На правах рукописи

Иванов Сергей Валерьевич

ВЫБОРОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Специальность 05.13.18 —
математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2020

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
и компьютерного моделирования
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Кибзун Андрей Иванович**

Официальные оппоненты: **Назин Александр Викторович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Института проблем
управления им. В. А. Трапезникова РАН

Каркищенко Александр Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник
НИИ робототехники и процессов управления
Южного федерального университета

Горяинов Владимир Борисович,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор МГТУ им. Н. Э. Баумана

Ведущая организация: Нижегородский государственный
технический университет
им. Р. Е. Алексеева

Защита состоится 26 июня 2020 года в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 — и на сайте МАИ по адресу https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=114415.

Автореферат разослан ______________

Отзывы просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных печатью, по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Учёный совет МАИ.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.125.04
кандидат физико-математических наук ______________ Рассказова Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Объектом исследования являются математические модели принятия решений в иерархических стохастических системах с вероятностным и квантильным критериями.

Предметом исследования являются выборочные методы дискретизации вероятностной меры в иерархических моделях с вероятностным и квантильным критериями и численные методы синтеза оптимальных стратегий в этих моделях.

Актуальность работы. Разработка математических моделей и методов принятия решений в сложных иерархических системах, на функционирование которых оказывают влияние случайные факторы и к надёжности которых предъявляются высокие требования, является одной из важнейших задач современной прикладной математики и системного анализа. Трудности, возникающие при моделировании подобных систем, связаны как со сложными отношениями подчинения между моделируемыми субъектами, так и с неопределённостью моделируемой системы.

В иерархических системах присутствуют несколько лиц, которые принимают решения последовательно. Такие системы можно разбить на подсистемы, каждая из которых соответствует уровню принятия решения. Ключевое свойство иерархических систем, которое необходимо учитывать при моделировании, заключается в структуре принятия решений. Решение, принимаемое на определённом уровне иерархии, задаёт условия в которых функционируют уровни, находящиеся ниже.

Самый простой вариант иерархической системы включает два уровня иерархии. Лицо, действующее на верхнем уровне иерархии, является лидером, а на нижнем уровне иерархии действует последователь. Поведение последователя в такой системе может быть описано с помощью оптимизационной модели, параметры которой зависят от поведения лидера. Одной из первых моделей такого типа была модель конкурентного рынка Г. фон Штакельберга. При моделировании рынка предполагалось, что две фирмы (лидер и последователь) последовательно принимают решения об объёме производства. В монографиях Ш. Демпе и Дж. Ф. Барда приводится большое количество двухуровневых моделей, используемых для описания систем различной природы. Двухуровневые иерархические модели экономики рассматривались Ян Хаем, М. Беллом. Двухуровневые транспортные модели изучались Х. Абу-Кандилом и П. Бертраном. Модель проектирования сетей рассматривали П. Маркотте, И. Констанин, М. Флориан. Модели алюминиевой промышленности приведены изучались М. Г. Николсом. Модели производства биотоплива предлагались Дж. Ф. Бардом. Двухуровневые модели взаимодействия игроков на рынке электроэнергии изучались И. А. Нечаевым, С. И. Паламарчуком. Моделям формирования механизма государственно-частного партнёрства посвящены работы С. М. Лавлинского, А. А. Панина, А. В. Плясунова. Анализ модели конкурентного размещения предприятий проведён В. Л. Бересневым, А. А. Мельниковым.

При моделировании сложных систем необходимо учитывать случайности, связанные с их функционированием и внешними факторами. Модели, учитывающие случайные факторы называются стохастическими. Потери при функционировании такой системы можно описать функцией, зависящей от случайных факторов. При разработке стохастической модели системы необходимо учитывать объём информации, доступной лицу, принимающему решение. Это можно осуществить с помощью двухэтапных моделей. Стратегии лица, принимающего решение, можно разделить на два вида: не зависящие от случайных факторов задачи и выбираемые по факту реализации случайных параметров. Поскольку реализации случайных факторов, как правило, становятся известными в ходе функционирования системы, первый вид стратегий называют стратегиями первого этапа, а второй вид стратегий — стратегиями второго этапа. Таким образом, моделируемая система может быть разбита на две подсистемы, соответствующие этапам принятия решений. При этом подсистема, соответствующая второму этапа, функционирует в условиях, определяемых стратегией первого этапа. Моделирование выбора стратегии второго этапа может быть осуществлено посредством детерминированной оптимизационной модели, параметры которой задаются стратегией первого этапа и реализациями случайных факторов.

Несмотря на то, что двухэтапные и двухуровневые модели описывают различные объекты, структуры принятия решений в двухэтапных и двухуровневых моделях аналогичны. Это говорит о том, что для их описания может быть использован близкий математический аппарат. И в том, и в другом случае стратегии нижнего уровня (второго этапа) являются оптимальными решениями задачи оптимизации. Отличие состоит в том, что в двухуровневых моделях присутствуют два лица, каждый из которых имеет собственную цель, а в двухэтапных моделях выбор стратегий первого и второго этапа подчинён общей цели.

Для описания иерархических систем взаимодействия лидера и последователя, на функционирование которых влияют случайные факторы, могут быть использованы модели, сочетающие свойства двухэтапных и двухуровневых моделей. Данные модели называются двухуровневыми стохастическими. В зависимости от объёма информации, которыми владеют лидер и последователь, можно предложить несколько вариантов двухуровневых стохастических моделей. Модель с симметричной информацией обладает тем свойством, что и лидер, и последователь принимают свои решения, не зная реализации случайных факторов. В модели с асимметричной информацией случайные факторы становятся известными после того, как лидер принимает своё решение, но до принятия решения последователем.

При моделировании сложных систем необходимо учитывать требования надёжности. Первым подходом к учёту требований надёжности в стохастических системах являлись математические модели с вероятностными ограничениями, предложенные А. Чарнсом, У. У. Купером. В данных моделях качество функционирования системы задаётся детерминированной функцией, а риски моделируются другой функцией, которая должна принимать значения из допустимого множества с вероятностью не меньше заданной. Описанный подход применялся С. Дж. Гартской для моделирования экономических систем. В работе А. Прекопы и Т. Шантая модели с вероятностными ограничениями применялись для решения задачи регулирования уровня воды.

Дальнейшим развитием моделей с вероятностными ограничениями явились модели, в которых качество функционирования системы определяется квантилью потерь. Подобные модели были введены в рассмотрение С. А. Катаокой. Затем свойства моделей с квантильным критерием изучались Э. Райком. Функция квантили определяется как минимальный уровень потерь, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Другим показателем качества функционирования системы является функция вероятности, определяемая как вероятность непревышения потерями заданного уровня. Таким образом, вероятностный и квантильным критерии являются в некотором смысле обратными. Аэрокосмические приложения моделей с функциями вероятности и квантили являются предметом монографии В. В. Малышева, А. И. Кибзуна. Модели с квантильным и вероятностным критериями применялись для решения задач формирования портфеля ценных бумаг в работах Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна, А. Н. Игнатова. Модель хеджирования опционов европейского типа по квантильному критерию на неполных рынках анализировалась в цикле статей О. В. Зверева, В. М. Хаметова. Квантильный критерий применялся в задаче оптимизации площади взлётно-посадочной полосы Ю. С. Каном, А. И. Кибзуном, В. Ю. Курбаковским. Модель прокладки трассы с учётом случайной стоимости работ и квантильным критерием изучалась А. И. Кибзуном, О. М. Хромовой.

Двухэтапные оптимизационные модели с квантильным критерием широко применяются для моделирования различных систем. В работах А. В. Наумова и А. И. Кибзуна изучались логические задачи, инвестицинные задачи, задачи планирования ресурсов, оптимизации энергоснабжения, оптимизации самолётного парка авиакомпании.

Для синтеза оптимальных стратегий в двухуровневых моделях применятся теория двухуровневой оптимизации. Учёт случайных факторов требует привлечения методов стохастического программирования. Таким образом, для математического моделирования сложных иерархических систем необходимо применение методов, сочетающих подходы двухуровневой и стохастической оптимизации.

Теория стохастического программирования освещена в монографиях Дж. Р. Бёржа, Ф. Луво, П. Калля, А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Рущиньского, А. Прекопы, Д. Б. Юдина. Задачам стохастического программирования с вероятностными критериями посвящены монографии А. И. Кибзуна, Ю. С. Кана.

Двухуровневые задачи, учитывающие различные неопределённости, исследуются в небольшом числе работ. Одними из первых таких работ были труды М. Патрикссона, Л. Винтер, С. Кристиансена, где изучалась двухуровневая задача стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания. В указанных работах описаны необходимые и достаточные условия оптимальности решения, на основе которых предложен алгоритм решения задачи. Наряду со стохастическими задачами двухуровневой оптимизации А. Будницкий, Х. Катагири рассматривали задачи с нечёткими факторами. Возможность описания стохастических иерархических систем с помощью двухуровневой оптимизации привела к появлению ряда прикладных исследований, в том числе работы А. С. Вернера, посвящённой задачам телекоммуникации, работы С. М. Ализадеха, П. Маркотте, Г. Савара об оптимизации транспортных систем, работы Р. М. Ковачевича, Г. Х. Пфлюга о ценообразовании на рынке опционов, работы Н. Ян о модели поставок продукции. Двухуровневая задача с критерием в форме математического ожидания, дискретными переменными верхнего уровня и непрерывными переменными нижнего уровня решалась И. Яникоглу, Д. Куном. Р. М. Ковачевичем, Г. Х. Пфлюгом также предлагается общая постановка задачи стохастической двухуровневой оптимизации, однако её решение было найдено только задачи с критерием в форме интегральной квантили. Представляет интерес двухуровневая задача с вероятностным ограничением типа рюкзака, изученная Ш. Козух и соавторами. В работах Й. Буртшайдт, М. Клауса, Ш. Демпе изучаются стохастические двухуровневые задачи с произвольными когерентными мерами риска, для которых получен ряд условий, обеспечивающих непрерывность и устойчивость задачи. Специальный случай стохастической двухуровневой задачи, в которой переменные последователя бинарны, рассматривался О. Й. Озалтыном, О. А. Прокопьевым и А. Й. Шефером, которые предложили метод ветвей и границ для решения данной задачи. Чэн Лу, Вань Чжунпин, Ван Гуанминь изучали двухуровневую задачу с критерием в форме интегральной квантили. Вероятностный критерий для задачи стохастического двухуровневого программирования использовался М. Сакавой, Х. Катагири, Т. Мацуи. Частный случай двухуровневой задачи с квантильным критерием рассматривался в работе А. Чена, Ч. Кима, Чжун Чжоу, П. Чутинана для моделирования проектирования сетей на заданном уровне надёжности. Для решения задачи был предложен генетический алгоритм. Линейный случай стохастической двухуровневой задачи изучался в диссертации автора. Для двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий, предложенной в работе автора, эффективные методы решения были разработаны В. Л. Бересневым и А. А. Мельниковым.

В связи с развитием методологии решения задач стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров, стали актуальными методы дискретизации вероятностной меры в данных задачах. Можно выделить два основных подхода к дискретизации. Первый подход основан на построении детерминированных аппроксимаций вероятностной меры с помощью приближённого вычисления интегралов. Этот подход развивался Р. Леппом для математического ожидания, для задач с вероятностными ограничениями и для функции квантили. А. И. Кибзун и Р. Лепп применили данную методику для решения задачи формирования портфеля ценных бумаг. В работах Т. Пеннанена, К. Койрат, К. Хесса, Р. Сери проведён анализ сходимостей различных аппроксимаций функции математического ожидания, в том числе построенных на приближённом вычислении интегралов. Г. Х. Пфлюгом описана процедура построения аппроксимации математического ожидания в многоэтапной задаче с критерием в форме математического ожидания.

Другой подход к дискретизации вероятностной меры основан на построении выборочных оценок. Достоинством данного подхода является тот факт, что для построения данной аппроксимации не нужно знать истинное распределение случайных параметров. Достаточно иметь статистические данные или возможность наблюдать реализации случайных факторов. Сходимость данного способа построения аппроксимации задачи стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания исследована Ц. Артштайном, Р. Ветсом, которые для анализа данной задачи применили аппарат эписходимостей. Ими была доказана эписходимость выборочных оценок функции математического ожидания при достаточно слабых предположениях о структуре целевой функции потерь. При определённых предположениях эписходимость гарантирует сходимость аппроксимации задачи минимизации как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации. Для двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания метод выборочных аппроксимаций изучался Р. Ченом, Й. Людтке. Для задачи с вероятностными ограничениями, которая может быть сведена к задаче стохастического программирования с квантильным критерием, сходимость аналогичных аппроксимаций исследована А. Шапиро. Допустимость в задаче стохастического программирования решений аппроксимирующей задачи изучалась М. К. Кампи, С. Гаратти. Дж. Хигле, С. Сен применяли метод выборочных аппроксимаций совместно с декомпозиционными алгоритмами для двухэтапных линейных задач с критерием в форме математического ожидания. Гладкие выборочные аппроксимации задач с вероятностными ограничениями строились А. Пеня-Ордьерес и соавторами. Модификация метода выборочной аппроксимации, минимизирующая дисперсию выборочной оценки, предложена Х. Баррерой и соавторами. В случае, если в задаче с вероятностными ограничениями уровень надёжности близок к единице, то при выборочной аппроксимации можно считать, что для всех реализаций случайной величины ограничения выполнены. Такой подход обоснован А. Немировским, А. Шапиро. Численная процедура максимизации выборочной функции вероятности предложена О. В. Хамисовым.

Проведённый анализ показывает, что, несмотря на наличие работ, в которых для моделирования конкретных иерархических систем в различных областях используется подход, основанный на двухуровневой и стохастической оптимизации, общие методы моделирования и исследования стохастических двухэтапных и двухуровневых систем принятия решений развиты недостаточно. Практически отсутствуют эффективные универсальные алгоритмы синтеза оптимальных стратегий в стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями и непрерывным распределением случайных параметров. Известные подходы требуют построения трудоёмких статистических оценок градиентов вероятности и квантили и вычисления объёмных и поверхностных интегралов. Требует обоснования возможность использования выборочных аппроксимаций в задачах стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Требуется разработка численных методов синтеза стратегий в данных системах, основанных на статистических аппроксимациях функций, описывающих поведение моделируемых субъектов. Таким образом, актуальность работы связана с необходимостью развития общих методов моделирования принятия решений в стохастических иерархических системах и численных методов их анализа.

Целью работы является разработка методов математического моделирования иерархических стохастических систем с учётом ограничений на вероятностные характеристики, а также разработка численных методов и комплекса программ для синтеза оптимальных стратегий в данных моделях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) предложить подход к моделированию систем, учитывающий сложную структуру принятия решений и высокие требования, предъявляемыми к их надёжности их функционирования;;

2) исследовать качественные свойства математических моделей, получаемых с помощью разработанного подхода;

3) разработать математические модели принятия решения для ряда экономических и технических систем;

4) разработать процедуры выборочной дискретизации вероятностной меры в изучаемых моделях;

5) разработать численные методы синтеза оптимальных стратегий в стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями;

6) доказать сходимость предлагаемых численных методов синтеза оптимальных стратегий;

7) разработать алгоритмы решения одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования;

8) реализовать предложенные алгоритмы в рамках программного комплекса, предназначенного для синтеза оптимальных стратегий в задачах стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями;

9) для ряда математических моделей конкретных экономических и технических систем, в том числе в области авиационной и ракетно-космической техники, провести численные вычисления и проанализировать их результаты.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математического моделирования, системного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории оптимизации (в частности, стохастической и двухуровневой оптимизации, линейного и нелинейного программирования), теории нормальных интегрантов, объектно-ориентированного программирования, метаэвристические методы.

Достоверность результатов обеспечивается корректным использованием методов математического моделирования, системного анализа, проведёнными доказательствами утверждений, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна.

1. Разработан общий подход к моделированию стохастических иерархических систем с учётом вероятностных критериев, с помощью разработанного подхода предложен ряд стохастических моделей сложных экономических систем, в том числе модель планирования производства, модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты, модель определения налоговой ставки, модель размещения предприятий.

2. Доказан ряд теорем о свойствах критериальных функций в двухэтап-

ных и двухуровневых задачах стохастического программирования с вероятностными критериями и об эквивалентных задачах оптимизации.

3. Для ряда одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых моделей разработан метод их выборочной дискретизации, доказаны теоремы о достаточных условиях сходимостей построенных аппроксимаций, построены оценки достаточного объёма выборки.

4. Предложены численные методы и алгоритмы решения ряда задач стохастического программирования, в том числе для задачи с функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру, и квантильным критерием, для одноэтапных линейных и двухэтапных билинейных задач стохастического программирования с квантильным критерием.

5. Предложены детерминированный и выборочный методы построения внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения в задачах анализа стохастических систем, эффективность которых продемонстрирована на задаче прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома.

6. Разработан и для решения ряда задач, в том числе для задачи оптимизации площади взлётно-посадочной полосы, применён комплекс программ, реализующих предложенные в диссертации выборочные методы решения задач стохастического программирования с квантильным критерием.

Теоретическая значимость полученных результатов заключается в развитии методологии построения математических моделей иерархических стохастических систем, в разработке и обосновании выборочных методов дискретизации стохастических иерархических моделей с вероятностными критериями качества, в разработке численных методов и алгоритмов решения нескольких классов задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями.

Практическая значимость результатов работы связана с возможностью применения разработанных методов для математического моделирования экономических и технических систем. С помощью предложенных методов решены задача оптимизации площади взлётно-посадочной полосы и задача прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома. Разработан ряд моделей конкретных систем, включая модель планирования производства, модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты, модель определения налоговой ставки и модель размещения предприятий. Разработанный комплекс программ позволяет синтезировать оптимальные стратегии в разработанных математических моделях с учётом характеристик моделируемых систем и на основе статистических данных об их функционировании в прошлом.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации разрабатываются методы построения математических моделей сложных систем, исследуются качественные свойства математических моделей, разрабатываются, обосновываются и реализуются в виде комплексов программ численные методы синтеза оптимальных стратегий, на основе предложенных подходов к моделированию с использованием вычислительных экспериментов проводится комплексное исследование проблемы принятия решения в сложных системах, что соответствует областям исследования 1–5 специальности 05.13.18.

Кроме того, в диссертации на основе предложенных математических моделей формулируются и исследуются задачи оптимизации, разрабатываются алгоритмы и методы их решения, что соответствует областям исследования 1, 2, 4, 5 специальности 05.13.01.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались следующих научных семинарах и конференциях: научные семинары кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (под рук. проф. Кибзуна А.И.); Общемосковский постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации» (под рук. проф. Поляка Б.Т., 3 декабря 2019 г.); Европейская мини-конференция «EURO Mini Conference on Stochastic Programming and Energy Applications» (Франция, Париж, 2014); Первый международный симпозиум «1st International Workshop on Bi-level Programming (IWOBIP'16)» (Мексика, Монтеррей, 2016 г.); Вторая европейская конференция по стохастической оптимизации «2nd European Conference on Stochastic Optimization. Stochastic Optimization in Service Science.» (Италия, Рим, 2017 г.); Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013 г.); Вторая научно-техническая конференция «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (Москва, 2013 г.). XVI и XVII Байкальские международные школы-семинары «Методы оптимизации и их приложения». (Иркутск, 2014, 2017 гг.); XV Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2015 г.); XX Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015 г.); Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций (DOOR-2016)» (Владивосток, 2016 г.); XVI–XVIII Международные конференции «Авиация и космонавтика». (Москва, 2017–2019 гг.); VII Международная конференция «Проблемы оптимизации и их приложения (OPTA-2018)» (Омск, 2018 г.); Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций (MOTOR-2019)» (Екатеринбург, 2019 г.).

Работа поддержана грантами РФФИ 13-07-13100-офи_м_РЖД, 14-07-00006-а, 17-07-00203-а, 19-07-00436-а, 20-37-70022-Стабильность, грантом РНФ 15-11-10009.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 научных работах, из которых 6 работ [1–6] в иностранных изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus, 9 работ [7–15] в российских изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus, 2 работы [16, 17] в изданиях, включённых в перечень ВАК, 11 работ [20–30] в других научных изданиях и материалах конференций. Получено два государственных свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [18, 19].

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, пять глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 255 страниц, включая 16 рисунков, 13 таблиц и список литературы, содержащий

218 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе приводится описание построения математических моделей сложных систем с вероятностными критериями. Приводится пять классов моделей.

В разделе 1.1 рассмотрена двухэтапная модель принятия решения. Случайные факторы описываются вектором X, определённом на полном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Через $\mathcal{X}$ обозначается носитель вероятностной меры $\mathbf{P}$. Предполагается, что решения принимаются последовательно на двух этапах. Стратегия первого этапа $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ выбирается, когда реализация случайного вектора X неизвестна, а стратегия второго этапа $y \in Y \subset \mathbb{R}^s$ выбирается, когда становится известной реализация случайного вектора X. Считается, что множества U и Y являются замкнутыми. Потери, связанные с реализацией стратегий u, y, описываются функцией потерь второго этапа $\Phi_2\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$, где $\mathbb{R}^* \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — расширенная действительная прямая.

Целевая функция потерь (первого этапа) $\Phi\colon U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ определяется как минимальное значение функции потерь второго этапа при известных стратегии первого этапа $u \in U$ и реализации случайных факторов $x \in \mathcal{X}$:

$$\Phi(u, x) \triangleq \inf_{y \in Y} \{\Phi_2(u, y, x) \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}, \tag{1.1}$$

где $Q\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ — функция, задающая дополнительные ограничения задачи второго этапа.

Функция вероятности задаётся как

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^*$ — фиксированный уровень функции потерь. Таким образом, $P_\varphi(u)$ — вероятность события, при котором значение функция потерь $\Phi(u, X)$ не превышает фиксированный порог φ, т. е. моделируемая система успешно функционирует.

Необходимость обеспечить с наибольшей вероятностью успешное функционирование системы приводит к задаче максимизации функции вероятности

$$\alpha_\varphi^* \triangleq \sup_{u \in U} P_\varphi(u), \quad U_\varphi^* \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi(u). \tag{1.3}$$

Другой подход к принятию решений состоит в том, что вероятность успешного функционирования системы фиксируется на некотором заданном уровне надёжности $\alpha \in (0, 1]$, а потери при этом минизируются. Для этого вводится в рассмотрение функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\} \triangleq [\Phi(u, X)]_\alpha. \tag{1.4}$$

Как видно из приведённого определения, функция квантили — это минимальный уровень потерь, который не превышается с заданной вероятностью α.

Стремление минимизировать потери на заданном уровне вероятности приводит к задаче минимизации функции квантили

$$\varphi_\alpha^* \triangleq \inf_{u\in U} \varphi_\alpha(u), \quad V_\alpha^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha(u). \tag{1.5}$$

Для данной модели приводятся достаточные условия измеримости функции потерь и полунепрерывности функций вероятности и квантили.

Доказывается теорема о полунепрерывности функций вероятности и квантили.

Теорема 1.7. *Пусть функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является нормальным интегрантом. Тогда функция вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ является полунепрерывной сверху для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$, а функция квантили $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ — полунепрерывной снизу для всех $\alpha \in (0, 1]$.*

В случае полной σ-алгебры $\mathcal{F}$ нормальным интегрантом называется функция двух аргументов, полунепрерывная снизу по первому аргументу и измеримая по совокупности аргументов.

Доказывается эквивалентность поставленных двухэтапных задач двухэтапным задачам в априорной постановке, в которых стратегия второго этапа определятся как измеримая функция случайных параметров. Для двухэтапных задач с квантильным критерием приводится обоснование доверительного метода, заключающегося в переходе к эквивалентной минимаксной задаче.

В разделе 1.2 приведены линейные двухэтапные модели, которые строятся на основе общей двухэтапной модели, но функции, описывающие потери и ограничения, являются линейными.

Первой рассмотрена модель планирования производства. Считается, что лицо, принимающее решение, является производителем продукции, которому необходимо обеспечить случайный спрос потребителей. Предполагается, что реализация случайных факторов становится известной после момента времени, в который необходимо принять первоначальное решение, и есть возможность принять дополнительное решение по факту реализации случайных параметров. Для производства продукции необходимо закупить сырьё, но на этапе первоначального планирования спрос неизвестен. А значит, невозможно определить необходимый для закупки объём сырья. Однако, имеется возможность закупить дополнительное сырьё по более высокой цене после того момента, когда реализация спроса становится известной.

В моделируемой системе имеется r типов сырья, решение о закупке которых необходимо принять на первом этапе планирования, когда реализации случайных параметров неизвестны. Вектор, составленный из объёмов закупаемого сырья, обозначается через u. Вектор цен на сырьё обозначается через $c(x)$, где x — реализация случайных факторов. На втором этапе планирования необходимо принять решение о закупке дополнительного сырья s различных типов. Вектор объёмов закупаемых ресурсов на втором этапе обозначается через y. Вектор цен на сырьё, закупаемое на втором этапе, обозначается через $q(x)$. Производитель выпускает l типов продукции. Вектор, составленный из объёмов спроса на каждый из видов продукции, обозначается через $b(x)$. Технологию производства описывают матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$ и $B(x) = (b_{ij}(x))$ на первом и втором этапах соответственно. Элементы $a_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ показывают объём i-го типа продукции, получаемого из единицы сырья j-го типа.

Описанная система принятия решений приводит к целевой функции

$$\Phi(u,x) = c^\top(x)u + \inf_{y\in Y}\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}, \tag{1.6}$$

где $Y = \{y \in \mathbb{R}^s \mid y \geqslant 0\}$.

Подход, основанный на использовании вероятностного критерия, приводит к задаче оптимизации типа (1.3)

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \to \max_{u\in U}, \tag{1.7}$$

решение которой обеспечивает стратегию, гарантирующую максимальную вероятность выполнения бюджета проекта.

Другой подход, основанный на квантильном критерии, приводит к задаче типа (1.5)

$$\varphi_\alpha(u) = [\Phi(u,X)]_\alpha \to \min_{u\in U}, \tag{1.8}$$

решение которой даёт стратегию, минимизирующую квантиль издержек при реализации проекта.

Для этой модели доказана эквивалентность априорной и апостериорной постановок и описан доверительный метод.

Второй приводится модель оценивания эффективности энергосберегающих проектов с целью выбора проектов для реализации.

В разделе 1.3 формулируется двухуровневая модель с асиметричной информацией. В моделируемой системе взаимодействуют два субъекта, принимающие решения и подчинённые иерархическому отношению. На верхнем уровне иерархии действует лидер, а на нижнем уровне — последователь. Стратегия лидера обозначается через $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, а стратегия последователя — через $y \in \mathbb{R}^s$.

Последователь принимает решение, когда известны и стратегия u, выбранная лидером, и реализация случайных факторов задачи x. Для моделирования экономических систем в первую очередь представляют интерес линейные модели принятия решений. В связи с этим считается, что выбираемая стратегия последователя является оптимальным решением задачи линейного программирования, в которой и ограничения, и целевая функции зависят от u и x:

$$c(u,x)^\top y \to \min_{y\in Y(u,x)}. \tag{1.9}$$

Множество допустимых стратегий последователя имеет вид $Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^s \mid B(u,x)y \geqslant b(u,x),\ y \geqslant 0\}$. где матрица $B(u,x) \in \mathbb{R}^{l\times s}$ и вектор $b(u,x) \in \mathbb{R}^m$ зависят от u и x. Через $Y^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg}\min\limits_{y\in Y(u,x)}\{c(u,x)^\top y\}$ обозначается множество оптимальных стратегий в задаче (1.9). Пусть $W \triangleq \{(u,x) \in U \times \mathcal{X} \mid Y^*(u,x) \neq \varnothing\}$ — множество всех пар $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$, для которых задача (1.9) имеет оптимальное решение. Вводится также обозначение $\mathcal{X}(u) \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid (u,x) \in W\}$

для множества реализаций x случайного вектора X, при которых задача последователя (1.9) имеет оптимальное решение при фиксированной стратегии лидера $u \in U$. Таким образом, если стратегия лидера $u \in U$ фиксирована, то оптимальное решение задачи последователя может рассматриваться как функция $y(\cdot)$, отображающая множество $\mathcal{X}(u)$ в $\mathbb{R}^s$. Для множества всех таких измеримых функций вводится обозначение

$$\mathcal{Y}(u) \triangleq \{y(\cdot)\colon \mathcal{X}(u) \to \mathbb{R}^s \mid y(\cdot) - (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^s))\text{-измерима}, \\ (u,x) \in W \Rightarrow y(x) \in Y^*(u,x)\}. \quad (1.10)$$

Таким образом, стратегию последователя $y(\cdot)$ можно рассматривать как функцию, описывающую его оптимальное поведение при известной реализации случайных параметров.

Потери лидера при выборе своей стратегии u, стратегии последователя y и реализации случайных параметров x описываются измеримой функцией $\Phi\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$, где $Y \triangleq \bigcup\limits_{u \in U, x \in \mathcal{X}} Y(u,x)$.

Функция квантили имеет вид

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \triangleq \min\left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi, Q(u, y(X), X) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha\right\}, \quad (1.11)$$

где $Q\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, описывающая дополнительные ограничения задачи лидера, $\alpha \in (0,1]$ — фиксированный уровень надёжности. Значение функции (1.11) показывает уровень потерь лидера, непревышение которых вместе с выполнение дополнительных ограничений гарантируется с вероятностью α. Уровень α показывает склонность лидера к риску.

Двухуровневая задача ставится следующим образом:

$$\mathcal{U} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u, y(\cdot)} \{\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \mid u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)\}. \quad (1.12)$$

Сформулированная постановка двухуровневой задачи является оптимистической в том смысле, что в ней производится одновременная минимизация и по стратегии лидера $u \in U$ и по множеству оптимальных стратегий последователя $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)$. Отсюда следует, что при наличии нескольких оптимальных стратегий последователь выбирает ту, которая наиболее благоприятна для лидера.

На базе этой модели строится две модели.

Первая модель предназначена для описания взаимодействия производителя продукции, находящегося на верхнем уровне иерархии, и поставщика ресурсов на нижнем уровне. Цель производителя — получить максимальную прибыль от производства продукции, для которой необходимо несколько ресурсов. Поставщик ресурсов производит ресурсы из нескольких видов сырья. Цель поставщика состоит в минимизации издержек на производство ресурсов. При этом у него имеется возможность часть ресурсов реализовывать на внешнем рынке. В силу того, что производитель продукции определяет условия работы поставщика, между ними устанавливается естественная иерархия, в которой производитель является лидером, а поставщик — последователем.

Стратегией лидера является вектор $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, составленный из объёмов u_i производимой продукции i-го типа. Стратегия последователя имеет вид $y \triangleq (\tilde{y}^\top, \hat{y}^\top)^\top \in \mathbb{R}^s$, в которой $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$, $\tilde{s} \triangleq \frac{s}{2}$, — вектор ресурсов, закупаемых лидером у последователя по заранее подписанному контракту по фиксированным ценам, составляющим вектор $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$ — вектор, составленный из объёмов ресурсов, предназначенных для реализации на внешнем рынке по ценам $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$. Вектор цен на продукцию, производимую лидером, обозначается через $c(x)$, поскольку цены зависят от реализаций x случайных факторов X, описывающих рыночные условия в момент продажи продукции и не известных в момент принятия решения лидером. Случайные факторы могут описываться фондовыми индексами, курсами валют, а также определяться сценариями, прогнозируемыми экспертами. Вектор рыночных цен, по которым последователь может продавать ресурсы, обозначается через $\hat{q}(x)$.

С помощью введённых обозначений издержки лидера (прибыль с противоположным знаком) можно записать так:

$$\Phi(u, y, x) = -c(x)u + \tilde{q}^\top \tilde{y}. \tag{1.13}$$

Потребность лидера в ресурсах описывается через функцию дополнительных ограничений Q, имеющую вид

$$Q(u, x, y) = \max_{i=1,\ldots,\tilde{s}} \{T_i u - \tilde{y}_i - b_i\}, \tag{1.14}$$

где T_i — i-я строка технологической матрицы T, элементы которой t_{ij} показывают объёмы i-го ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-го типа, b_i — элементы вектора b, описывающего собственные запасы ресурсов у лидера. Выполнение ограничения $Q(u, x, y) \leqslant 0$ гарантирует, что потребности лидера в ресурсах для производства продукции выполнены.

Технологию производства ресурсов из сырья описывает матрица $D = (d_{ij})$, $i = \overline{1, l_1}$, $j = \overline{1, \tilde{s}}$, в которой d_{ij} — объём сырья i-го типа, необходимого для производства единицы ресурсов j-го типа. Через $\bar{b}$ обозначается вектор, элементы которого $\bar{b}_i$ показывают объём i-го типа сырья, доступного последователю. Вектор $\bar{y}$ описывает минимальные допустимые по контракту объёмы поставок ресурсов последователя лидеру. В описанных условиях задачу последователя можно сформулировать в виде

$$\tilde{q}^\top \tilde{y} + \hat{q}(x)^\top \hat{y} \to \max_y \tag{1.15}$$

при ограничениях

$$Tu \geqslant \tilde{y}, \quad D(\tilde{y} + \hat{y}) \leqslant \bar{b}, \quad \tilde{y} \geqslant \bar{y}, \quad \tilde{y}, \hat{y} \geqslant 0.$$

Задачу лидера по определению оптимального производства продукции можно записать в виде двухуровневой задачи стохастического программирования

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) = \min \{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi,\ Q(u, y(X), X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\} \to \\ \to \min_{u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)}, \tag{1.16}$$

где множество $\mathcal{Y}(u)$ задаёт множество оптимальных стратегий последователя как функций x при фиксированном значении u и определено согласно (1.10).

Вторая модель является развитием модели оценивания эффективности энергосберегающих проектов, в которой на верхнем уровне действует инвестор проектов, а на нижнем уровне — их непосредственный исполнитель.

Изучается специальный случай двухуровневой модели, в которой случайными являются только коэффициенты линейной функции потерь нижнего уровня. Для данной модели доказаны теоремы о полунепрерывности целевой функции и функции вероятности. Приводится модель определения налоговой ставки, в которой на верхнем уровне иерархии выступает государство, а на нижнем — производитель.

В разделе 1.4 формулируется двухуровневая модель с симметричной информацией. В этом модели информация о реализациях случайных факторов не известна ни на одном из уровней иерархии. Показано, что в скалярном случае задача может быть сведена к детерминированному эквиваленту, а в случае гауссовского распределения вычисление функции потерь нижнего уровня сводится к решению параметрического семейства задач квадратичного программирования. Приводится модель инвестирования производства, построенная на базе двухуровневой модели с симметричной информацией.

В разделе 1.5 формулируется двухуровневая модель конкурентного размещения предприятия. Модель сформулирована на базе двухуровневой задачи стохастического программирования с дискретными переменными оптимизации. В сформулированной модели присутствуют два игрока (лидер и последователь), последовательно размещающие свои предприятия с целью получения дохода от потребителей. Приведены две разновидности модели: с асимметричной информаций и с симметричной информацией о спросе потребителей.

Во второй главе описывается и обосновывается процедура дискретизации вероятностной меры в изучаемых моделях. В разделе 2.1 рассмотрен общий подход к дискретизации вероятностной меры. Случайные величины, участвующие в модели, приближаются последовательностью случайных величин, сходящейся по распределению. Для специальных классов задач стохастического программирования доказывается сходимость получаемой при проведении данной аппроксимации последовательности решений. Рассматриваются модели с симметричным распределением и с монотонными функциями потерь.

В разделе 2.2 строятся выборочные аппроксимации одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. В одноэтапной задаче функция вероятности определяется как

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\},$$

где $\Phi\colon U \times \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ — функция потерь, $Q\colon U \times \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ — функция, задающая дополнительные вероятностные ограничения, $U \subset \mathbb{R}^r$ — непустое компактное множество допустимых стратегий оптимизации u. Функция квантили, как и ранее, определяется следующим образом:

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\},$$

Рассматривается задача максимизации функции вероятности

$$\alpha^* \triangleq \max_{u\in U} P_\varphi(u), \quad U^*_\varphi \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U} P_\varphi(u) \tag{2.1}$$

и задача минимизации функции квантили

$$\varphi^* \triangleq \min_{u\in U} \varphi_\alpha(u), \quad V^*_\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha(u). \tag{2.2}$$

Предлагается процедура построения выборочных аппроксимаций задач (2.1) и (2.2). Рассматривается последовательность $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ независимых случайных векторов, распределения которых совпадают с распределением случайного вектора X. Считается, что эта последовательность определена на некотором вероятностном пространстве $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$.

Частоту появления события $\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi,\, Q(u, X) \leqslant 0\}$ можно записать в виде

$$P^{(n)}_\varphi(u) \triangleq \tilde{P}^{(n)}(u,\varphi) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(\max\{\Phi(u,X_k)-\varphi, Q(u,X_k)\}),$$

где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Дискретная аппроксимация задачи максимизации функции вероятности имеет вид

$$\begin{gathered} U^{(n)}_\varphi \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U} P^{(n)}_\varphi(u), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \alpha_n \triangleq \max_{u\in U} P^{(n)}_\varphi(u), \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Используя оценку функции вероятности, можно построить оценку функции квантили

$$\varphi^{(n)}_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P^{(n)}_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{2.4}$$

Таким образом, аппроксимация задачи (2.2) может быть записана в виде

$$\begin{gathered} \varphi_n \triangleq \min_{u\in U} \varphi^{(n)}_\alpha(u), \quad n \in \mathbb{N}, \\ V^{(n)}_\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \varphi^{(n)}_\alpha(u), \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Следует отметить, что данные аппроксимации можно построить даже в том случае, когда закон распределения случайного вектора X неизвестен, а доступна только выборка его значений $\{X_k\}_{k=1}^n$.

Доказывается гипосходимость выборочных функций вероятности, следствием которой является сходимость приближённых решений как по стратегии оптимизации, так и значению критериальной функции. В нижеприведённой теореме используется понятия уклонения множества A от множества B:

$$D(A,B) \triangleq \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \|a-b\|.$$

Теорема 2.16. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) функции Φ и Q являются нормальными интегрантами.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha^*$ *($\mathbf{P}'$-п.н.) и* $\lim\limits_{n\to\infty} D\left(U_\varphi^{(n)}, U_\varphi^*\right) = 0$ *($\mathbf{P}'$-п.н.).*

Для задачи квантильной оптимизации доказывается теорема о достаточных условиях сходимости её приближённых решений, получаемых на основе выборочных аппроксимаций.

Теорема 2.17. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i)множество U компактно и непусто;

(ii) функции Φ и Q являются нормальными интегрантами, и $\Phi(u,x) > -\infty$ для всех $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$;

(iii) если $\varphi^* \neq +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\varphi})$ такая, что $|\tilde{\varphi} - \varphi^*| \leqslant \varepsilon$ и $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ *($\mathbf{P}'$-п.н.) и* $\lim\limits_{n\to\infty} D\left(V_\alpha^{(n)}, V_\alpha^*\right) = 0$ *($\mathbf{P}'$-п.н.).*

Полученные результаты уточняются для линейной двухэтапной задачи с квантильным критерием и для линейной двухуровневой задачи с квантильным критерием. Показано, что достаточные условия сходимости аппроксимаций двухуровневой задачи выполнены для почти всех уровней надёжности.

В разделе 2.3 оценивается объём выборки, при которой решение аппроксимирующей задачи, полученное на основе выборки, является ε-оптимальным решением исходной задачи с заданной вероятностью. Получены оценки для некоторых специальных случаев рассматриваемых задач

Теорема 2.22. *Пусть $\beta \in (0,1)$. Если множество U конечно и*

$$n \geqslant 2\frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|}, \tag{2.6}$$

то

$$\mathbf{P}'\left\{\hat{U}_\varphi^{(n)} \subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \geqslant \beta, \tag{2.7}$$

где $U_\varphi^\varepsilon \triangleq \{u \in U \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha^* - \varepsilon\}$. Кроме того, если $\alpha^* \leqslant \bar{\alpha} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, то неравенство (2.7) выполнено при

$$n \geqslant \frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\left(2\sqrt{(\bar{\alpha}-\varepsilon)\bar{\alpha}} + 1 + \varepsilon - 2\bar{\alpha}\right)\right|}. \tag{2.8}$$

Доказывается теорема о достаточном объёме выборки для максимизации функции вероятности в случае, когда функция вероятности является липшицевой. Доказывается теорема о достаточном объёме выборки для минимизимации функции квантили при конечном множестве допустимых стратегий.

В третьей главе разрабатываются численные методы синтеза оптимальных стратегий в сложных стохастических моделях. В разделе 3.1 описывается метод сведения двухэтапной линейной задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями к эквивалентным смешанным целочисленным линейным задачам. Доказываются теоремы об их эквивалентности.

В разделе 3.2 метод, аналогичный методу из раздела 3.1, разрабатывается для двухуровневых задач с квантильным критерием вида (1.12). Используются обозначения:

$$\Lambda(u,x) \triangleq \{\lambda \geqslant 0 \mid B(u,x)^\top \lambda \leqslant c(u,x)\},$$
$$\Lambda^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg}\max_{\lambda}\{b(u,x)^\top \lambda \mid \lambda \in \Lambda(u,x)\},$$
$$V(u,x) \triangleq \{(y,\lambda) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^l \mid y \in Y^*(u,x),\ \lambda \in \Lambda^*(u,x)\}.$$

Предполагается, что случайный вектор X имеет дискретное распределение с реализациями x_k, имеющими вероятности

$$p_k = \mathbf{P}\{X = x_k\} > 0,\ k = \overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{3.1}$$

Через

$$\overline{\psi}_\alpha(u) \triangleq \inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}(u)} \varphi_\alpha(u, y(\cdot))$$

обозначается значение критериальной функции задачи (1.12) при фиксированной стратегии $u \in U$. Предполагается существование функций $\gamma_i\colon U \times Y \to \to [0,+\infty)$, $i = 1, 2$, таких, что

$$\gamma_1(u,y) \geqslant \Phi(u,x,y) - \overline{\psi}_\alpha(u) \text{ для всех } (u,x,y) \in U \times \mathcal{X} \times Y. \tag{3.2}$$

и

$$\gamma_2(u,y) \geqslant Q(u,x,y) \text{ для всех } (u,x,y) \in U \times \mathcal{X} \times Y. \tag{3.3}$$

Если значения $\Phi(u,x,y)$ имеют нижнюю границу $\bar{\gamma}_1$ на $U \times \mathcal{X} \times Y$, то можно установить

$$\gamma_1(u,y) = \max_{k=\overline{1,n}}\{\Phi(u,x_k,y) - \bar{\gamma}_1\}$$

для всех $u \in U$, $y \in Y$.

Вводится штрафная функция $\chi\colon U \times \mathcal{X} \times Y \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ множества $V(u,x)$, т. е. обладающая свойствами

$$\chi(u,x,y,\lambda) \leqslant 0 \text{ для всех } (y,\lambda) \in V(u,x), \tag{3.4}$$
$$\chi(u,x,y,\lambda) > 0 \text{ для всех } (y,\lambda) \notin V(u,x). \tag{3.5}$$

Например, эту функцию можно определить следующим образом:

$$\chi(u,x,y,\lambda) = \max\{\max_{i=1,\ldots,m}\{b_i(u,x) - A_i(u,x)y\},\ \max_{j=1,\ldots,k}\{(A^\top)_j(u,x)\lambda - c_j(u,x)\},$$
$$\|(B(u,x)y - b(u,x))^\top\lambda\|,\ \|(A^\top(u,x)\lambda - c(u,x))^\top y\|\}. \tag{3.6}$$

В качестве нормы $\|\cdot\|$ рассматривается максимальный модуль координат вектора.

Рассматривается задача смешанного математического программирования

$$\varphi \to \inf_{\varphi\in\mathbb{R}, u\in U, y^1,\ldots,y^n, \lambda^1,\ldots,\lambda^n, \delta\in\{0,1\}^n} \tag{3.7}$$

при ограничениях

$$\Phi(u,x_k,y^k)-\gamma_1(u,y^k)(1-\delta_k)\leqslant\varphi,\quad k=\overline{1,n}, \tag{3.8}$$

$$Q(u,x_k,y^k)-\gamma_2(u,y^k)(1-\delta_k)\leqslant 0,\quad k=\overline{1,n}, \tag{3.9}$$

$$\delta_k\chi(u,x_k,y^k,\lambda^k)\leqslant 0,\quad k=\overline{1,n}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}p_k\delta_k\geqslant\alpha, \tag{3.11}$$

$$y^k\geqslant 0,\ \lambda^k\geqslant 0,\quad k=\overline{1,n}. \tag{3.12}$$

Теорема 3.3. *Пусть случайный вектор X имеет конечное число реализаций, удовлетворяющих* (3.1), *и известны функции γ_1, γ_2, χ, обладающие свойствами* (3.2)–(3.5). *Тогда*

1) *для каждого решения $(u,y(\cdot))$ задачи* (1.12) *существсвуют значения переменных φ, y^1, …, y^n, λ^1,…, λ^n, δ_1,…, δ_n такие, что*

$$(\varphi,u,y^1,\ldots,y^n,\lambda^1,\ldots,\lambda^n,\delta_1,\ldots,\delta_n)$$

является решением задачи (3.7)–(3.12);

2) *для каждого решения $(\varphi,u,y^1,\ldots,y^n,\lambda^1,\ldots,\lambda^n,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ задачи* (3.7)–(3.12) *существует функция $y(\cdot)$ такая, что $(u,y(\cdot))$ — решение задачи* (1.12);

3) *оптимальные значения целевых функций* (1.12) *и* (3.7)–(3.12) *равны, и они достигаются (либо не достигаются) в обеих задачах одновременно;*

4) *если оптимальные значения целевых функций* (1.12) *и* (3.7)–(3.12) *не достигаются, то минимизирующие последовательности переменных u в обеих задачах совпадают.*

Доказываются теоремы о свойствах множеств допустимых стратегий и о существовании решения задачи.

В разделе 3.3 стохастическая двухуровневая задача размещения предприятия сводится к эквивалентной двухуровневой дискретной детерминированной задаче. Разрабатываются методы построения верхних и нижних оценок оптимального значения её критериальной функции. Описывается алгоритм поиска локально-оптимального решения. Приводятся результаты численных экспериментов.

В разделе 3.4 разрабатывается численный метод решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием и функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру:

$$\Phi(u,x)\triangleq\max_{i=\overline{1,I}}\left\{\varphi_i^\top(x)g_i(u)\right\},$$

где

$$\varphi_i(x)\triangleq(\varphi_{i1}(x),\ldots,\varphi_{iL}(x))^\top,\quad i=\overline{1,I},$$

$$g_i(u)\triangleq(g_{i1}(u),\ldots,g_{iJ}(u))^\top,\quad i=\overline{1,I}.$$

Предполагается, что φ_{il}, $i = \overline{1, I}$, $l = \overline{1, L}$, — выпуклые на $\mathbb{R}^r$ функции, g_{ij}, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$ — выпуклые на U функции, $\varphi_{il}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^r$, $g_{ij}(u) \geqslant 0$ для всех $u \in U$. Случайный вектор X распределён по стандартному нормальному закону. Решается задача квантильной оптимизации

$$u_\alpha \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{3.13}$$

Для решения поставленной задачи вероятностная мера $\mathbf{P}$ дискретизируется следующим образом. Генерируется n точек x_k, $k = \overline{1, n}$, в соответствии с плотностью стандартного нормального распределения. Задаётся дискретный случайный вектор $\bar{X}$, для которого

$$\overline{\mathbf{P}}\{\bar{X} = x_k\} = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1, n},$$

где через $\overline{\mathbf{P}}$ обозначена соответствующая вероятностная мера.

На основе доверительного метода ставится задача

$$(\bar{S}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \triangleq \arg\min_{\substack{S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha, \\ u \in U}} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u, x) \right\}, \tag{3.14}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha = \left\{ S \subset \{x_1, \ldots, x_n\} \mid \overline{\mathbf{P}}(S) \geqslant \alpha \right\}.$$

Для каждого фиксированного множества $S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ получается задача выпуклого программирования

$$\bar{u}_S \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u, x) \right\}. \tag{3.15}$$

Значение функции максимума

$$\Psi(S, u) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(u, x) \tag{3.16}$$

можно легко найти перебором всех точек $x_k \in S$.

Теорема 3.7. *Если множество U непусто и компактно, $\varphi_\alpha(u_\alpha) > 0$ и все функции φ_{il}, $i = \overline{1, I}$, $l = \overline{1, L}$, не являются постоянными, то*

$$\min_{S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha} \Psi(S, \bar{u}_S) \to \varphi_\alpha(u_\alpha) \text{ при } n \to \infty$$

при почти всех реализациях последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$.

Численный метод состоит из двух этапов. На первом этапе строится начальное приближение с помощью оптимизации на доверительном множестве в виде шара. На втором этапе полученное решение улучшается с помощью метода поиска с чередующимися окрестностями.

I этап. Вначале строятся два множества $\bar{B}_{r_\alpha}$ и $\bar{B}_\rho$. Множество $\bar{B}_{r_\alpha}$ состоит из точек x_k, попавших в шар B_α с центром в нуле вероятностной меры r, таких, что $\overline{\mathbf{P}}(\bar{B}_{r_\alpha}) \geqslant \alpha$. При необходимости множество $\bar{B}_{r_\alpha}$ следует расширить, чтобы было выполнено указанное неравенство. Множество $\bar{B}_\rho$ состоит из точек x_k, попавших в ядро $K_\alpha = \{x \mid \|x\| \leqslant \rho_\alpha\}$, где ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Решается задача (3.15) для этих двух множеств. В результате решения этих задач находятся $\bar{u}^{r_\alpha} \triangleq \bar{u}_{\bar{B}_{r_\alpha}}$ и $\bar{u}^{\rho} \triangleq \bar{u}_{\bar{B}_{\rho}}$. Вычисляются вероятностные меры

$$\bar{P}_{r_\alpha} \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{r_\alpha}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha})\right\},$$
$$\bar{P}_{\rho} \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{\rho}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{\rho}, \bar{u}^{\rho})\right\}.$$

Рассматривается шар радиуса $R \in (\rho, r_\alpha)$. Для него находится по вышеописанной схеме значение функции $\Psi(\bar{B}_R, u^R)$. Если при этом

$$\bar{P}_R \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{r_\alpha}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha})\right\} \geqslant \alpha,$$

то будут выполняться неравенства

$$\Psi(\bar{B}_\rho, \bar{u}^\rho) \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(\bar{u}_\alpha) \leqslant \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha}),$$

где через $\bar{\varphi}_\alpha$ обозначена функция квантили для дискретизированной меры.

Выбирается минимальный радиус R шара $\bar{B}_R$ из отрезка $[\rho_\alpha, r_\alpha]$ такой, что $\bar{P}_R \geqslant \alpha$, например, методом дихотомии. Следует отметить, что если $R_1 < R_2$, то

$$\Psi(\bar{B}_{R_1}, \bar{u}^{R_1}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{R_2}, \bar{u}^{R_2}),$$

так как $B_{R_1} \subset B_{R_2}$. При вычислении вероятностной меры $\overline{P}_{R_2}$ для каждого нового радиуса R_2 следует рассматривать только те точки, которые не попали в B_{R_1}, если $R_1 < R_2$, считая, что мера $\overline{\mathbf{P}}(B_{R_1})$ известна, так как она найдена ранее.

II этап. Продолжается варьирование доверительного множества $S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ с использованием поиска с чередующимися окрестностями. С этой целью рассматривается множество

$$S_R \triangleq \left\{x_k \mid \Phi(\bar{u}^R, x_k) \leqslant \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R),\ k = \overline{1, n}\right\}. \tag{3.17}$$

Необходимо исключить из него s случайных точек x_k, в которых $\Phi(\bar{u}^R, x_k) - \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R) > -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Ко множеству S_R добавляются s ближайших точек, лежащих вне S_R. В результате получается новое доверительное множество $S^{(1)}$. Для него решается минимаксная задача (3.15). Получается новая стратегия $\bar{u}^{(1)}$. Если для неё значение целевой функции меньше, чем для первоначальной стратегии u^R, то строится новое доверительное множество

$$S^{(2)} = \left\{x_k \mid \Phi(\bar{u}^{(1)}, x_k) \leqslant \Psi(S^{(1)}, \bar{u}^{(1)}),\ k = \overline{1, n}\right\}. \tag{3.18}$$

В противном случае увеличивается значение ε и предпринимается попытка снова построить множество $S^{(1)}$. Применяя ко множеству $S^{(2)}$ ту же процедуру, что и ко множеству S_R, находится множество $S^{(3)}$ и снова решается минимаксная задача (3.15) и т. д. Перед каждой итерацией первоначальное значение ε восстанавливается. Процедура останавливается, когда увеличение значения ε перестаёт приносить результаты.

В разделе 3.5 на основе разработанного численного метода предлагается алгоритм решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. В данной задаче функция потерь имеет полиэдральную структуру:

$$\Phi(u,x) = \max_{i=\overline{1,l_1}} \{A_{1i}^\top u + B_{1i}^\top x + b_{1i}\}. \tag{3.19}$$

Вероятностные ограничения описываются функцией

$$Q(u,x) = \max_{j=\overline{1,l_2}} \{A_{2j}^\top u + B_{2j}^\top x + b_{2j}\},$$

где $A_{1i}^\top$, $B_{1i}^\top$, $A_{2j}^\top$, $B_{2j}^\top$ — строки матриц $A_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times m}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times m}$ соответственно; b_{1i}, $i = \overline{1,l_1}$, b_{2j}, $j = \overline{1,l_2}$ — координаты векторов $b_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$ соответственно. Считается, что случайный вектор X имеет строго положительную плотность распределения вероятностей $f(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$. Кроме того, предполагается, что матрицы B_1 и B_2 не содержат нулевых строк.

Функция вероятности определена соотношением

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi, \quad Q(u,X) \leqslant 0\},$$

а функции квантили —

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{3.20}$$

где $\alpha \in (0, P^*)$,

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\}.$$

Множество допустимых стратегий

$$U = \{u \in \mathbb{R}^r \mid A_3 u \leqslant b_3\} \tag{3.21}$$

компактно и непусто, где $b_3 \in \mathbb{R}^{l_3}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{l_3 \times r}$.

Задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием формулируется следующим образом:

$$\varphi_\alpha^* \triangleq \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{3.22}$$
$$V_\alpha^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u).$$

Выборочная аппроксимация поставленной задачи имеет вид (2.5) и сводится к эквивалентной задаче комбинаторной оптимизации. Для её описания вводится целочисленный вектор $z = (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{Z}_+^l$ такой, что

$$\|z\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{l} z_i = \lfloor (1-\alpha) n \rfloor.$$

Значение z_1 показывает число исключённых точек из множества $\mathcal{X}_0$, соответствующих первому ограничению (задаваемому строкой $B_1^\top$). Множество, получаемое из $\mathcal{X}_0$ исключением данных точек, обозначается через $\mathcal{X}^1$. Значение z_2 показывает количество исключаемых точек из множества $\mathcal{X}^1$, соответствующих второму ограничению (задаваемому строкой $B_2^\top$). Ранее исключенные точки повторно не учитываются. Остальные значения z_i определяются аналогично. Множество $\mathcal{X}^l$ обозначается через $\mathcal{X}(z)$. Вводится обозначение

$$h_i(z) \triangleq \max_{x\in\mathcal{X}(z)} B_i^\top x, \quad i=\overline{1,l}.$$

Задача оптимизации выборочной квантили эквивалентна задаче

$$\varphi_n = \min_{u\in U,\, \varphi\in\mathbb{R},\, z\in\mathbb{Z}_+^l} \varphi \tag{3.23}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A_{1i}^\top u + h_i(z) + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i=\overline{1,l_1}, \\ A_{2j}^\top u + h_{l_1+j}(z) + b_{2j} \leqslant 0, \quad j=\overline{1,l_2}, \\ \|z\|_1 = \lfloor (1-\alpha)n \rfloor. \end{cases}$$

Если зафиксировать переменные z, то задача (3.23) становится задачей линейного программирования и может быть решена соответствующими методами. Значение критериальной функции (3.23) при фиксированном значении z обозначается через $\varphi(z)$.

Предполагается, что задано начальное решение $z = z^0$. Структура окрестностей z^0 для поиска новых решений задаётся как

$$O_\nu(z^0) \triangleq \{z\in\mathbb{Z}_+^l \mid \|z\|_1 = \lfloor(1-\alpha)n\rfloor,\ \|z-z^0\|_1 \leqslant 2+(\nu-1)\Delta\},$$

где Δ — положительный параметр, $\nu\in\{1,2,\ldots,\nu_{\max}\}$.

Использование окрестностей вида $O_1(\cdot)$ для локального поиска нецелесообразно, потому что возможна ситуация, когда $z\in O_1(z^0)$ и $\mathcal{X}(z)=\mathcal{X}(z^0)$. Поэтому строится более широкая окрестность $\tilde{O}_1(\cdot)$. Все точки, принадлежащие окрестности $O_1(z^0)$, включаются в окрестность $\tilde{O}_1(z^0)$. Если $\mathcal{X}(z)=\mathcal{X}(z^0)$ при $z=z^0+\delta$, где $\delta_{i_1}=1$, $\delta_{i_2}=-1$, и $\delta_i=0$ при $i\neq i_1$ и $i\neq i_2$, то находится $z^1=z^0+j\delta$, $j\in\mathbb{N}$ с минимальным значением j таким, что $z^1\in\mathbb{Z}_+^l$ и $\mathcal{X}(z^1)\neq\mathcal{X}(z^0)$. Если такое значение z^1 существует, то решение z^1 включается в окрестность $\tilde{O}_1(\cdot)$.

Для решения задачи (3.23) предлагается алгоритм, основанный на поиске с чередующимися окрестностями.

Алгоритм 3.3.

1. Выбрать начальное решение z, установить $\nu:=1$.

2. Пока не выполнено условие $\nu=\nu_{\max}$, повторить шаги:

а) выбрать случайное решение $z'\in O_\nu(z)$;

б) найти точку локального минимума z'' (по отношению к окрестностям $\tilde{O}_1(\cdot)$), применяя процедуру локального поиска с начальным решением z';

в) если $\varphi(z'') < \varphi(z)$, то установить $z := z''$ и $\nu := 1$, иначе $\nu := \nu + 1$.

Значение z, получаемое с помощью приведённого алгоритма задаёт доверительное множество $\mathcal{X}(z)$. Кроме того, оптимальное значение u в задаче (3.23) является допустимым решением задачи аппроксимирующей задачи, и φ — хорошее (но не обязательно оптимальное) значение критериальной функции. Из теоремы 2.17 следует, что решение u обеспечивает близкое к оптимальному значение критериальной функции в исходной задаче (3.22) при достаточно больших значениях n.

Для поиска решения задачи (3.22) предлагается нижеприведённый алгоритм. Основная идея этого алгоритма заключается в увеличении объёма выборки до тех пор, пока не стабилизируется значение критериальной функции.

Алгоритм 3.4.

0. Выбрать начальное значение $n \in \mathbb{N}$ и шаг $\Delta_n \in \mathbb{N}$. Сгенерировать реализации $x_1, \dots, x_n$ случайного вектора X.

1. Найти начальное решение z^n с помощью процедуры, описанной в разделе 3.4.

2. Решить задачу (3.23), используя алгоритм 3.3 с начальным решением z^n. Пусть u^n — лучшее найденное значение переменной u в этой задаче.

3. Оценить значение $\varphi_\alpha(u^n)$ функции квантили (3.20) по выборке объёма $N \gg n$.

4. Если выполнен критерий окончания, то взять u^n в качестве приближённого решения задачи (3.22).

5. Сгенерировать реализации $x_{n+1}, \dots, x_{n+\Delta_n}$ случайного вектора X. Присвоить $n := n + \Delta_n$.

6. Найти значение переменной z, соответствующее решению $u^{n-\Delta_n}$. Установить $z^n := z$. Перейти к шагу 2.

В приведённом алгоритме могут быть использованы различные критерии окончания, например
$$|\varphi_\alpha(u^n) - \varphi_\alpha(u^{n-\Delta_n})| \leqslant \varepsilon$$
или $n \geqslant n_{\max}$, где ε, $n_{\max}$ — заданные параметры.

В разделе 3.6 разработанный численный метод применятся для построения алгоритма решения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием и билинейной функцией потерь. Разработанный алгоритм сходен с алгоритмом из раздела 3.5, но использует другую структуру окрестностей решений.

В четвёртой главе разрабатываются методы построения доверительных множеств поглощения в стохастических системах. Предполагается, что известна зависимость $z(y, x)$ вектора $z \in \mathbb{R}^l$ терминального состояния системы от вектора начальных позиций $y \in \mathbb{R}^s$ системы и от реализации $x \in \mathbb{R}^m$ случайного вектора X, влияющего на положение системы. Пусть вектор терминального состояния $z(y, x)$ должен удовлетворять заданным ограничениям
$$\Phi(y, x) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, x)) \leqslant \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$
где функция $\tilde{\Phi}(z)$ описывает эти ограничения. Устанавливается вероятность вы-

полнения терминальных ограничений

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{4.2}$$

Множество значений y, для которых выполнено неравенство

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}. \tag{4.3}$$

называется доверительным множеством поглощения. Задача построения множества поглощения аналогична задаче построения множества уровня функции вероятности.

В разделе 4.1 приводятся два метода решения этой задачи. Первый метод основан на построении внутренних аппроксимаций множества поглощения с помощью доверительного метода. Предлагаются способы выбора доверительных множеств, позволяющие получить приемлемую внутреннюю аппроксимацию множества поглощения. Рассматривается функция максимума

$$\psi(y, S) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(y, x).$$

Для построения доверительного множества поглощения применяется доверительный метод. Фиксируется множество S такое, что $\mathbf{P}(S) \geqslant \alpha$, и рассматриваются множества

$$\mathcal{Y}_\varphi(x) \triangleq \{y \mid \Phi(y, x) \leqslant \varphi\},$$
$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \bigcap_{x \in S} \mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \mid \psi(y, S) \leqslant \varphi\}.$$

В соответствии с доверительным методом получается внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \mathcal{Y}_\varphi(S).$$

Если при этом перебрать все доверительные множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$, то получится точное множество поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \bigcup_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \mathcal{Y}_\varphi(S).$$

Исследуются свойства множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$.

Рассматривается некоторая точка $\tilde{x} \in S$ и $N_i(\tilde{x})$ — прямая, содержащая точку $\tilde{x}$ и являющаяся параллельной i-й координатной оси. Вводятся обозначения:

$$a_i(\tilde{x}) \triangleq \min_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i,$$
$$b_i(\tilde{x}) \triangleq \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i.$$

Определяется часть $\partial_i S$ границы множества S следующим образом:

$$\partial_i S \triangleq \bigcup_{\tilde{x} \in S} [\{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \mid x_i = a_i(\tilde{x})\} \cup \{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \mid x_i = b_i(\tilde{x})\}]. \tag{4.4}$$

Теорема 4.3. *Пусть множество S компактно. Пусть функция $(y,x) \mapsto \Phi(y,x)$ непрерывна и квазивыпукла по координате x_i вектора $x \in \in S \subset \mathbb{R}^m$ для каждого $y \in \mathbb{R}^s$. Тогда*

$$\psi(y,S) = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y,x), \tag{4.5}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) = \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S), \tag{4.6}$$

где $\partial_i S$ — часть границы множества S, определяемая выражением (4.4).

Таким образом, для вычисления функции $\psi(y,S)$ и построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ достаточно перебрать только точки, лежащие на части $\partial_i S$ границы ∂S доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$.

Рассматривается множество

$$\mathcal{Z}_\varphi \triangleq \{z \in \mathbb{R}^l \mid \tilde{\Phi}(z) \leqslant \varphi\}.$$

Теорема 4.4. *Пусть отображение $y \mapsto z(x,y)$ при заданном $x \in \mathcal{X}$ является гомеоморфизмом, а множество $\mathcal{Z}_\varphi$ компактно. Тогда прообразом множества $\mathcal{Z}_\varphi$ при данном отображении является множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. При этом*

$$\partial \mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \mid z(x,y) \in \partial \mathcal{Z}_\varphi\}. \tag{4.7}$$

Таким образом, получаем следующий алгоритм построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ при выполнении условий теорем 4.3 и 4.4.

Алгоритм 4.1.

1. Для различных $x \in \partial_i S$ построить множества $\partial \mathcal{Y}_\varphi(x)$ по формуле (4.7).

2. По границе $\partial \mathcal{Y}_\varphi(x)$ восстановить множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ для всех $x \in \partial_i S$.

3. Найти пересечение множеств $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по всем $x \in \partial_i S$.

Второй метод построения доверительных множеств поглощения основан на выборочных оценках функции вероятности. Приводятся оценки объёма выборки, достаточного для построения множества поглощения.

Разработанные методы применяются для построения детерминированной и выборочной аппроксимаций доверительного множества поглощения в двухэтапной модели планирования производства.

В разделе 4.2 на основе предложенных методов строится множество допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома. В рассматриваемой задаче предполагается, что некоторый самолёт вылетает из города N в город M, до которого время полёта равно t. Посадка самолёта в аэропорту города M возможна, если скорость ветра в продольном и боковом направлениях не выходит за допустимые пределы

$$\mathcal{W}_t = \{(w_x^t, w_z^t) \mid |w_z^t| \leqslant w_z^{\max}, w_x^{\min} \leqslant w_x^t \leqslant w_x^{\max}\}, \tag{4.8}$$

где w_x^t, w_z^t — скорости ветра в точке посадки в момент посадки самолета в продольном и боковом направлениях.

В нулевой момент, т. е. в момент вылета самолета из города N, в аэропорту города M скорость ветра была (w_x^0, w_z^0). Но по истечении времени t ветер может значительно измениться и его скорости не будут удовлетворять допустимым значениям, т. е. посадка самолёта станет невозможной. В рассматривамой модели значение скорости ветра w^t в момент t связано со скоростью ветра w^0 в нулевой момент соотношениями:

$$w_x^t = (v^0 + \xi)\cos(\beta^0 + \eta), \tag{4.9}$$

$$w_z^t = (v^0 + \xi)\sin(\beta^0 + \eta), \tag{4.10}$$

где v^0, β^0 — полярные координаты вектора w^0, а ξ и η — независимые случайные величины, имеющие усечённое нормальное распределение

$$\xi \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\xi^2), \quad \eta \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\eta^2),$$

причём $\xi \in [v_*, v^*]$, $\eta \in [\beta_*, \beta^*]$.

Ищется вероятность такого события, что самолету разрешат посадку в городе M, если в момент его вылета из города N вектор скорости ветра был равен w^0:

$$P(w^0) = \mathbf{P}\{w^t(w^0, \xi, \eta) \in \mathcal{W}_t\}. \tag{4.11}$$

Необходимо построить множество $\mathcal{W}_0$ допустимых скоростей ветра w^0 в начальный момент, при которых по происшествии времени t скорость ветра w^t не выйдет за допустимые пределы с вероятностью α:

$$\mathcal{W}_0 = \{w^0 \mid P(w^0) \geqslant \alpha\}. \tag{4.12}$$

Для поставленной задачи уточняются способы выбора доверительных множеств для построения множества поглощения. Задача решается для данных: $\alpha = 0{,}99$; $\sigma_\xi = 1{,}9$ [м/с]; $\sigma_\eta = 27^0$; $w_z^{\max} = 15$ [м/с]; $w_x^{\min} = -25$ [м/с]; $w_x^{\max} = 10$ [м/с]. На рисунке 1 сплошной линией обозначена граница доверительного множества поглощения, полученная с помощью методов, описанных в монографии А. И. Кибзуна, Ю. С. Кана, шрихпунктирной линией — граница множества поглощения, построенного с помощью предложенной внутренней аппроксимации, точечной линией — с помощью метода, основанного на построении выборочных оценок функции вероятности.

В пятой главе приводится описание разработанного комплекса программ, реализующих выборочные методы решения задач стохастического программирования, и результаты его применения для решения задач, поставленных в работе.

Раздел 5.1 посвящён архитектуре программного комплекса. Алгоритмы, предложенные в работе для решения задач стохастического программирования с квантильным критерием, реализованы в программном комплексе на языке Matlab. Разработанный комплекс имеет модульную архитектуру. Каждый модуль предназначен для решения одной из следующих задач:

1) SSLPQ — одноэтапная задача стохастического линейного программирования;

2) TSBLPQ — двухэтапная задача стохастического программирования с билинейной функцией потерь;

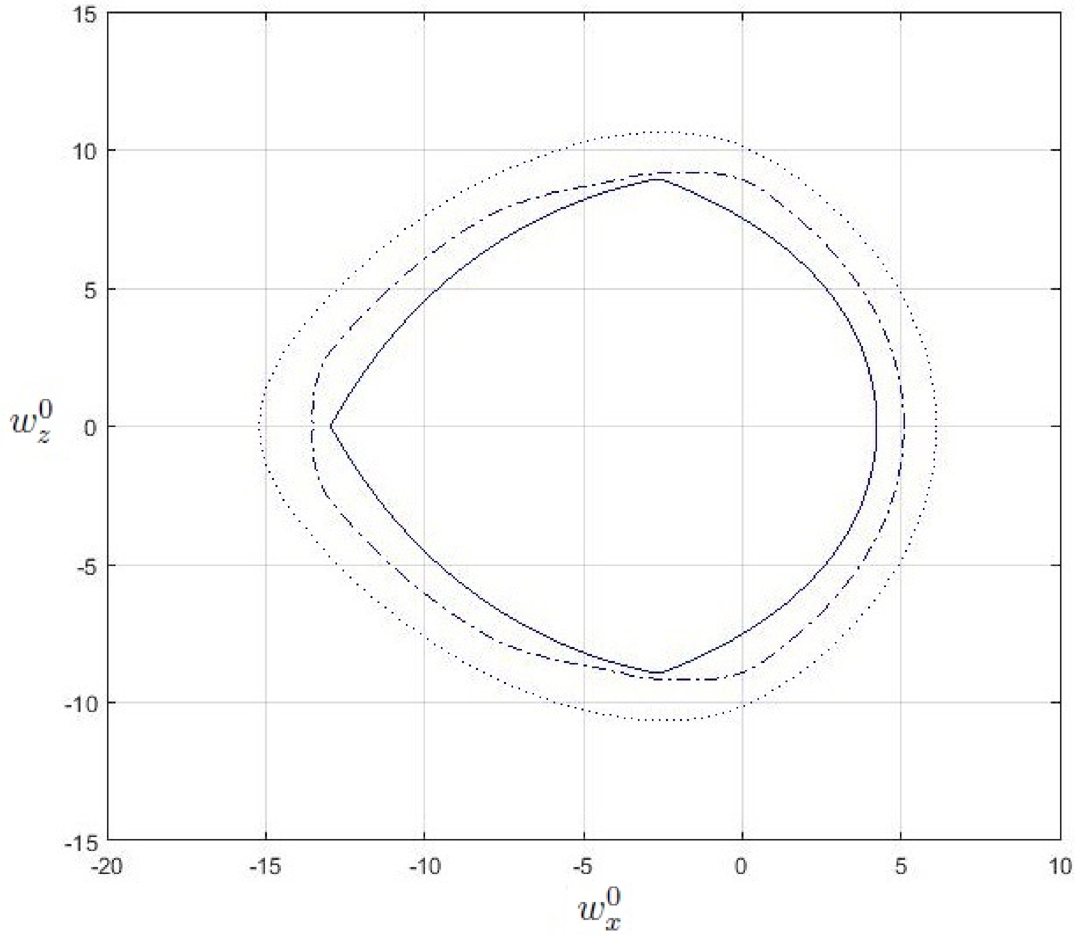

Рисунок 1. Аппроксимации доверительного множества поглощения

3) BLSPQ — двухуровневая задача стохастического программирования;

4) ID — двухэтапная задача распределения инвестиций в энергосберегающие проекты.

Для взаимодействия различных модулей, ввода и вывода данных предназначен основной модуль программы (Main). На вход модулю Main пользователь вводит векторы и матрицы, определяющие функции из описания задач стохастического программирования, и задаёт распределение случайных параметров. Распределение может задаться с помощью библиотеки стандартных распределений Matlab. Предусмотрен режим считывания выборки реализаций случайных параметров из файла для работы программы, когда истинное распределение случайных параметров не известно, но доступен набор реализаций случайных параметров. За работу со случайными параметрами отвечает модель статистики (Statistics). Модель Main в зависимости от введённой задачи запускают подпрограммы предназначенные для её решения.

Структура комплекса программ изображена на рис. 2.

Для решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования из модуля Main на вход модулю SSLPQ передаётся описание задачи в виде задающих её матриц и векторов, выборка, генерируемая или загружаемая из модуля Statistics, указывается алгоритм решения и его параметры. При

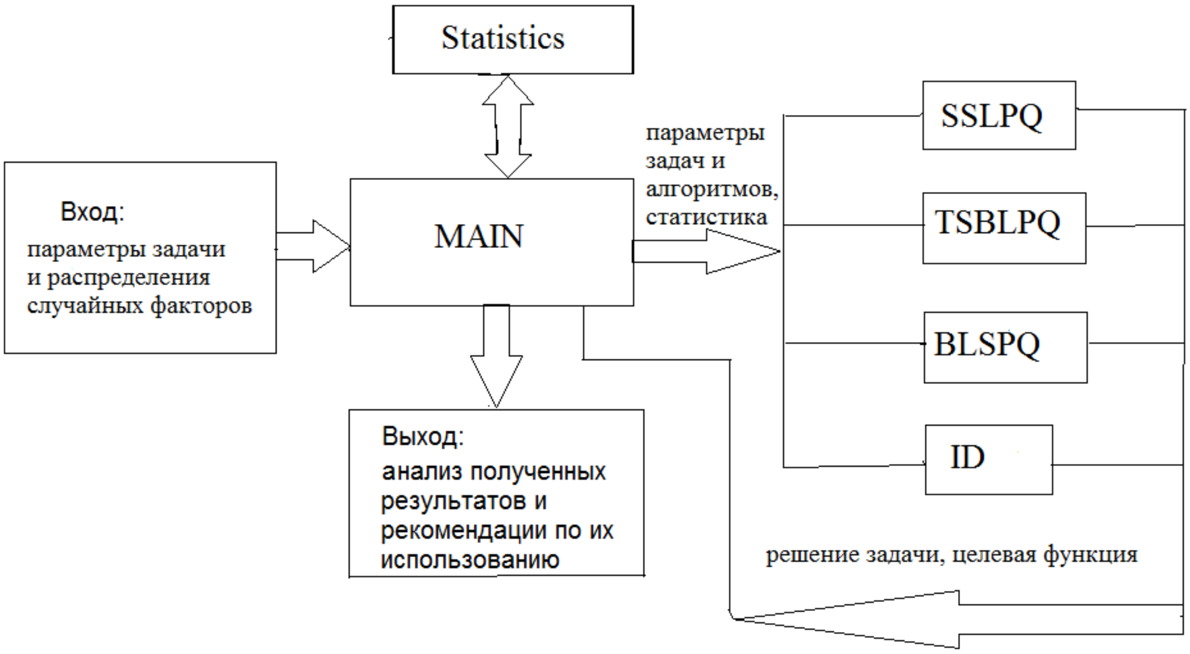

Рисунок 2. Структура комплекса программ.

использовании алгоритма 3.4 статистические данные подаются на вход модулю несколько раз до выполнения критерия окончания алгоритма. В результате решения задачи из модуля SSLPQ в модуль Main передаются найденные стратегии и значение критериальной функции.

Между модулями Main и TSBLPQ, а также между модулями Main и BLSPQ, разработана аналогичная процедура взаимодействия. Входными данными этих модулей являются параметры задач и алгоритмов, статистика. Выходными данными являются решения задач.

Двухэтапная задача распределения инвестиций в энергосберегающие проекты решается с помощью модуля ID, на вход которому поступают параметры задачи и статистика, выбираются используемые критериальные функции. Выходными данными являются найденные стратегии и значения критериальных функций.

В разделе 5.2 приводятся результаты решения одноэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, в том числе задач большой размерности.

В разделе 5.3 описаны результаты решения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

В разделе 5.4 с помощью разработанного комплекса программ решается задача выбора энергосберегающих проектов.

В разделе 5.5 решена двухуровневая задача планирования производства.

В разделе 5.6 приведены и проанализированы результаты решения задачи определения налоговой ставки.

В разделе 5.7 решается задача оптимизации параметров взлётно-посадочной полосы. Приводится постановка задачи, которая сводится к задаче минимизации функции квантили. Приводится алгоритм её решения, реализованный в программном комплексе, и результаты численных экспериментов.

В заключении подводятся итоги работы, описываются перспективы дальнейших исследований.

На защиту выносятся следующие положения:

1) подход к построению математических моделей стохастических иерархических систем с учётом вероятностных критериев [1, 6–9, 12, 14, 16, 20–22, 29];

2) доказательство сходимости решений выборочных аппроксимаций одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями и оценки достаточного объёма выборки для построения аппроксимаций [4, 10–12, 24–26, 28];

3) численные методы решения одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями [1, 2, 5, 8, 10, 16, 23, 25];

4) алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием [3, 13, 27];

5) численные методы построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в стохастических системах [15, 30];

6) комплекс программ, реализующий разработанные численные методы и алгоритмы синтеза стратегий в стохастических системах [17–19].

Публикации в иностранных изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus

1. *Dempe S., Ivanov S., Naumov A.* Reduction of the bilevel stochastic optimization problem with quantile objective function to a mixed-integer problem // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2017. — V. 33. — No. 5. — P. 544–554.
2. *Ivanov S.V., Kibzun A.I., Stepanova A.S.* An algorithm to solve a quantile optimization problem with loss function having a separable structure and its application to an aerospace problem // Applied stochastic models in business and industry. — 2019. — V. 35. — P. 1269–1281.
3. *Ivanov S.V., Kibzun A.I., Mladenović N., Urošević D.* Variable Neighborhood Search for Stochastic Linear Programming Problem with Quantile Criterion // Journal of Global Optimization. — 2019. — V. 74. — No. 3. — P. 549–564.
4. *Ivanov S.V., Zhenevskaya I.D.* Estimation of the necessary sample size for approximation of stochastic optimization problems with probabilistic criteria // Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — V. 11548. — P. 552–564.
5. *Kibzun A.I., Ivanov S.V.* Convergence of Discrete Approximations of Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria // Lecture Notes in Computer Science. —2016. — V. 9869. — P. 525–537.
6. *Ivanov S.V., Korbulakova V.K.* Bilevel Programming Problem with Quantile Follower's Objective Function // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — V. 1623. — P. 28–34.

Публикации в российских изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus

7. *Иванов С.В.* Двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 130–144.
8. *Иванов С.В., Морозова М.В.* Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 3. — С. 109–122.
9. *Иванов С.В., Кибзун А.И., Осокин А.В.* Оптимизационная стохастическая модель назначения локомотивов для перевозки грузовых составов // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 11. — С. 80–95.
10. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 3. — С. 134–143 / *Ivanov S.V., Kibzun A.I.* Sample Average Approximation in a Two-Stage Stochastic Linear Program with Quantile Criterion // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2018. — V. 303. – Suppl. 1. P. 115–123.
11. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 2. — С. 19–35.
12. *Иванов С.В.* Задача двухуровневого программирования со случайными параметрами в целевой функции последователя // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25. — № 4. — С. 27–45. / *Ivanov S.V.* A Bilevel Stochastic Programming Problem with Random Parameters in the Follower's Objective Function // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — V. 12. — No. 4. — P. 658–667.
13. *Иванов С.В., Кибзун А.И., Младенович Н.* Поиск с чередующимися окрестностями для двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 1. — С. 54–66.
14. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Общие свойства двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 6. — С. 70–90.
15. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. — 2020. — № 4. — С. 21–36.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

16. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Двухуровневая задача стохастического программирования с несколькими последователями и её приложение к оптимизации энергосберегающих проектов // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2014. — №77.

17. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Программно-алгоритмический комплекс для оценки эффективности проектов по экономии электроэнергии на железнодорожном транспорте // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2013. — № 12. — С. 3–9.

Программы для ЭВМ

18. *Иванов С.В.* Оценка эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов на железнодорожном транспорте // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015610746 от 16 января 2015 года.
19. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Статистическое оценивание оптимальных решений задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020611554 от 04 февраля 2020 года.

Публикации в других изданиях

20. *Иванов С.В., Пономаренко А.Н.* Метаэвристические методы решения двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий // Моделирование и анализ данных. — 2019. — № 2. — С. 99–108.
21. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая задача оценки эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов // Труды второй научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2013). Москва. 21-22 октября 2013 г. — М.: ОАО «НИИАС», 2013. С. 147-150.
22. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая модель оптимизации эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов // Интеллектуальные системы на транспорте: материалы IV международной научно-практической конференции «ИнтеллектТранс-2014» / Под редакцией д-ра техн. наук, профессора А.А. Корниенко. – Спб.: ПГУПС, 2014. С. 142-148.
23. *Иванов С.В., Морозова М.В.* Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». 30 июня – 6 июля 2014 г. Иркутск, ИСЭМ СО РАН. — 2014. С. 156.
24. *Иванов С.В.* О сведении двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием к смешанной целочисленной задаче // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. — № 13. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 33–34.
25. *Иванов С.В.* О решении двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. — М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 151–152.

26. *Ivanov S.V., Selivanova O.S.* Bilevel stochastic linear programming problem with quantile criterion and continuous random parameters // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar "Methods of Optimization and Their Applications". Irkuts: ESI SB RAS, 2017. P. 43.

27. *Пономаренко А.Н., Иванов С.В.* Решение стохастической задачи размещения предприятий методом имитации отжига // 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2017». 20-24 ноября 2017 года. Москва. Тезисы. — Типография «Люксор», 2017. С. 406.

28. *Женевская И.Д., Иванов С.В.* Оценка необходимого объема выборки для аппроксимации задачи максимизации функции вероятности // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2018». 19-23 ноября 2018 года. Москва. Тезисы. — Типография «Люксор», 2018. С. 440–441.

29. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Об общей постановке двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Проблемы оптимизации и их приложения = Optimization Problems and Their Applications (OPTA-2018): тезисы докладов VII Международной конференции (Омск, Россия, 8-14 июля 2018): памяти проф. А.А. Колоколова / [редкол.: С. В. Белим (пред.) и др.; отв. ред. А.А.Романова]. — Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. С. 115.

30. *Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2019». 18–22 ноября 2019 года. Москва. Тезисы. — Типография «Логотип», 2019. С. 192.