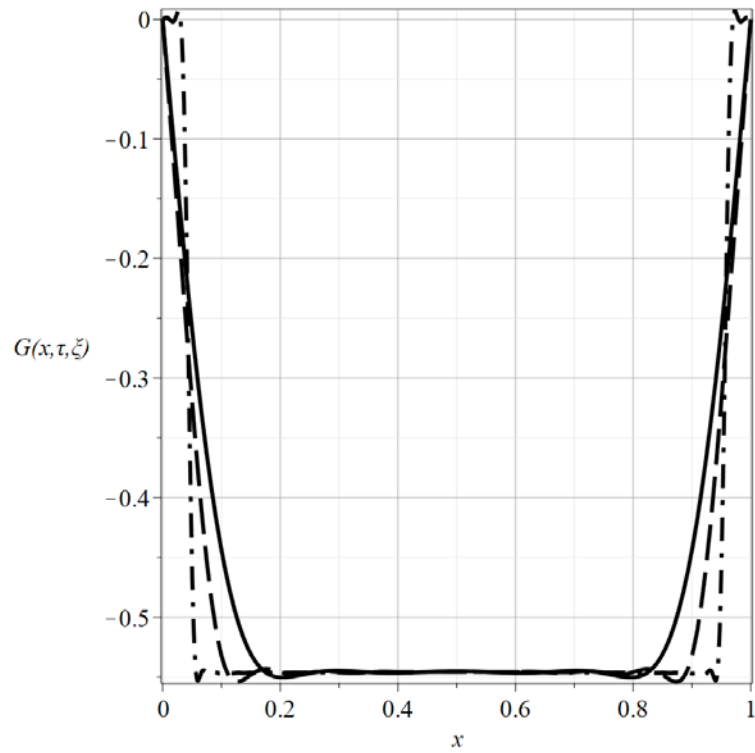


Рис 2.12.

На рисунке 2.13 представлена сходимость функции влияния при большем количестве членов ряда. Сплошной линией  $N = 100$ , штриховой  $N = 200$ , штрихпунктирной  $N = 1000$ . Исходя из рисунков 2.12 и 2.13 для решения прямой и обратной задачи в дальнейшем будем брать  $N = 10$ .

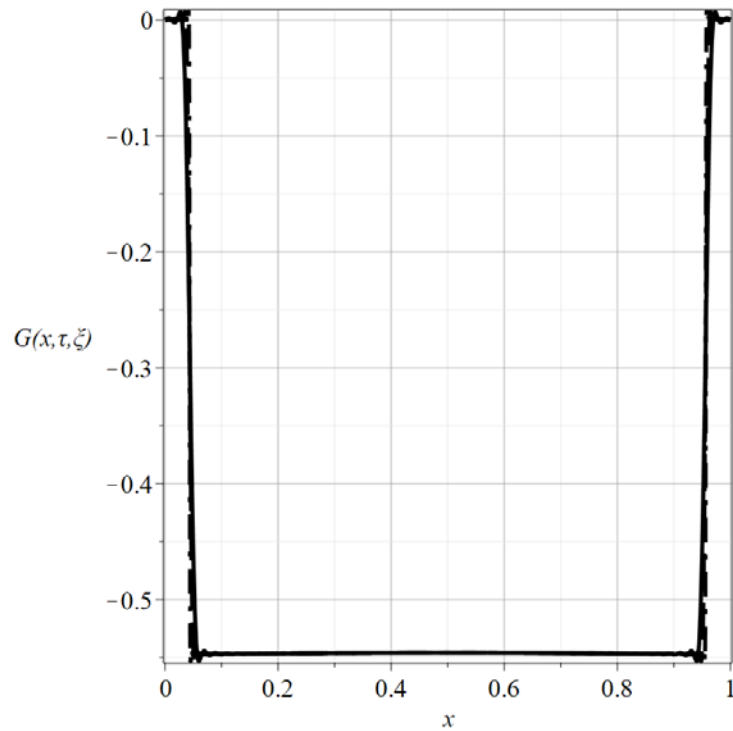


Рис. 2.13

На рисунке 2.14 представлены функции влияния в разные моменты времени  $\tau$ ,  $N=100$ ,  $\xi=0.5$ . Здесь сплошная линия соответствует моменту времени  $\tau=0.1$ , штриховая –  $\tau=0.5$ , штрихпунктирная –  $\tau=1$ .

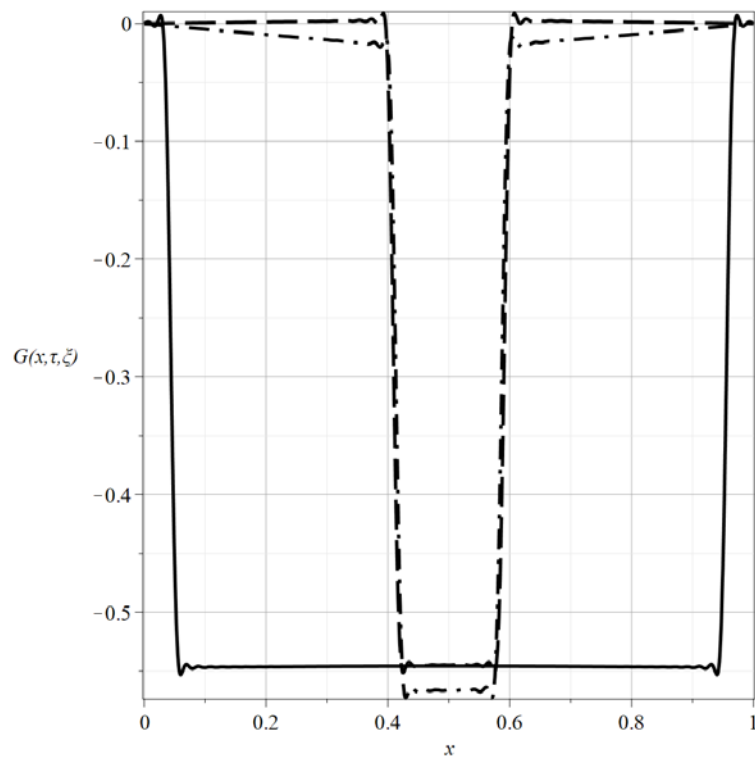


Рис. 2.14

На рисунке 2.15 представлены функции влияния в разные точки приложения нагрузки  $\xi$ ,  $N=100$ ,  $\tau=1$ . Здесь сплошная линия построена при  $\xi=0.1$ , штриховая –  $\xi=0.5$ , штрихпунктирная –  $\xi=1$ .

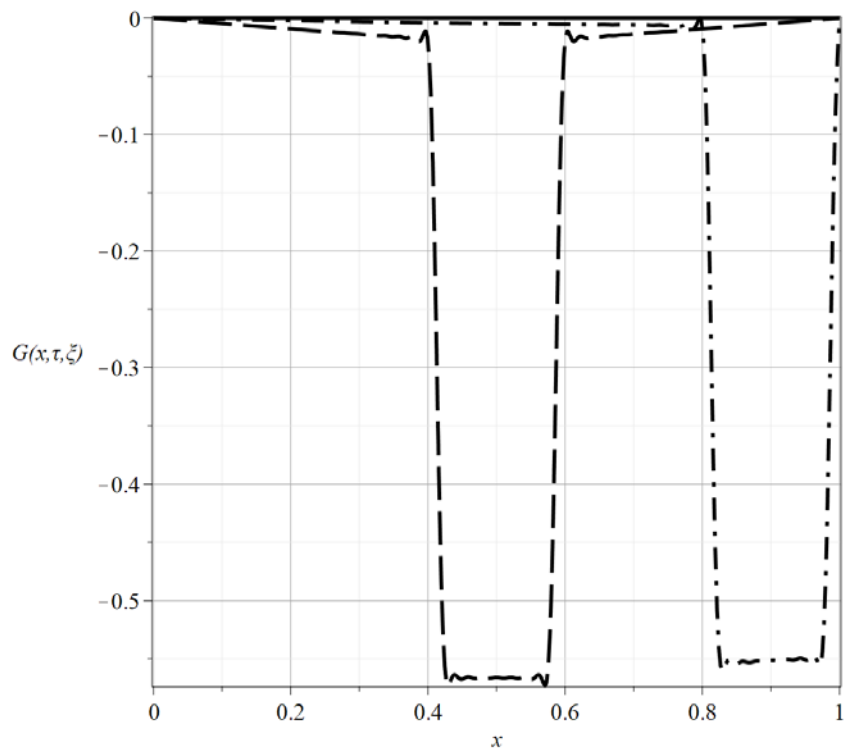


Рис. 2.15

Очевидно, чем больше удержано членов разложения в ряд Фурье, тем точнее результат. Однако, при решении прямых и обратных задач достаточно брать 10 членов разложения в ряд Фурье.

На рисунке 2.16 построены функции влияния в разных точках  $x$ ,  $N = 100$ ,  $\xi = 0.5$ , в течении времени  $\tau = 0.5$ . Здесь сплошная линия соответствует  $x = 0.1$ , штриховая –  $x = 0.5$ , штрихпунктирная –  $x = 1$ .

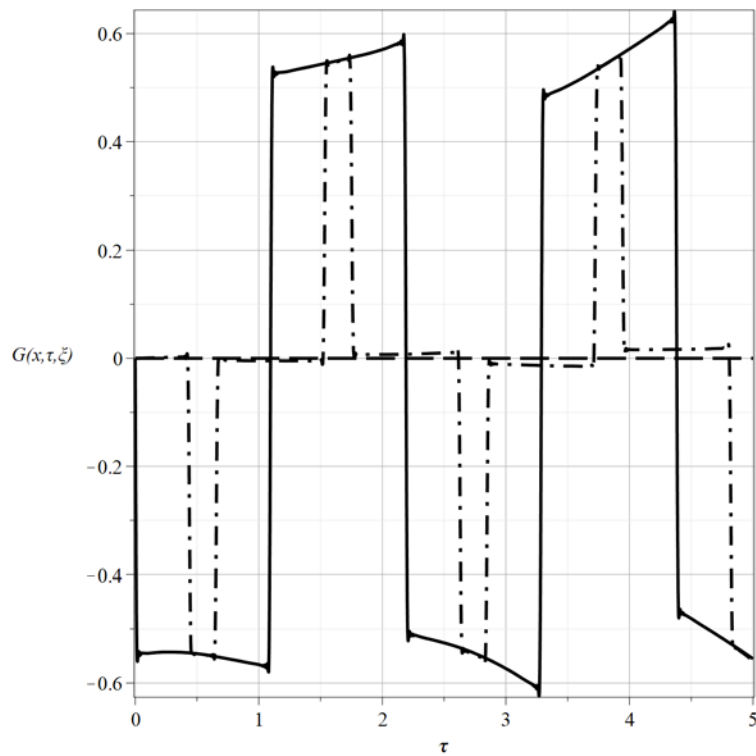


Рис. 2.16

На рисунке 2.17 построены функции влияния  $G(x, \xi, \tau)$  при в разных точках приложения нагрузки  $\xi$ , в течении времени  $\tau = 0..5$ ,  $N = 100$ ,  $x = 0.1$ . Здесь сплошная линия построена при  $\xi = 0.1$ , штриховая –  $\xi = 0.5$ , штрихпунктирная –  $\xi = 1$ .

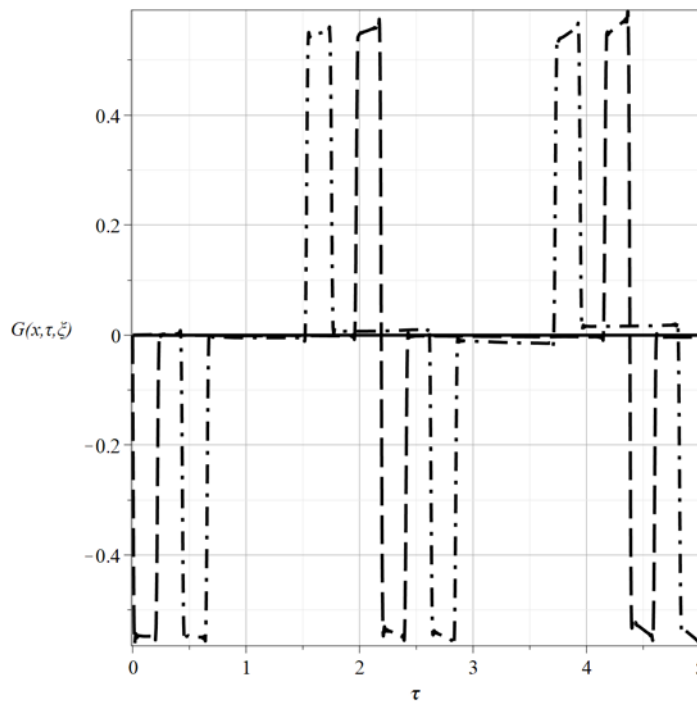


Рис. 2.17



## § 2.2. Нестационарные прямые задачи для стержней

### Прямая задача для трехступенчатого стержня

Для решения прямой задачи для трёхступенчатого стержня, обозначим  $\int_0^{\tau} P(t) dt = Q(\tau)$ . Тогда по теореме запаздывания [62], оригиналы с учетом реальной нагрузки  $P(\tau)$ , формулы (2.1.1) и свойства изображения операции свертки по времени, оригинал функции перемещения стержня будет иметь вид:

$$u(x, \tau) = u_1(x, \tau)H(x_1 - x) + u_2(x, \tau)H(x - x_1)H(x_2 - x) + u_3(x, \tau)H(x - x_2), \quad (1.2.1)$$

$$u_1 = \frac{-4}{s} F_{13} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \cdot \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} P(\tau - y_j) H(\tau - y_j), \quad (1.2.2)$$

$$u_2 = \frac{-2}{s} F_{321} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \sum_{m=1}^4 a_m P(\tau - y_m) H(\tau - y_m), \quad (1.2.3)$$

$$u_3 = \frac{1}{F_3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^n F_{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^8 b_k P(\tau - y_k) H(\tau - y_k). \quad (1.2.4)$$

Пусть теперь  $F_1 = F_2 = F_3 = F$ ,  $x_1 = x_2 = l$ , что соответствует стержню постоянного сечения. Тогда из формул (2.2.2) – (2.2.4) следует

$$u_1(x, \tau) = -\frac{1}{F} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ P(\tau - (1 + 2n) + x) H[\tau - (1 + 2n) + x] - P(\tau - (1 + 2n) - x) H[\tau - (1 + 2n) - x] \right\}, \quad (1.2.5)$$

что совпадает с точным решением для стержня постоянного сечения [140].

## Прямая задача для стержня при воздействии сосредоточенной силы

Положим, что к упругому стержню в поперечном сечении с координатой  $x = a$  приложена сосредоточенная сила, изменяющаяся во времени по закону  $p(\tau)$ . Соответствующая нагрузка математически может быть описана с использованием дельта-функции Дирака:

$$p(x, \tau) = p(\tau)\delta(x - a). \quad (1.2.6)$$

Зная функцию влияния  $G(x, \xi, \tau)$  и основываясь на принципе суперпозиции [62], решение прямой задачи для упругого стержня можно представить в виде:

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau p(t) \int_0^1 G(x, \xi, \tau - t) \delta(\xi - a) d\xi dt = \int_0^\tau G(x, a, \tau - t) p(t) dt. \quad (1.2.7)$$

Для решения прямой задачи зададим различные законы сосредоточенной силы, который в дальнейшем будем рассматривать в прямой и в обратной задаче:

$$p(\tau) = 0.1\tau^2, \quad (1.2.8)$$

$$p(\tau) = 10e^{-\tau}\tau^2, \quad (1.2.9)$$

$$p(\tau) = 0.5\sin(5\tau)\tau^2, \quad (1.2.10)$$

$$p(\tau) = 10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2, \quad (1.2.11)$$

$$p(\tau) = 10\cos(5\tau)e^{-\tau}\tau^2, \quad (1.2.12)$$

$$p(\tau) = \operatorname{arctg}(\tau), \quad (1.2.13)$$

$$p(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^3} + \sqrt{\tau}. \quad (1.2.14)$$

Решая аналитически интеграл (2.2.15) получаем перемещение для упругого стержня или прогиб для балки Тимошенко.

На рисунке 2.18 показано, что отклонение перемещений (с нагрузкой (2.2.12)) в зависимости от применения сигма-множителей Ланцоша и без них

незначительное. Черная линия построена без использования сигма-множителей  $\sigma_n$ , серая – с  $\sigma_n$ ,  $N = 20$ ,  $x=0.5$ ,  $a = 0.5$ . Как видно из рисунка, отклонение между результатами незначительно. Далее в решении прямых и обратных задач будем использовать сигма-множители Ланцоша.

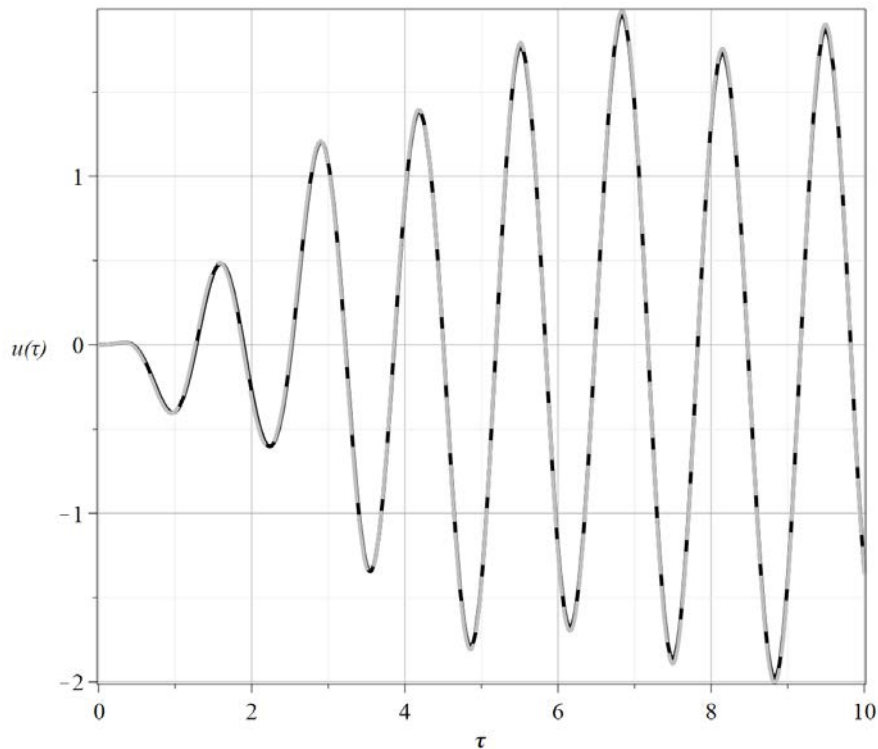


Рис. 2.18

На рисунке 2.19 построены перемещения, полученные при воздействии нагрузки вида (2.2.10) при разном количестве разложения в ряд Фурье функции влияния. Сплошная линия соответствует  $N = 3$ , штриховая линия –  $N = 5$ , штрихпунктирная линия –  $N = 10$ , длинная штриховая линия –  $N = 20$ , серая линия –  $N = 30$ ,  $x = 0.5$ ,  $a = 0.5$ .

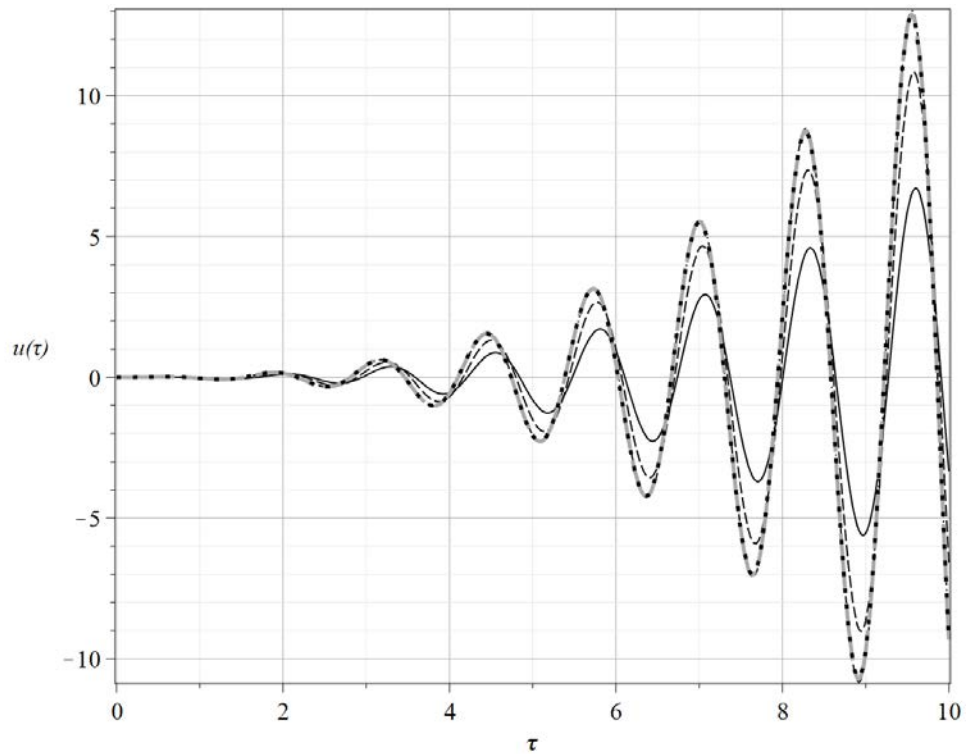


Рис. 2.19

Как видно из рисунка 2.19 здесь и далее будет достаточно использовать 20 членов ряда Фурье.

### Прямая задача для упругого стержня при воздействии распределённой нагрузки

Зная функцию влияния  $G(x, \xi, \tau)$  и основываясь на принципе суперпозиции [62], решение прямой задачи (1.2.9) для одноступенчатого стержня можно представить в виде:

$$u(x, \tau) = \int_0^1 \int_0^\tau G(x, \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi. \quad (1.2.15)$$

Разложим внешнюю осевую нагрузку в ряд Фурье:

$$p(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad p_n(\tau) = 2 \int_0^1 p(x, \tau) \sin \lambda_n x dx. \quad (1.2.16)$$

Подставляя ряды (2.1.9) и (2.2.16) в (2.2.15) и учитывая ортогональность системы собственных функций, приходим к аналогичному (2.2.15) интегральному представлению для перемещений

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\tau) \frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}, \quad I_n(\tau) = \int_0^{\tau} G_n(\tau-t) p_n(t) dt. \quad (1.2.17)$$

Для стержня зададим следующие параметры:

–  $l = 1$  - длина стержня.

Для решения прямой и обратной задачи зададим следующие законы нестационарных нагрузок:

$$p(x, \tau) = -\cos(\tau) x^3, \quad (1.2.18)$$

$$p(x, \tau) = e^{-\tau} \sin(\pi x) + e^{-\tau} \sin(2\pi x), \quad (1.2.19)$$

$$p(x, \tau) = e^{-\tau} x^2, \quad (1.2.20)$$

$$p(x, \tau) = e^{-\tau} \sin 5\pi x \left[ H\left(x - \frac{1}{5}\right) - H\left(x - \frac{2}{5}\right) \right], \quad (1.2.21)$$

$$p(x, \tau) = -\tau^2 \sin(\pi x), \quad (1.2.22)$$

$$p(x, \tau) = e^{-\tau} (x^5 - 0.5x^4 - 0.4x^3 + 0.9x^2 - x). \quad (1.2.23)$$

Для решения прямой и обратной задачи следует проанализировать какое количество разложения членов в ряд Фурье (2.2.16) надо удерживать в ряде разложения для нестационарной нагрузки.

Для того, чтобы уменьшить эффект Гиббса и сгладить нестационарную нагрузку, проведем суммирование ряда (2.2.16) с использованием сигма-множителей Ланцоша  $\sigma_n = \sin \frac{\pi n}{N} / \frac{\pi n}{N}$ .

На рисунках 2.20 - 2.27 показаны разложения функций нагрузок (2.2.18) - (2.2.21) в ряд Фурье. Черная линия – заданная нагрузка, серая линия – нагрузка, разложенная в ряд Фурье. Как видно, при  $N = 10$  (рисунок 2.20, 2.22, 2.24, 2.26) пяти членов разложения в ряд Фурье не достаточно для корректного решения прямой и обратной задачи. При  $N = 20$  (рисунок 2.21, 2.23, 2.25, 2.27)

нагрузки в виде усечённого ряда Фурье практически совпали с заданными функциями нагрузок, следовательно двадцати членов разложения в ряд Фурье достаточно для данных функций. На данном этапе важно определить минимальное достаточное количество разложения функции нагрузки в ряд Фурье. Оптимальный выбор количества разложения в ряд Фурье дает точное решение прямой задачи, а также корректное решение обратной задачи.

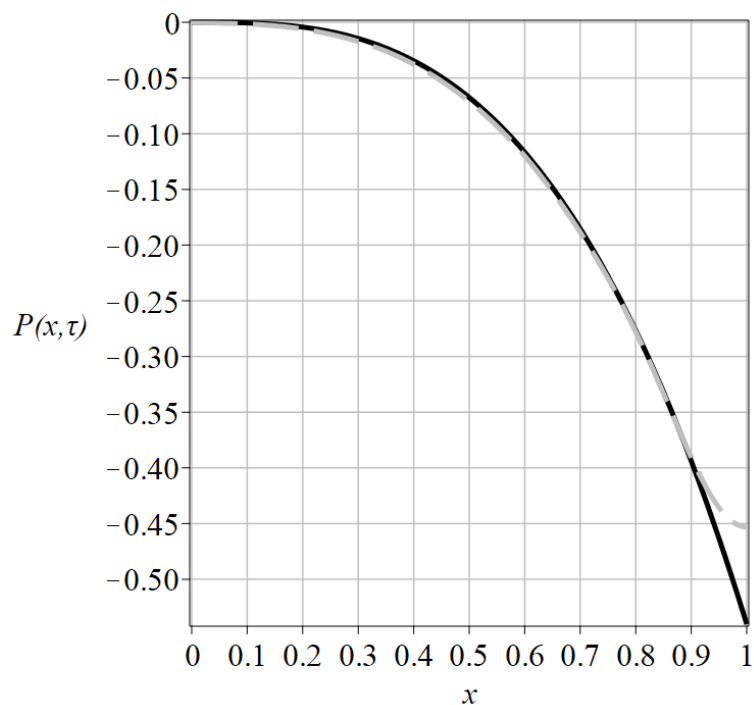


Рис. 2.20

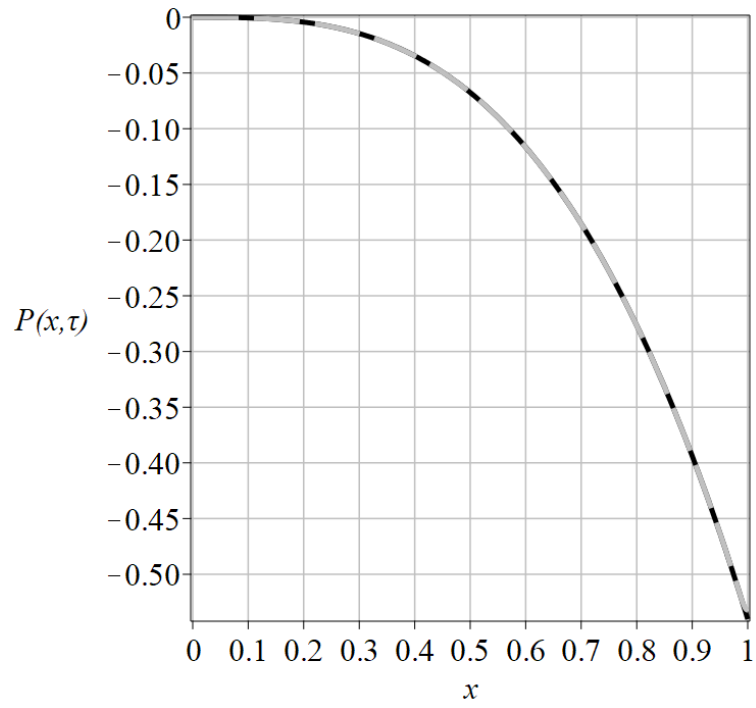


Рис. 2.21

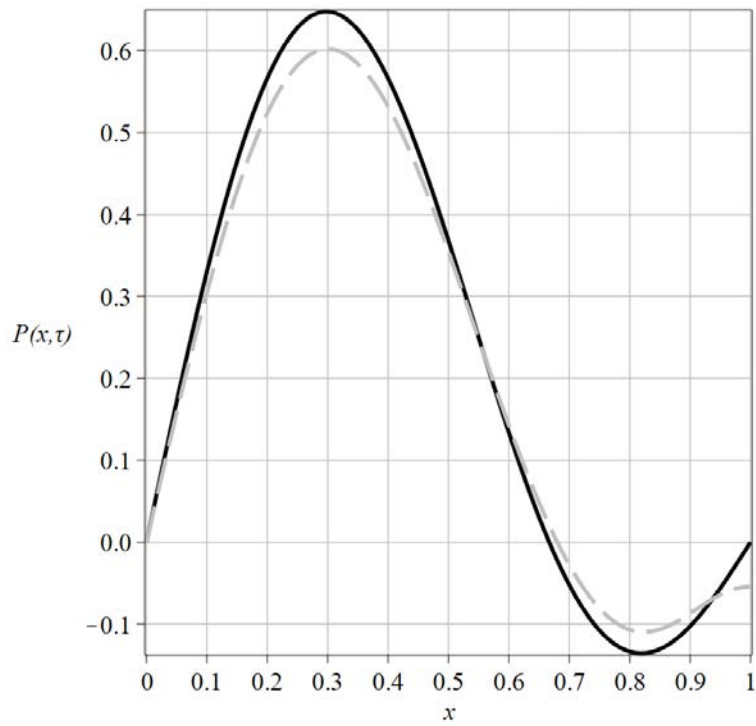


Рис. 2.22

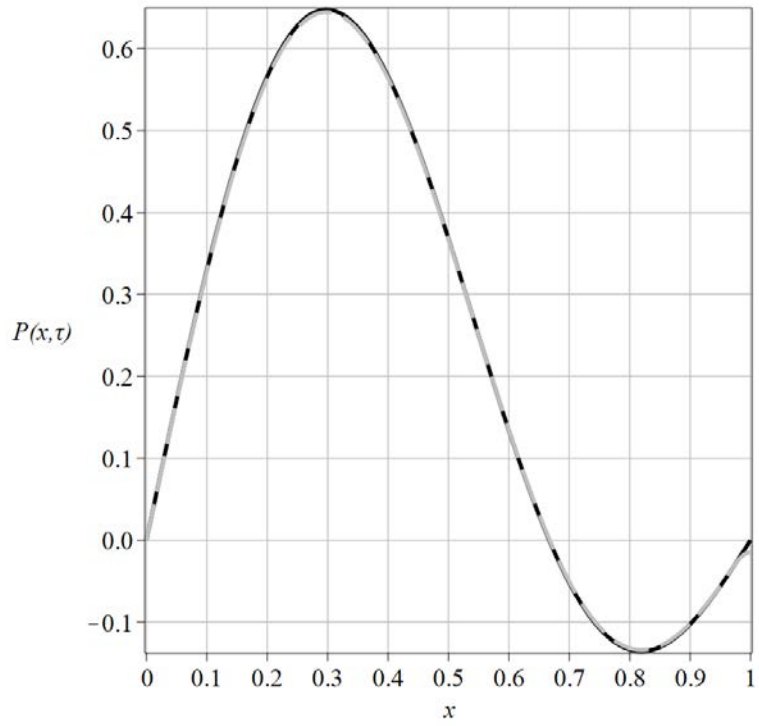


Рис. 2.23

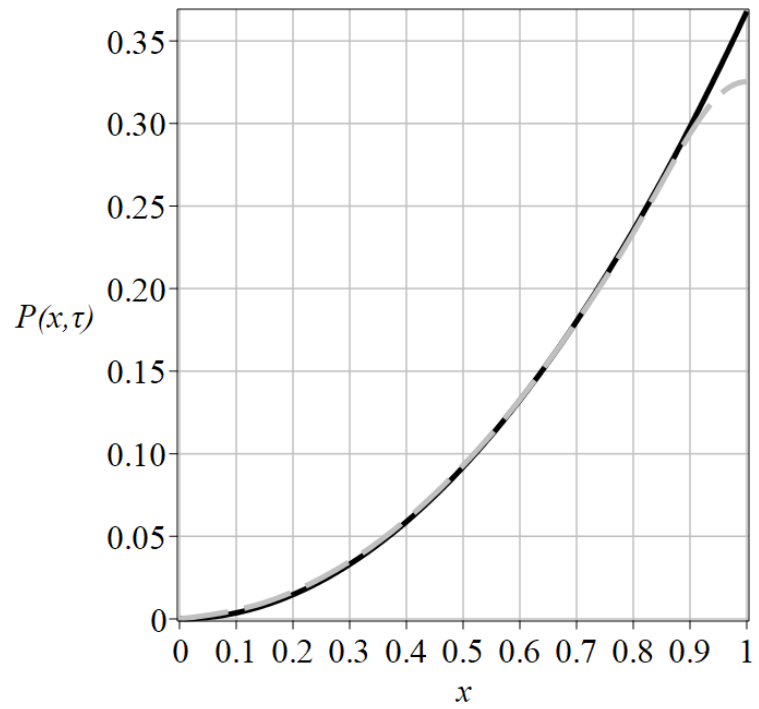


Рис. 2.24



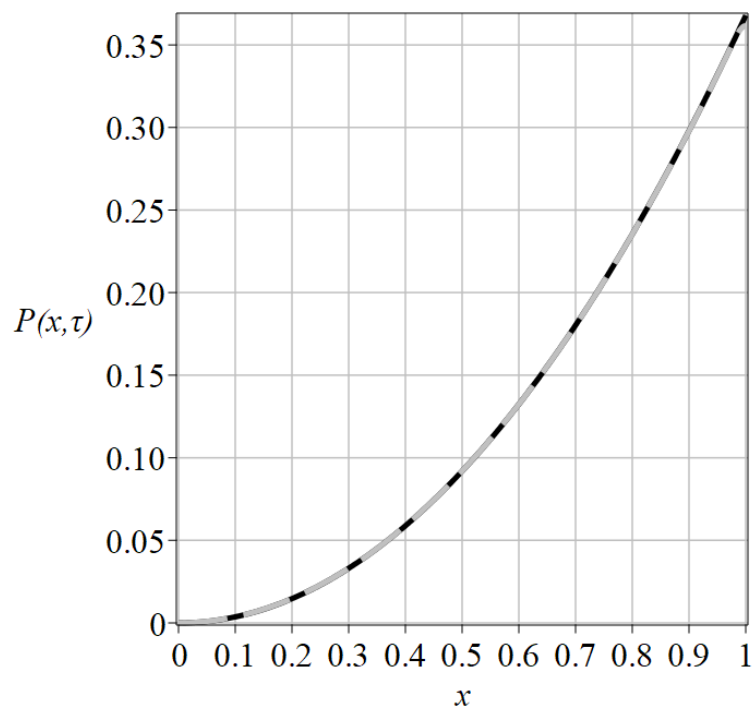


Рис. 2.25

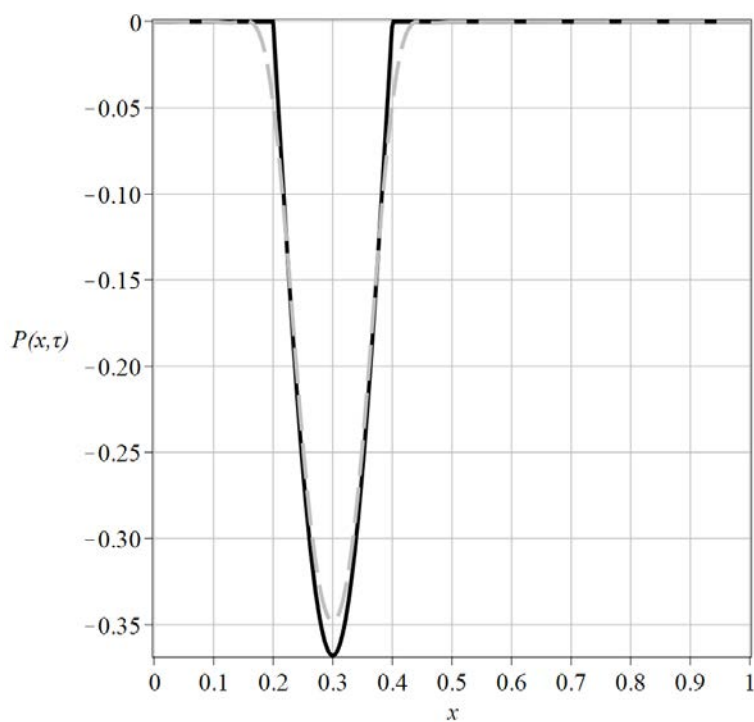


Рис. 2.26

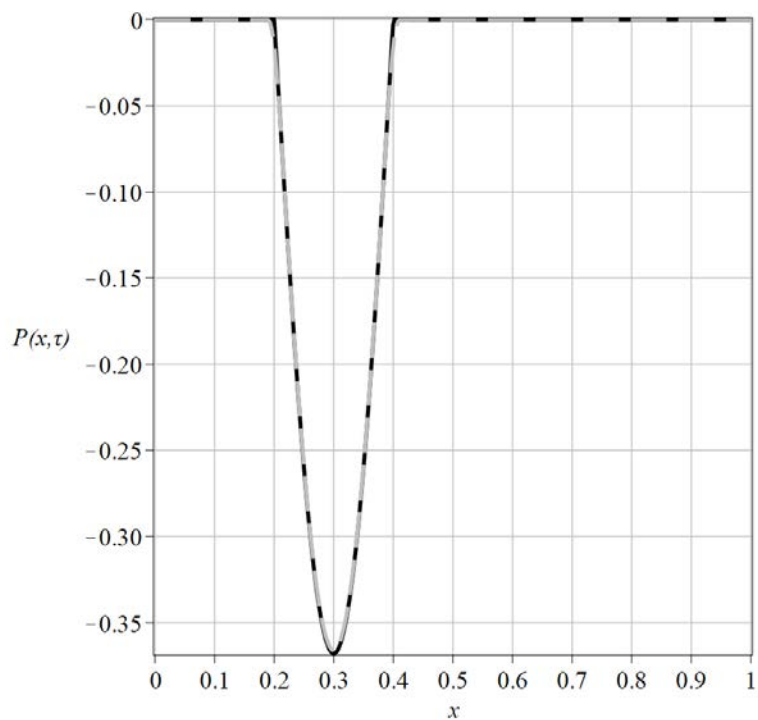


Рис. 2.27

На рисунках 2.28 – 2.31 построены перемещения в зависимости от времени  $\tau$ , полученные от воздействия нагрузок (2.2.19) - (2.2.21) соответственно, при разном количестве разложения в ряд Фурье функции влияния и нестационарной нагрузки. Черная линия -  $N = 10$ , серая линия -  $N = 20$ ,  $x = 0.5$ .

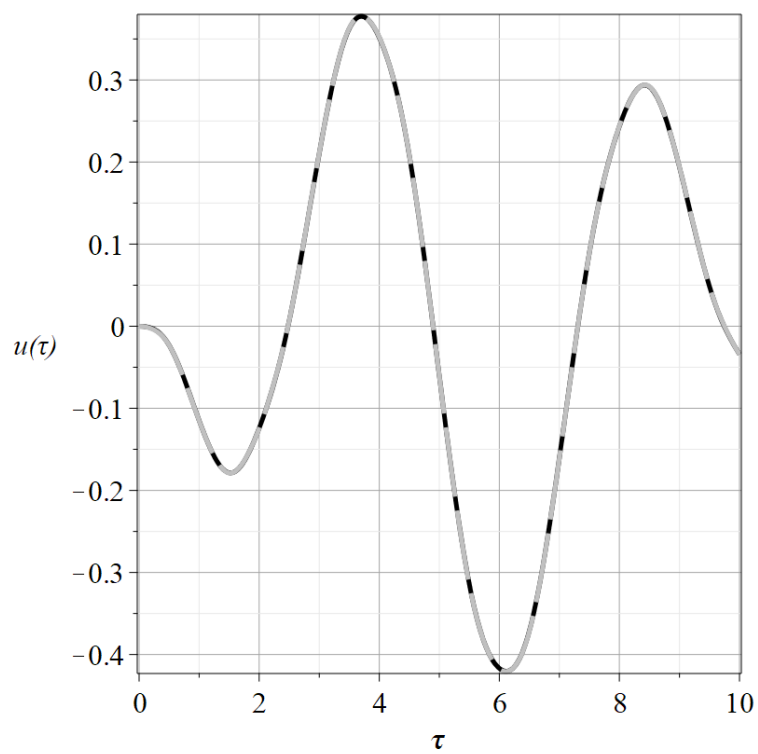


Рис. 2.28

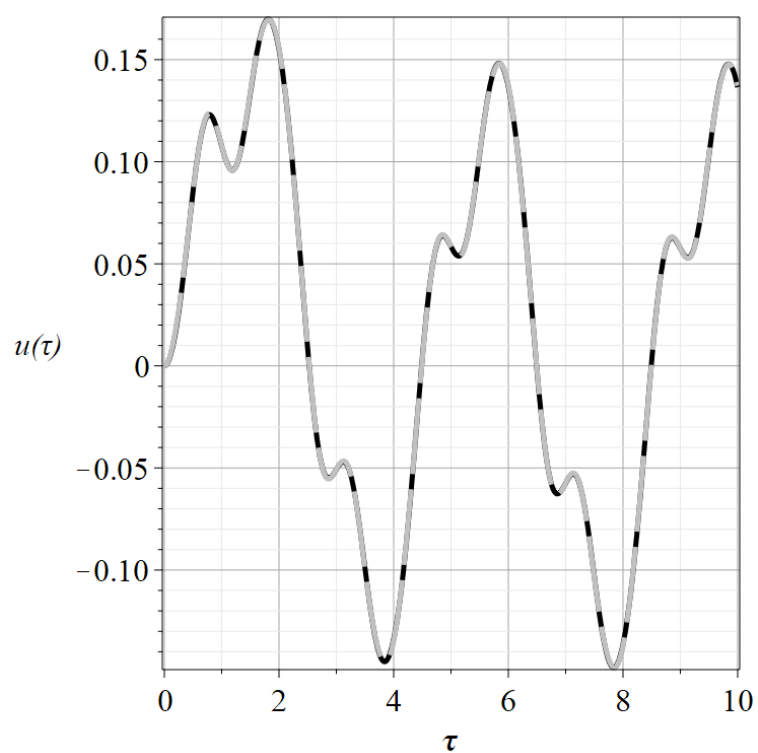


Рис. 2.29

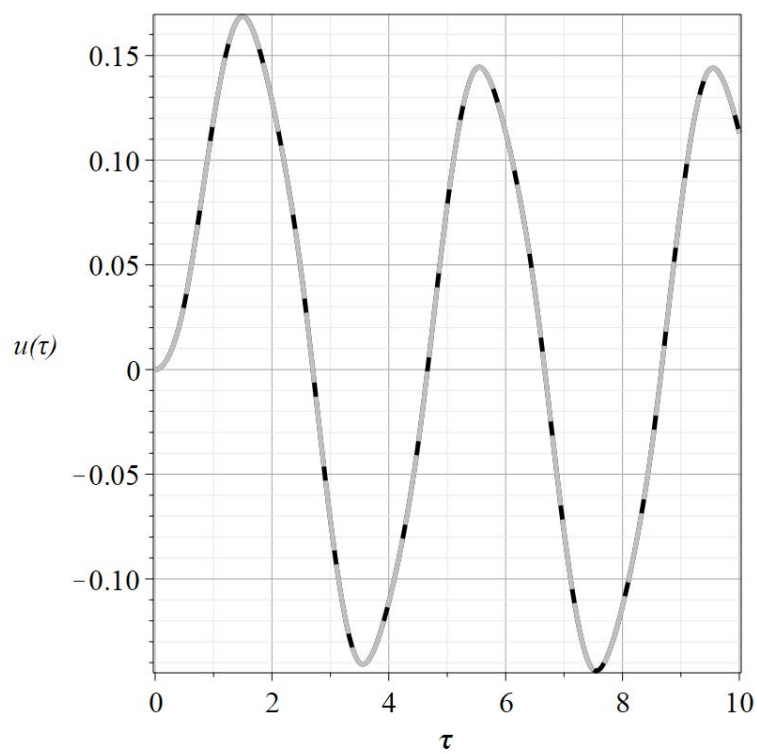


Рис. 2.30

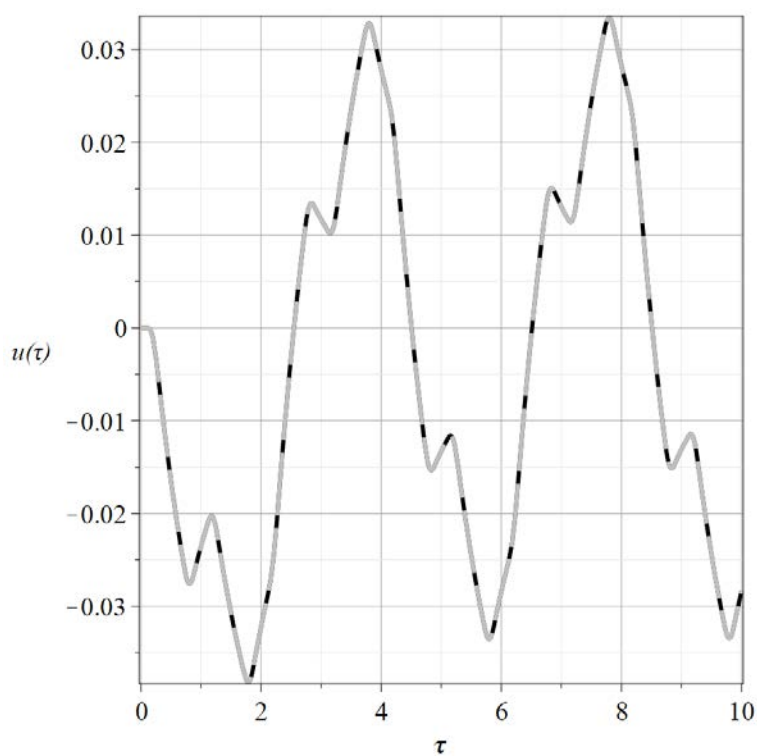


Рис. 2.31

Как видно из полученных результатов, для решения прямой задачи, и далее обратной достаточно ограничиться 10 членами ряда Фурье.

На рисунках 2.32 – 2.35 построены графики функций перемещений стержня в фиксированный момент времени  $\tau = 0.5$  в зависимости от координаты  $x$  для соответствующих нагрузок (2.2.18) - (2.2.21). Черная линия  $N = 10$ , черная линия  $N = 20$ .

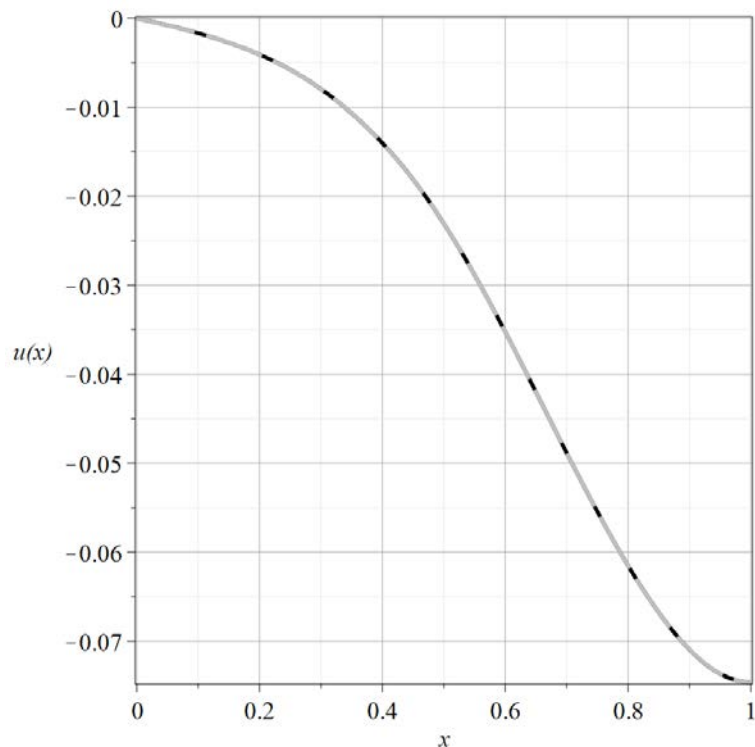


Рис. 2.32

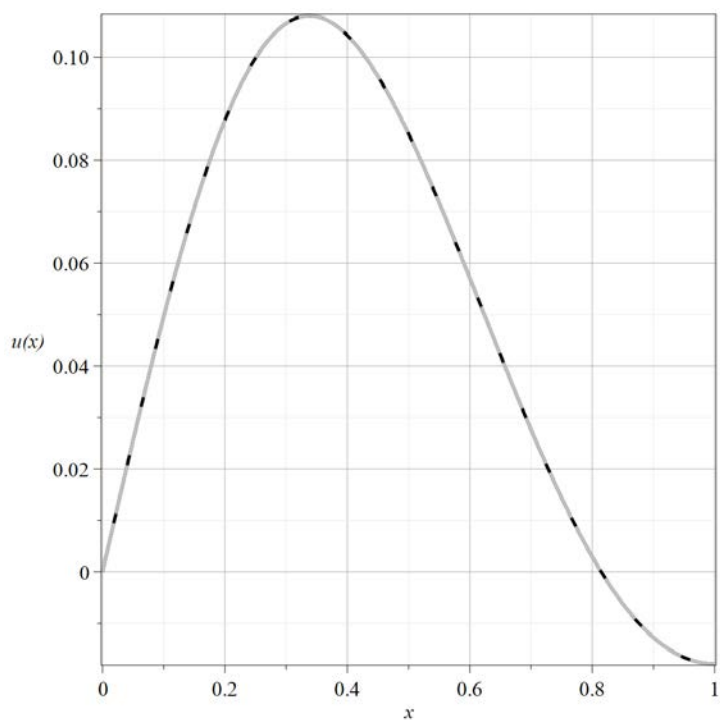


Рис. 2.33

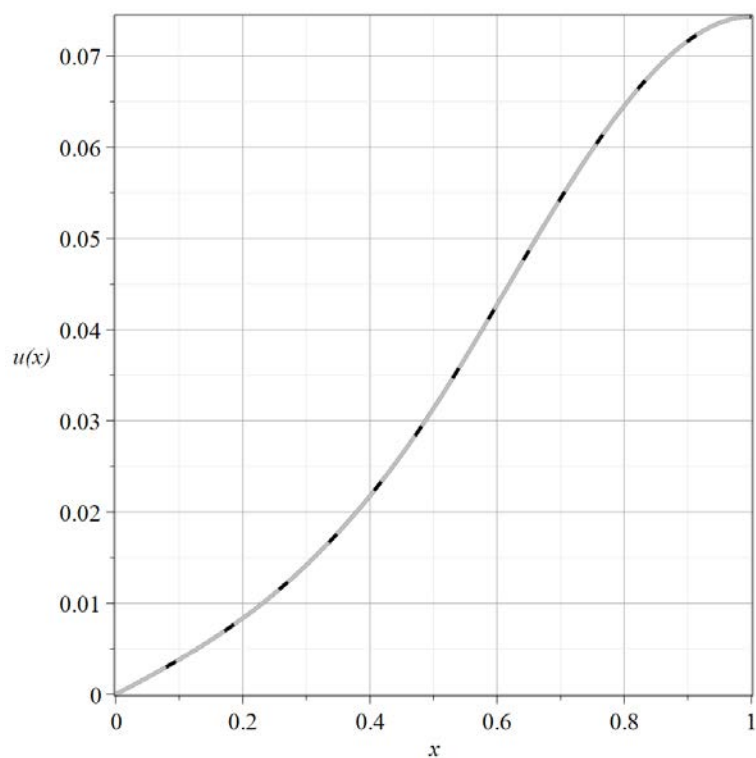


Рис. 2.34

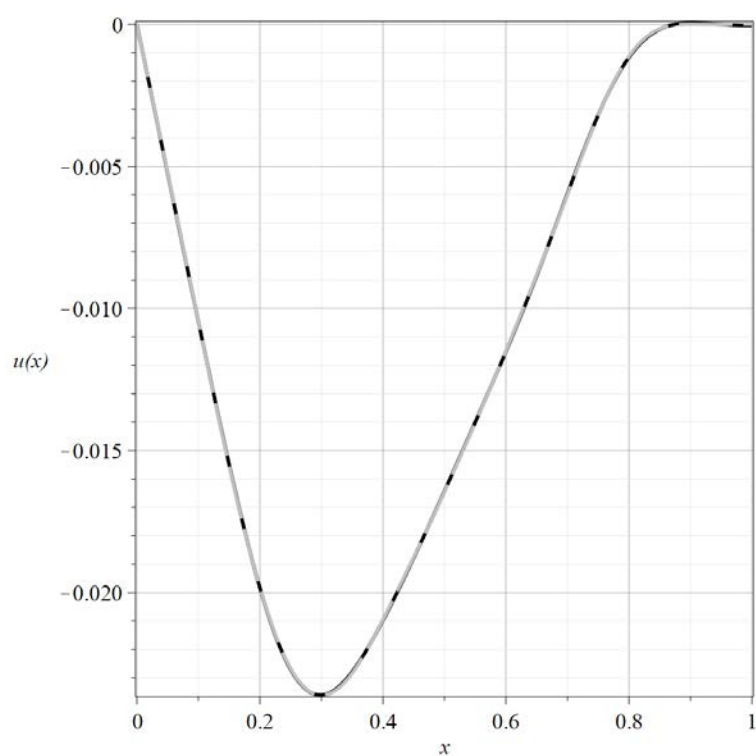


Рис. 2.35

Также стоит сравнить решение прямой задачи с помощью разложения в ряд функций влияния и нагрузки (2.2.17) с точным аналитическим решением прямой задачи для одноступенчатого стержня (2.2.5).

На рисунках 2.36 – 2.39 представлены перемещения полученные с помощью решения (2.2.5) (черная линия) и (2.2.17) серая линия. Как видно из данных рисунков решение практически совпадает.

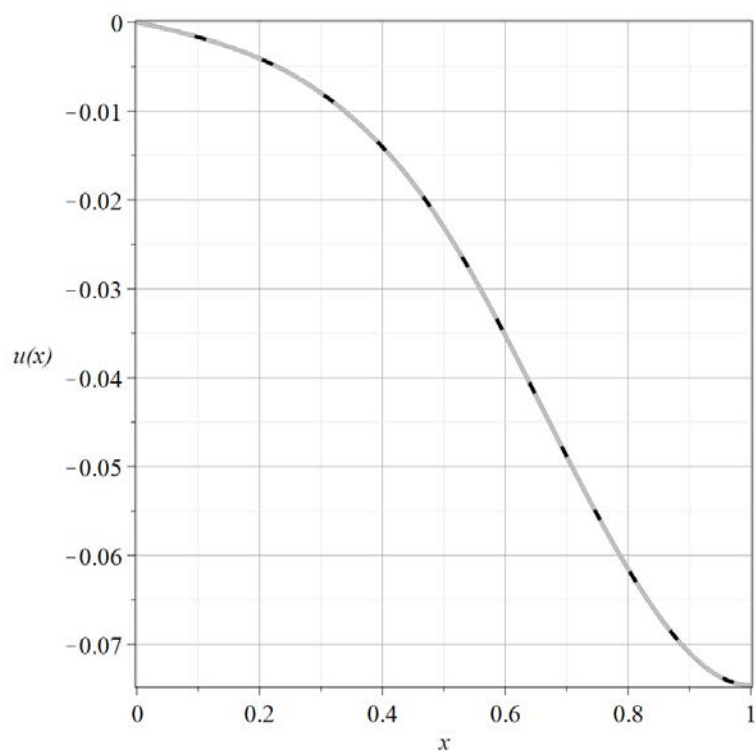


Рис. 2.36

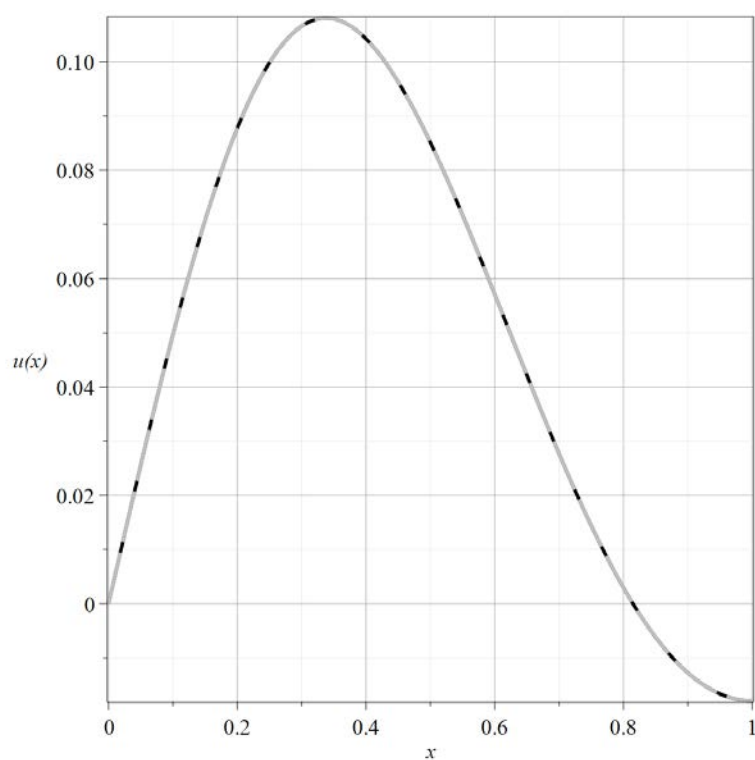


Рис. 2.37

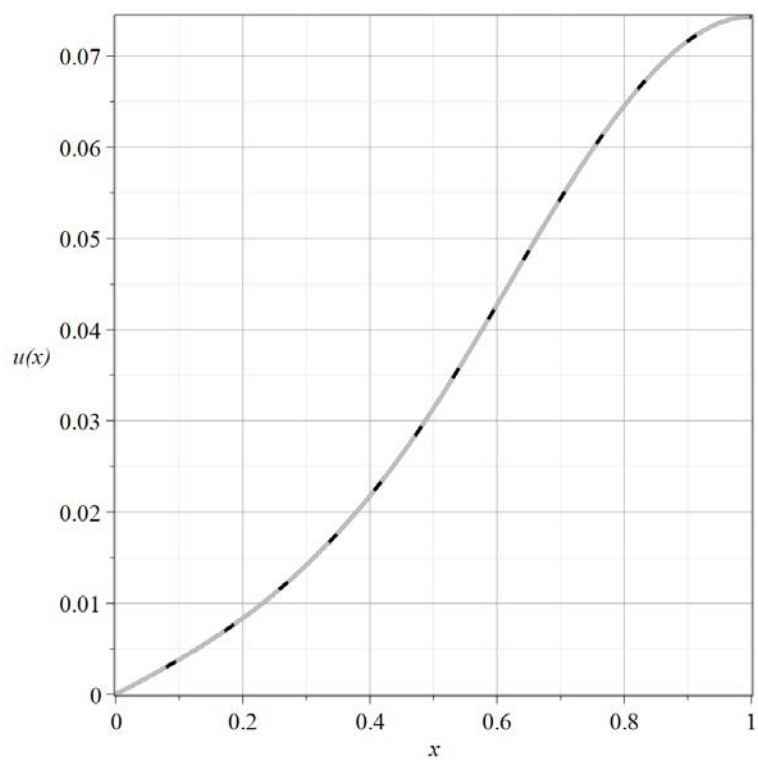


Рис. 2.38

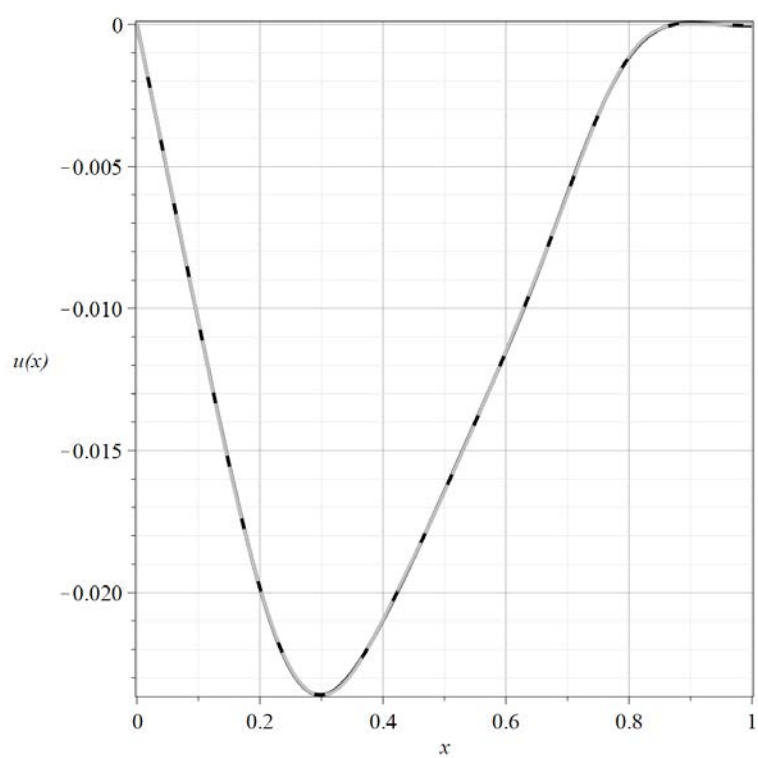


Рис. 2.39



## Прямая задача для балки Тимошенко при воздействии сосредоточенной силы

Положим, что к балке в точке с координатой  $x = a$  приложена сосредоточенная сила, изменяющаяся во времени по закону  $p(\tau)$ . Соответствующая нагрузка математически может быть описана с использованием дельта-функции Дирака, аналогично (2.2.6):

$$p(x, \tau) = p(\tau)\delta(x - a). \quad (1.2.24)$$

Зная функцию влияния для балки Тимошенко  $G(x, \xi, \tau)$  и основываясь на принципе суперпозиции, решение прямой задачи можно представить в виде:

$$w(x, \tau) = \int_0^{\tau} G(x, a, \tau - t) p(t) dt. \quad (1.2.25)$$

Для решения прямой задачи воспользуемся заданными нагрузками (2.2.8) - (2.2.12). Вычисляя интеграл (2.2.25) аналитически, получаем прогиб для балки Тимошенко.

На рисунке 2.40 показано, незначительное отклонение прогиба (с нагрузкой (2.2.8)) в зависимости от применения сигма-множителей Ланцоша и без них. Черная линия без  $\sigma_n$ , серая – с  $\sigma_n$ ,  $N = 20$ ,  $x=0.5$ ,  $a = 0.5$ . Как видно из рисунка, отклонение между результатами незначительно.

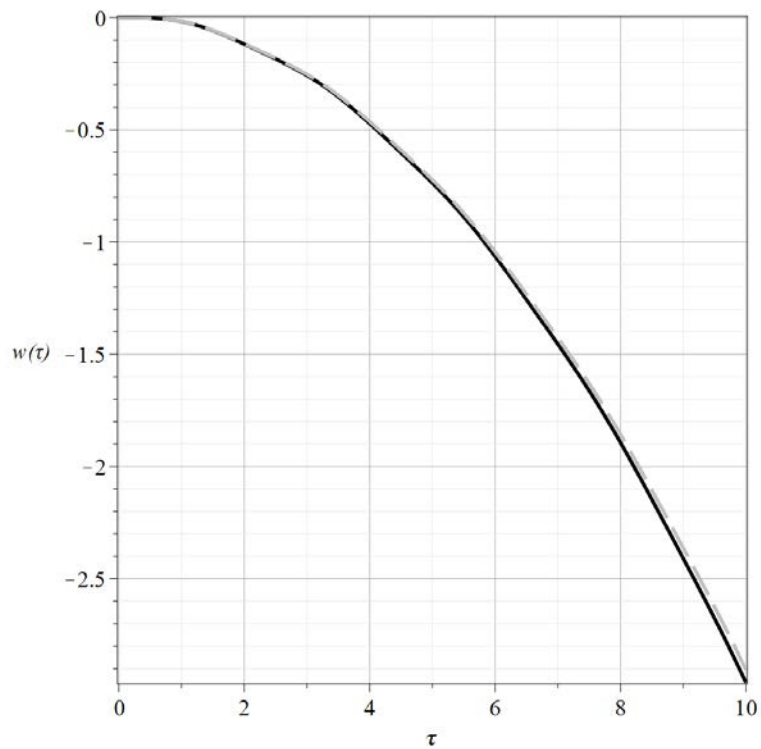


Рис. 2.40

На рисунке 2.41 построены прогиб, полученный с нагрузкой (2.2.8) при разном количестве разложения в ряд Фурье функции влияния. Сплошная линия -  $N = 3$ , штриховая линия -  $N = 5$ , штрихпунктирная линия -  $N = 10$ , длинная штриховая линия -  $N = 20$ , серая линия -  $N = 30$ ,  $x = 0.5$ ,  $a = 0.5$ .

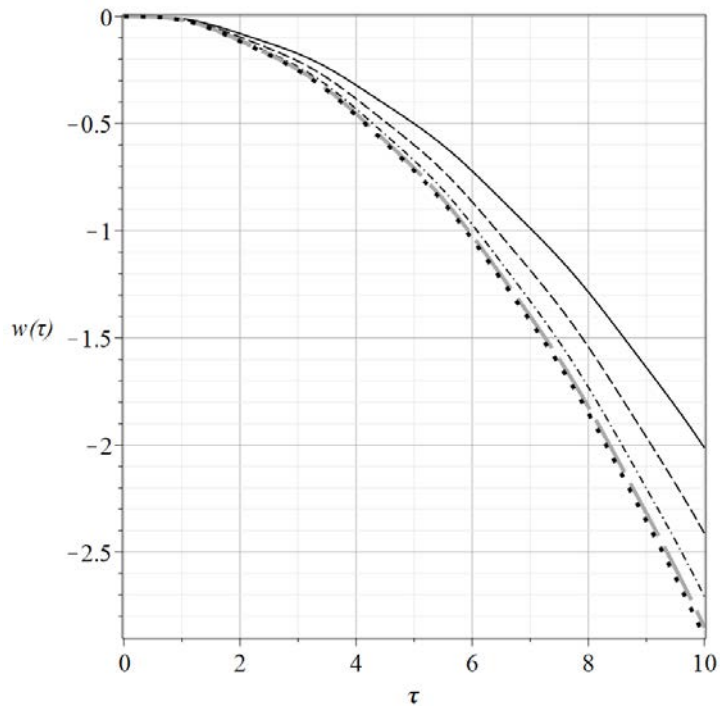


Рис. 2.41

## Прямая задача для балки Тимошенко при воздействии распределённой нагрузки

Положим, что на балку оказывает воздействие произвольная распределенная нестационарная нагрузка  $p(x, \tau)$ . С использованием функции влияния (2.1.22) прогиб балки определяется формулой (2.2.26)

$$w = \int_0^1 d\xi \int_0^\tau G_w(x, \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt = \int_0^1 G_w * p d\xi. \quad (1.2.26)$$

Представим функцию  $p(x, \tau)$  в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$p(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad (1.2.27)$$

$$p_n(\tau) = 2 \int_0^1 p(x, \tau) \sin \lambda_n x dx.$$

Подставляя (2.1.22) и (2.2.27) в (2.2.26), получаем:

$$w(x, \tau) = 2 \int_0^\tau \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{wn}(\tau - t) \sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n x \sum_{m=1}^{\infty} p_m(t) \sin \lambda_m \xi d\xi dt. \quad (1.2.28)$$

Далее, с учётом ортогональности тригонометрических функций, формула (2.2.28) преобразуется к виду:

$$w(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \tilde{G}_{wn}(\tau - t) p_n(t) dt. \quad (1.2.29)$$

Оригинал функции влияния  $G_w(x, \tau)$ , представлен формулой (2.1.22).

Для решения прямой задачи воспользуемся заданными нагрузками (2.2.18) - (2.2.21). Решая аналитически интеграл (2.2.29) получаем прогиб для балки Тимошенко.

На рисунках 2.42 – 2.45 построены прогибы в зависимости от времени  $\tau$ , полученные при воздействии нагрузок вида (2.2.18) - (2.2.21) соответственно, при разном количестве разложения в ряд Фурье функции

влияния и нестационарной нагрузки. Черная линия –  $N = 10$ , серая линия –  $N = 20, x = 0.5$ .

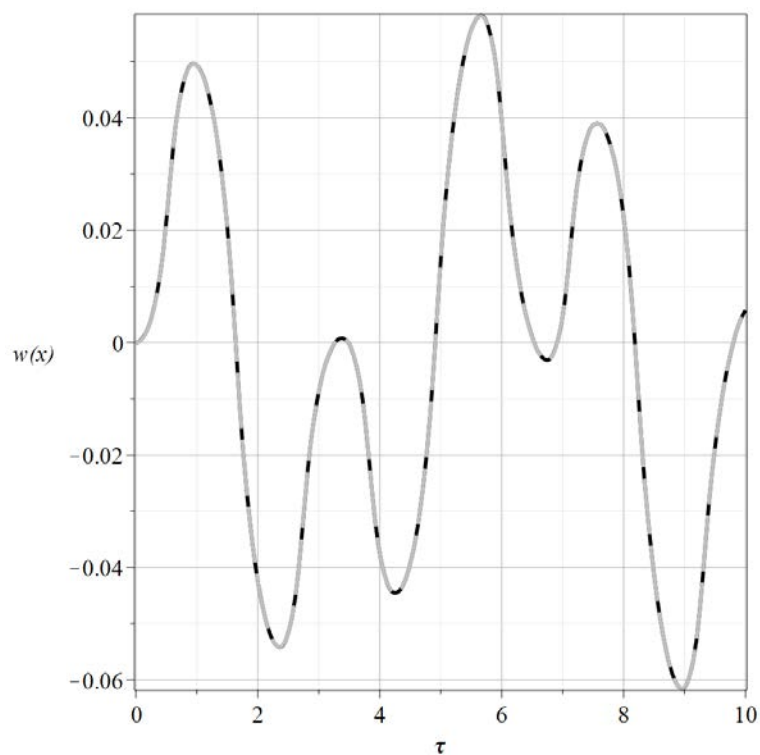


Рис.2.42

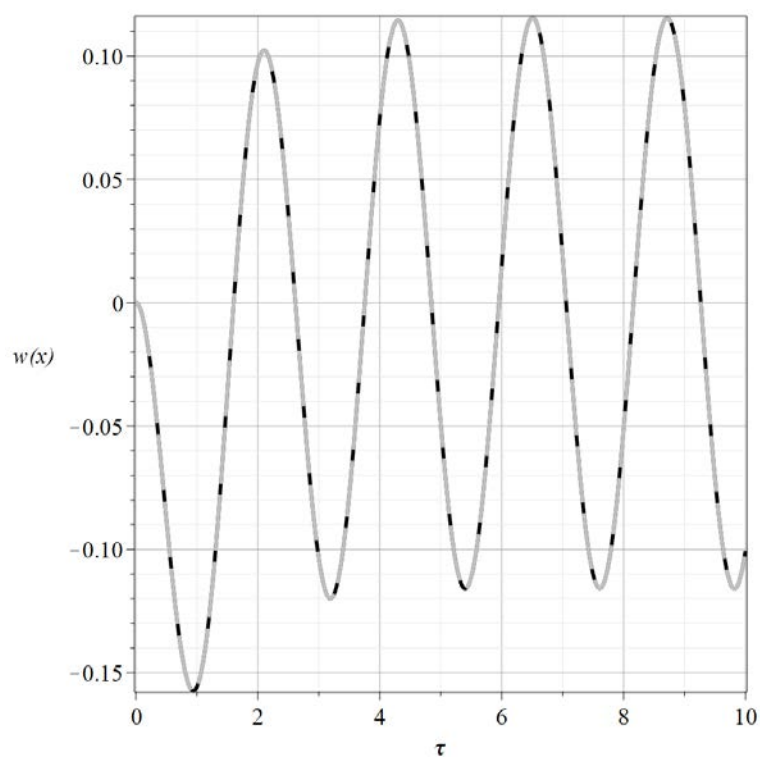


Рис. 2.43

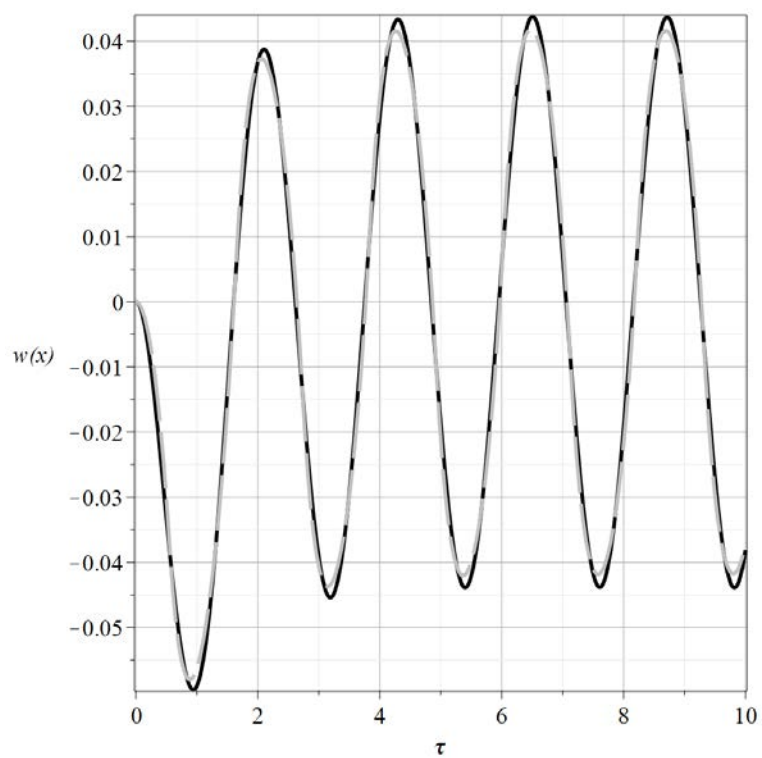


Рис. 2.44

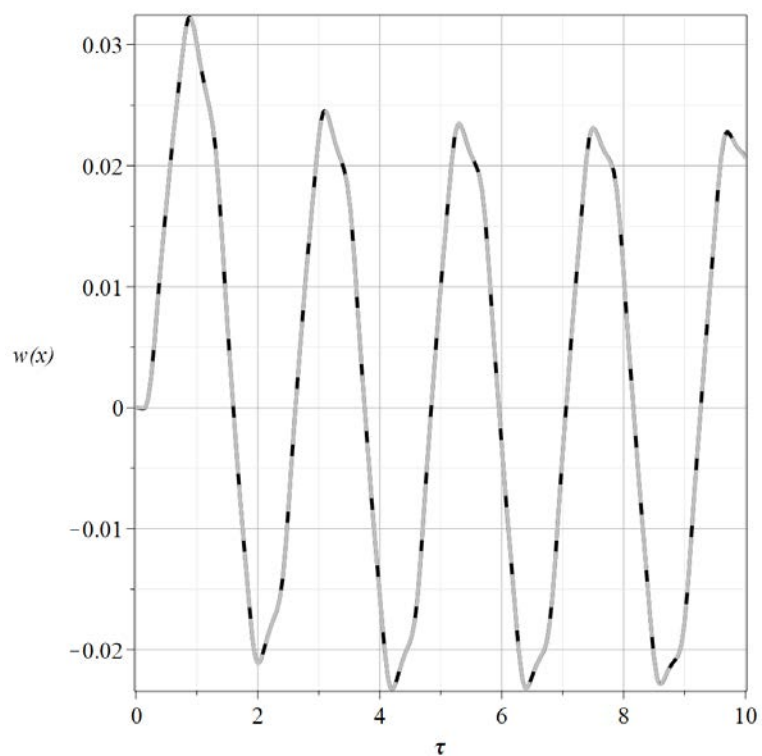


Рис. 2.45

Как видно из полученных результатов, для решения прямой задачи, и далее обратной достаточно ограничиться членами разложений в ряд Фурье.

На рисунках 2.46 – 2.49 построены графики функций прогибов балки в фиксированный момент времени  $\tau = 0.5$  в зависимости от координаты  $x$  для соответствующих нагрузок (2.2.18) - (2.2.21). Черная линия  $N = 10$ , черная линия  $N = 20$ .

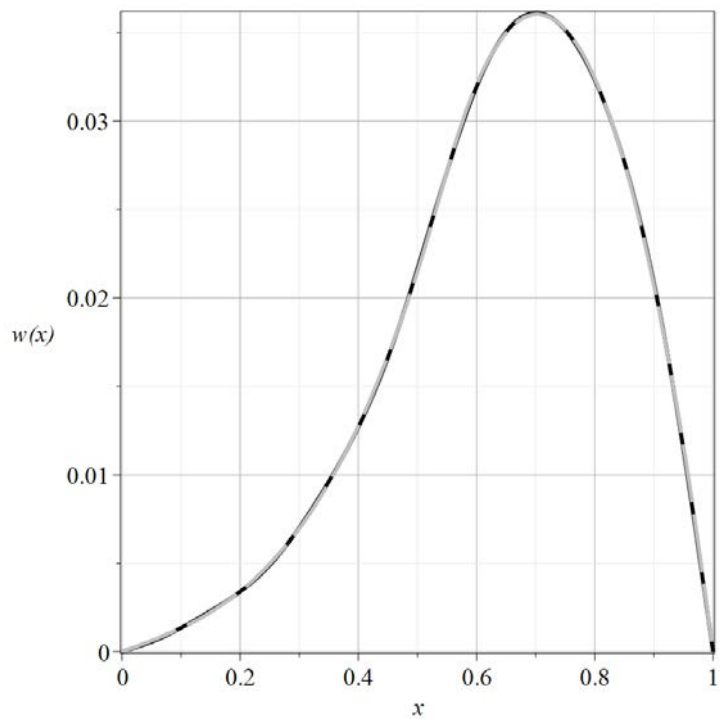


Рис. 2.46

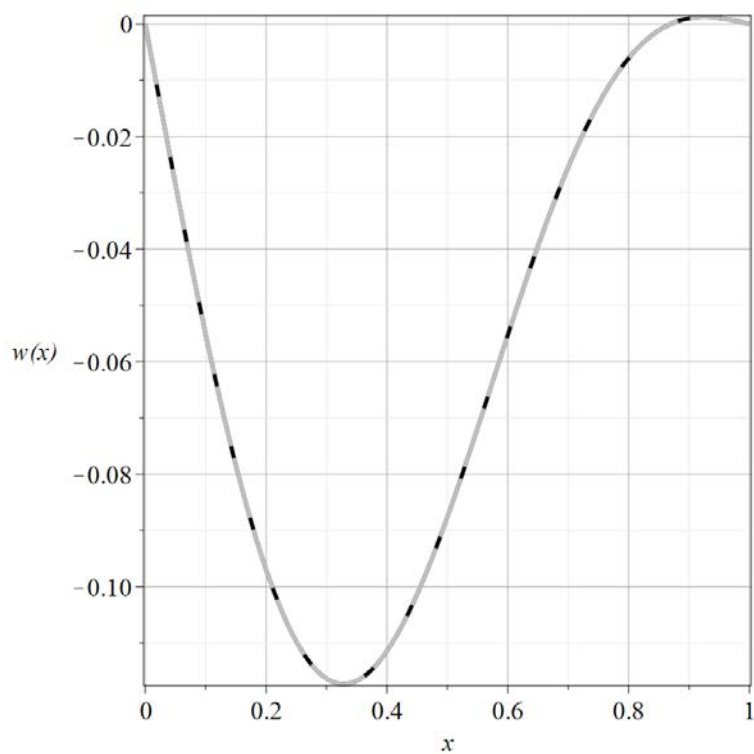


Рис. 2.47

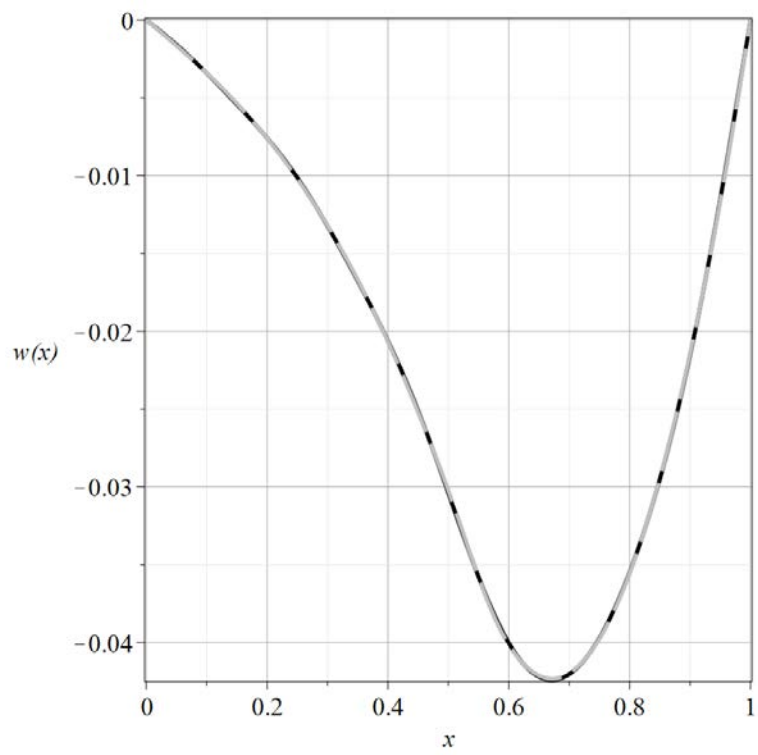


Рис. 2.48

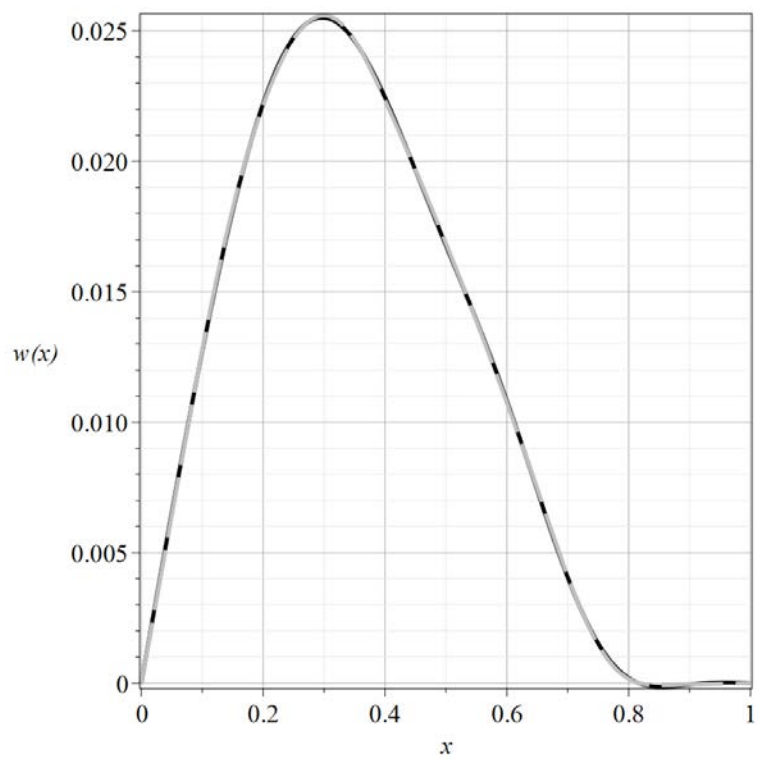


Рис. 2.49

## ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

### § 3.1. Обратная геометрическая задача для стержня

Имеется упругий стержень конечной длины, один из концов которого жестко закреплен, а к другому концу прикладывается осевая сила с заданным законом изменения по времени (рисунок 1.1). Стержень имеет переменные геометрические характеристики, которые изменяются по его длине в зависимости от присутствующего дефекта. Геометрическими характеристиками являются площади поперечного сечения стержня, а также координаты изменения этих площадей. Указанные выше геометрические характеристики будем называть параметрами дефекта стержня. Отметим, что даже в такой постановке получить точное аналитическое решение поставленной прямой задачи не представляется возможным.

Для построения аналитического решения задачи, истинный дефект приближенно заменяется модельным аналогом, который представляет собой скачкообразное изменение площади поперечного сечения на некотором заранее неизвестном участке стержня. Таким образом, задача сводится к представлению стержня с реальным дефектом в виде трехступенчатого стержня. При этом областью дефекта является одна из трех его ступеней, геометрические параметры которой (площадь поперечного сечения, координаты начала и конца) требуется определить из решения обратной задачи.

Обратная нестационарная геометрическая задача состоит в определении одного, нескольких или всех неизвестных параметров дефекта при заданных остальных параметрах с учетом нулевых начальных условий и граничных условий закрепления на одном конце. На противоположный конец стержня воздействует заданная осевая сила, зависящая от времени. Полагается, что



зависимость перемещения торца стержня, на который воздействует эта сила, известны из показания датчика перемещений, что и составляет дополнительное условие, необходимое для решения обратной задачи (рисунок 1.2).

Для решения обратной нестационарной задачи по идентификации дефекта стержень разбивается на три участка (рисунок 3.1) таким образом, что первый и третий участок имеют одинаковую площадь поперечного сечения, а второй (средний) участок отличается от двух других.

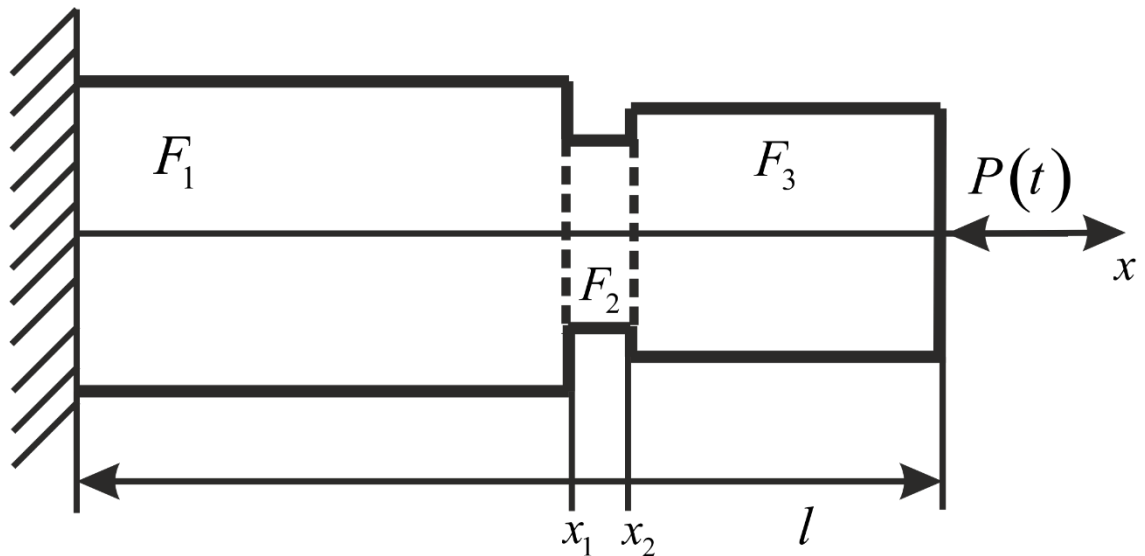


Рис. 3.1 Преставление дефекта в виде ступеней.

Здесь  $F_1$  – площадь поперечного сечения стержня на участке без дефекта,  $F_2$  – площадь стержня на участке с дефектом,  $x_1$  и  $x_2$  – координаты локализации дефекта. Как указано выше, средний участок будет описывать дефект при его наличии. При этом перемещения конца третьего участка должны совпадать с перемещениями регистрируемыми датчиком (рисунок 3.1). Искомые параметры явным образом входят в найденное решение задачи (2.2.1). Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$u(l, \tau) = u(l, \tau; x_1, x_2, F_2) = U_d(\tau). \quad (2.1.1)$$

Уравнение (3.1.1) в заданный момент времени  $\tau$ , представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с тремя неизвестными в качестве

которых, выступают параметры дефекта. Таким образом, для получения замкнутой системы трех уравнений относительно трех неизвестных достаточно зафиксировать три момента времени  $\tau_k$ ,  $k=1,2,3$  и получить соответственно три уравнения, из которых могут быть определены искомые неизвестные параметры:

$$U_k(x_1, x_2, F_2) = 0, k = 1, 2, 3, \quad (2.1.2)$$

где  $U_k(x_1, x_2, F_2) = u(l, \tau_k, x_1, x_2, F_2) - U_{dk}$ ,  $U_{dk} = U_d(\tau_k)$ .

Следовательно, геометрическая обратная задача сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров дефекта стержня. Для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона.  $U_k(x_1, x_2, F_2)$  – нелинейные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\tau_n$  – фиксированный момент времени.

Запишем задачу (3.1.2) в векторной форме:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, F_2)^T, \mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U_1(\mathbf{x}), U_2(\mathbf{x}), U_3(\mathbf{x}))^T, \mathbf{U}(\mathbf{x}) = 0.$$

Требуется найти такой вектор  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, F_2^*)^T$ , который, при подстановке в исходную систему, превращает каждое уравнение в верное числовое равенство.

При таком подходе формула для нахождения решения является естественным обобщением формулы одномерного итеративного метода [13], [95]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}_n), n = \overline{0, N}, \quad (2.1.3)$$

$$\text{где } \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1(\mathbf{x})}{\partial F_2} \\ \frac{\partial U_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2(\mathbf{x})}{\partial F_2} \\ \frac{\partial U_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3(\mathbf{x})}{\partial F_2} \end{pmatrix} \text{ – матрица Якоби.}$$

При дополнительном предположении  $U_k(x_1, x_2, F_2) \in C^2$  имеет место квадратичная сходимость метода.

В качестве критерия окончания процесса итераций обычно берется условие  $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < \mu$ , где  $\mu$  - требуемая точность решения.

Для решения обратной задачи, зададим следующие параметры для трехступенчатого стержня (рисунок 3.2):

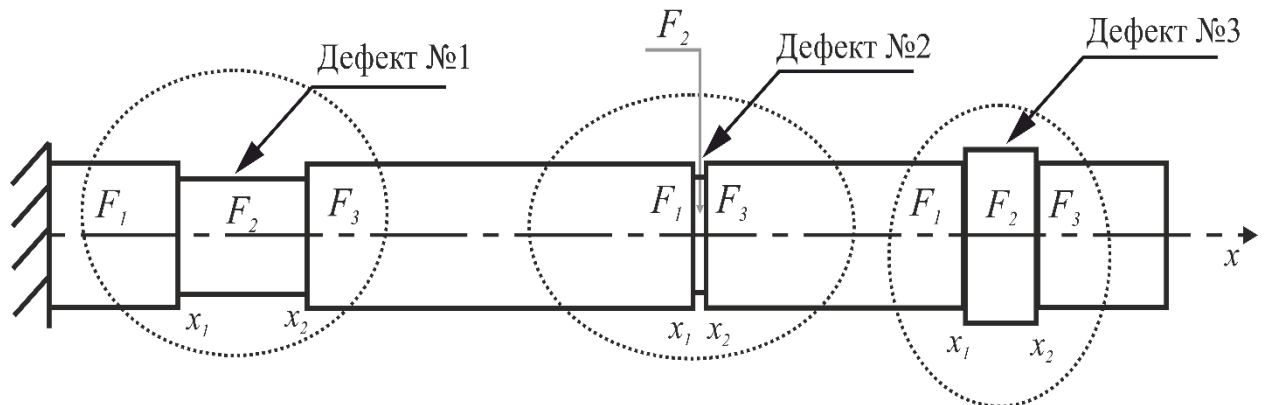


Рис. 3.2

Номер дефекта	$x_1$	$x_2$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$p(\tau)$
1	0.1	0.2	0.07	0.06	0.07	$0.1\tau^2$
2	0.49	0.51	0.07	0.01	0.07	$0.1\tau^2$
3	0.7	0.9	0.07	0.1	0.07	$0.1\tau^2$
1	0.1	0.2	0.07	0.06	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
2	0.49	0.51	0.07	0.01	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
3	0.7	0.9	0.07	0.1	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
1	0.1	0.2	0.07	0.06	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
2	0.49	0.51	0.07	0.01	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
3	0.7	0.9	0.07	0.1	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
1	0.1	0.2	0.07	0.06	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$
2	0.49	0.51	0.07	0.01	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$
3	0.7	0.9	0.07	0.1	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$

Таблица 1

$N = 10$ ,  $\mu = 0.01$  – заданная точность решения,  $u_3(\tau)$  – перемещения, известные из решения прямой задачи (2.2.1).

Для определения дефекта в упругом стержне нужно определить  $F_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$  (Таблица 1), где при переходе на новый номер дефекта будем считать слева направо  $F_1, F_2, F_3$ .

При заданных трех моментах времени  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2$  и  $\tau_3 = 3$ , площади  $F_1$  и  $F_3$  полагаются известными. На искомые параметры, исходя из геометрического смысла задачи, накладываются дополнительные

ограничения:  $0 < F_2 < 0.25$ ,  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . При этом  $x_1 = x_2 = F_2 = 0$  – начальные значения искомых параметров, соответствующие нулевой итерации метода Ньютона (3.1.3).

Подставим известные величины в формулу (2.2.1) и решим систему нелинейных уравнений относительно  $F_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$ . Получим  $F_2 = 0.01$ ,  $x_1 = 0.49$  и  $x_2 = 0.51$ , что соответствует заданным параметрам для данного стержня.

Также стоит проверить устойчивость решения (2.2.1). Для этого к вектору перемещений добавим вектор случайных величин порядка  $\varepsilon = 0.01$ . Получим устойчивое решение задачи (2.2.1) (Таблица 2):

Номер дефекта	$x_1$	$x_2$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$p(\tau)$
1	0.0909	0.1999	0.07	0.06009	0.07	$0.1\tau^2$
2	0.4899	0.5099	0.07	0.01001	0.07	$0.1\tau^2$
3	0.6998	0.8998	0.07	0.10001	0.07	$0.1\tau^2$
1	0.0909	0.1999	0.07	0.06009	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
2	0.4899	0.5099	0.07	0.01001	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
3	0.6998	0.8998	0.07	0.10001	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
1	0.0909	0.1999	0.07	0.06009	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
2	0.4899	0.5099	0.07	0.01001	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
3	0.6998	0.8998	0.07	0.10001	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$
1	0.0909	0.1999	0.07	0.06009	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$
2	0.4899	0.5099	0.07	0.01001	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$
3	0.6998	0.8998	0.07	0.10001	0.07	$10\sin(5\tau)e^{-\tau}\tau^2$

Таблица 2

Как видно из приведённых результатов расчёта, нестационарная обратная задача по идентификации дефекта в упругом стержне решается корректно без использования методов регуляризации. Это связано с тем, что разрешающие уравнения обратной задачи непосредственно следуют из решения прямой задачи, которое явным образом содержит искомые величины в качестве параметров. Нестационарный характер задачи позволил зафиксировать три момента времени и составить систему нелинейных уравнений относительно искомых параметров дефекта. Исследовано решение обратной задачи при наличии зашумленности измерений. Оно показывает незначительное влияние зашумлённости измерений на решение обратной задачи, что говорит об устойчивости предложенного метода.

## § 3.2. Обратные ретроспективные задачи для стержней

### Обратная задача по идентификации сосредоточенной силы для упругого стержня и балки Тимошенко

При описании методов решения обратных ретроспективных задач для стержней примем следующую терминологию. В случае решения обратной ретроспективной задачи для упругого стержня будем обозначать:  $u$  – перемещения для упругого стержня,  $G_U$  – функция влияния для упругого стержня. При решении обратной ретроспективной задачи для балки Тимошенко вместо перемещений  $u$ , будем использовать  $w$  – прогиб для балки Тимошенко, а вместо  $G_U$  – функцию влияния для балки Тимошенко  $G_w$ . Поскольку методы решения задач для балок и стержней схожи, будем использовать для перемещений обозначение  $u$ , а для функции влияния –  $G$ , имея в виду, что в случае стержня  $G = G_U$ , а в случае балки –  $G = G_w$ ,  $u = w$ .

Зная функцию влияния  $G(x, \xi, \tau)$  и основываясь на принципе суперпозиции [62], из решения прямой задачи для упругого стержня или балки Тимошенко перемещения в точке  $x = b$  установки датчика можно представить в виде:

$$u(b, \tau) = \int_0^{\tau} G(b, x_1, \tau - t) p(t) dt, \quad (2.2.1)$$

где  $u(b, \tau)$  – перемещения упругого стержня (или прогиб  $u(b, \tau) = w(b, \tau)$  балки Тимошенко) в точке установки датчика, а  $x_1$  – точка приложения сосредоточенной силы (рисунок 1.3 и рисунок 1.5).

Уравнение (3.2.1) является интегральным уравнением Вольтерра I-го рода. Вопрос о существовании и единственности его решения решает следующая теорема [74, 92].

**Теорема 1. (Существование и единственность решения уравнения Вольтерра I рода).**

Если в уравнении Вольтерра I рода

$$\int_a^{\tau} G(\tau, t) p(t) dt = f(\tau) \quad (2.2.2)$$

функции  $f(\tau)$  и  $G(\tau, t)$  непрерывны вместе со своими первыми производными на отрезке  $\tau \in [a, b]$  и в области  $S = \{(\tau, t) : a \leq \tau \leq b, a \leq t \leq \tau\}$  соответственно, причем  $G(\tau, \tau) \neq 0$  ( $\tau \in [a, b]$ ) и  $f(a) = 0$ , то существует единственное непрерывное решение  $p(\tau)$  уравнения (3.2.2). ■

**Следствие 1.** Если  $f(a) = 0$  и если функции  $f(\tau)$  и  $G(\tau, t)$  имеют непрерывные производные  $f'(\tau)$  и  $G'_t(\tau, t)$  на отрезке  $\tau \in [a, h] \subset [a, b]$ , внутри которого  $G(\tau, \tau) \neq 0$ , то уравнение (3.2.2) допускает на этом отрезке непрерывное решение и притом единственное. ■

**Замечание 1.** Вопрос о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра первого рода тесно связан с условиями, при которых оно приводится к уравнениям Вольтерра второго рода. ■

**Теорема 2. (Существование и единственность решения уравнения Вольтерра II рода).**

Если в уравнении Вольтерра II рода

$$p(\tau) - \lambda \int_a^{\tau} G(\tau, t) p(t) dt = f(\tau) \quad (2.2.3)$$

функции  $f(\tau)$  и  $G(\tau, t)$  непрерывны на отрезке  $\tau \in [a, b]$  и в области  $S = \{(\tau, t) : a \leq \tau \leq b, a \leq t \leq \tau\}$ , тогда для любого  $\lambda$  существует и притом единственное решение уравнения (3.2.3), это решение непрерывно и может быть получено методом последовательных приближений. ■

В уравнении (3.2.1)  $G(b, x_1, \tau - t)|_{t=\tau} = G(b, x_1, 0) \equiv 0, \forall \tau \Rightarrow \tau \in [a, b]$ . Таким образом нарушается условие существования и единственности решения уравнения (3.2.1). В этом случае уравнение (3.2.1) не корректно по Ж. Адамару [124].



Для того, чтобы получить корректную задачу (3.2.1) перейдем от интегрального уравнения Вольтерра I-го рода, к интегральному уравнению Вольтерра II-го рода. Это необходимо для того, чтобы ослабить условия существования и единственности решения уравнения (3.2.1):

$$p(\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau-t)p(t)dt = F(\tau), \quad (2.2.4)$$

где  $K(\tau) = \frac{G''_{\tau}(\tau)}{G'_{\tau}(0)}, F(\tau) = \frac{f''(\tau)}{G'_{\tau}(0)}$ .

Уравнение (3.2.4) удовлетворяет условиям теоремы 2, следовательно является корректным по Ж. Адамару [124], что позволяет получить корректное решение обратной задачи (3.2.1).

Для решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода (3.2.4) применим алгоритм метода последовательных приближений. Пусть  $p^{(0)}(\tau) = F(\tau)$  – нулевое приближение метода последовательных приближений. Обозначим  $m = 1, 2, 3, \dots$  – номер итерации метода последовательных приближений. Тогда на итерации с номером  $m$  решение уравнения (3.2.4) примет вид:

$$p^{(m)}(\tau) = F(\tau) - \int_0^{\tau} K(\tau-t)p^{(m-1)}(t)dt, \quad (2.2.5)$$

где  $m-1$  предыдущее приближение решения уравнения (3.2.4).

Отметим некоторые недостатки данного метода. Во-первых, для получения удовлетворительных результатов решения необходимо учитывать достаточно большое количество членов разложения в ряд Фурье, что усложняет вычисление интегралов в правой части уравнений (3.2.5). Кроме того, как показывают практические расчеты, для получения результатов с

достаточной степенью точности необходимо выполнить порядка  $100N$  итераций, где  $N$  – количество удержанных членов рядов разложений, что достаточно трудоёмко даже для вычислений на современных персональных компьютерах. Для того чтобы ускорить выполнение итерационного процесса в части вычислений интегралов свертки, используется быстрое преобразование Фурье.

Для этого, поставим в соответствие заданным искомым функциям их дискретные аналоги (выборки):

$$\begin{aligned} p(\tau) \leftrightarrow \mathbf{p} &= (p_k)_{M \times 1}, p_k = p(\tau_k), \tau_k = k\Delta t, \Delta t = \frac{T}{M}, k = \overline{0, M-1}, \\ F(\tau) \leftrightarrow \mathbf{F} &= (F_k)_{M \times 1}, F_k = F(\tau_k), \\ K(\tau) \leftrightarrow \mathbf{K} &= (K_k)_{M \times 1}, K_k = K(\tau_k), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где  $\mathbf{p}, \mathbf{F}, \mathbf{K}$  – векторы выборок значений соответствующих функций в моменты времени  $\tau_k$ ,  $T$  – конечный момент времени.

Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье над вектором  $W_k = W(\tau_k)$ , где  $W(\tau)$  – некоторая заданная функция на интервале  $\tau \in [0, T]$  определяется следующими формулами [64]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^F &= (W_k^F)_{M \times 1}, \\ W_k^F &= \sum_{m=0}^{M-1} W_m e^{-\frac{2\pi i}{M} km} = \sum_{m=0}^{M-1} W_m \left( \cos \frac{2\pi km}{M} - i \sin \frac{2\pi km}{M} \right), \\ W_k &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} W_m^F e^{\frac{2\pi i}{M} km} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} W_m^F \left( \cos \frac{2\pi km}{M} + i \sin \frac{2\pi km}{M} \right). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Отметим, что аналогично свойству преобразования Лапласа, свертка двух выборок в пространстве дискретных преобразований Фурье является вектором, элементы которого представляют собой произведение элементов изображений исходных выборок:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (w_k)_{M \times 1}, \mathbf{u} = (u_k)_{M \times 1}, \\
\mathbf{w} * \mathbf{u} &= \mathbf{v} = (v_k)_{M \times 1}, \\
v_k &= \sum_{m=0}^{2M-1} \tilde{w}_m \tilde{u}_{k-m}, \tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{0} = (0)_{(M-1) \times 1}, \\
\tilde{\mathbf{v}}^F &= \tilde{\mathbf{w}}^F \otimes \tilde{\mathbf{u}}^F.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

где знак « $\otimes$ » - обозначает поэлементное произведение векторов,  $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}}$  - векторы получаемые из исходных векторов  $\mathbf{w}, \mathbf{u}$  дополнением их нулями до размерности  $2M - 1$ .

Укажем способ вычисления интеграла свертки с помощью быстрого преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
K(\tau) * p(\tau) &\approx \Delta t \sum_{m=0}^{2M-1} \tilde{K}_{k-m} \tilde{p}_m = F_k, \quad k = \overline{1, M-1}, \\
\Delta t (\tilde{\mathbf{K}}^F \otimes \tilde{\mathbf{p}}^F) &= \tilde{\mathbf{F}}^F, \\
\tilde{\mathbf{F}} &= \Delta t (\tilde{\mathbf{K}}^F \otimes \tilde{\mathbf{p}}^F)^{F^{-1}},
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

где  $F^{-1}$  означает обратное дискретное преобразование Фурье по формуле (3.2.7).

Таким образом, алгоритм вычисления свертки двух функций  $K(\tau)$  и  $p(\tau)$  с помощью дискретного преобразования Фурье состоит из следующих шагов.

1. Определяем конечный момент времени  $T$ .
2. Задаем количество шагов по времени  $M$  и определяем шаг по времени  $\Delta t = \frac{T}{M}$ .
3. Функциям  $K(\tau)$  и  $p(\tau)$  ставим в соответствие дискретные выборки  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{p}$ .
4. Дополняем дискретные выборки нулями до размерности  $2M - 1$ . В результате получаем вектора  $\tilde{\mathbf{K}}$  и  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

5. Выполняем прямое дискретное преобразование Фурье над векторами  $\tilde{\mathbf{K}}$  и  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

6. Вычисляем поэлементное произведение  $\tilde{\mathbf{K}}^F \otimes \tilde{\mathbf{p}}^F$ .

7. Над полученным результатом выполняем обратное дискретное преобразование Фурье и умножение на величину шага  $\Delta t$ .

8. Из полученного вектора выбираем первые  $M$  элементов. В результате получаем вектор приближенных значений искомой свертки в моменты времени  $\tau_k$ ,  $k = \overline{0, M-1}$ .

Отметим, что к настоящему времени разработано множество алгоритмов быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье. Поэтому указанный способ вычисления свертки существенно сокращает время вычисления по сравнению с другими численными алгоритмами.

Указанный способ вычисления интеграла свертки используется в итерационном процессе (3.2.5) на каждой итерации.

Относительная погрешность вычислений на текущей итерации определяется по формуле:

$$\omega^{(m)} = \frac{\|\mathbf{p}^{(m)} - \mathbf{p}^{(m-1)}\|}{\|\mathbf{p}^{(m)}\|} < \eta \quad (2.2.10)$$

где  $\eta$  – заданная точность. Неравенство (3.2.10) определяет номер итерации на которой процесс останавливается.

Приведем примеры решения обратной ретроспективной задачи методом последовательных приближений совместно с быстрым преобразованием Фурье [64]. Для решения обратной задачи будем использовать перемещения, полученные в ходе решения прямой задачи (2.2.15)  $u(b, \tau)$ , а так же использованные при решении прямой задачи сосредоточенные силы (2.2.8) - (2.2.12). Заданная точность  $\eta = 0.001$ .

Применим данный метод для упругого стержня.

На рисунках 3.3 – 3.8 приведены график функции реальной сосредоточенной силы (2.2.8) - (2.2.12) и восстановленной силы, полученной при решении обратной задачи (3.2.5). Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, точка приложения сосредоточенной силы  $\xi = 0.5$ , точка установки датчика  $b = 1$ ,  $N = 20$ . При изменении параметра сосредоточенной силы (например  $\xi = 0.7$ ,  $b = 1$  нагрузка (2.2.10)) решение так же получается корректным (рисунок 3.8). При любом способе установки датчика решение также будет корректно (например  $\xi = 0.5$ , нагрузка (2.2.9))  $b = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $b = 0.9$  (рисунок 3.3) (результат восстановления нагрузки практически совпадает с реально действующей силой)

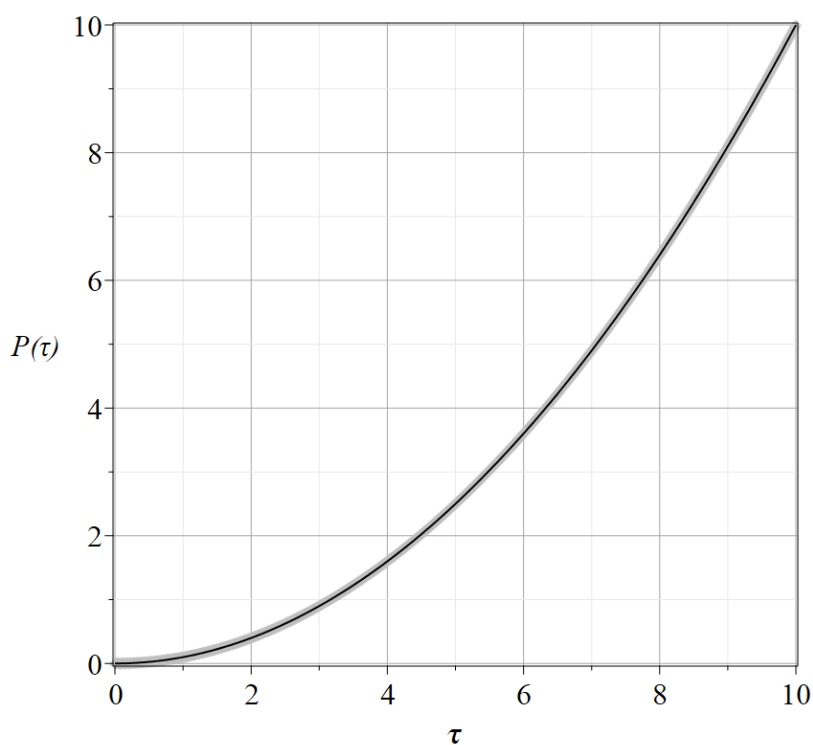


Рис. 3.3

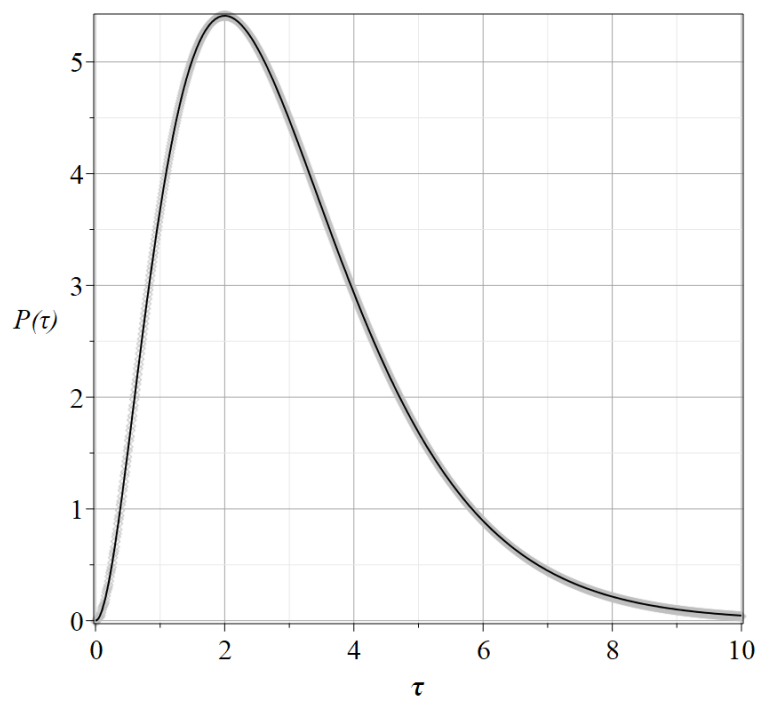


Рис. 3.4

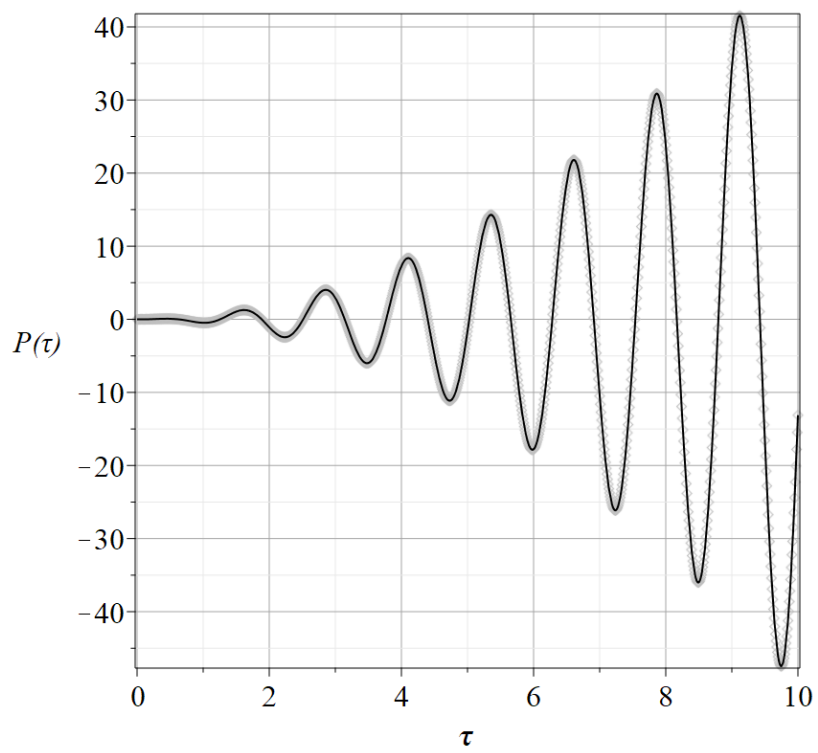


Рис. 3.5

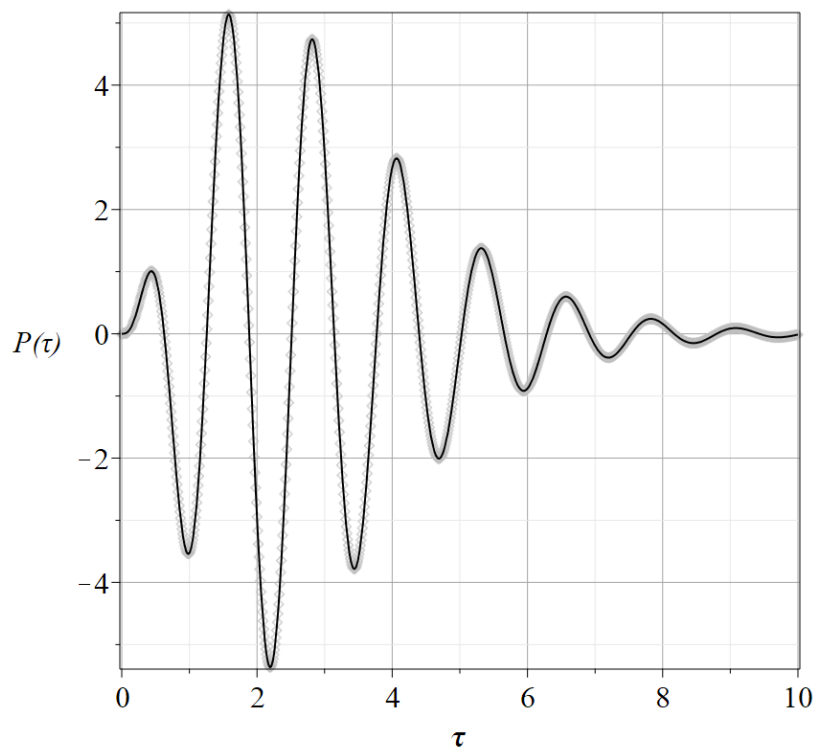


Рис. 3.6

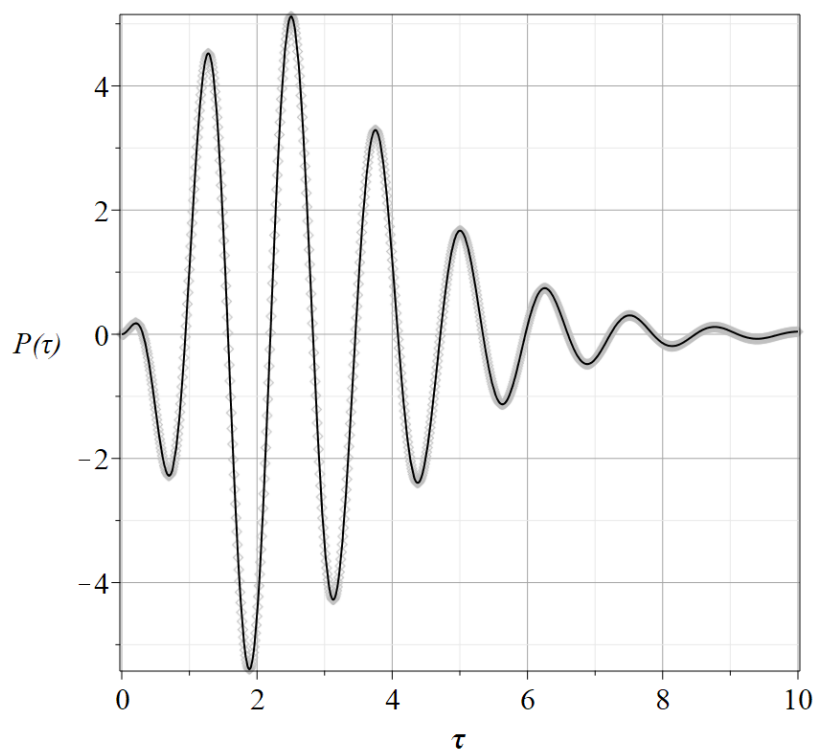


Рис. 3.7

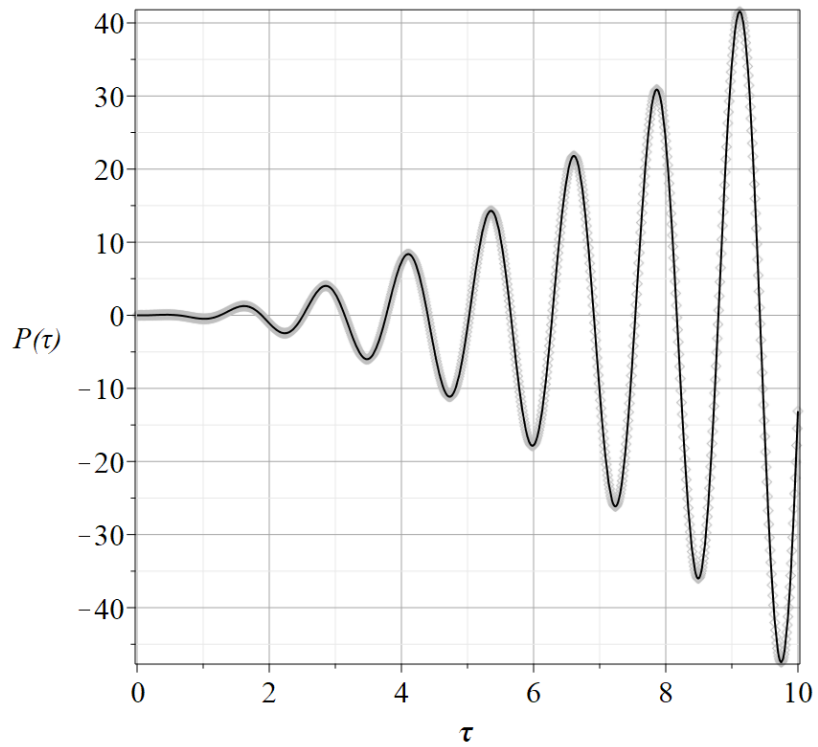


Рис. 3.8

Также стоит проверить устойчивость решения уравнения (3.2.5). Для этого к вектору перемещений добавим вектор случайных величин порядка  $\varepsilon = 0.01$ , и проверим решение, показанное на рисунках 3.3 – 3.8 (рисунки 3.9 – 3.13). Как видно из рисунков 3.9 – 3.13 решение устойчиво.

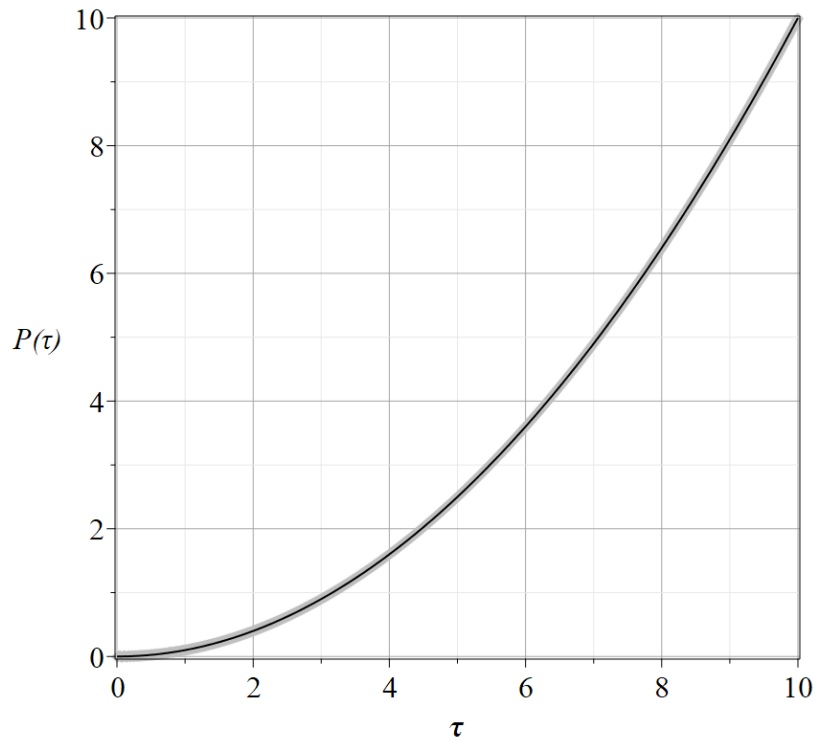




Рис. 3.9

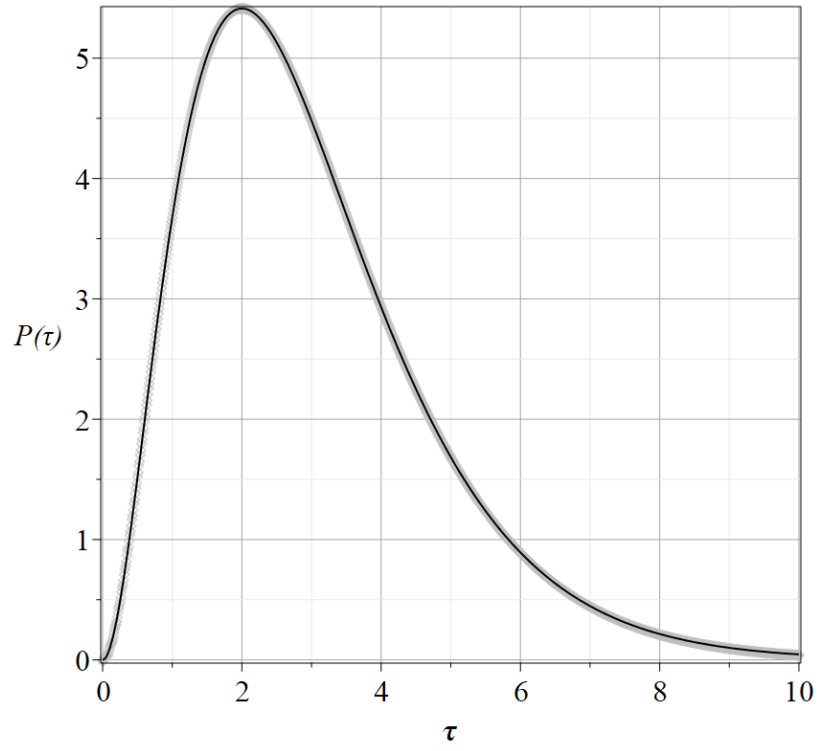


Рис. 3.10

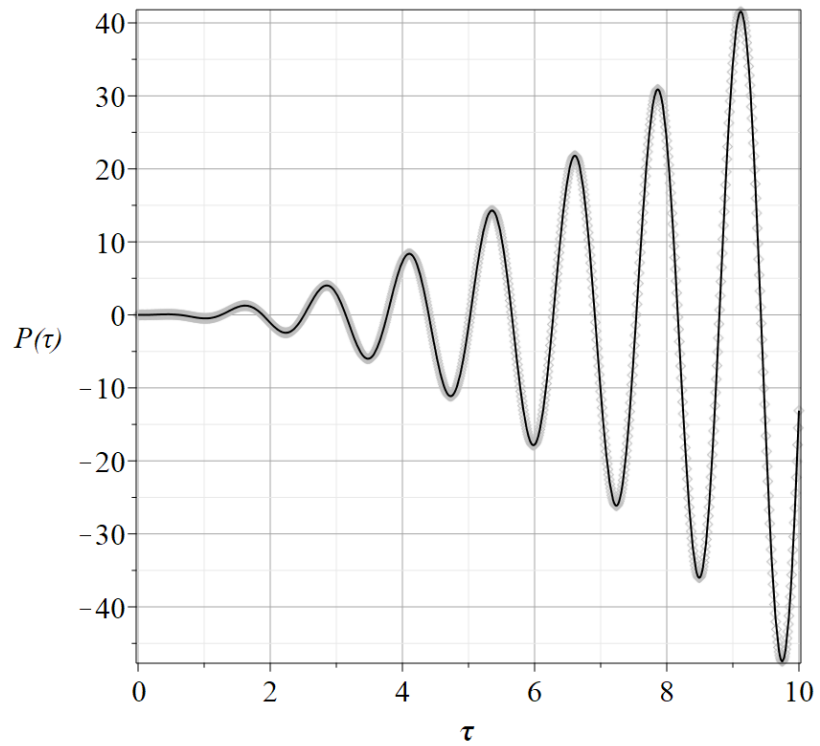


Рис. 3.11

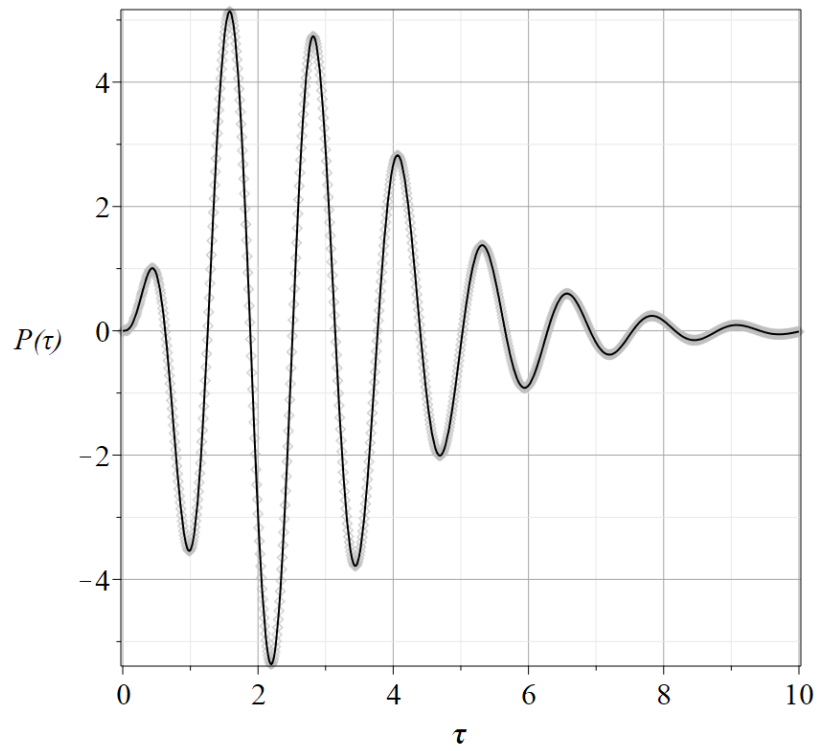


Рис. 3.12

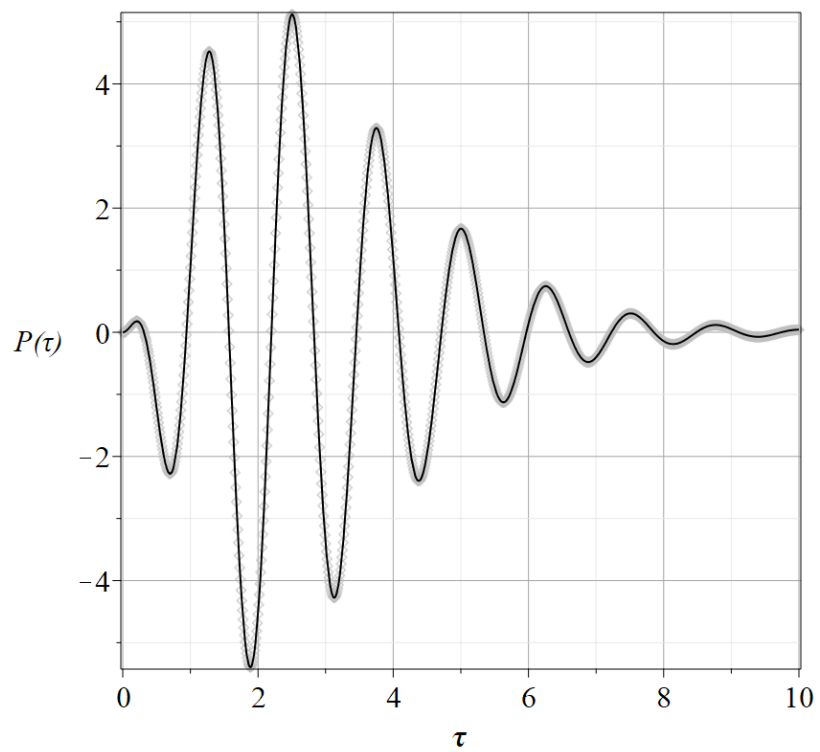


Рис. 3.13

Для решения обратной ретроспективной задачи для балки Тимошенко будем использовать прогибы, полученные в ходе решения прямой задачи

(2.2.25)  $w(b, \tau)$ , а так же использованные при решении прямой задачи сосредоточенные силы (2.2.13) - (2.2.14). Заданная точность  $\eta = 0.001$ .

На рисунках 3.14 – 3.15 приведены график функции реальной сосредоточенной силы (2.2.13) - (2.2.14) и восстановленной силы, полученной при решении обратной задачи (3.2.5). Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, точка приложения сосредоточенной силы  $\xi = 0.5$ , точка установки датчика  $b = 1$ ,  $N = 20$ . При изменении параметра сосредоточенной силы (например  $\xi = 0.7$ ,  $b = 0.9$  нагрузка (2.2.13)) решение так же получается корректным (рисунок 3.15). При любом способе установки датчика решение также будет корректно (например  $\xi = 0.5$ , нагрузка (2.2.14))  $b = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $b = 0.9$  (рисунок 3.14) (результат восстановления нагрузки практически совпадает с реально действующей силой)

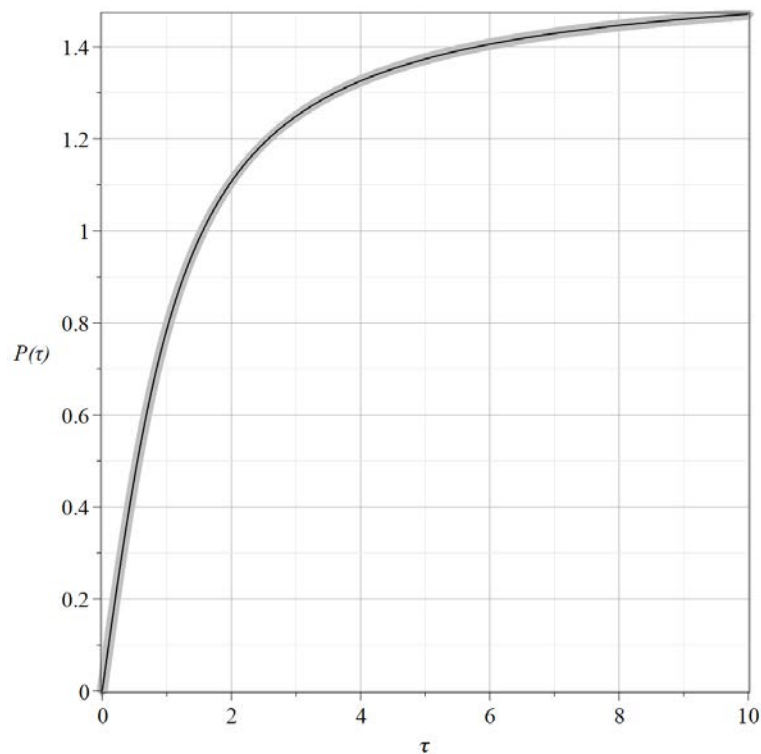


Рис. 3.14

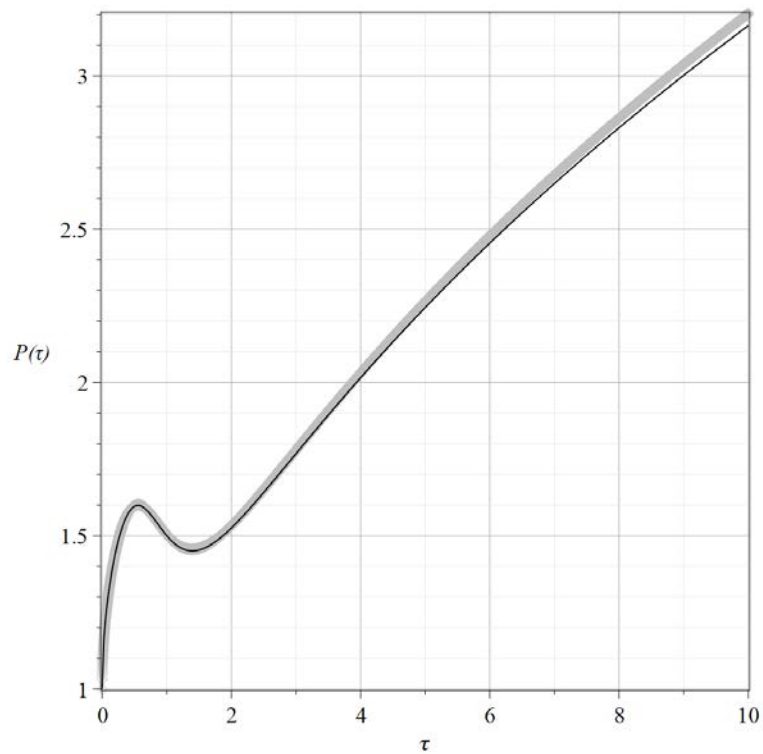


Рис. 3.15

Также стоит проверить устойчивость решения уравнения (3.2.5) для балки Тимошенко. Для этого к вектору перемещений добавим вектор случайных величин порядка  $\varepsilon = 0.01$ , и проверим решение, показанное на рисунках 3.14 – 3.15 (рисунки 3.16 – 3.17). Как видно из рисунков 3.16 – 3.17 решение устойчиво.

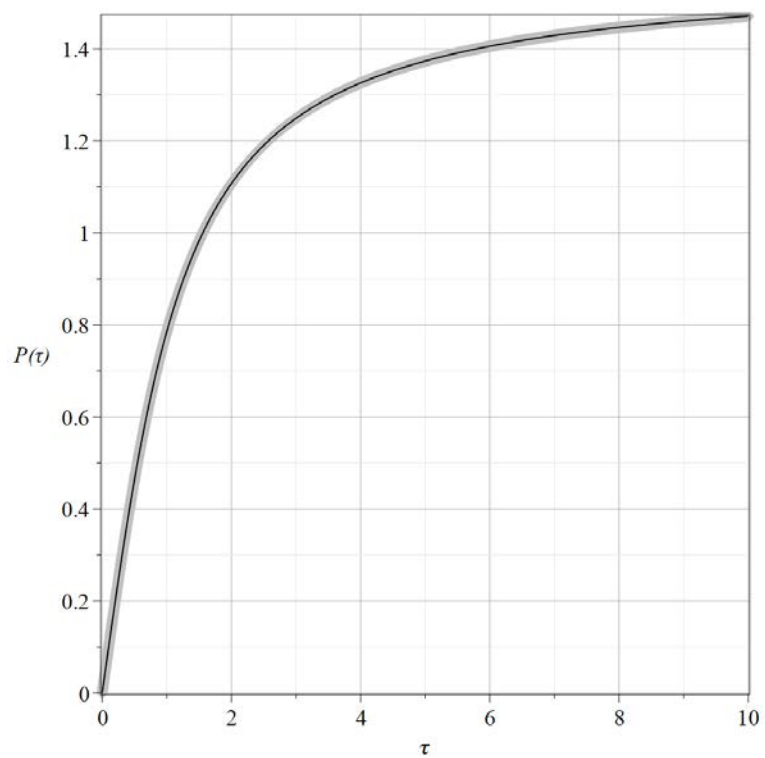


Рис. 3.16

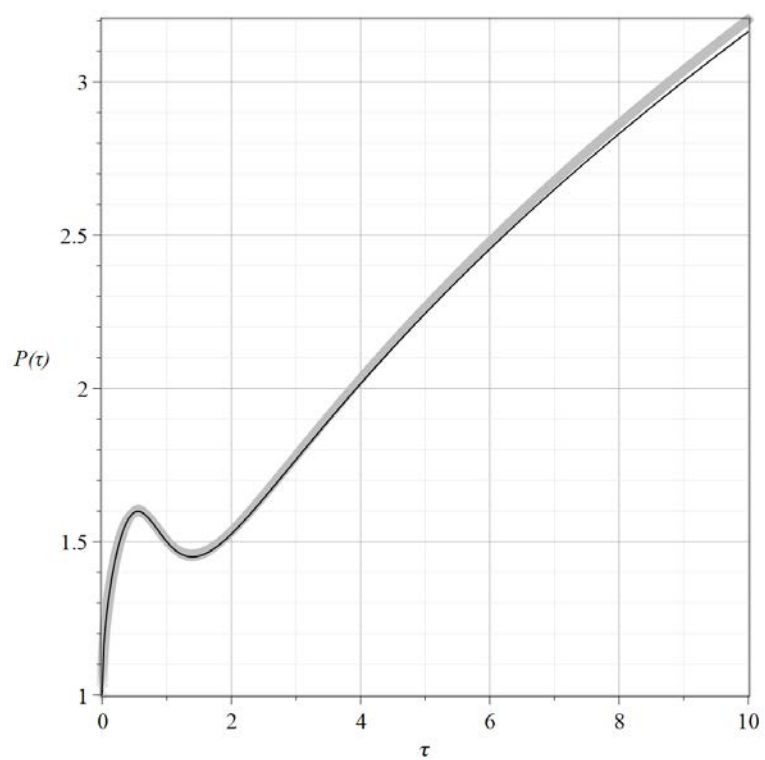


Рис. 3.17

## Обратная задача по идентификации распределенной силы для упругого стержня и балки Тимошенко

Так же как и для обратной ретроспективной задачи по идентификации сосредоточенной силы будем использовать те же обозначения перемещений, прогибов и функций влияния в ретроспективной задаче по определению распределенной силы. Для упругого стержня  $u$  – перемещения,  $G$  – функция влияния. При решении обратной ретроспективной задачи для балки Тимошенко вместо перемещений  $u$ , будем использовать  $w$  – прогиб для балки Тимошенко,  $G_w$  – функция влияния для балки Тимошенко.

Рассмотрим свертку функции влияния с распределённой нагрузкой

$$u(x, \tau) = \int_0^1 \int_0^\tau G(x, \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi. \quad (2.2.11)$$

В случае балки  $G(x, \xi, \tau) \rightarrow G_w(x, \xi, \tau)$ ,  $u(x, \tau) \rightarrow w(x, \tau)$ .

Возьмем вторую производную по времени от формулы (3.2.11)

$$\ddot{u}(x, \tau) = \int_0^1 \int_0^\tau \ddot{G}(x, \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi + \int_0^1 \dot{G}(x, \xi, 0) p(\xi, \tau) d\xi \quad (2.2.12)$$

Подставим разложения в ряд Фурье функции влияния (2.1.8) и распределенную нагрузку (2.2.27) для упругого стержня в уравнение (3.2.12). Аналогичную операцию можно проделать для балки Тимошенко. Возьмем разложения в ряд Фурье функции влияния (2.1.22) и распределенную нагрузку (2.2.27). По свойствам ортогональности тригонометрических функций, для упругого стержня получим:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\tau) \sin \lambda_n x, \\ I_n(\tau) &= -\lambda_n \int_0^\tau \sin \lambda_n (\tau - t) p_n(t) dt + p_n(\tau). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Для балки Тимошенко:

$$\ddot{w}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\tau) \sin \lambda_n x,$$

$$I_n(\tau) = -\int_0^{\tau} \left[ \alpha_n^2 A_{jn} \sin \alpha_n(\tau - t) + \beta_n^2 B_{jn} \sin \beta_n(\tau - t) \right] p_n(t) dt + \quad (2.2.14)$$

$$+ p_n(\tau) (\alpha_n A_{jn} + \beta_n B_{jn}).$$

Для обратной задачи снимем показания ускорений с датчиков:

$$\ddot{u}(b_k, \tau) \approx \sum_{n=1}^N I_n(\tau) \sin \lambda_n b_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.2.15)$$

или

$$\ddot{U}_k(\tau) = \sum_{n=1}^N I_n(\tau) \sin \lambda_n b_k, \quad (2.2.16)$$

где  $\ddot{U}_k(\tau)$  ( $k = \overline{1, N}$ ) – заданные функции,  $p_n(\tau)$  ( $n = \overline{1, N}$ ) – искомые функции.

Таким образом решение обратной задачи сводится к решению системы операторных уравнений (3.2.15).

Обратная задача состоит в определении коэффициентов  $p_n(\tau)$  ряда (2.2.16).

Допустим, на некотором отрезке стержня установлено  $N$  датчиков, которые измеряют значения ускорений стержня  $\ddot{U}_1(\tau) = \ddot{u}(b_1, \tau), \ddot{U}_2(\tau) = \ddot{u}(b_2, \tau), \dots, \ddot{U}_N(\tau) = \ddot{u}(b_N, \tau)$  в зависимости от времени  $\tau$

(рисунок 1.4), где  $b_k = \frac{b_1 + b_N}{2} + \frac{b_1 - b_N}{N} \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$ ,  $b_1$  – координата первого датчика на стержне,  $b_N$  – координата последнего датчика.

Ограничиваясь первыми  $N$  членами, из (2.2.17) получаем  $N$  интегральных представлений (3.2.16), которые составляют систему алгебраических уравнений относительно интегральных операторов Вольтерра  $I_n(\tau)$ ,  $n = \overline{1, N}$ .

Систему (3.2.16) запишем в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \ddot{\mathbf{U}}, \mathbf{A} = (A_{kn})_{N \times N}, \mathbf{I} = (I_n)_{N \times 1}, \ddot{\mathbf{U}} = (\ddot{U}_k)_{N \times 1}, \quad (2.2.17)$$

где  $A_{kn} = \sin \lambda_n b_k$ ,  $I_n = I_n(\tau)$ ,  $\ddot{U}_k = \ddot{U}_k(\tau)$ .

Решая эту систему, получаем вектор  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (2.2.18)$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \ddot{\mathbf{U}} = [V_n(\tau)]_{N \times 1}$ .

Векторно-матричное равенство (3.2.18) эквивалентно  $N$  независимым интегральным уравнениям Вольтера II-го рода относительно искомым коэффициентов ряда (2.2.16):

$$I_n(\tau) = V_n(\tau), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.2.19)$$

Для решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода (3.2.19) применим как в задаче (3.2.5) алгоритм метода последовательных приближений в сочетании с быстрым преобразованием Фурье (3.2.9). Подробнее о данном методе описано на страницах 91-92.

На рисунках 3.18 – 3.22 приведены графики функции реальной распределенной силы (2.2.18) - (2.2.21) и восстановленной силы, полученной при решении обратной задачи (3.2.19) для упругого стержня. Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, начальная точка установки датчика  $b = 0.5$ , конечная точка установки датчика  $b_N = 1$ ,  $N = 5$ . При любом способе установки датчика решение будет корректно (например нагрузка (2.2.18))  $b_1 = 0.1$ ,  $b_N = 0.5$ , (рисунок 3.22) (графические результаты практически совпадают).



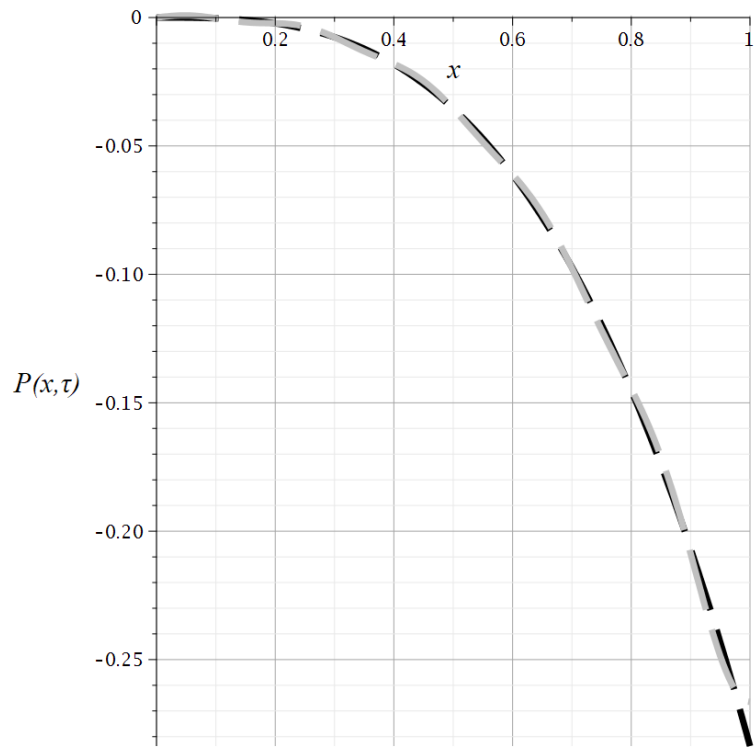


Рис. 3.18

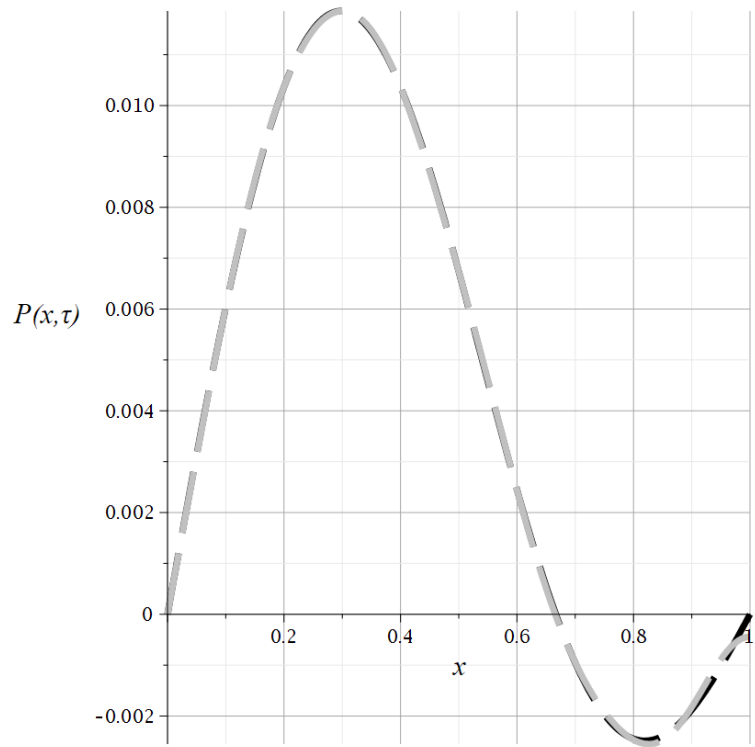


Рис. 3.19

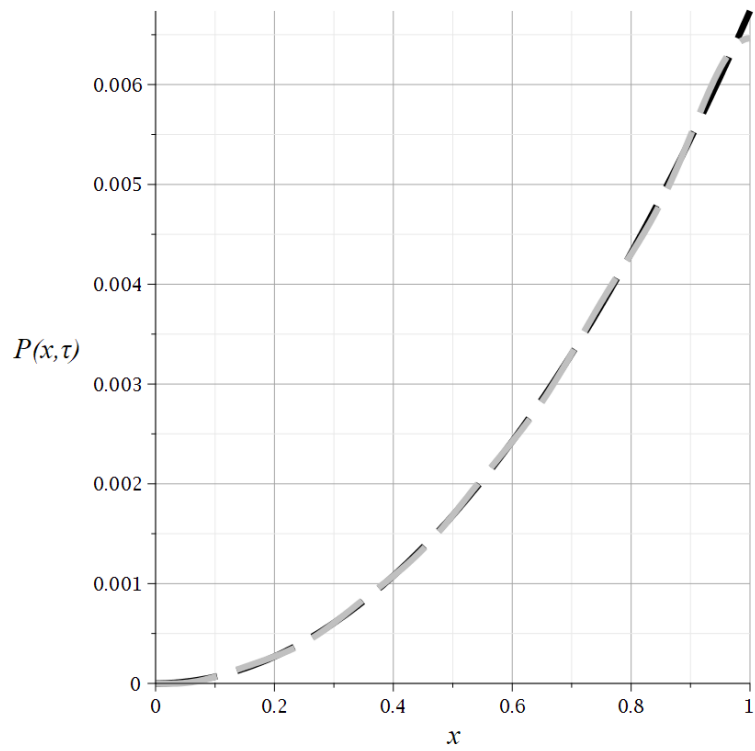


Рис. 3.20

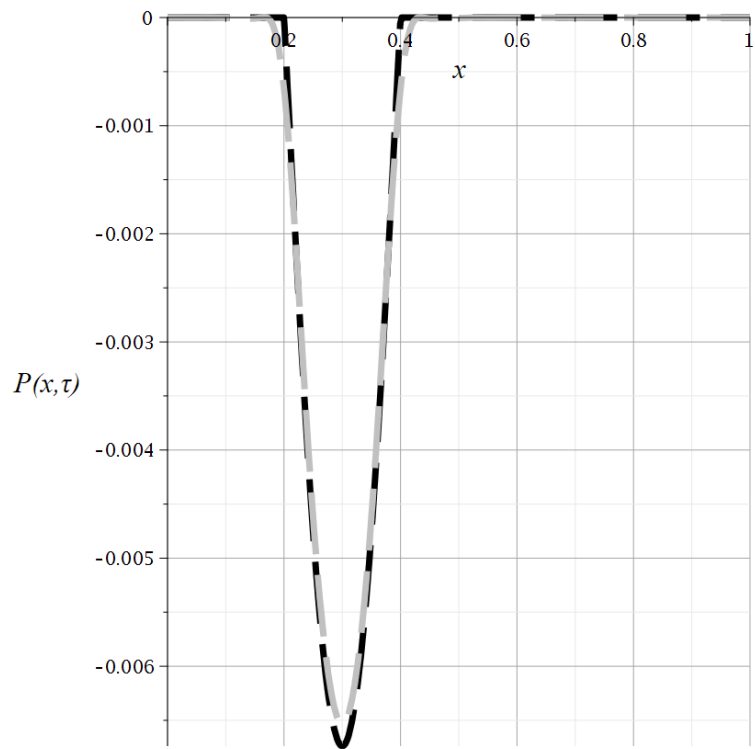


Рис. 3.21

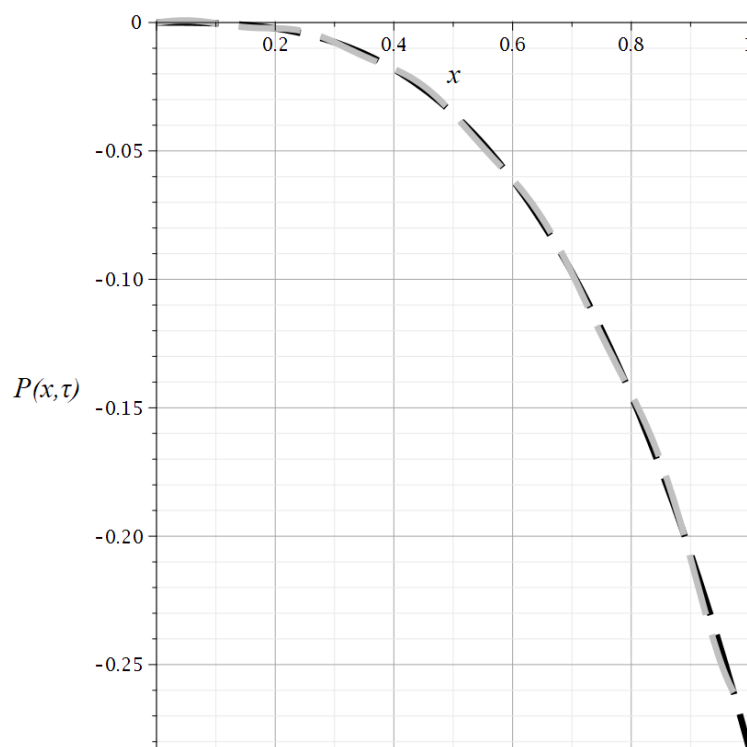


Рис. 3.22

Также стоит проверить устойчивость решения (3.2.19) для упругого стержня. Для этого к вектору ускорений добавим вектор случайных величин порядка  $\varepsilon = 0.01$ , и проверим решение, показанное на рисунках 3.23 – 3.26 (рисунки 3.18 – 3.22). Как видно из рисунков 3.23 – 3.26 решение устойчиво.

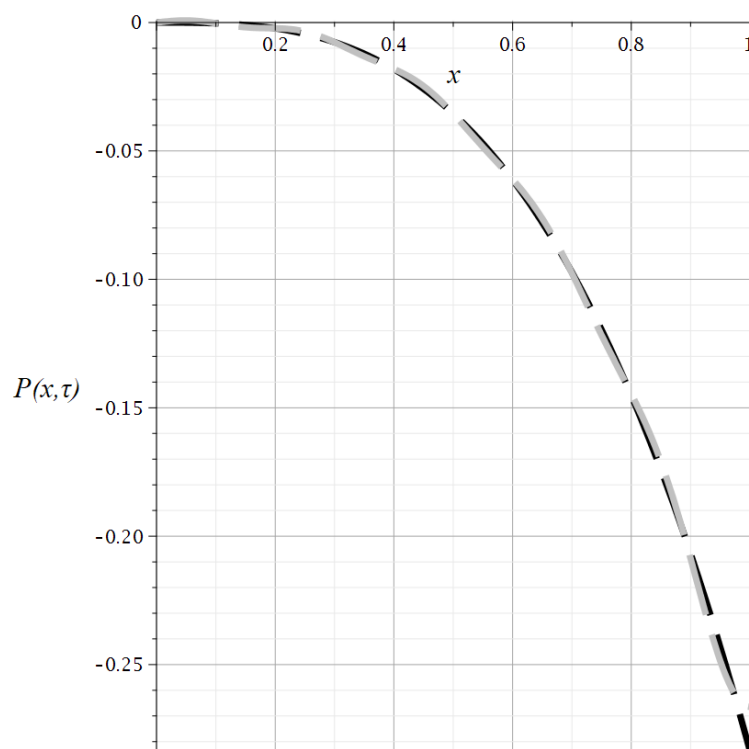


Рис. 3.23

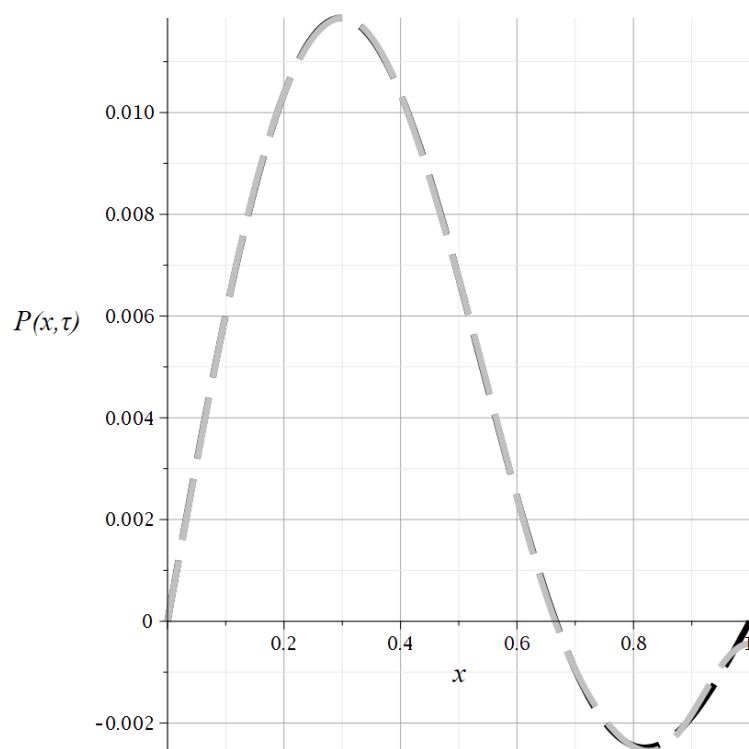


Рис. 3.24

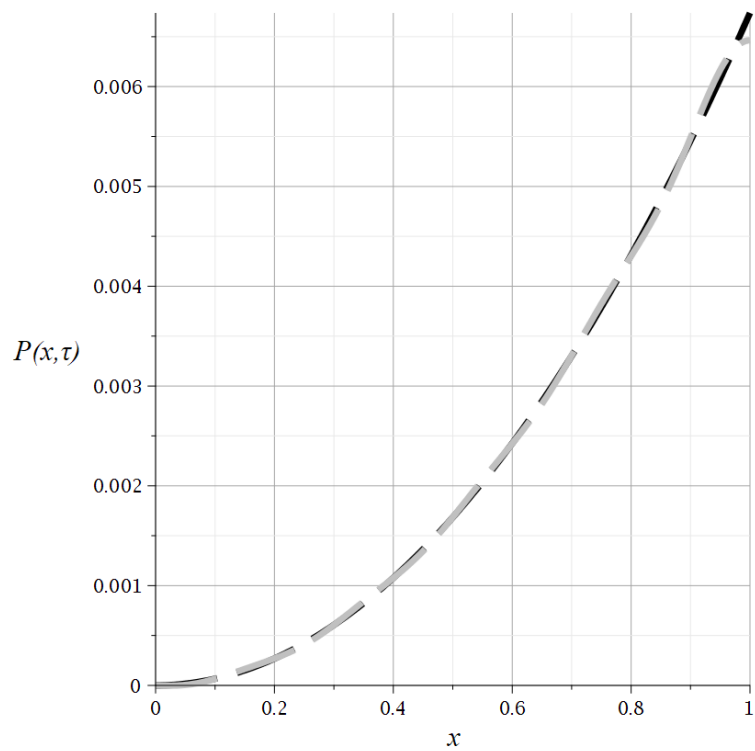


Рис. 3.25

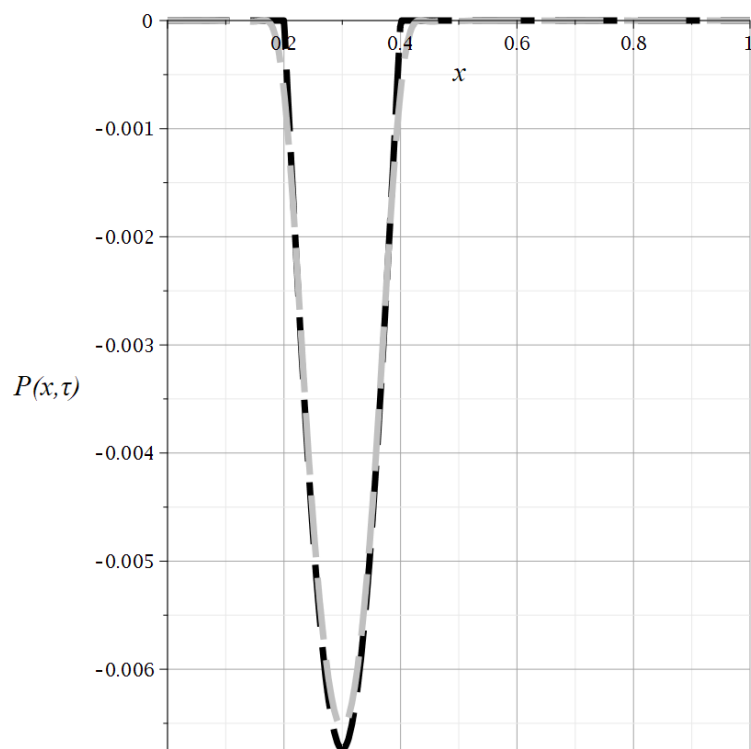


Рис. 3.26

Все результаты также справедливы и для балки Тимошенко. На рисунках 3.27 – 3.28 приведены графики функции реальной распределенной силы

(2.2.22) - (2.2.23) и восстановленной силы, полученной при решении обратной задачи (3.2.19) для балки Тимошенко. Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, начальная точка установки датчика  $b = 0.5$ , конечная точка установки датчика  $b_N = 1$ ,  $N = 5$ . При любом способе установки датчика решение будет корректно (например нагрузка (2.2.22))  $b_1 = 0.1$ ,  $b_N = 0.5$ , (рисунок 3.27) (графические результаты практически совпадают).

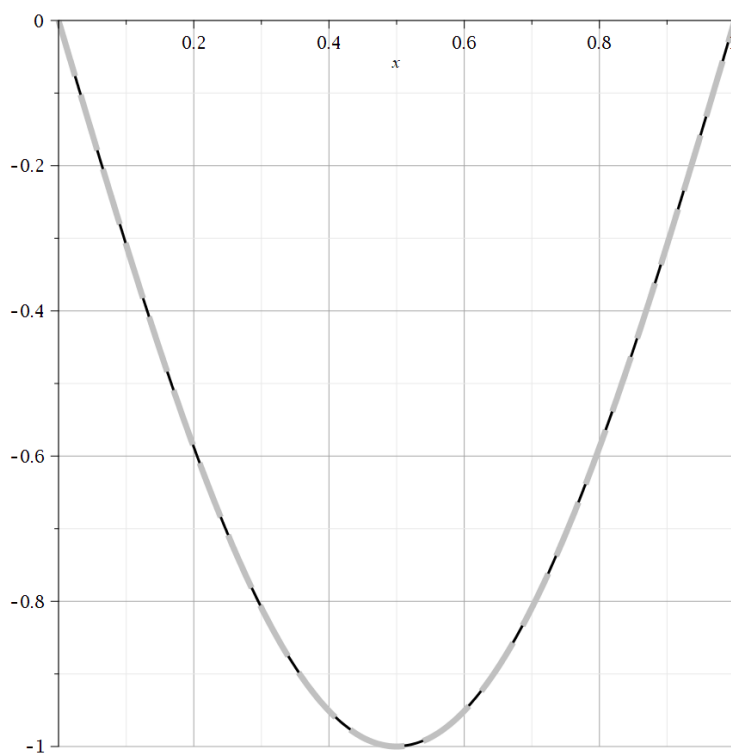


Рис. 3.27

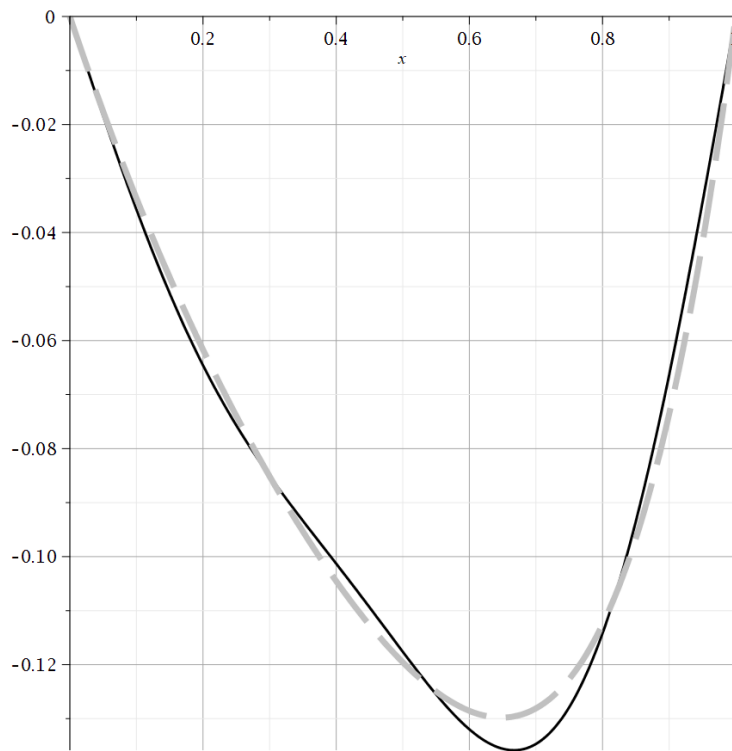


Рис. 3.28

Также стоит проверить устойчивость решения (3.2.19) для балки Тимошенко. Для этого к вектору ускорений добавим вектор случайных величин порядка  $\varepsilon = 0.01$ , и проверим решение, показанное на рисунках 3.27 – 3.28 (рисунки 3.29 – 3.30). Как видно из рисунков 3.29 – 3.30 решение устойчиво.

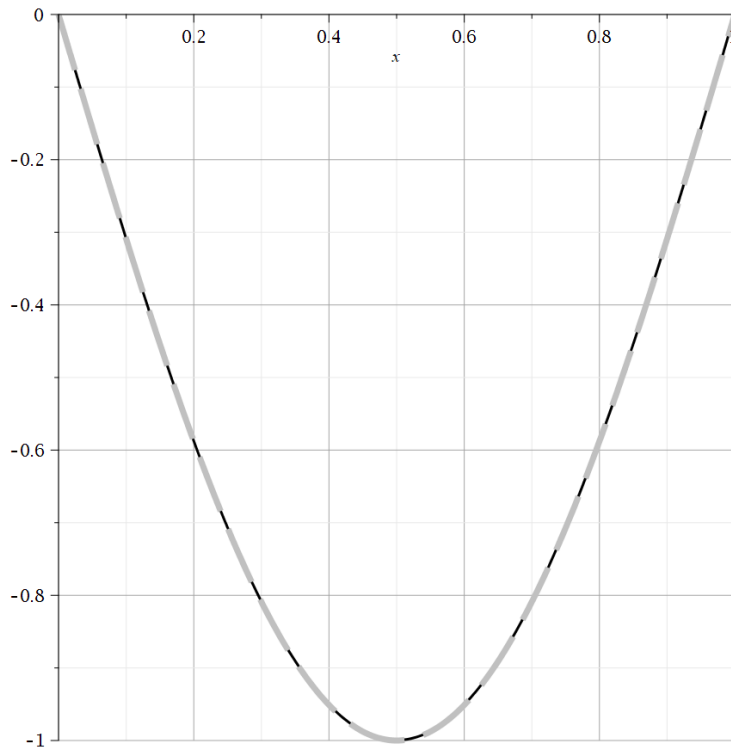


Рис. 3.29

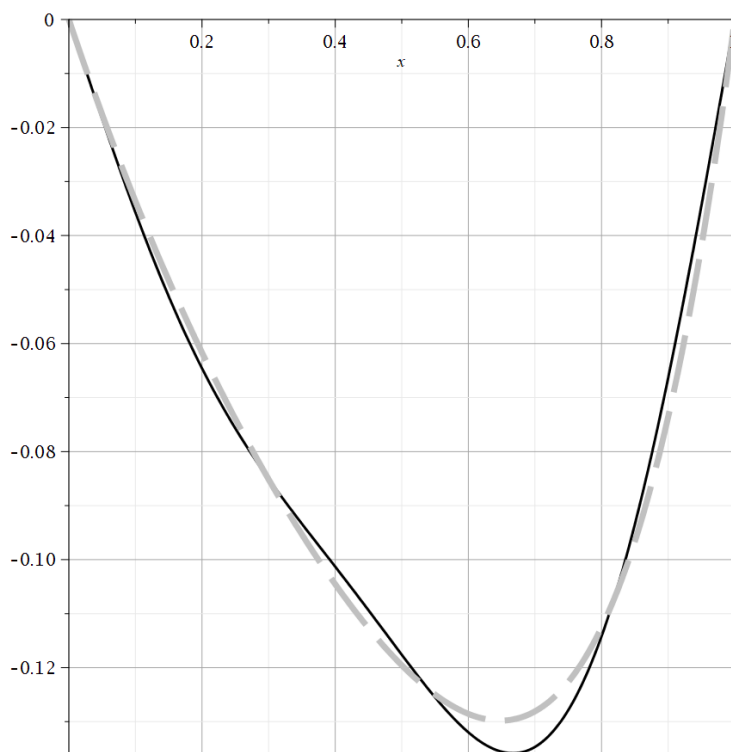


Рис. 3.30



### § 3.3. Анализ результатов, выводы, рекомендации

Как видно из данной работы, нестационарная обратная задача по идентификации дефекта в упругом стержне решается корректно без использования методов регуляризации. Это связано с тем, что разрешающие уравнения обратной задачи непосредственно следуют из решения прямой задачи, которое явным образом содержит искомые величины в качестве параметров. Нестационарный характер задачи позволил зафиксировать три момента времени и составить систему нелинейных уравнений относительно искомых параметров дефекта. Исследовано решение обратной задачи при наличии зашумленности измерений. Оно показывает минимальное влияние шума на решение обратной задачи, что говорит об устойчивости предложенного метода.

Так же в диссертации предложена методика и приведен алгоритм решения обратной нестационарной ретроспективной задачи для упругого стержня и балки Тимошенко. Построена нестационарная функция влияния для перемещений стержня и прогибов балки. Для решения системы разрешающих интегральных уравнений разработан и реализован на ЭВМ численно-аналитический алгоритм, основанный на методе последовательных приближений в сочетании с быстрым преобразованием Фурье [64]. Приведены примеры расчетов.

## Заключение

В рамках работы над диссертацией разработаны постановки, методы и подходы к решению новых, актуальных в прикладном и теоретическом отношении, нестационарных обратных задач для стержней.

Основные результаты диссертационной работы.

1. Построены функции влияния и решены прямые нестационарные задачи для стержней и балок Тимошенко, в том числе для стержня ступенчатого поперечного сечения.

2. Получены решения нестационарных геометрических обратных задач для упругого стержня, в том числе задач по определению наличия и расположения дефектов, а также идентификации их типов, размеров и степени поврежденности.

3. Построены решения нестационарных ретроспективных обратных задач по восстановлению нагрузки, действующей на стержень. Для решения поставленных задач использован единый подход, основанный на методе функций Грина (функций влияния). При этом найдены аналитические выражения для необходимых функций влияния, построены разрешающие интегральные уравнения, реализованы численные методы их решения. По результатам диссертации опубликовано достаточное количество научных работ, отражающих основное содержание проведенных исследований.

Предлагаемые постановки и методы решений нестационарных обратных задач, описанных в диссертации могут послужить основой создания комплексов мониторинга конструкций реального времени. Они позволят непосредственно во время эксплуатации следить и вовремя предотвращать возникновение и развитие повреждений, отслеживать различные структурные превращения, восстанавливать пространственно-временные законы воздействующих на конструкцию внешних нагрузок.

## Список литературы

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука. 1978. 351 с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1988. 288 с.
3. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. 1978. 118 с.
4. Антоненко О.Ф., Резницкая К.Г. Метод Ньютона-Канторовича в обратной динамической задаче сейсмологии // Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1978. С. 18-25.
5. Бабайцев А. В., Вахтерова Я. А., Рабинский Л. Н., Федотенков Г. В. / Обратная задача о восстановлении нестационарной нагрузки для упругого стержня по экспериментальным данным // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРП", 2021. – С. 12-13.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. — 4-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2004. - 591 с.
7. Бабайцев А.В., Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021662543 Российская Федерация. Программа для идентификации нагрузки по перемещению: № 2021661352 : заявл. 16.07.2021: опубл. 30.07.2021; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт».
8. Баев А.В. О решении одной обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25. № 1. С. 140-146.

9. Бакушинский А.Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17. № 6. С. 1350-1362.
10. Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т. О решении вариационных неравенств // ДАН СССР. 1974. Т. 219. № 5. С. 1038-1041.
11. Бакушинский А.В., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ. 1989. 197 с.
12. Бамберже А., Шван Д., Лэли Б. Решение обратной задачи сейсмологии на основе теории оптимального управления // Вычислительные методы в прикладной математике. Новосибирск: Наука. 1982. С. 108-118.
13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков. Г. М. "Численные Методы" — 6-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.
14. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент—Клэр Ч.(мл.). Некоторые обратные задачи теплопроводности. М.: Мир. 1989. 312 с.
15. Березанский Ю.М. К теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. - Тр. Моск. мат. о-ва, 1958, т. 7, с. 3-51.
16. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. - 798с.
17. Богачев И. В., Ватульян А. О., Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов, Владикавказ. матем. журн., 14:3 (2012), 31–44
18. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д., Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко, Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17. – № 4. – С. 419-430. – DOI 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430. – EDN ZXJPMZ.
19. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука. 1983. 205 с.

20. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. Тарту: Издательство Тартусского университета. 1976. 161 с.
21. Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Издательство Тартусского университета. 1982. 107 с.
22. Вайникко Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач // Автоматика и телемеханика. 1980. № 3. С. 84-92.
23. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процессы в некорректных задачах. М.: Наука. 1986. 178 с.
24. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002. 824 с.
25. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука. 1993. 262 с.
26. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М: Физматлит, 2007. 223 с
27. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 19:4 (2019), 409–423
28. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов, Владикавказ. матем. журн., 24:2 (2022), 75–84
29. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 22:2 (2022), 180–195
30. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Интегральные уравнения Вольтерра в обратных задачах механики стержней // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII научно-практической Международной конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороги

- (Гомель, 24–25 ноября 2022 г.). — Т. 2. — Издательство Белорусского государственного университета транспорта Гомель, 2022. — С. 172–174.
31. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная ретроспективная задача для балки Бернулли – Эйлера // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета Москва, 2022. — С. 169–170.
32. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. / Нестационарные обратные задачи для балки Тимошенко и упругого стержня // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 16–20 мая 2022 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРП", 2021. – С. 25-26.
33. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по идентификации закона изменения площади поперечного сечения для упругого стержня конечной длины // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос. (3 – 12 сентября 2021 г., Сочи, Буревестник МГУ) / Под ред. А. А. Афанасьев, О. О. Иванов, М. С. Макарова, А. М. Чайка. — Издательство Московского университета Москва, 2021. — С. 39–39.
34. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по идентификации нагрузки, Воздействующей на балку Бернулли конечной длины // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. — Т. 2. — БелГУТ Гомель, 2021. — С. 125–125.
35. Вахтерова Я. А., Макаревский Д. И., Федотенков Г. В. / Обратная нестационарная задача об определении закона изменения площади поперечного сечения упругого стержня // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред :

- Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРП", 2021. – С. 26-28.
36. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В., Серпичева Е. В. / Обратная нестационарная коэффициентная задача для упругого стержня / // Космические системы, Москва, 27 апреля 2021 года. – Москва: Издательство "Перо", 2021. – С. 30-31.
37. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по идентификации дефекта в упругом стержне конечной длины // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.) : в 2 т. — Т. 2. — Издательство Южного федерального университета Ростов-на-Дону – Таганрог, 2020. — С. 35–35.
38. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В., Старовойтов Э. И. Реконструкция пространственного распределения нестационарной нагрузки для упругого стержня конечной длины // Материалы XXVI международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова. — Т. 2. — ООО ТРП Москва, 2020. — С. 30–31.
39. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача о идентификации дефектов в упругом стержне // Материалы XXV Международного симпозиума Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. — Т. 2. — ООО ТРП Москва, 2019. — С. 44–46.
40. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. — Т. 3. — РИЦ БашГУ Уфа, 2019. — С. 878–880.

41. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по идентификации нагрузки воздействующей на балку Тимошенко // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. — Т. 1. — ООО "ТР-принт" Москва, 2018. — С. 61–62.
42. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная задача по идентификации нестационарной нагрузки для модели балки Тимошенко, применяемая в строительной механике // I Междунар. научно-практич. конф. студ. и маг. "Бетон и железобетон в современном мире". — Бел-ГУТ Гомель, 2018. — С. 117–118.
43. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В., Уляшина А. Н. Обратная коэффициентная нестационарная задача для упругого стержня // Тезисы докладов VII Международного научного семинара Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. — ООО ТР-Принт Москва, 2018. — С. 25–26.
44. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача о восстановлении пространственно-временного закона распределения нагрузки, воздействующей на балку Тимошенко // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ Научная конференция Секция механики 16-25 апреля 2018 года Тезисы докладов. — Секция механики. 16-25 апреля 2018. — Москва: Москва, 2018. — С. 46–46.
45. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача о реконструкции нагрузки для модели балки Тимошенко // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, Буревестник МГУ, 4-14 сентября 2018) Тезисы докладов. — Издательство Московского университета Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2018. — С. 46–46.
46. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по восстановлению нагрузки воздействующей на балку Тимошенко //



- Гагаринские чтения - 2018 Сборник тезисов докладов XLIV Международной молодёжной научной конференции. 2018. — Т. 2. — Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 2018. — С. 358–358.
47. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Идентификация нестационарной нагрузки для балки Тимошенко конечной длины // Тезисы докладов конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения, Санкт-Петербург, 11-14 декабря. — Санкт-Петербург, 2017. — С. 110–110.
48. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Идентификация нестационарной нагрузки для балки типа Тимошенко конечной длины // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) 1479 с. — 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 2017. — С. 53–53.
49. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача об идентификации дефектов в балке Тимошенко // 16-я Международная конференция АВИАЦИЯ И КОСМОНАВТИКА - 2017. — Москва: Москва, 2017. — С. 371–372.
50. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача об идентификации дефектов в упругом стержне // Проблемы безопасности на транспорте: матер. VIII Междунар. науч.-практ. конф. — Т. 2. — БелГУТ Гомель, 2017. — С. 173–174.
51. Вахтерова Я. А., Серпичева Е. В., Федотенков Г. В. Обратная задача идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко конечной длины // Материалы XXIII международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. — Т. 2. — Москва, 2017. — С. 18–20.

52. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная задача о восстановлении нестационарной нагрузки, действующей на балку Тимошенко // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ Научная конференция Секция механики 17–26 апреля 2017 года Тезисы докладов. — Секция механики. 17-26 апреля 2017. — Москва: Москва, 2017. — С. 47–48.
53. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для модели балки типа Тимошенко // Всероссийская конференция молодых-ученых механиков, 5 - 15 сентября 2017 г., Сочи, "Буревестник" МГУ, Тезисы докладов / Под ред. А. И. Агеев, А. А. Афанасьев, М. С. Макарова. — ISBN 978-5-19-011217-7. — Москва: Москва, 2017. — С. 35–35.
54. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов Всероссийской научной конференции. — ИПРИМ РАН Москва, 2017. — С. 275–276.
55. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная коэффициентная задача для упругого стержня // VI Международный научный семинар "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы", 8 – 10 ноября 2017 г., Москва. Тезисы докладов. — ООО "ТР-принт" Москва, 2017. — С. 30–31.
56. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Реконструкция пространственного распределения нестационарной нагрузки для балки Тимошенко конечной длины // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18-22 сентября 2017 г., Россия). — Т. 1. — СамГТУ Самара, 2017. — С. 114–116.
57. Вахтерова Я. А., Серпичева Е. В., Федотенков Г. В. Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко //

- Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2017. — № 4. — С. 82–92.
58. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука. 1986. 273 с.
59. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматлит, 1959. — 470 с.
60. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров: справочник. Киев, 1971. 328 с.
61. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1984. 112 с.
62. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
63. Горюнов А. А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ. 1989. 117 с.
64. Э. Гурса "Курс математического анализа", Том 3, Часть II, 1934
65. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ. 1994. 208 с.
66. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288.
67. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.
68. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. Фрунзе: Илим. 1977. 347 с.
69. Искендеров А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Известия АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1978. № 2. С. 80-85.
70. Искендеров А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 5. С. 890-898.
71. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1992. — 208 с.

- 72.Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука. 1988. 167 с.
- 73.Коздоба Л. А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка. 1982. 359 с.
- 74.Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М., 1983 г. 192 с.
- 75.Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука. 1987. 319 с.
- 76.Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука. 1988. 332 с.
- 77.Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР. 1962. 92 с.
- 78.Лаврентьев М.М., Романов В,Г, О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений. - Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 6, с. 1279-1281.;
- 79.Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.- 284с.
- 80.Латтес Р., Лионе Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970. 336 с.
- 81.Левитан Б.М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. М.: Физматлит, 1962. -- 324с.
- 82.Левитан Б.Н. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984. 319 с.
- 83.Лионе Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 1972. 414 с.
- 84.Лисковец О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника. 1981. 343 с.
- 85.Маркова Е.В., Численные методы решения неклассических линейных уравнений Вольтерра I рода и их приложения. Иркутск, 1999. 100 с.

- 86.Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. - 332с.
- 87.Менихес Л.Д. К теории регуляризации интегральных уравнений // Известия Уральского государственного университета. 2008. №58. (Серия: Математика. Механика. Информатика. Выпуск 11.). С. 138-154.
- 88.Менихес Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Математические заметки. 2007. Т. 82. № 2. С. 242-247.
- 89.Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. М.; Ижевск, 2004. 368 с.
- 90.Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: Издательство МГУ. 1987. 217 с.
- 91.Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука. 1987. 239 с.
- 92.Мюнтц Г.М. Интегральные уравнения. Ч. 1: Линейные уравнения Вольтерра. Москва: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1934. 330 с.
- 93.Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наукова думка, 1973. - 182с.
- 94.Погорелое А.Г. Обратные задачи нестационарной химической кинетики. М.: Наука. 1988. 392 с.
- 95.Поляк Б. Т. "Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике" - Труды ИСА РАН 2006. Т. 28
- 96.Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. — М.: Наука, 1986.-328 с.
- 97.Прилепко А.И. Внутренние обратные задачи теории потенциала // ДАН СССР. 1968. Т. 182. № 3. С. 503-505.
- 98.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988.-712 с.

99. Романов Б.Г. Обратные задачи и интегральная геометрия. -Б кн.: Сборник трудов Всесоюзного симпозиума по обратным задачам. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1971, с. 53-63.;
100. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972. - 164с.
101. Слепьян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. — Л.: Судостроение, 1980. — 344 с.
102. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49-52.
103. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.
104. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 4. С. 195-198.
105. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 288 с.
106. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М., 1987. 160 с.
107. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., Численные методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1990, р. 232.
108. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит. 1995. 312 с.
109. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. - В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники). М., ВИНТИ, 1974, т. 3, с. 93-180.
110. Федотенков Г. В., Вахтерова Я. А. Обратная нестационарная задача по идентификации нагрузки для балки Тимошенко конечной длины // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы X Международной научно-практической конференции (Гомель, 26–27

- ноября 2020 г.). Часть 1. — Т. 1. — Изд-во БелГУТ Гомель, Белорусский государственный университет транспорта, 2020. — С. 134–135.
111. Федотенков Г. В., Вахтерова Я. А. Обратная нестационарная задача по идентификации нестационарной нагрузки для упругого стержня конечной длины // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. — Издательство Московского университета, 2020. — С. 194–194.
112. Федотенков Г. В., Вахтерова Я. А. Реконструкция нестационарной погонной нагрузки для упругого стержня конечной длины // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : Сборник трудов 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова, Москва, 17–19 ноября 2020 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Сам Полиграфист", 2020. – С. 433-441. – DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2020.433\_441.66.
113. Федотенков Г. В., Вахтерова Я. А. Обратные нестационарные геометрические задачи для упругого стержня // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ Научная конференция Секция механики 15–25 апреля 2019 года Тезисы докладов. — ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Москва, 2019. — С. 202–203.
114. Хей Дж. Введение в методы байесовского статистического вывода. — М.: Финансы и статистика, 1987. — 336 с.
115. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. Inverse Problems, 21(2):R1–R50, 2005.
116. Browder F.E. Fixed point Theorem for non compact mappings in Hilbert space // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1965. V. 53. № 6. P. 12721276.
117. Comptes-Rendus–Série Mécanique. Duality, inverse problems and nonlinear problems in solid mechanics. volume 336, pages 1–259. janvier 2008.

118. Downer J. D., Park K. C. Formulation and solution of inverse spaghetti problem: Application to beam deployment dynamics // *AIAA Journal*. – 1993. – T. 31, № 2. – С. 339-347. DOI: 10.2514/3.61535.
119. Epilogue — Ambartsumian's paper [Viktor Ambartsumian] [Ambartsumian, Rouben V. (1998). "A life in astrophysics. Selected papers of Viktor A. Ambartsumian". *Astrophysics*. 41 (4): 328–330. doi:10.1007/BF02894658. S2CID 118952753.
120. Fedotenkov, G. V., Makarevskii, D. I., Vahterova, Y. A., & Thang, T. Q. (2021). The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod. *INCAS Bulletin*, 13(Special Issue), 57-66. doi:10.13111/2066-8201.2021.13.S.6
121. Fedotenkov G., Starovoitov E., Vahterova Y. The inverse transient problem of identifying the law of change in the cross-sectional area of an elastic bar // In: 9th edition of the International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021). — 2021. DOI: 10.23967/coupled.2021.054
122. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439-447. DOI:10.1134/S1995080219040061
123. Fedotenkov G.V., Vahterova Y.A., Gritskov A.V., Levitskiy D.Y., Sun Y. Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations // *INCAS Bulletin*. - 2021. - Vol. 13. - No Special Issue. - P. 41-56. - DOI 10.13111/2066-8201.2021.13.S.5
124. Hadamard J., *Le probleme de Cauchy et les equations aux derivers particlee lineaires hyperbolique*, Paris: Hermann, 1932.
125. H.D. Bui and A. Constantinescu. *Problèmes inverses. del'expérimentation à la modélisation*. ARAGO. OFTA, 1999.



126. H.D. Bui, A. Constantinescu, and H. Maigre. Numerical identification of linear cracks in 2d elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, 20(4):993–1001, 2004.
127. H.D. Bui. Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. Eds Eyrolles, 1993.
128. Halperin B. Fixed points of nonexpansive maps // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. V. 73. № 6. P. 957-961.
129. Karve P. M., Na S. W., Kang J. W., Kallivokas L. F. The inverse medium problem for Timoshenko beams and frames: Damage detection and profile reconstruction in the time-domain // *Computational Mechanics*. – 2011. – T. 47, № 2. – C. 117-136. DOI: 10.1007/s00466-010-0533-x.
130. Kunisch K., Ring W. Regularization of nonlinear ill-posed problem with closed operators // *Numer. Funct. Anal, and Optimiz.* 1993. V. 14. № 3-4. P. 389-404.
131. M. Peigney and C. Stolz. An optimal control approach of inelastic structures under cyclic loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 51:575–605, 2003.
132. M. Peigney and C. Stolz. Approche par contrôle optimal du comportement asymptotique des structures élastoviscoplastiques sous chargement cyclique. *C. R. Acad. Sci.*, 329:643–648, 2001.
133. Mosegaard and A. Tarantola. Probabilistic approach to inverse problems. chapter *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*, pages 237–265. Academic Press, 2002. Part A.
134. Neubauer A., Scherzer O. Finite dimensional approximation of Tikhonov - regularized solutions of nonlinear ill-posed problem // *Numer. Funct. Anal, and Optimiz.* 1990. V. 11. № 1-2. P. 85-99.
135. Scherzer O., Engl H. W., Kunisch K. Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1993. V. 30. № 6. P. 1796-1838.

136. sdfgrtgertert
137. Tarantola and J. Morlet. Inverse problems quest for information. *J. Geophys.*, 50:159–170, 1982.
138. Tarantola. *Inverse problem theory*. Elsevier, 1987.
139. Tautenhahn U. Error estimates for regularized solutions of nonlinear ill-posed problems // *Inverse Problems*. 1994. V. 10. № 2. P. 485-500.
140. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 687-692. DOI:10.5937/jaes0-28073
141. Weyl, Hermann (1911). "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte". *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*: 110–117. Archived from the original on 2013-08-01. Retrieved 2018-05-14.