

УДК 539.3

# Моделирование напряженно-деформированного состояния термоупругодиффузионного слоя\*

**С.А. Давыдов<sup>1</sup>, А.В. Земсков<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125993, Россия*

<sup>2</sup> *НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119192, Россия*  
*e-mail: xepov\_93@inbox.ru*

DOI: 10.34759/tpt-2020-12-3-125-135

Поступила в редакцию 29.11.2019

После доработки 02.03.2020

Принята к публикации 03.03.2020

Представлен алгоритм решения нестационарной задачи о распространении динамических термоупругодиффузионных возмущений в многокомпонентном изотропном слое. Одномерные физико-механические процессы в среде описываются локально-равновесной моделью, включающей уравнения движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса. Искомые функции ищутся в интегральной форме, представляющей собой свертку по времени функций Грина с функциями, задающими поверхностные термоупругодиффузионные возмущения. Учитываются эффекты перекрестной диффузии и ненулевые времена релаксации. Для нахождения функций Грина используются преобразование Лапласа по времени и разложения в ряды Фурье. Проведен анализ полученных функций Грина. Выполнен тестовый расчет.

**Ключевые слова:** термоупругая диффузия, функция Грина, интегральное преобразование, многокомпонентная среда, нестационарная задача.

## Введение

Создание материалов с заранее запрограммированными свойствами и модификация уже имеющихся материалов под новые стандарты качества – одно из актуальных направлений разработок в области технологии обработки конструкционных материалов. Разработка математических моделей воздействия различных факторов на обрабатываемый материал и анализ получаемых результатов позволяют рассмотреть большее число расчетных схем при минимизации финансовых затрат на исследование сложных высокотехнологических процессов.

Существует ряд подходов для изучения физико-механических явлений, протекающих в динамических системах. Одним из перспектив-

ных методов, дающим возможность наиболее точно аналитически описать рассматриваемые процессы, является построение моделей связанных полей. Примером такой связанности является модель термомеханодиффузии. В ней определено взаимодействие полей температуры, перемещения и концентраций [1–3].

Актуальность направления исследования связанных термоупругодиффузионных процессов подтверждается наличием множества работ различных ученых со всего мира. Большинство имеющихся на сегодняшний день работ посвящено решению статических [4, 5], квазистатических [6–8] и стационарных [9–11] задач термомеханодиффузии. Также в работах [12, 13] рассмотрены задачи о гармонических колебаниях преднапряженного термоупругого слоя и исследованы соответствующие функции Грина. Однако наибольшие как интерес, так и трудность представляют нестационарные связанные

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00437).

одномерные [14–16] и двумерные [17–21] задачи термомехано-диффузии. В этих работах решение сводится к применению преобразования Лапласа по времени, обращение которого сопряжено с большими математическими трудностями. В связи с этим чаще всего в вышеперечисленных работах для перехода к оригиналам применяются численные алгоритмы и готовые пакеты вычислительной математики и механики [22–24]. Также стоит отметить ряд работ, в которых авторы предлагают алгоритм решения, основанный на разделении переменных методом Фурье [25–32]. Достаточно подробный обзор, посвященный различным вопросам моделирования термомехано-диффузионных процессов за XX век, представлен в работе [33].

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для однородного многокомпонентного слоя. Для описания возмущений, распространяющихся с конечной скоростью, используется линейная локально-равновесная модель связанной термоупругой диффузии. Начальные условия приняты нулевыми. По причине линейности данная модель применима лишь в случае малых деформаций и приращений. Однако ее решение можно успешно применять для верификации более сложных и/или численных алгоритмов решения аналогичных задач, так как представленный алгоритм содержит в себе лишь хорошо известные и апробированные методы.

Решение задачи, аналогично представленным в [25–32], ищется в интегральной форме, представляющей собой свертку по времени функций Грина с функциями, стоящими в правых частях граничных условий. Для нахождения функций Грина используются преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по пространственной координате. В результате преобразований трансформанты гармоник искомым функций выражаются через рациональные функции параметра преобразования Лапласа. Их оригиналы находятся с помощью известных теорем и таблиц операционного исчисления. Такой подход позволяет свести к минимуму использование численных алгоритмов и провести анализ полученных функций Грина.

Одним из технологических процессов, который может быть наиболее полно описан представленной математической моделью, является процесс ионной имплантации. Эта технология

позволяет получать модифицированные покрытия, обладающие исключительными характеристиками, и создавать практически любые твердые растворы [32, 34, 35]. Также термомехано-диффузионные процессы имеют место при диффузионной пайке, цементации сталей, наращивании различных пленок и др. [34].

### Постановка задачи

Рассматривается однородный  $N$ -компонентный слой. Для описания возмущений, распространяющихся с конечной скоростью, используется линейная безразмерная локально-равновесная модель связанной термоупругой диффузии [2, 16, 20, 26, 30–32] с учетом перекрестных эффектов. В нее включены уравнение движения упругой среды, уравнение теплопереноса и  $N$  уравнений массопереноса (штрихи обозначают производные по безразмерной пространственной переменной  $x$ , а точки – производные по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta'_q, \\ \dot{\vartheta} + \tau_T \ddot{\vartheta} &= \kappa \vartheta'' - b_T (\dot{u}' + \tau_T \ddot{u}') - \sum_{q=1}^N \beta_q (\dot{\eta}_q + \tau_T \ddot{\eta}_q), \\ \dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \eta''_p - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' \\ &\quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \tag{1}$$

На границе слоя задаются напряжения, а также приращения температуры и концентраций:

$$\begin{aligned} \left( u' - b_u \vartheta - \sum_{p=1}^N \alpha_p \eta_p \right) \Big|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \\ \vartheta \Big|_{x=0} = f_{21}(\tau), \quad \eta_q \Big|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \\ \left( u' - b_u \vartheta - \sum_{p=1}^N \alpha_p \eta_p \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \\ \vartheta \Big|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad \eta_q \Big|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

Начальные условия приняты нулевыми:

$$\begin{aligned} u \Big|_{\tau=0} = \dot{u} \Big|_{\tau=0} = \vartheta \Big|_{\tau=0} &= \\ = \dot{\vartheta} \Big|_{\tau=0} = \eta_q \Big|_{\tau=0} = \dot{\eta}_q \Big|_{\tau=0} &\equiv 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В (1)–(3) и далее используются безразмерные величины (при одинаковом начертании размерные аналоги обозначены звездочкой):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \\
 \vartheta &= \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \eta_q = n - n_0, \quad D_{qp} = \frac{D_{11}^{(qp)}}{CL}, \\
 \alpha_q &= \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad b_T = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad b_u = \frac{b_{11}T_0}{C_{1111}}, \\
 \kappa &= \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 LC}, \quad \tau_T = \frac{Ct_T}{L}, \quad \tau_q = \frac{Ct_\eta^{(q)}}{L}, \\
 \beta_q &= \frac{R \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)})}{m^{(q)} c_0}, \quad \Lambda_q = \frac{n_0^{(q)} m^{(q)} D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho RT_0 CL}, \\
 M_q &= \frac{n_0^{(q)} D_{11}^{(qq)} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)})}{CL}, \\
 f_{1v}(\tau) &= \frac{f_{1v}^*(t)}{C_{1111}}, \quad f_{2v}(\tau) = \frac{f_{2v}^*(t)}{T_0}, \\
 f_{q+2,v}(\tau) &= f_{q+2,v}^*(t),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $t$  – время;  $u_1$  – компонента вектора перемещений;  $L$  – толщина слоя;  $q$  – номер компоненты вещества в составе  $N$ -компонентной среды;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  – начальная и актуальная концентрации (массовые доли);  $t_T$  – время релаксации тепловых потоков;  $t_\eta^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков;  $C_{1111}$  – упругая постоянная;  $\rho$  – плотность среды;  $b_{11}$  – температурный коэффициент, характеризующий тепловые деформации;  $\alpha_{11}^{(q)}$  – коэффициент, характеризующий объемное изменение среды за счет диффузии;  $D_{11}^{(qp)}$  – коэффициент диффузии;  $m^{(q)}$  – молярная масса;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  и  $T_0$  – актуальная и начальная температуры;  $\kappa_{11}$  – коэффициент теплопроводности;  $\gamma^{(q)}$  – коэффициент активации;  $c_0$  – удельная теплоемкость при постоянных концентрации и деформации.

### Интегральное представление решения

Решение задачи (1)–(3) представляем в виде сверток по времени [25–32]:

$$u = \sum_{k=1}^{N+2} (G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}),$$

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{N+2} (G_{2k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{2k}(1-x, \tau) * f_{k2}), \tag{5}$$

$$\eta_q = \sum_{k=1}^{N+2} (G_{q+2,k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{q+2,k}(1-x, \tau) * f_{k2}).$$

где  $G_{ik}(x, \tau)$  ( $i, k = \overline{1, N+2}$ ) – функции Грина задачи (1)–(3). Они являются решениями задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \left( G'_{1k} - b_u G_{2k} - \sum_{p=1}^N \alpha_p G_{p+2,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \\
 G_{2k} \Big|_{x=0} &= \delta_{2k} \delta(\tau), \quad G_{q+2,k} \Big|_{x=0} = \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \\
 \left( G'_{1k} - b_u G_{2k} - \sum_{p=1}^N \alpha_p G_{p+2,k} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \\
 G_{2k} \Big|_{x=1} &= 0, \quad G_{q+2,k} \Big|_{x=1} = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака,  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

### Алгоритм решения

Применяем к (1) и (6) преобразование Лапласа по времени с учетом (3) и (5) ( $s$  – параметр преобразования, индекс «L» обозначает трансформанту Лапласа):

$$\begin{aligned}
 s^2 G_{1k}^L &= G_{1k}^{L''} - b_u G_{2k}^{L'} - \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,k}^{L'}, \\
 \omega G_{2k}^L &= \kappa G_{2k}^{L''} - b_T \omega G_{1k}^{L'} - \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,k}^L, \\
 \chi_q G_{q+2,k}^L &= \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L''} - \Lambda_q G_{1k}^{L''} - M_q G_{2k}^{L''}; \\
 \left( G_{1k}^{L'} - b_u G_{2k}^L - \sum_{p=1}^N \alpha_p G_{p+2,k}^L \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k}, \\
 G_{2k}^L \Big|_{x=0} &= \delta_{2k}, \quad G_{q+2,k}^L \Big|_{x=0} = \delta_{q+2,k},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\omega = s(1 + \tau_T s)$ ,  $\chi_q = s(1 + \tau_q s)$ .

Далее представляем решение в виде рядов Фурье:

$$G_{1k}^L(x, s) = \frac{G_{1k0}^L(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \cos(\lambda_n x),$$

$$G_{2k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin(\lambda_n x), \quad (9)$$

$$G_{q+2,k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{lkn}^L(s) \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \pi n,$$

где

$$G_{1kn}^L(x, s) = 2 \int_0^1 G_{1k}^L(x, s) \cos \lambda_n x d\lambda,$$

$$G_{2kn}^L(s) = 2 \int_0^1 G_{2k}^L(x, s) \sin \lambda_n x dx, \quad (10)$$

$$G_{q+2, kn}^L(s) = 2 \int_0^1 G_{q+2, k}^L(x, s) \sin \lambda_n x dx.$$

Для отыскания коэффициентов разложения (10) умножаем первое уравнение в (7) на  $\cos \lambda_n x$ , а остальные – на  $\sin \lambda_n x$ . Затем проинтегрируем все по  $x$  в интервале от 0 до 1, учитывая (8). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $G_{ikn}^L(s)$  [25–32]:

$$k_1 G_{1kn}^L + b_u \lambda_n G_{2kn}^L + \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2, kn}^L = -2\delta_{1k},$$

$$-b_T \omega \lambda_n G_{1kn}^L + k_2 G_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2, kn}^L = 2\kappa \lambda_n \delta_{2k},$$

$$\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 G_{2kn}^L + \chi_q G_{q+2, kn}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2, kn}^L =$$

$$= -2\lambda_n \left[ \Lambda_q \delta_{1k} + \delta_{2k} (\Lambda_q b_u + M_q) + \sum_{p=1}^N \delta_{p+2, k} (\Lambda_q \alpha_p - D_{qp}) \right], \quad (11)$$

где  $k_1 = s^2 + \lambda_n^2$ ,  $k_2 = \omega + \kappa \lambda_n^2$ ,  $k_{q+2} = \chi_q + D_{qq} \lambda_n^2$ .

Решение системы (11) имеет вид:

$$G_{110}^L(s) = -\frac{2}{s^2},$$

$$G_{ikn}^L(s) = \frac{P_{ik}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}. \quad (12)$$

Здесь

$$P(\lambda, s) = \begin{vmatrix} k_1 & b_u \lambda_n & \alpha_1 \lambda_n & \alpha_2 \lambda_n & \dots & \alpha_N \lambda_n \\ -b_T \lambda_n \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega & \dots & \beta_N \omega \\ \Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 & \dots & D_{1N} \lambda_n^2 \\ \Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 & \dots & D_{2N} \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_N \lambda_n^3 & -M_N \lambda_n^2 & D_{N1} \lambda_n^2 & D_{N2} \lambda_n^2 & \dots & k_N \end{vmatrix} \quad (13)$$

– определитель однородной системы (11),  $P_{ik}$  – определители, полученные через  $P$  путем замены  $i$ -го столбца столбцом правой части системы (11) по правилу Крамера.

### Определение оригиналов функций Грина

Пусть  $s_{jn} \in \mathbb{C}$  ( $j = \overline{1, 2N+4}$ ) – простые нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ . Тогда, опираясь на известные теоремы о вычетах, оригиналы функций Грина записываются так:

$$G_{1k}(x, \tau) = \frac{G_{1k0}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \cos(\lambda_n x),$$

$$G_{2k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad (12)$$

$$G_{q+2, k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2, kn}(\tau) \sin(\lambda_n x),$$

где (штрих означает производную по параметру  $s$ )

$$G_{110}(\tau) = -2\tau H(\tau),$$

$$G_{ikn}(\lambda, \tau) = \sum_{j=1}^{2N+4} \frac{P_{ik}(\lambda, s_j)}{P'(\lambda, s_j)} \exp(s_j \tau). \quad (13)$$

Теперь для получения решения задачи (1)–(3) найденные таким образом функции Грина подставляются в свертки (8).

### Расчетный пример

Для примера рассмотрим двухкомпонентную задачу о динамическом нагружении подложки дюралюминия – твердого раствора из алюминия (Al,  $q = 1$ ) и меди (Cu,  $q = 2$ ) при начальной температуре  $T_0 = 700$  К. В начальный момент времени алюминий и медь имеют однородно распределенные массовые доли – 0.95 и 0.05 соответственно. Толщина слоя  $L = 1$  мм. Тогда

среде будут соответствовать следующие безразмерные величины, полученные с помощью формул (5) [16, 35–39]:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -6.90 \cdot 10^{-14}, & M_2 &= -2.57 \cdot 10^{-18}, \\
 \Lambda_1 &= 2.70 \cdot 10^{-15}, & \Lambda_2 &= 2.16 \cdot 10^{-19}, \\
 D_{11} &= 3.14 \cdot 10^{-15}, & D_{12} &= 2.04 \cdot 10^{-18}, \\
 D_{21} &= 6.44 \cdot 10^{-17}, & D_{22} &= 6.28 \cdot 10^{-20}, \\
 \alpha_1 &= 4.41 \cdot 10^{-8}, & \alpha_2 &= 9.28 \cdot 10^{-9}, \\
 \kappa &= 9.65 \cdot 10^{-6}, & b_u &= 1.61 \cdot 10^{-2}, & b_T &= 1.01, \\
 \tau_T &= 1.27 \cdot 10^3, & \tau_1 &= 6.37 \cdot 10^7, & \tau_2 &= 6.37 \cdot 10^8, \\
 \beta_1 &= -7.11 \cdot 10^{-5}, & \beta_2 &= -6.98 \cdot 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

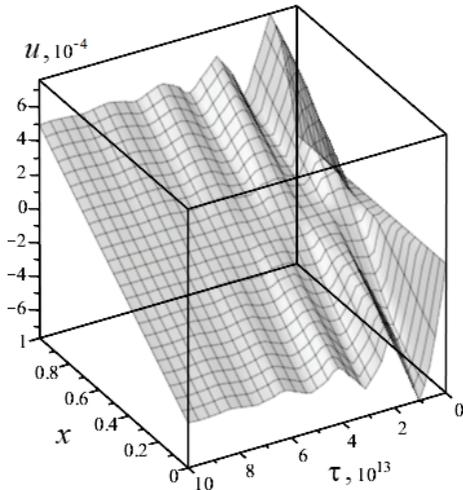


Рис. 1. Распределение перемещений внутри слоя  $u(x, \tau)$

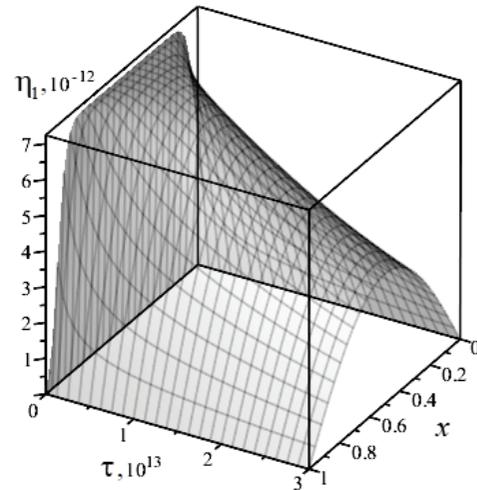


Рис. 2. Распределение приращений концентрации алюминия  $\eta_1(x, \tau)$

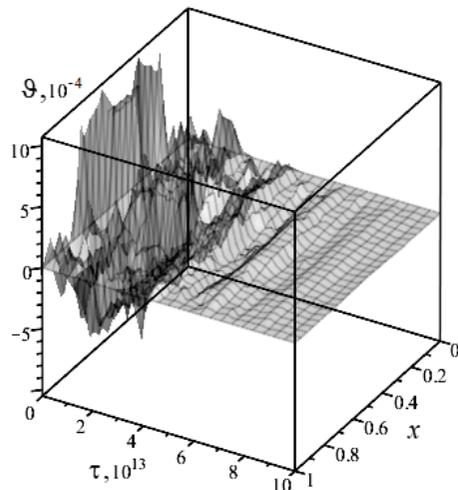


Рис. 3. Распределение приращений температуры внутри слоя  $\theta(x, \tau)$

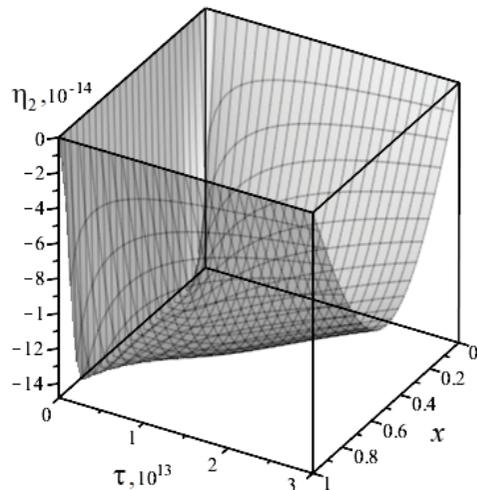


Рис. 4. Распределение приращений концентрации меди  $\eta_2(x, \tau)$

Для построения расчетного примера зададим напряжения на границах слоя:

$$f_{11}(\tau) = f_{12}(\tau) \equiv \varphi \cdot H(\tau), \quad (14)$$

где  $\varphi = 1 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует примерно 100 МПа. Все остальные граничные условия примем нулевыми – слой теплоизолированный, массообмен с окружающей средой отсутствует. За единицу безразмерного времени принимается время прохождения волны растяжения–сжатия от одной границы слоя к другой, что примерно соответствует  $1.57 \cdot 10^{-7}$  секунд.

Здесь и далее представлены графики распределения термоупругодиффузионных возмущений среды, полученные после вычисления свертки (5) для функций Грина (12) и граничных условий (14). На рис. 1–4 отражены трех-

мерные графики распределения перемещений, а также приращений температуры и концентраций по времени  $\tau$  и глубине слоя  $x$  (ось  $Ox$  направлена вглубь слоя). Для их построения использовалось  $25 \times 25$  характерных точек с фиксированным шагом по координате и времени.

На трехмерных графиках при значительных временах можно наблюдать процессы затухания возмущений, которые вызваны только лишь приложением динамической нагрузки и связанностью физических полей. Полученные процессы затухания характерны для задач с ненуле-

вым временем релаксации. На рис. 1 можно заметить, что при времени  $\tau \geq 10^{14}$  наблюдается выход на решение аналогичной статической задачи упругости. На рис. 5 и 6 изображены поля перемещений и приращений температуры на интервале времени порядка времени прохождения волны растяжения-сжатия через весь слой и обратно.

Также для наглядности на рис. 7 приведены графики перемещений и приращений температуры на верхней половине слоя ( $x = 0 \dots 0.5$ ) при фиксированных значениях времени  $\tau = 10^7 + \Delta\tau$ .

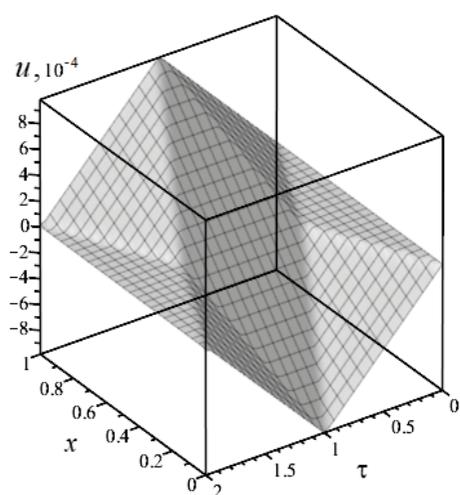


Рис. 5. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  при  $\tau = 10^7 \dots 10^7 + 2$

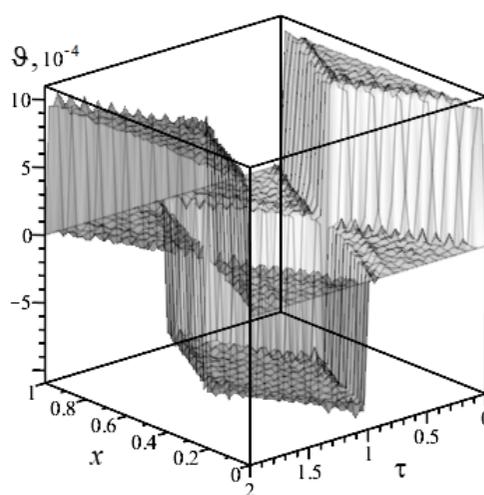


Рис. 6. Распределение приращений температуры  $\theta(x, \tau)$  при  $\tau = 10^7 \dots 10^7 + 2$

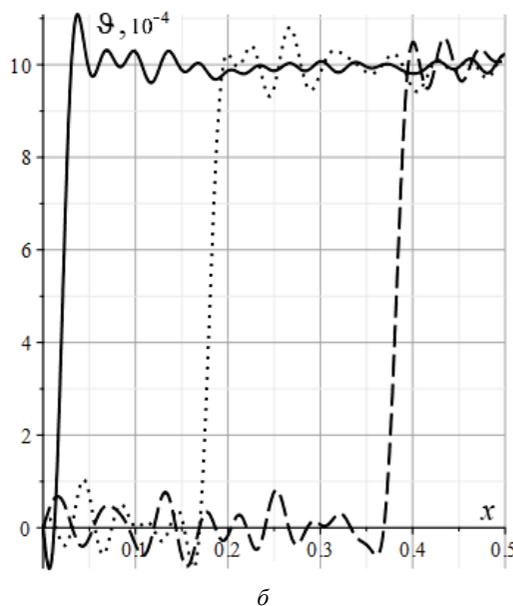
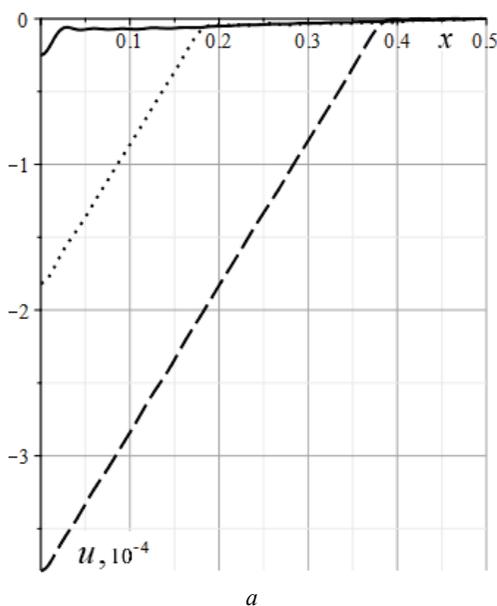


Рис. 7. Распределение перемещений  $u(x, 10^7 + \Delta\tau)$  (а) и приращений температуры  $\theta(x, 10^7 + \Delta\tau)$  (б) по координате  $x$  при фиксированном времени  $\tau$ . Линии: сплошная –  $\Delta\tau = 9.9$ , пунктирная –  $\Delta\tau = 10.1$ , штриховая –  $\Delta\tau = 10.3$

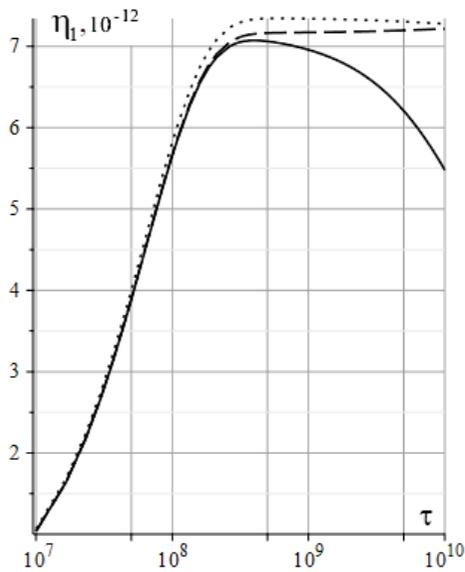


Рис. 8. Распределение приращений концентрации алюминия  $\eta_1(x, \tau)$  при фиксированных  $x$ . Линии: сплошная –  $x = 0.01$ , пунктирная –  $0.25$ , штриховая –  $0.5$

Из рис. 5–7 видно, что фронт волны растяжения–сжатия вызывает резкие скачки приращения температуры в среде. Однако для приращений концентрации алюминия и меди таких скачков не наблюдается на различных временных масштабах (рис. 8). Это может быть объяснено высокой инерционностью диффузионных процессов.

Рассмотрим учет влияния связанности на решение задачи теории упругости. На рис. 9 изображены перемещения для связанной задачи термоупругой диффузии и несвязанной (чисто упругой) задачи. Видно, что со временем ( $\tau \geq 10^8$ ) увеличивается запаздывание волны растяжения–сжатия в связанной задаче по отношению к несвязанной. Однако амплитуды колебаний при небольших временах ( $\tau \leq 10^{12}$ ) практически совпадают.

Все расчеты проведены всего для 30 членов ряда Фурье. При дальнейшем увеличении их числа результаты для перемещений и концентраций практически полностью совпадают, а для температуры изменения носят незначительный характер, как, например, изображено на рис. 10.

Полученные результаты коррелируются с результатами, полученными ранее для аналогичных задач упругой диффузии без учета тепловых эффектов.

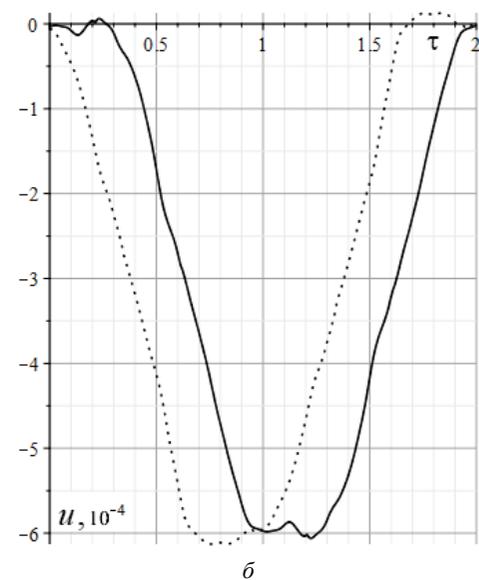
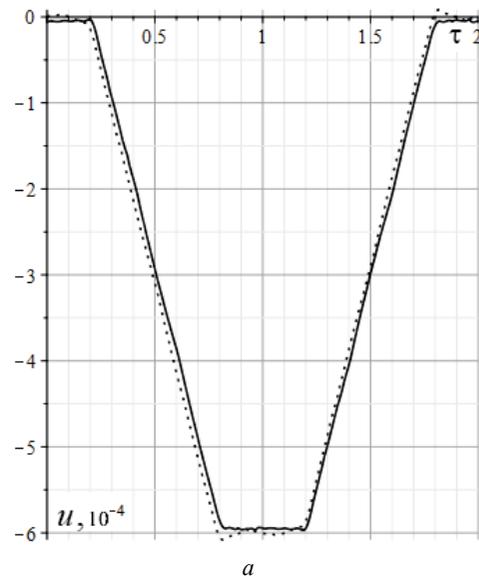


Рис. 9. Распределение перемещений  $u(x, \tau)$  при  $x = 0.2$  в интервале времени  $\tau = 10^8 \dots 10^8 + 2$  (а) и в интервал времени  $\tau = 10^9 \dots 10^9 + 2$  (б). Линии: связанная задача – сплошные, несвязанная задача – пунктирные

## Заключение

Предложен алгоритм решения одномерной нестационарной задачи термоупругой диффузии для многокомпонентного слоя под действием нестационарных динамических нагрузок. Основным достоинством данного подхода является возможность аналитически найти оригиналы функций Грина и провести их анализ. Эффективность метода продемонстрирована на конкретном расчетном примере. Показано влияние учета связанности полей на решение упругой задачи.

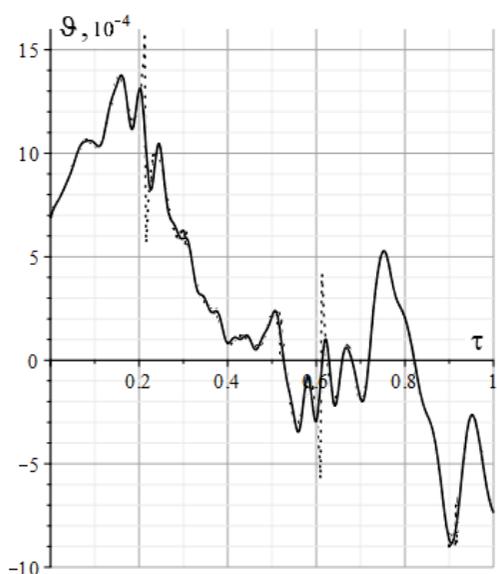


Рис. 10. Распределение приращений температуры  $\Theta(x, \tau)$  при  $x = 0.2$  на промежутке  $\tau = 10^9 \dots 10^9 + 1$ . Линии: сплошная – 30 членов ряда, пунктирная – 300 членов ряда

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids // Proc. Vib. Prob. 1974. V. 15. P. 105–128.
2. Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H. The theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Engineering Science. 2004. V. 42. P. 591–608. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2003.05.001>
3. Indeitsev D.A., Semenov B.N., Sterlin M.D. The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid // Doklady Physics. 2012. V. 57. N 4. P. 171–173. DOI: 10.1134/S1028335812040052
4. Kumar R., Chawla V. Green's functions in orthotropic thermoelastic diffusion media // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36. P. 1272–1277. <https://doi.org/10.1016/jenganabound.2012.02.017>
5. Rambert G., Grandidier J.C., Aifantis E.C. On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity // European Journal of Mechanics A/Solids. 2007. V. 26. P. 68–87. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2005.12.002>
6. Shvets R.M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // Journal of Mathematical Science. 1999. V. 97. N 1. P. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/BF02364922>
7. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // International Journal of Engineering Science. 1995. V. 33. Is. 6. P. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6)
8. Shvets R.N., Yatskiv A.I. Construction of the solution of the mixed boundary-value problem of mechanothermo-diffusion for layered bodies of canonical shape // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. 1992. N 35. P. 70–75.
9. Atwa S.Y., Egypt Z. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. 2013. V. 1. Is. 2. P. 55–74.
10. Deswal S., Kalkal K.K. Electromagneto-thermodiffusive problem for short times without energy dissipation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2013. V. 86. N 3. P. 705–715. <https://doi.org/10.1007/s10891-013-0886-z>
11. Kumar R., Devi S., Sharma V. Plane waves and fundamental solution in a modified couple stress generalized thermoelastic with mass diffusion // Materials Physics and Mechanics. 2015. V. 24. P. 72–85. [http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no\\_12415/MPM124\\_09\\_kumar.pdf](http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12415/MPM124_09_kumar.pdf)
12. Levi G.Yu., Belyankova T.I. Some properties of transversely isotropic thermoelastic layer under initial stress // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1210. P. 012080. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012080
13. Levi G.Yu., Belyankova T.I. The influence of thermal contact between medium on the surface waves propagation in a prestressed thermoelastic layered half-space // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1260. P. 052018. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/5/052018
14. Salama M.M., Kozac A.M., Elsafty M.A., Abelaziz S.S. A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // International Journal of Scientific and Engineering Research. 2015. V. 6. Is. 1. P. 358–371. <https://www.ijser.org/onlineResearchPaperViewer.aspx?A-half-space-problem-in-the-theory-of-fractional-order-thermoelasticity.pdf>
15. Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A thick plate problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Int. J. Thermophys. 2009. V. 30. P. 2044–2057. <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
16. Aouadi M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. 2006. V. 2006. P. 1–15. DOI 10.1155/IJMMS/2006/
17. El-Sayed A.M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. V. 21. N 9. P. 1045–1060. DOI: 10.1177/1081286514549877
18. Afram A.Y., Khader S.E. 2D problem for a half-space under the theory of fractional thermoelastic diffusion // American Journal of Scientific and Industrial Research. 2015. V. 6. N 3. P. 47–57. <https://www.scihub.org/AJSIR/PDF/2015/3/AJSIR-6-3-47-57.pdf>
19. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. 2010. V. 45. P. 401–413. <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
20. Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. V. 224. P. 3057–3069. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0902-6>
21. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // Acta Mech. 2015. V. 226. P. 3263–3274. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1383-6>
22. Rambert G., Grandidier J.C., Cangemi L., Meimon Y. A modelling of the coupled thermodiffuso-elastic linear behaviour. Application to explosive decompression of polymers // Oil and Gas Sci. Technol. 2003. V. 58. P. 571–591. [https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/pdf/2003/05/rambert\\_v58n5.pdf](https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/pdf/2003/05/rambert_v58n5.pdf)
23. Shandly S., Ellis N.S., Randal T.J., Marshall J.M. Coupled diffusion and stress by the finite element method // Appl. Math. Model. 1995. V. 19. N 2. P. 87–94. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)00019-3](https://doi.org/10.1016/0307-904X(94)00019-3)

24. **Zhang J., Li Y.** A Two-dimensional generalized electromagnetoelastostatic diffusion problem for a rotating half space // *Mathematical Problems in Engineering*. Hindawi Publishing Corporation, 2014. V. 2014. P. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>
25. **Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.** Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. № 1. С. 38–47. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
26. **Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.** Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*. 2018. Т. 160. Кн. 1. С. 183–195. [https://kpfu.ru/portal/docs/F1671802777/160\\_1\\_phys\\_mat\\_18.pdf](https://kpfu.ru/portal/docs/F1671802777/160_1_phys_mat_18.pdf)
27. **Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.** An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2015. V. 36. N 4. P. 503–509. DOI: 10.1134/S199508021504023X
28. **Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.** Two-dimensional non-stationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. V. 56. N 6. P. 1023–1030. DOI: 10.1134/S0021894415060127
29. **Давыдов С.А., Земсков А.В.** Распространение одномерных связанных термоупругодиффузионных возмущений в изотропном полупространстве с учетом ненулевых времен релаксации // *Труды Крыловского государственного научного центра*. 2018. Спец. вып. 2. С. 144–150. DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-S-I-144-150
30. **Davydov S.A., Vestyak A.V., Zemskov A.V.** Propagation of one-dimensional thermoelastostatic perturbations in a multicomponent layer // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1158. P. 022034. DOI:10.1088/1742-6596/1158/2/022034
31. **Davydov S.A., Zemskov A.V.** Unsteady one-dimensional perturbations in multicomponent thermoelastic layer with cross-diffusion effect // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 1129. P. 012009. DOI:10.1088/1742-6596/1129/1/012009
32. **Davydov S.A., Zemskov A.V., Akhmetova E.R.** Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations // *Math. Comput. Appl.* 2019. V. 24. P. 26. <https://doi.org/10.3390/mca24010026>
33. **Olesiak Z.S.** Problems of thermodiffusion of deformable solids // *Materials Science*. 1998. V. 34. N 3. P. 297–303. <https://doi.org/10.1007/BF02355619>
34. **Князева А.Г.** Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. 172 с.
35. **Риссел Х., Пуре И.** Ионная имплантация. М.: Наука, 1983. 360 с.
36. **Polyanin A.D., Vyazmin A.V.** Differential-difference heat-conduction and diffusion models and equations with a finite relaxation time // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2013. V. 47. Is. 3. P 217–224. <https://doi.org/10.1134/S0040579513030081>
37. **Aluminum Standards & Data.** Metric Book. Standard by Aluminum Association, 2017. 250 p.
38. **Grigoriev I.S., Meilikhov E.Z.** Handbook of Physical Quantities. USA: CRC Press, 1996. 1568 p.
39. **Szekeres A., Fekete B.** Continuummechanics – Heat conduction – Cognition // *Period. Polytech. Mech. Eng.* 2015. 59(1). P. 8–15. DOI: 10.3311/PPme.7152

## Stress-strain state modeling of a thermoelastic diffusion layer

S.A. Davydov<sup>1</sup>, A.V. Zemskov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Moscow Aviation Institute (Aerospace University), Moscow, 125993, Russia*

<sup>2</sup> *Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

*e-mail: xenon\_93@inbox.ru*

The materials creation with pre-programmed properties and their modification to new quality standards is one of the actual development areas in the field of processing technology for structural materials. The development of mathematical models of the impact of various factors on the processed material and the analysis of the results obtained allow us to consider a larger number of exposure options while minimizing financial costs in complex high-tech processes. There are a number of approaches to the creation of mathematical models, and one of the promising ones, which makes it possible to most accurately analytically describe the process under consideration, is the construction of coupled field models, an example of which is thermomechanical diffusion. The thermomechanical diffusion model is a description of the interaction of the fields of temperature, displacement, and concentrations. We consider an algorithm for solving the unsteady dynamic problem of thermoelastic diffusion perturbations propagation in a multicomponent isotropic layer. One-dimensional physical and mechanical processes in the medium are described by the locally-equilibrium model, which includes the equations of elastic medium motion, heat transfer, and mass transfer. The unknown functions are sought in the integral form, which is a convolution in time of the Green's functions and the boundary conditions. The effects of cross diffusion and nonzero relaxation times are taken into account. To find the Green's functions, the Laplace transform in time and Fourier series expansion in spatial coordinate are used. The analysis of the obtained Green functions is done. Test calculation is conducted.

**Keywords:** thermoelastic diffusion, Green's function, integral transformation, multicomponent medium, unsteady problem.

## REFERENCES

1. Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids. *Proc. Vib. Prob.*, 1974, vol. 15, pp. 105–128.
2. Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H. The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*, 2004, vol. 42, pp. 591–608. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2003.05.001>
3. Indeitsev D.A., Semenov B.N., Sterlin M.D. The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 171–173. DOI: 10.1134/S1028335812040052
4. Kumar R., Chawla V. Green's functions in orthotropic thermoelastic diffusion media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, vol. 36, pp. 1272–1277. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.017>
5. Rambert G., Grandidier J.C., Aifantis E.C. On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 68–87. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2005.12.002>
6. Shvets R.M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion. *Journal of Mathematical Science*, 1999, vol. 97, no. 1, pp. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/BF02364922>
7. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder. *International Journal of Engineering Science*, 1995, vol. 33, Is. 6, pp. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6)
8. Shvets R.N., Yatskiv A.I. Construction of the solution of the mixed boundary-value problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape. *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya*, 1992, no. 35, pp. 70–75.
9. Atwa S.Y., Egypt Z. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium. *Journal of Materials and Chemical Engineering*, 2013, vol. 1, Is. 2, pp. 55–74.
10. Deswal S., Kalkal K.K. Electromagneto-thermodiffusive problem for short times without energy dissipation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2013, vol. 86, no. 3, pp. 705–715. <https://doi.org/10.1007/s10891-013-0886-z>
11. Kumar R., Devi S., Sharma V. Plane waves and fundamental solution in a modified couple stress generalized thermoelastic with mass diffusion. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 24, pp. 72–85. [http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no\\_12415/MPM124\\_09\\_kumar.pdf](http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12415/MPM124_09_kumar.pdf)
12. Levi G.Yu., Belyankova T.I. Some properties of transversely isotropic thermoelastic layer under initial stress. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1210, p. 012080. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012080
13. Levi G.Yu., Belyankova T.I. The influence of thermal contact between medium on the surface waves propagation in a prestressed thermoelastic layered half-space. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1260, p. 052018. DOI:10.1088/1742-6596/1260/5/052018
14. Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M.A., Abelaziz S.S. A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2015, vol. 6, Is. 1, pp. 358–371. <https://www.ijser.org/onlineResearchPaperViewer.aspx?A-half-space-problem-in-the-theory-of-fractional-order-thermoelasticity.pdf>
15. Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A thick plate problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. Thermophys.*, 2009, vol. 30, pp. 2044–2057. <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
16. Aouadi M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.*, 2006, vol. 2006, pp. 1–15. DOI 10.1155/IJMS/2006/
17. El-Sayed A.M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, vol. 21, no. 9, pp. 1045–1060. DOI: 10.1177/1081286514549877
18. Afram A.Y., Khader S.E. 2D problem for a half-space under the theory of fractional thermoelastic diffusion. *American Journal of Scientific and Industrial Research*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 47–57. <https://www.scihub.org/AJSIR/PDF/2015/3/AJSIR-6-3-47-57.pdf>
19. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion. *Meccanica*, 2010, vol. 45, pp. 401–413. <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
20. Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mech.*, 2013, vol. 224, pp. 3057–3069. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0902-6>
21. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions. *Acta Mech.*, 2015, vol. 226, pp. 3263–3274. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1383-6>
22. Rambert G., Grandidier J.C., Cangemi L., Meimon Y. A modelling of the coupled thermodiffuso-elastic linear behaviour. Application to explosive decompression of polymers. *Oil and Gas Sci. Technol.*, 2003, vol. 58, pp. 571–591. [https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/pdf/2003/05/rambert\\_v58n5.pdf](https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/pdf/2003/05/rambert_v58n5.pdf)
23. Shandly S., Ellis N.S., Randal T.J., Marshall J.M. Coupled diffusion and stress by the finite element method. *Appl. Math. Model.*, 1995, vol. 19, no. 2, pp. 87–94. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)00019-3](https://doi.org/10.1016/0307-904X(94)00019-3)
24. Zhang J., Li Y. A two-dimensional generalized electromagneto-thermoelastic diffusion problem for a rotating half space. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>
25. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Poverkhnostnye funktsii Grina v nestatsionarnykh zadachakh termomekhanodiffuzii [Surface Green's function in non-stationary problems of thermomechanical diffusion]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2017, vol. 79, no. 1, pp. 38–47. In Russ. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
26. Vestyak A.V., Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Nestatsionarnaya odnornernaya zadacha termopruzhnoy diffuzii dlya odnorodnykh mnogokomponentnykh

- sred s ploskimi granitsami [Unsteady one-dimensional problem of thermoelastic diffusion for homogeneous multicomponent medium with plane boundaries]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 1, pp. 183–195. In Russ. [https://kpfu.ru/portal/docs/F1671802777/160\\_1\\_phys\\_mat\\_18.pdf](https://kpfu.ru/portal/docs/F1671802777/160_1_phys_mat_18.pdf)
27. **Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.** An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 503–509. DOI: 10.1134/S199508021504023X
  28. **Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.** Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1023–1030. DOI: 10.1134/S0021894415060127
  29. **Davydov S.A., Zemskov A.V.** Rasprostranenie odnomer-nykh svyazannykh termouprugodiffuzionnykh vozmushhenij v izotropnom poluprostranstve s uchetom nenulevykh vremen relaksatsii [Propagation of monomeric coupled thermo-elasto-diffusion disturbances in isotropic semi-space taking into account non-zero relaxation time]. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra – Transactions of the Krylov State Research Centre*, 2018, no. 52, pp. 144–150. In Russ. DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-S-I-144-150
  30. **Davydov S.A., Vestyak A.V., Zemskov A.V.** Propagation of one-dimensional thermoelastodiffusive perturbations in a multicomponent layer. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, p. 022034. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022034
  31. **Davydov S.A., Zemskov A.V.** Unsteady one-dimensional perturbations in multicomponent thermoelastic layer with cross-diffusion effect. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1129, p. 012009. DOI: 10.1088/1742-6596/1129/1/012009
  32. **Davydov S.A., Zemskov A.V., Akhmetova E.R.** Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations. *Math. Comput. Appl.*, 2019, vol. 24, p. 26. <https://doi.org/10.3390/mca-24010026>
  33. **Olesiak Z.S.** Problems of thermodiffusion of deformable solids. *Materials Science*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 297–303. <https://doi.org/10.1007/BF02355619>
  34. **Knyazeva A.G.** *Vvedenie v termodinamiku neobratimyykh protsessov. Lektsii o modelyakh* [Introduction to thermodynamics of irreversible processes. Lectures about models]. Tomsk: Publishing House "Ivan Fedorov", 2014. 172 p. In Russ.
  35. **Ryssel H., Ruge I.** *Ionenimplantation*. Springer, 1978. 366 p. (Russ. ed.: Ryssel H., Ruge I. *Ion implantation*. Moscow: Nauka, 1983. 360 p.)
  36. **Polyanin A.D., Vyazmin A.V.** Differential-difference heat-conduction and diffusion models and equations with a finite relaxation time. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 3, pp. 217–224. <https://doi.org/10.1134/S0040579513030081>
  37. **Aluminum Standards and Data. Metric Book.** Standard by Aluminum Association, 2017. 250 p.
  38. **Grigoriev I.S., Meilikhov E.Z.** *Handbook of Physical Quantities*. USA: CRC Press, 1996. 1568 p.
  39. **Szekeres A., Fekete B.** Continuummechanics – Heat conduction – Cognition. *Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 8–15. DOI: 10.3311/PPme.7152