

531.01

О зоне залипания ящика с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости

*Ковалев Н.В., * Байков А.Е.***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: nick_scr@mail.ru*

***e-mail: alexander@baikov.org*

Статья поступила 10.09.2019

Аннотация

Ящик, несущий материальную точку, совершающую горизонтальные гармонические колебания, движется поступательно по горизонтальной плоскости. Между ящиком и плоскостью действует сила сухого трения Амонтона–Кулона. Получены уравнения движения ящика, найдена его зона залипания. Обоснована математическая корректность модели. Установлены движения ящика в зоне залипания, сделано предположение о финальных движениях ящика.

Ключевые слова: сухое трение, закон Амонтона–Кулона, зона залипания, решение по Филиппову, финальные движения.

Введение

Задачи о движении механических систем с сухим трением [1] в настоящее время популярны среди исследователей и находят множество приложений, в частности, в создании новых систем передвижения. В [2–14] рассмотрено

множество задач о передвижении тел по шероховатой поверхности посредством перемещения в нём внутренних масс. Разрывность правых частей уравнений движения систем с сухим трением значительно затрудняет анализ динамики, даже если в областях непрерывности уравнения допускают явное и простое общее решение. Полный анализ движений может быть очень трудоёмким, как, например, в [9].

Задача, решаемая в настоящей статье, отличается от задач [2-14] тем, что энергия в системе убывает из-за отрицательной работы сил трения, притока новой энергии нет. Это обстоятельство упрощает исследование движений и часто позволяет угадать финальные движения системы. Выход на финальный режим движения продемонстрирован в первом параграфе статьи на примере простой задачи (также см. [15-17]). Во втором параграфе поставлена основная задача, получены и приведены к безразмерному виду уравнения движения, найдена зона залипания ящика на горизонтальной плоскости. Это подмножество гиперплоскости разрыва состоит из всех положений равновесия ящика на горизонтальной плоскости, когда на него действует сила трения покоя. Однако наличие внутреннего осциллятора делает возможным выход ящика из зоны залипания.

В третьем параграфе статьи обоснована математическая корректность исследуемой модели. Решение в смысле А.Ф. Филиппова и теорема о существовании и единственности в будущем времени решения задачи Коши [18, 19] даёт такое обоснование и позволяет говорить о финальных движениях системы. Их обсуждению посвящён заключительный параграф статьи.

1. Ящик на конвейерной ленте

Рассмотрим ящик, закреплённый пружинами к неподвижным стенкам, находящийся на подвижной ленте конвейера (рис. 1).

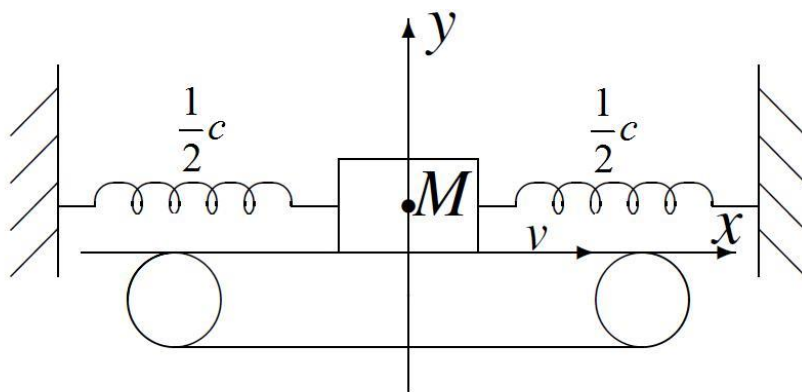


Рис. 1: Ящик на ленте конвейера

Пусть M – масса ящика, $\frac{1}{2}c$ – коэффициент жесткости каждой пружины, f – коэффициент сухого трения Амонтона-Кулона, v – скорость движения ленты. Уравнение движения ящика имеют вид

$$M\ddot{X} + cX = -fMg \operatorname{sgn} \dot{X} - v, \quad (1)$$

где X – координата ящика на ленте. В безразмерных переменных уравнение движения имеет вид

$$x'' + x = -f \operatorname{sgn} \dot{x} - 1. \quad (2)$$

Мы получили уравнения движения в предположении, что на ящик действует сила трения скольжения со стороны плоскости. Теперь найдём зону залипания, когда ящик движется вместе с лентой конвейера, исходя из неравенства $|F| \leq f$, где F – (безразмерная) сила трения покоя, действующая на ящик. В фазовом пространстве зона залипания принадлежит линии разрыва $x' = 1$ уравнения (2). Так как при

залипанию ускорение ящика равно нулю, из второго закона Ньютона вытекает $x = F$. Следовательно, зона залипания определяется соотношениями

$$-f \leq x \leq f, \dot{x} = 1. \quad (3)$$

Вне линии разрыва уравнение (1) легко решается. Действительно, при $x' > 1$ имеем

$$x'' + x = -f,$$

поэтому траектории системы есть те части окружностей

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x^2 + fx = C, \quad (4)$$

что лежат выше прямой $x' = 1$. Ни одна из них не лежит в полуплоскости $x' > 1$ целиком. Если же $x' < 1$, уравнение движение имеет вид

$$x'' + x = f.$$

Траектории системы представляют собой части окружностей

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x^2 - fx = C, \quad (5)$$

лежащие ниже прямой $x' = 1$. Если радиус $R = \sqrt{2C + f^2} < 1$, т.е.

$-\frac{1}{2}f^2 < C < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$, окружность (5) вся принадлежит полуплоскости $x' < 1$.

Говоря точнее, а) при $C = -\frac{1}{2}f^2$ траектория системы есть положение равновесия

$x = f, x' = 0$; б) при $-\frac{1}{2}f^2 < C < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$ траектории есть окружности с центром в

положении равновесия, лежащие в полуплоскости $x' < 1$ целиком; в) при

$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$ окружность снизу касается линии разрыва в точке $f, 1$. Окружности из пункта б) назовём внутренними, окружность их пункта в) – предельной.

Траектории, отличные от описанных выше, состоят из конечного числа дуг окружностей (4) и (5), сменяющих друг друга с уменьшением константы C . Траектории непрерывны, гладкие вне линии разрыва; на линии разрыва существуют односторонние производные. Каждая из этих траекторий заканчивается в некоторой точке зоны залипания (3). Движение вдоль зоны залипания заканчивается на предельной окружности, где остаётся навечно. На рис. 2 зона залипания выделены красным, внутренние окружности – жёлтыми, предельная окружность – фиолетовым, прочие траектории маркированы синим цветом. Коэффициент трения $f = 0.7$.

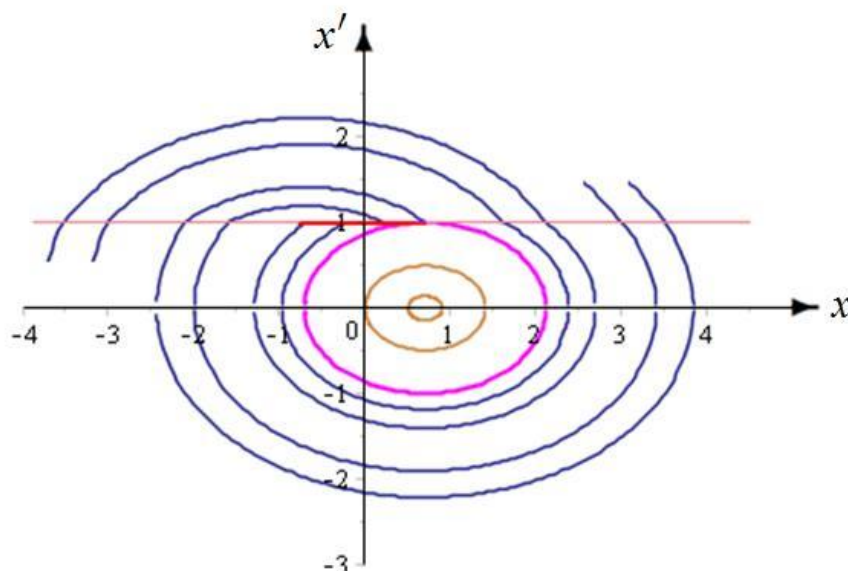


Рис. 2: Фазовый портрет ящика на конвейерной ленте

Если склеить все точки зоны залипания в одну, то отображение Пуанкаре, определённое на линии разрыва, будет непрерывным (склеенная в одну точку зона

залипания при этом будет неподвижной точкой отображения Пуанкаре). Можно построить граф разбиения данного отображения (рис. 3). Вершины A_n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, соответствуют отрезкам на линии разрыва, A_* – склеенной в одну точку зоне залипания. Граф дополнен вершиной A_0 , отвечающей предельной окружности. Таким образом, предельная окружность есть предельный цикл, а внешняя для предельной окружности область – область притяжения предельного цикла.

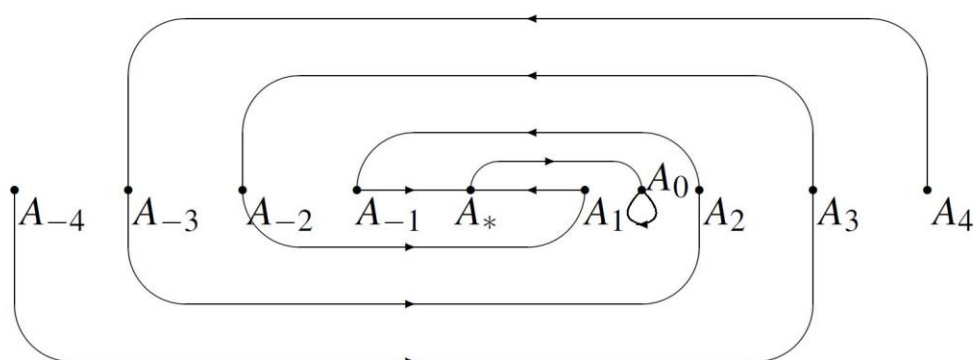


Рис. 3: Граф разбиения отображения Пуанкаре на линии разрыва

2. Постановка основной задачи, уравнения движения и зона залипания

Тяжёлый ящик массой M находится на горизонтальной плоскости. Внутри ящика на закреплённой горизонтальной невесомой спице длины $2L$ движется материальная точка массы m , присоединённая к точкам крепления спицы пружинами с коэффициентом жёсткости $\frac{k}{2}$ каждая (массами пружин пренебрегаем).

Ящик может поступательно перемещаться по плоскости без изменения пятна контакта и силы давления. Между ящиком и плоскостью действует сила сухого трения, подчинённая закону Амонтона–Кулона, с коэффициентом f (рис. 4).

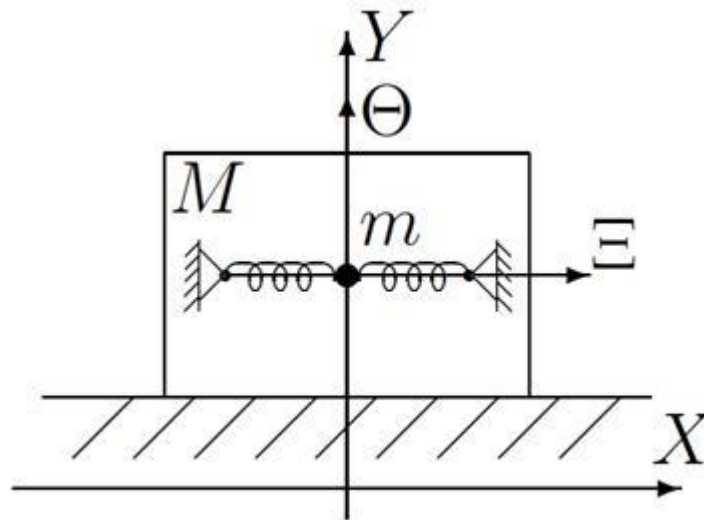


Рис. 4: Ящик с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости

Для системы «ящик, материальная точка» с двумя степенями свободы введём обобщённые координаты: X – отклонение центра ящика от оси OY неподвижной системы координат, Ξ – отклонение материальной точки от своего положения равновесия внутри ящика. Получим уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение системы. Единственная консервативная сила в системе – это сила упругости; её потенциальная энергия есть $\Pi = \frac{k}{2} \Xi^2$. Обобщённые силы, соответствующие силе трения скольжения, имеют вид $Q_{\Xi} = 0$ и $Q_X = -fg M + m \operatorname{sgn} \dot{X}$. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M + m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \dot{\Xi}^2 + m\dot{X}\dot{\Xi}.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$\begin{cases} m\ddot{\Xi} + m\ddot{X} = -k\Xi, \\ m\ddot{\Xi} + (M + m)\ddot{X} = -fg M + m \operatorname{sgn} \dot{X}. \end{cases} \quad (6)$$

После приведения к безразмерному виду и нормальной форме Коши уравнения движения предстают в виде

$$\begin{cases} \xi'' = -\xi + \delta\mu \operatorname{sgn} x', \\ x'' = \mu\xi - \delta\mu \operatorname{sgn} x', \end{cases} \quad (7)$$

где x , ξ – безразмерные координаты, связанные с размерными координатами соотношениями $X = xL$, $\Xi = \xi L$, штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ , связанным с размерным временем соотношением $\tau = \omega t$,

где $\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}$. В системе (7) участвуют два безразмерных параметра

$$\delta = \frac{f(M+m)g}{kL}, \quad \mu = \frac{m}{M+m}.$$

Вернёмся к размерным координатам и найдём зону залипания ящика на горизонтальной плоскости. В зоне залипания на ящик действует сила трения покоя, а материальная точка продолжает движение относительно ящика. Условие равновесия ящика имеет вид

$$\vec{F}_{mp} + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{R} = 0, \quad (8)$$

где \vec{F}_{mp} – сила трения покоя, \vec{N} – сила нормальной реакции со стороны плоскости, $M\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{R} – сумма сил реакции, действующих на ящик со стороны спицы. Принцип Д'Аламбера даёт выражения для проекций силы реакции: $R_x = k\Xi$, $R_y = -mg$. Проектируя уравнение (8) на оси неподвижной системы координат OXY , имеем

$$\begin{aligned} OX : F_{mpx} + R_x &= 0, \\ OY : N + R_y - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы для R_x и R_y , получим $F_{\text{мрх}} = -k\Xi$, $N = M + m g$.

Залипания возможно, если сила трения покоя не превосходит силы трения скольжения. Тогда из неравенства $|\vec{F}_{\text{мр}}| \leq f |\vec{N}|$ следует условие зоны застоя

$$|-k\Xi| \leq f M + m g. \quad (9)$$

В безразмерных переменных условие (9) имеет простой вид

$$|\xi| \leq \delta. \quad (10)$$

В зоне залипания материальная точка продолжает движение относительно ящика.

Уравнение движения материальной точки в безразмерных переменных имеет вид

$$\xi'' + 1 - \mu \xi = 0, \quad (11)$$

поскольку единственная горизонтальная сила, действующая при этом на точку, есть силы упругости (сила инерции равна нулю, потому что ящик покоится). Интеграл

энергии материальной точки $\frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} 1 - \mu \xi^2 = C$ даёт эллиптические траектории

в зоне залипания. Не все траектории полностью принадлежат зоне залипания (10).

На рис. 5 жирной точкой показано положение равновесия ($C = 0$); красные эллипсы соответствуют вечным колебаниям материальной точки в зоне залипания ящика ($0 < C < \frac{1}{2} 1 - \mu \delta^2$); зелёный цветом показан предельный эллипс с константой

$C = \frac{1}{2} 1 - \mu \delta^2$; синим цветом показаны дуги эллипсов с константой $C > \frac{1}{2} 1 - \mu \delta^2$,

принадлежащие зоне залипания (10).

принадлежащие зоне залипания (10).

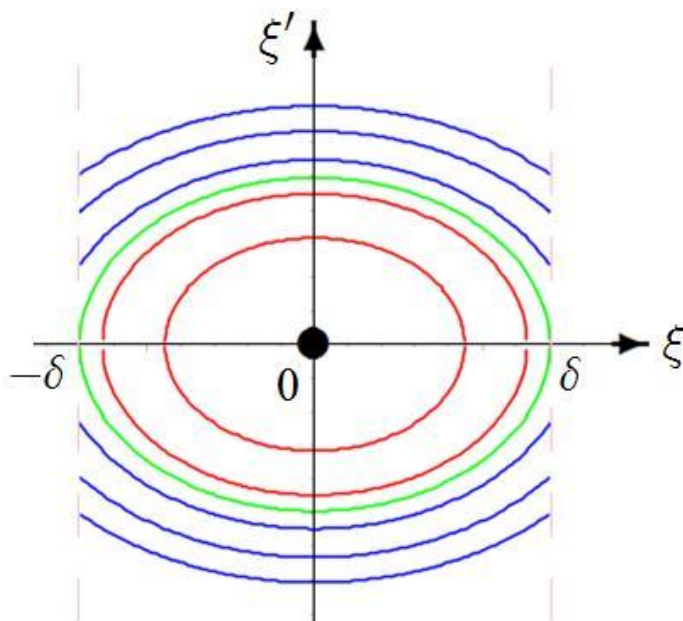


Рис. 5: Движение материальной точки в зоне залипания ящика

3. Существование и единственность решения задачи Коши для систем с разрывными правыми частями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x), \quad (12)$$

где $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, Ω – область в \mathbb{R}^d . Укажем следующие условия на область Ω и функцию f :

- 1) Ω состоит из конечного числа подобластей Ω_k с общей границей M .
- 2) В каждой подобласти Ω_k отображение f непрерывно дифференцируемо.
- 3) Для каждой точки $x \in M$ существует конечный предел отображения f по любой из подобластей Ω_k , для которых x есть граничная точка.

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F x, \quad (13)$$

где

$$F x = \begin{cases} f x, x \in M, \\ \text{выпуклая оболочка предельных} \\ \text{значений } f \hat{x}, \hat{x} \rightarrow x, x \in M. \end{cases}$$

Определение 1. Векторная функция $x: t_0, t_1 \rightarrow \Omega$ называется решением дифференциального включения (13), если она непрерывна по $t \in t_0, t_1$, а её производная $\dot{x} \in F x t$ для почти всех (в смысле меры Лебега) $t \in t_0, t_1$.

Определение дифференциального включения позволяет определить решение системы (12) с разрывными правыми частями.

Определение 2. Векторная функция $x: t_0, t_1 \rightarrow \Omega$ называется решением по Филиппову системы (12), если она есть решение соответствующего дифференциального включения (13).

А.Ф. Филипповым доказана следующая теорема [19].

Теорема 1. Пусть отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ удовлетворяет условиям 1)–3), $x^0 \in \Omega$. Тогда существует единственное решение по Филиппову $x: t_0, t_0 + \tau \rightarrow \Omega$ уравнения (3.1), удовлетворяющее начальному условию $x t_0 = x^0$. Здесь $\tau > 0$ и зависит от начальной точки x^0 .

В отличие от классических теорем существования и единственности решения задачи Коши (например, теоремы Пикара–Линделёфа [20]), приведённая выше теорема утверждает единственность решения в будущем времени. Легко видеть, что

правые части уравнений движения (6) или (7) удовлетворяют условиям теоремы 1, откуда следует детерминированность в будущем исследуемой модели механической системы с сухим трением. Оказывается, определение 2 влечёт справедливость закона Амонтона–Кулона для системы (6) или (7), когда сила трения покоя не превосходит по модулю силу трения скольжения [19]. В частности, можно строго говорить о зоне залипания и финальных движениях ящика в ней.

4. Финальные движения ящика

Найдём общее решение уравнений движения (7) в областях непрерывности $x' > 0$ и $x' < 0$. Общее решение первого уравнения системы (7) имеет вид

$$\xi = \xi_0 - \delta\mu \operatorname{sgn} x' \cos \tau + \xi_1 \sin \tau + \delta\mu \operatorname{sgn} x', \quad (14)$$

где $\xi_0 = \xi(0)$, $\xi_1 = \xi'(0)$ – начальные условия для материальной точки. Подставим (14) во второе уравнение системы (7):

$$x'' = \mu \xi_0 - \delta\mu \operatorname{sgn} x' \cos \tau + \mu \xi_1 \sin \tau + \delta\mu (\mu - 1) \operatorname{sgn} x'. \quad (15)$$

Находим общее решение уравнения (15):

$$x = x_1 + \mu \xi_1 \tau + x_0 + \mu (1 - \cos \tau) \xi_0 - \delta\mu \operatorname{sgn} x' - \mu \xi_1 \sin \tau + \frac{\tau^2}{2} \delta\mu (\mu - 1) \operatorname{sgn} x', \quad (16)$$

где $x_0 = x(0)$, $x_1 = x'(0)$ – начальные условия для ящика. Отметим, что формулы (14), (16) определяют общее решение в фазовом пространстве системы (7) лишь до гиперплоскости разрыва $x' = 0$. При движении через гиперплоскость разрыва

следует изменить начальные условия (если только траектория не оказывается в зоне залипания).

На основании численных экспериментов по построению траекторий системы (7) для некоторых частных начальных условий можно сделать следующее предположение относительно финальных движений ящика. Вначале ящик поступательно движется по плоскости в одну сторону; затем, теряя энергию из-за трения, первый раз оказывается в зоне залипания – материальная точка при этом движется по синей дуге эллипса. После выхода из зоны залипания ящик начинает движение в другую сторону и через некоторое время вновь оказывается в зоне залипания. Через конечное число итераций залипания ящик оказывается в зоне залипания, но материальная точка движется уже по внутреннему (или предельному) эллипсу, поэтому ящик остаётся в зоне залипания навечно.

Библиографический список

1. Ramsey G and Rahnejat H. Fundamentals of tribology, London, Imperial College Press, 2008, 391 p.
2. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Доклады РАН. 2005. № 1. С. 56 – 60.
3. Chernous'ko F.L. Analysis and Optimization of the Motion of a Body Controlled by Means of Movable Internal Mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 819 - 842.

4. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 4. С. 406 – 410.
5. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84.
URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62995>
6. Bardin B.S. and Panev A.S. On Dynamics of a Rigid Body Moving on a Horizontal Plane by Means of Motion of an Internal Particle // Vibroengineering Procedia, 2016, vol. 8, pp. 135 - 141.
7. Панёв А.С. О движении твердого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90072>
8. Bardin B.S., Panev A.S. On the Motion of a Rigid Body with an Internal Moving Point Mass on a Horizontal Plane // AIP Conference Proceedings, 2018, vol. 1959, no. 1. DOI: [10.1063/1.5034582](https://doi.org/10.1063/1.5034582)
9. Bardin B.S., Panev A.S. On the Motion of a Body with a Moving internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. Journal Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 519 - 542. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd180407>
10. Sobolev N.A., Sorokin K.S. Experimental Investigation of a Model of a Vibration-Driven Robot with Rotating Masses // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 826 - 835.
11. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu. Optimal Control of the Rectilinear Motion of a Rigid Body on a Rough Plane by Means of the Motion of Two Internal Masses // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126 - 135.

12. Volkova L.Yu., Yatsun S.F. Simulation of the Plane Controlled Motion of a Three-Mass Vibration System // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 859 - 878.
13. Xiong Zhan, Jian Xu. Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration-controlled internal masses // Advances in Mechanical Engineering, 2015, vol. 7, no. 3, available at: <http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1687814015573766>
14. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твёрдого тела с подвижными внутренними массами и роторов на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 763 - 772.
15. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. - 914 с.
16. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. - 304 с.
17. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. - 184 с.
18. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51 (93). №1. С. 99 - 128.
19. Filippov A.F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Side // Mathematics and Its Applications, 1988, no. 18, pp. 1 - 2.
20. Кордингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: УРСС, 2010. - 472 с.