

О ПАРАМЕТРАХ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СХЕМУ УКЛАДКИ ЛЕНТЫ В ПРОЦЕССЕ НАМОТКИ

Юрий Иванович БИТЮКОВ родился в 1972 г. в городе Москве. Доцент МАИ. Кандидат технических наук. Основные научные интересы — в области математического моделирования, дифференциальной геометрии, теории сплайнов. Автор 20 научных работ. E-mail: yib72@yandex.ru

Yury I. BITYUKOV, Ph.D., was born in 1972, in Moscow. He is an Associate Professor at the MAI. His main research interests are in mathematical modeling, differential geometry, spline theory. He has published 20 technical papers. E-mail: yib72@yandex.ru

Статья посвящена развитию математической модели одного из важнейших методов получения изделий из композиционных материалов — методу намотки непрерывными волокнами в направлении действия силы. Получены конечные формулы для вычисления параметров, характеризующих этот процесс.

A mathematical model is developed for winding with continuous fibers laying in the direction of acting force. This winding technique is one of the major manufacturing methods for products made of composite materials. Analytical expressions are derived to calculate parameters characterizing the winding process.

Ключевые слова: сплайн, намотка, геодезическая, геодезическая параллель.

Keywords: spline, winding, geodetic, geodesic parallel.

Введение

В данной статье рассмотрим один из важнейших методов получения изделий из композиционных материалов, широко применяемых в авиационной промышленности, — и методу намотки непрерывными волокнами в направлении действия силы. Намотка производится на станках с числовым программным управлением на поверхность оправки, на которую укладывается с натяжением непрерывная лента, составленная из однонаправленных волокон, нитей, прядей или жгутов, пропитанных связующим. После получения необходимой толщины и структуры оболочки производится полимеризация, окончательное отверждение связующего. В процессе намотки волокна могут претерпевать продольные деформации практически независимо друг от друга. Кроме того, деталь может иметь участки поверхности с различными степенями вогнутости. Все это служит причиной неприлегания ленты к поверхности, что, в свою очередь, приводит к образованию воздушных клиньев между оправкой и полученной оболочкой, а это приводит к уменьшению прочности изделия. В процессе намотки необходимо также обеспечивать равновесность нитей ленты при ее укладке на поверхность.

В работах [1—5] была представлена геометрическая модель намотки, наиболее точно описыва-

ющая процесс укладки ленты и учитывающая изменения геометрических характеристик различных волокон, нитей ленты в ее поперечном сечении при укладке на поверхность оправки. Суть этой модели состоит в том, что по выбранной на поверхности оправки кривой, в дальнейшем называемой кривой намотки, укладывается средняя нить ленты, а остальные нити моделируются геодезическими параллелями этой кривой [6]. В этих статьях были получены формулы для расчета относительных удлинений волокон ленты, приведен критерий прилегания ленты к поверхности и формула для расчета параметра, характеризующего равновесность нитей ленты. Все полученные формулы для параметров, характеризующих процесс намотки, выражаются через вектор-функцию, определяющую геодезическую параллель, а также ее первые и вторые производные. Неудобство в том, что эта вектор-функция в общем случае неизвестна, не говоря уже о ее производных. В данной статье результаты работ [1—5] мы приведем к виду, удобному для практических приложений.

Расчет параметров, характеризующих схему укладки ленты

Для начала рассмотрим следующие вспомогательные построения. Как было отмечено выше, параметры намотки выражаются через производные вектор-функции, которая в общем случае неизвес-

тна. Самое большое, на что мы можем рассчитывать, — это конечное множество значений этой вектор-функции. Поэтому рассмотрим следующую общую задачу. Предположим, что про функцию f известно, что она принадлежит множеству $C^2[a; b]$ и в точках $x_i = a + i \cdot h$, $h = (b - a)/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, имеет значения y_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Требуется найти $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Как известно, приближенные значения производных можно получить, если построить кубический сплайн $\varphi(x)$ по узлам

$\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$ и положить

$$f'(x_i) \approx \varphi'(x_i), \quad f''(x_i) \approx \varphi''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Покажем, что для равномерного разбиения отрезка $[a; b]$ можно обойтись без построения сплайна.

В дальнейшем будем предполагать, что $n \geq 2$. Введем следующие обозначения. Положим $x_i - x_{i-1} = h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\varphi'(x_i) = s_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда, как известно [7], для каждого из $(n - 1)$ узлов x_1, \dots, x_{n-1} можно выписать следующее уравнение:

$$h_i s_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})s_i + h_{i+1}s_{i+1} = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h_i}.$$

Так как необходимо определить $(n + 1)$ значение s_0, s_1, \dots, s_n , надо иметь два дополнительных условия, которые позволяют однозначно определить сплайн $\varphi(x)$. Мы зададим два дополнительных условия следующим образом:

$$g_0 = \varphi'(x_0 + 0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad g_n = \varphi'(x_n - 0) = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n},$$

тогда система линейных уравнений для определения s_0, s_1, \dots, s_n примет вид [7]

$$\begin{cases} 2h_1 s_0 + h_1 s_1 = \frac{6(y_1 - y_0)}{h_1} - 6g_0; \\ h_i s_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})s_i + h_{i+1}s_{i+1} = \\ = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h_i}; \\ h_n s_{n-1} + 2h_n s_n = 6g_n - \frac{6(y_n - y_{n-1})}{h_n}. \end{cases} \quad (1)$$

Так как в нашем случае узлы равноотстоят друг от друга, то $h_i = h = (b - a)/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому систему (1) можно переписать в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \dots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$d_0 = \frac{6(y_1 - y_0)}{h^2} - \frac{6g_0}{h} = 0; \quad d_n = \frac{6g_n}{h} - \frac{6(y_n - y_{n-1})}{h^2} = 0;$$

$$d_i = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h^2} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h^2} =$$

$$= \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Обозначим через M_{n+1} матрицу системы (2) и введем в рассмотрение следующие вспомогательные матрицы:

$$A_1 = (4), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 41 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} 41000 \dots 000 \\ 14100 \dots 000 \\ 01410 \dots 000 \\ \dots \\ 00000 \dots 141 \\ 00000 \dots 014 \end{pmatrix};$$

$$U_1 = (2), \quad U_2 = \begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad U_k = \begin{pmatrix} 4100 \dots 000 \\ 1410 \dots 000 \\ 0141 \dots 000 \\ \dots \\ 0000 \dots 141 \\ 0000 \dots 012 \end{pmatrix};$$

$$S_1 = (2), \quad S_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad S_k = \begin{pmatrix} 21000 \dots 000 \\ 14100 \dots 000 \\ 01410 \dots 000 \\ \dots \\ 00000 \dots 141 \\ 00000 \dots 014 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители этих матриц. Разложив определитель $|A_n|$ по элементам первой строки, получим $|A_n| = 4 \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$. Отличное от нуля решение данного линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами [8] будем искать в виде λ^n . Подставляя это решение в уравнение, находим $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$. Отку-

да $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$. Следовательно, общее решение полученного разностного уравнения можно записать в виде

$$|A_n| = C_1(2 + \sqrt{3})^n + C_2(2 - \sqrt{3})^n,$$

где постоянные C_1, C_2 найдем из системы

$$\begin{cases} |A_3| = C_1(2 + \sqrt{3})^3 + C_2(2 - \sqrt{3})^3; \\ |A_4| = C_1(2 + \sqrt{3})^4 + C_2(2 - \sqrt{3})^4. \end{cases}$$

Решая систему, находим $C_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; $C_2 = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Итак, для определителя $|A_n|$ справедливо равенство

$$|A_n| = \begin{cases} 4, & n = 1; \\ 15, & n = 2; \\ \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Для вычисления определителей $|U_k|$ и $|S_k|$ разложим первый из них по элементам последней строки, а второй — по элементам первой строки, получим

$$|U_k| = |S_k| = \begin{cases} 2, & k = 1, \\ 7, & k = 2, \\ 2 \cdot |A_{k-1}| - |A_{k-2}|, & k \geq 3. \end{cases}$$

Для того чтобы найти обратную матрицу к матрице M_k , вычислим определитель этой матрицы и алгебраические дополнения M_{ij} элементов матрицы M_k . В дальнейшем удобно условиться считать, что $|U_0| = 1$.

Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$|M_k| = 2 \cdot |U_{k-1}| - |U_{k-2}|, \quad k \geq 3;$$

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |U_{\min(i,j)-1}| \cdot |U_{k-\max(i,j)}|, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Доказательство. Первая формула получается

разложением определителя $|M_k|$ по элементам первой строки. Для вычисления алгебраического до-

полнения M_{ij} , $j \leq i$, заметим, что оно представляет собой определитель квазиреугольной матрицы с квадратными диагональными блоками (блоки выделены прямоугольными рамками) [9]:

$$M_{ij} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 21000 \dots 00 \\ 14100 \dots 00 \\ 01410 \dots 00 \\ \dots \\ 00000 \dots 14 \end{matrix}} & & 0 & 0 \\ & & & \\ \boxed{\begin{matrix} 00000 \dots 01 \\ 00000 \dots 00 \\ 00000 \dots 00 \\ \dots \\ 00000 \dots 00 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 100 \dots 000 \\ 410 \dots 000 \\ 141 \dots 000 \\ \dots \\ 000 \dots 141 \end{matrix}} & & 0 \\ & & & \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 000 \dots 001 \\ 000 \dots 000 \\ 000 \dots 000 \\ \dots \\ 000 \dots 000 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4100 \dots 000 \\ 1410 \dots 000 \\ 0141 \dots 000 \\ \dots \\ 0000 \dots 141 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0000 \dots 012 \end{matrix}} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} |U_{j-1}| \cdot |U_{k-i}|, \quad j = 1, 2, \dots, i.$$

Так как матрица M_k симметричная, то

$$M_{ij} = M_{ji} = (-1)^{i+j} |U_{i-1}| \cdot |U_{k-j}|, \quad j > i.$$

Лемма доказана.

Теперь, зная матрицу M_k^{-1} , легко можно выписать решение системы (2). Так как для узловых производных полиномиального сплайна справедливы равенства [7]

$$\phi'(x_i) = \frac{s_i h_i}{3} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{s_{i-1} h_i}{6}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

то для производных $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, получаем следующие выражения:

$$f''(x_i) \approx s_i = \frac{6 \cdot n^2}{(b-a)^2 \cdot |M_{n+1}|} \times$$

$$\times \sum_{j=2}^n M_{i+1,j} \cdot (y_j - 2 \cdot y_{j-1} + y_{j-2}), \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$f'(a+0) \approx \phi'(x_0+0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};$$

$$f'(b-0) \approx \phi'(x_n-0) = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n};$$

$$f'(x_i) \approx \phi'(x_i) = \frac{h}{6} \cdot (2 \cdot s_i + s_{i-1}) +$$

$$+ \frac{y_i - y_{i-1}}{x_n - x_0} \cdot n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Как видно, непосредственное построение сплайна оказывается излишним.

Для дальнейших построений введем в рассмотрение следующие функции, определенные на подмножествах множества целых чисел:

$$\Lambda(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k = 1; \\ 7, & k = 2; \\ 26, & k = 3; \\ 97, & k = 4; \\ \frac{(2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k}{\sqrt{3}}, & k \geq 5, \\ -\frac{(2 + \sqrt{3})^{k-1} - (2 - \sqrt{3})^{k-1}}{2\sqrt{3}}, & k \geq 5, \end{cases}$$

(значение $\Lambda(k)$ — это в точности $|U_k|$),

$$E(k) = 2 \cdot \Lambda(k-1) - \Lambda(k-2), \quad k \geq 3,$$

и для каждого натурального числа $k \geq 3$ определим на множестве $\{1, 2, \dots, k\} \times \{1, 2, \dots, k\}$ функцию

$$\Upsilon_k(i, j) = (-1)^{i+j} \cdot \Lambda(\min(i, j) - 1) \cdot \Lambda(k - \max(i, j)), \\ i, j = 1, \dots, k.$$

Пусть $\mathbf{G}_n = \{\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_0 < \dots < x_n\}$.

Для каждого натурального числа $n \geq 2$ определим на множестве $\mathbf{G}_n \times \mathbf{R}^{n+1} \times \{0, 1, \dots, n\}$ функцию

$$\Psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, i) = \frac{6 \cdot n^2}{(x_n - x_0)^2 \cdot E(n+1)} \times$$

$$\times \sum_{j=2}^n \Upsilon_{n+1}(i+1, j) \cdot (y_j - 2y_{j-1} + y_{j-2}),$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{G}_n, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n+1},$$

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$$

и функцию

$$\Omega_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, i) = \begin{cases} (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0), & i = 0; \\ \frac{x_n - x_0}{6 \cdot n} \cdot (2 \cdot \Psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, i) + \Psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, i-1)) + \\ + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_n - x_0} \cdot n, & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ (y_{n-1} - y_n) / (x_{n-1} - x_n), & i = n. \end{cases}$$

Теперь мы готовы перейти к расчету параметров процесса намотки. Начнем с равновесности

ленты на поверхности оправки. Фиксируем в пространстве декартову систему координат $Oxuz$, неизменную в ходе нашего изложения и неподвижную относительно оправки. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей. Тогда параметрическое представление поверхности оправки произвольной формы имеет вид

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}, \quad (u, v) \in \bar{D},$$

где \bar{D} — замкнутая, ограниченная область в \mathbf{R}^2 . Функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми в \bar{D} .

Кроме того, на поверхности оправки нам задана кривая γ_0 . Ее параметрическое представление имеет вид

$$\gamma_0 : \vec{r}_K(t) = x(u_K(t), v_K(t)) \cdot \vec{i} + y(u_K(t), v_K(t)) \cdot \vec{j} + \\ + z(u_K(t), v_K(t)) \cdot \vec{k}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где функции $u_K, v_K \in C^2[t_0, t_1]$ и при любом $t \in [t_0, t_1]$ точка $(u_K(t), v_K(t))$ принадлежит области \bar{D} .

Обозначим через d ширину ленты и будем считать ее неизменной. Возьмем на кривой намотки γ_0 произвольную точку $M(t)$ и проведем через нее на поверхности оправки геодезическую линию перпендикулярно кривой γ_0 . Возьмем произвольное число $\delta \in [-d/2; d/2]$ и отложим на геодезической

дугу \widehat{MM}^* длины $|\delta|$ по соответствующую сторону от кривой намотки в зависимости от знака δ .

Если перемещать точку $M(t)$ вдоль кривой γ_0 , не меняя при этом длину дуги \widehat{MM}^* , перпендикулярной к кривой геодезической линии, и ее расположения относительно кривой, то точка $M^*(t, \delta)$ также будет перемещаться по поверхности оправки, описывая кривую γ_δ , которая называется геодезической параллелью данной кривой γ_0 , соответствующей данному значению δ (рис. 1). Пусть параметрическое представление геодезической параллели γ_δ имеет вид

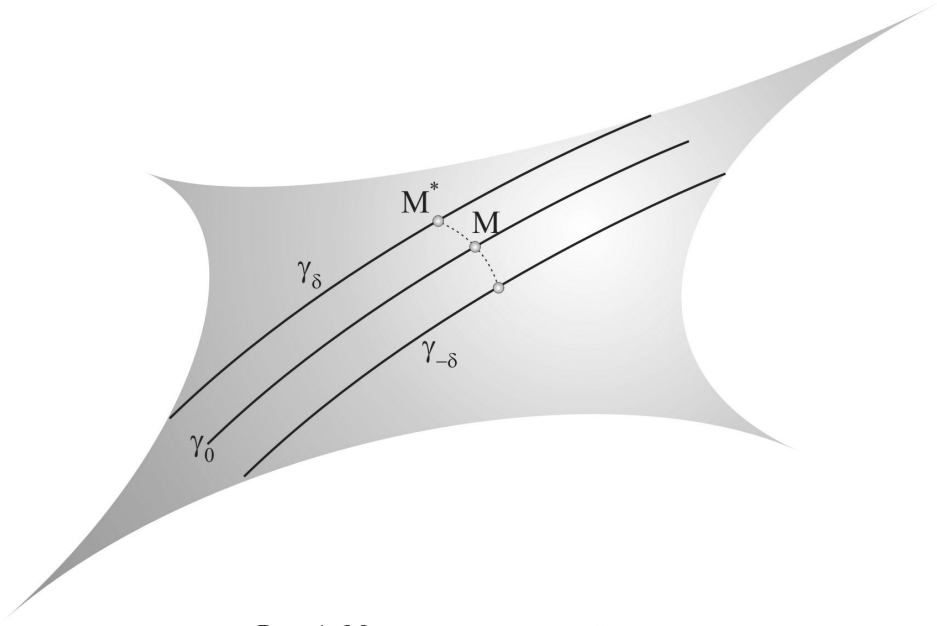


Рис. 1. Моделирование нитей ленты

$$\vec{r}_\Pi(t, \delta) = x(u_\Pi(t, \delta), v_\Pi(t, \delta)) \cdot \vec{i} + y(u_\Pi(t, \delta), v_\Pi(t, \delta)) \cdot \vec{j} + z(u_\Pi(t, \delta), v_\Pi(t, \delta)) \cdot \vec{k}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

В модели [1–5] нить ленты, находящаяся на расстоянии $|\delta|$, $\delta \in [-d/2; d/2]$, от средней нити, укладывается на поверхность по кривой γ_δ .

Равновесность положения нити на поверхности оправки характеризуется тангенсом угла Θ геодезического отклонения [6]. Пусть μ — коэффициент трения скольжения материала нити о материал поверхности. Согласно результатам, полученным в статьях [1-5], для равновесности всех нитей ленты шириной d должно выполняться неравенство $|\operatorname{tg}\Theta(t, \delta)| \leq \mu$, $(t, \delta) \in [t_0; t_1] \times [-d/2; d/2]$, где функция $\Theta(t, \delta)$ определяется следующим равенством:

$$\cos \Theta = \frac{L((u_\Pi)'_t)^2 + 2M(u_\Pi)'_t (v_\Pi)'_t + N((v_\Pi)'_t)^2}{E((u_\Pi)'_t)^2 + 2F(u_\Pi)'_t (v_\Pi)'_t + G((v_\Pi)'_t)^2} \cdot \frac{1}{k},$$

где $k(t, \delta) = \left\| \left[(\vec{r}_\Pi)'_t, (\vec{r}_\Pi)''_{tt} \right] \right\| / \left| (\vec{r}_\Pi)'_t \right|^3$, а коэффициенты

$$L = \left(\vec{r}_{uu}'' , \begin{bmatrix} \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \\ \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \end{bmatrix} \right); \quad M = \left(\vec{r}_{uv}'' , \begin{bmatrix} \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \\ \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \end{bmatrix} \right);$$

$$N = \left(\vec{r}_{vv}'' , \begin{bmatrix} \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \\ \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \end{bmatrix} \right);$$

$$E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u); \quad F = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v); \quad G = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$$

вычислены в точке $(u_\Pi(t, \delta), v_\Pi(t, \delta))$ (в выражениях для коэффициентов L, M, N, E, F, G круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов, а квадратными — векторное произведение).

Для практического использования этого результата зададим произвольную равномерную сетку

$$\{\tau_i = t_0 + i \cdot (t_1 - t_0) / n : i = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbf{N}\}$$

на отрезке $[t_0; t_1]$ и равномерную сетку

$$\{\delta_j = -d/2 + j \cdot d / (2 \cdot m) : j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m, m \in \mathbf{N}\}$$

на отрезке $[-d/2; d/2]$. Пусть

$$\mathbf{T} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n);$$

$$u_{ij} = u_\Pi(\tau_i, \delta_j); \quad v_{ij} = v_\Pi(\tau_i, \delta_j);$$

$$\mathbf{u}_j = (u_{0j}, \dots, u_{nj}); \quad \mathbf{v}_j = (v_{0j}, \dots, v_{nj});$$

$$i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m.$$

Эти значения можно найти, решив численным методом системы дифференциальных уравнений, определяющих геодезические, перпендикулярные

заданной кривой намотки. Так как имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\vec{r}_\Pi)'_t &= \vec{r}'_u \cdot (u_\Pi)'_t + \vec{r}'_v \cdot (v_\Pi)'_t; \\ (\vec{r}_\Pi)''_{tt} &= r''_{uu} \cdot ((u_\Pi)'_t)^2 + 2 \cdot r''_{uv} \cdot (u_\Pi)'_t \cdot (v_\Pi)'_t + \\ &+ r''_{vv} \cdot ((v_\Pi)'_t)^2 + \vec{r}''_u \cdot (u_\Pi)''_{tt} + \vec{r}''_v \cdot (v_\Pi)''_{tt}, \end{aligned}$$

положим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} &= \vec{r}'_u(u_{ij}, v_{ij}) \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) + \vec{r}'_v(u_{ij}, v_{ij}) \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i); \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} &= r''_{uu}(u_{ij}, v_{ij}) \cdot (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i))^2 + 2 \cdot r''_{uv}(u_{ij}, v_{ij}) \times \\ &\times \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i) + r''_{vv}(u_{ij}, v_{ij}) \cdot (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i))^2 + \\ &+ \vec{r}''_u(u_{ij}, v_{ij}) \cdot \Psi_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) + \vec{r}''_v(u_{ij}, v_{ij}) \cdot \Psi_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i). \end{aligned}$$

Определим значения $\tilde{\Theta}_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m$, из следующих уравнений:

$$\cos \tilde{\Theta}_{ij} = \frac{L_{ij} (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i))^2 + 2M_{ij} \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i) + N_{ij} (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i))^2}{E_{ij} (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i))^2 + 2F_{ij} \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i) + G_{ij} (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i))^2} \cdot \frac{|\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}|^3}{\left[\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \right]},$$

где $L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$ — коэффициенты L, M, N, E, F, G , найденные в точке (u_{ij}, v_{ij}) . Будем считать, что нити ленты равновесны, если выполняются неравенства

$$|\operatorname{tg} \tilde{\Theta}_{ij}| \leq \mu, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m.$$

При исследовании прилегания ленты к поверхности оправки, прежде всего, нужно исследовать наматываемость соответствующих кривых в нашей модели, т.е. принципиальную возможность для нити принять форму кривой на поверхности. Так как нить укладывается на поверхность с натяжением, то наматываемость означает, что кривая вогнута внутрь тела намотки. Последнее, в свою очередь, равносильно тому, что в любой точке кривой главная нормаль направлена в тело намотки. Наматываемость ленты вдоль заданной кривой означает наматываемость всех геодезических параллелей по ширине ленты. В работе [2] был получен следующий критерий.

Теорема. Для ленты из однонаправленных волокон, нитей шириной d , кривая $\vec{r}_\Pi(t, \delta)$, $t \in [t_0; t_1]$ на поверхности наматываема тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$L((u_\Pi)'_t)^2 + 2M(u_\Pi)'_t(v_\Pi)'_t + N((v_\Pi)'_t)^2 \leq 0$$

для всех $t \in [t_0; t_1]$.

При практическом использовании этого критерия ленту будем считать наматываемой, если выполняется неравенство

$$\begin{aligned} L_{ij} \cdot (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i))^2 + 2 \cdot M_{ij} \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{u}_j, i) \cdot \Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i) + \\ + N_{ij} \cdot (\Omega_n(\mathbf{T}, \mathbf{v}_j, i))^2 \leq 0 \end{aligned}$$

для всех $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m$.

Рассмотрим теперь задачу прилегания ленты к поверхности. Пусть L — длина ленты. Рассмотрим участок ленты длины ΔL , который укладывается на оправку так, что начало каждой нити этого участка совпадает с точкой с радиус-вектором $\vec{r}_\Pi(t, \delta)$, конец — с точкой с радиус-вектором $\vec{r}_\Pi(t + \Delta t, \delta)$,

для соответствующего значения δ . Тогда относительное удлинение рассматриваемого отрезка нити, находящегося от средней нити на расстоянии $|\delta|$, будет равно

$$\varepsilon(\delta, t, \Delta t) = \left(\int_t^{t+\Delta t} |\vec{r}'_\Pi(\tau, \delta)| d\tau - \Delta L \right) / \Delta L.$$

Как показано в работе [4], при $\Delta t \rightarrow 0$ для $\varepsilon(\delta, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\delta, t, \Delta t)$ можно получить следующее выражение:

$$\varepsilon(\delta, t) = \frac{|\vec{r}'_\Pi(t, \delta)|}{|\vec{r}'_k(t)|} (\varepsilon(0, t) + 1) - 1.$$

Согласно результатам этой же работы, для того чтобы лента прилегала к поверхности, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$0 \leq \frac{|\vec{r}'_\Pi(t, \delta)|}{|\vec{r}'_k(t)|} (\varepsilon(0, t) + 1) - 1 \leq \varepsilon_{\max}$$

для каждого $t \in [t_0; t_1]$ и $\delta \in [-d/2; d/2]$. Как и в работе [4], положим

$$\varepsilon(0, t) \approx \varepsilon_0 = \left(\int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}'_K(t)| dt - L \right) / L$$

для каждого t . При практическом использовании этого результата будем считать, что лента прилегает к поверхности, если выполняются неравенства

$$0 \leq \frac{|\vec{\sigma}_{ij}^{(1)}|}{|\vec{\sigma}_{i,m}^{(1)}|} (\varepsilon_0 + 1) - 1 \leq \varepsilon_{\max}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, 2 \cdot m.$$

Рассмотрим теперь пример анализа двух витков ленты при укладке ее на поверхность лонжерона стабилизатора вертолета по геодезической линии, которая выходила под углом 10° к сечению лонжерона. На рис. 2 представлена поверхность лонже-



Рис. 2. Лонжерон стабилизатора вертолета и два витка ленты

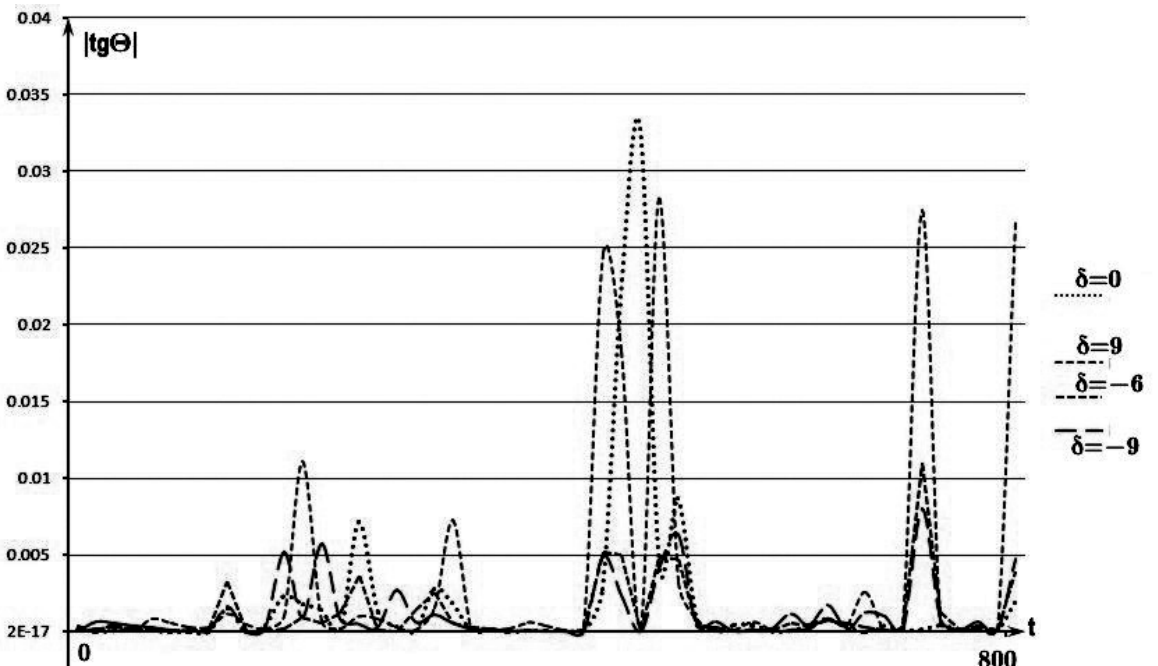


Рис. 3. Графики функции $|\text{tg}\Theta(t, \delta)|$ для значений $\delta = 0, 9, -6, -9$

рона с двумя витками ленты. На рис. 3 и 4 показаны графики функций $|\text{tg}\Theta(t, \delta)|$ и $\varepsilon(t, \delta)$ для значений $\delta = 0, 9, -6, -9$. В качестве значения ε_0 было выбрано 0,01. Как видно из представленных графиков, указанные нити будут равновесны для коэффициентов трения $\mu \geq 0,04$ и будут прилегать к поверхности для значений $\varepsilon_{\max} \geq 0,0106$.

Выводы

В статье получены формулы для расчета параметров, характеризующих схему укладки ленты на поверхность технологической оправки. Эти формулы удобны для практического использования при анализе схемы. Тем самым устранен существенный недостаток в разработанной математической модели технологического процесса намотки, суть которой изложена в начале статьи.

Библиографический список

1. Калинин В.А. Моделирование процесса намотки оболочек волокнистыми композиционными материалами // Геометрические вопросы САПР: Тезисы докладов межгосударственной научной конференции. Улан-Удэ, 1993. С. 9-10.
2. Калинин В.А. О наматываемости вдоль заданной кривой на поверхности оправки // Интеграция инженерно-графических дисциплин в процессе подготовки инженеров: Тезисы докладов научной конференции. Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 1993. С. 65.

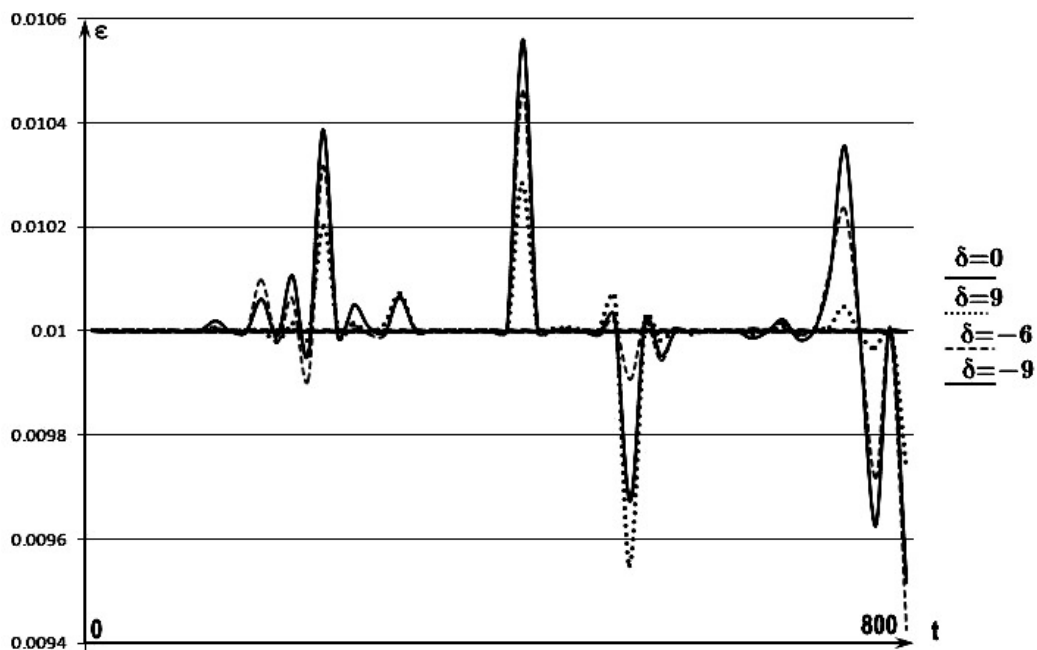


Рис. 4. Графики функции $\epsilon(t, \delta)$ для значений $\delta = 0, 9, -6, -9$

3. Калинин В.А. Технологический процесс намотки и его моделирование // *Керамика в народном хозяйстве: Тезисы научно-технической конференции.* Ярославль, 1994. С. 48-49.

4. Калинин В.А. Метод определения прилегания ленты из композиционных материалов с однонаправленными волокнами к поверхности оправки при изготовлении изделий методом намотки // *Основы прикладной геометрии: Учебное пособие; Под редакцией В.И. Якунина.* — М.: Изд-во МАИ, 1995.

5. Белякова Н.Н., Борох Г.Р., Калинин В.А. Метод расчета параметров армирования произвольных поверхностей с учетом ширины композиционной ленты // *Авиационная промышленность.* 1986. № 10. С. 8-11.

6. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: УРСС, 2003.

7. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. — М.: Мир, 1982.

8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. — М. КомКнига, 2006.

9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 5.11.2009