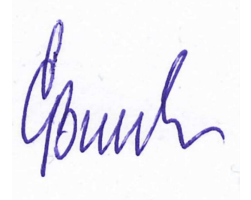


МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Вишенкова Екатерина Алексеевна

**Исследование влияния высокочастотных
вибраций на устойчивость движения
механических систем**

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Холостова Ольга Владимировна

Москва – 2018

Оглавление

Введение	4
Часть I. Исследование устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела при наличии высокочастотных гармонических вибраций одной из его точек	13
Глава 1. Постановка задачи. Допустимые дуги	13
1.1.1. Функция Гамильтона твердого тела с вибрирующей точкой подвеса	13
1.1.2. Преобразование гамильтониана. Приближенная автономная система. Точность решений	16
1.1.3. Приближенные уравнения движения в форме модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона	19
1.1.4. Перманентные вращения	21
1.1.5. Геометрическая интерпретация. Допустимые дуги	23
Глава 2. Перманентные вращения вокруг главной оси, содержащей центр масс	33
1.2.1. Линейный анализ устойчивости	33
1.2.2. Нелинейный анализ устойчивости.	41
1.2.3. Некоторые частные случаи.	44
Глава 3. Перманентные вращения вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции	49
1.3.1. Гамильтониан возмущенного движения	50
1.3.2. Достаточные условия устойчивости	51
1.3.3. Необходимые условия устойчивости	54
1.3.4. Нелинейный анализ устойчивости	63

1.3.5.	Частные случаи геометрии масс тела	67
Глава 4. Частный случай перманентных вращений динамически сим-		
	метричного тела, обусловленный вибрациями	73
1.4.1.	Достаточные и необходимые условия устойчивости	73
1.4.2.	Нелинейный анализ устойчивости	78
Часть II. Исследование устойчивости двойного маятника при на-		
личии высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса		
		85
2.1.1.	Постановка задачи	85
2.1.2.	Преобразование гамильтониана	87
2.1.3.	Положения равновесия приближенной системы	89
2.1.4.	Периодические движения маятника, рождающиеся из от-	
	носительных равновесий на вертикали	94
2.1.5.	Нелинейный анализ устойчивости в случае двух одинако-	
	вых стержней	95
2.1.6.	О других периодических движениях в системе двух оди-	
	наковых стержней	101
Заключение		107
 Список литературы		 109

Введение

Воздействие высокочастотной вибрации на механические системы может привести к изменению характера движения и устойчивости систем, а также к появлению новых динамических эффектов и явлений. В настоящее время многие из них хорошо известны и нашли применение в различных сферах производства, в том числе в авиационной промышленности и ракетостроении. Изучение новых динамических эффектов способствует созданию и совершенствованию вибрационных устройств.

Задача поиска и обоснования воздействия высокочастотных возмущений на механические системы берет свое начало с работы А. Стефенсона (1908 г.) [89, 90], где был описан эффект стабилизации перевернутого математического маятника при достаточно больших значениях частоты вертикальных вибраций точки подвеса. Физическое обоснование этого эффекта стабилизации, а также механическая конструкция для экспериментального исследования были предложены П. Л. Капицей в работах [25, 26]. Почти одновременно с [25, 26] в работе [9] на примере устройства с вибрирующим подвесом с помощью метода осреднения была получена оценка частоты вибрации, гарантирующая устойчивость верхнего относительного положения равновесия маятника, совпадающая с результатами Капицы.

Исследование устойчивости математического маятника было продолжено в работах [5, 35, 37, 56, 59, 61, 71, 77, 80, 83]. Рассмотрены движения точки подвеса вдоль горизонтали [35, 71], вертикали [5, 56, 77] и произвольной наклонной оси [37, 56, 71, 80, 83]. Исследования устойчивости движения по эллиптическим траекториям проведены в работах [8, 56, 71]. Влияние высокочастотных вибраций изучалось для других маятниковых систем: физического [9] и сферического [39] маятников, а также системы маятников [56] при прямолинейном характере движения точки подвеса (вдоль вертикали, горизонтали или наклон-

ной). Отметим, что в большинстве работ исследование проводится с помощью асимптотических методов. Строгое доказательство существования и исследование устойчивости (в линейной и нелинейной постановках) высокочастотных периодических движений маятника даны в работах [37, 59, 61, 71]. Строгий анализ устойчивости относительных положений равновесия маятника на вертикали при вертикальных гармонических колебаниях произвольных значениях частоты и амплитуды точки подвеса в нелинейной постановке проведен в [5]. Вопрос о существовании высокочастотных периодических движений маятника, бифуркациях, а также строгий нелинейный анализ устойчивости при произвольном высокочастотном периодическом движении точки подвеса в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью движения маятника, рассмотрен в монографии [71].

Ряд работ связан с исследованием динамики двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса [24, 56, 67, 68, 81, 84, 90]. Приближенный анализ устойчивости четырех «основных» положений относительных равновесий на вертикали двойного маятника, состоящего из тонких стержней, при высокочастотных вертикальных вибрациях точки подвеса изложен в работах [56, 90]. Для случая двух шарнирно соединенных физических маятников в статье [67] эта задача была решена в линейном приближении, а для случая системы двух одинаковых стержней — в строгой нелинейной постановке. Для случая двух одинаковых стержней также исследованы высокочастотные периодические движения двойного маятника, отличные от указанных равновесий. Полный нелинейный анализ «основных» положений относительного равновесия для случая произвольных значений частоты и амплитуды вертикальных гармонических колебаний точки подвеса для системы двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, рассмотрен в [68]. В книге [24] для двойного маятника, состоящего из одинаковых точечных масс, при вертикальных и косых высокочастотных вибрациях точки подвеса, по заданным углам отклонения маятника найдены

(в приближенной системе) параметры вибрации для обеспечения устойчивости. Случай N -звенного маятника рассмотрен в работах [76, 86].

Задача получила свое развитие в исследованиях устойчивости движений твердых тел более сложной конфигурации при высокочастотных вибрациях их точки подвеса. Одной из изучаемых задач является задача о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. Различные аспекты его движения исследуются в работах [6, 42, 60, 62–65, 82] (см. также [71]). В частности, при вибрациях вдоль вертикали при произвольных значениях частоты и амплитуды найдено строгое решение задачи об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа в [62]. Для случая быстрых вибраций малой амплитуды в работах [60, 63, 82] решен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений волчка, близких к его регулярной прецессии. В статье [65] в предположении, что амплитуда колебаний точки подвеса волчка мала, решен вопрос об устойчивости периодических движений волчка, рождающихся из его регулярной прецессии, при резонансе в вынужденных колебаниях и при его отсутствии. В работах [6, 42] в рамках приближенной системы рассматриваются вопросы существования, бифуркаций и устойчивости стационарных вращений волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает высокочастотные периодические вибрации малой амплитуды в трехмерном пространстве; в частности получено условие устойчивости «спящего» волчка Лагранжа, обобщающее классическое условие Майевского–Четаева. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, рассмотрены в книге [72].

При быстро колеблющейся точке подвеса голономной системы получены предельные уравнения движения при стремлении частоты колебаний к бесконечности [32]; для колебания вдоль вертикали найдены положения равновесия предельной системы, а также условия их устойчивости [33, 34].

Изучение динамики твердого тела, имеющего произвольную геометрию масс, одна из точек которого совершает высокочастотные периодические или

условно-периодические вибрации малой амплитуды, проведено в работах [40, 41]. В этих работах методами теории возмущений получена система модифицированных уравнений движения типа уравнений Эйлера–Пуассона, в правые части которых добавлены компоненты вектора вибрационного момента [40, 41]. Компоненты вибрационного момента можно вычислить из вибрационного потенциала, который равен среднему по времени значению кинетической энергии осцилляционного движения, сообщаемому телу посредством вибрации его точки подвеса [8, 25, 35, 40, 56]. Полученная в [40, 41] система является приближенной, выписана погрешность при аппроксимации решений точной системы.

В рамках этой приближенной системы изучены частные движения динамически симметричного тела для законов движения точки подвеса, допускающих две циклические координаты [42]. Проведено исследование устойчивости относительных равновесий тела с произвольной геометрией масс, когда радиус-вектор центра масс занимает вертикальное [41] или наклонное [69] положение, а точка подвеса совершает быстрые вертикальные вибрации. В работе [7] рассмотрен случай быстрых горизонтальных гармонических вибраций точки подвеса и решен вопрос о существовании, числе и устойчивости периодических движений для тела с центром масс, лежащим на главной оси и в главной плоскости инерции, и для динамически симметричного тела. Влияние вязкого трения на устойчивость относительных равновесий на вертикали тела (для различных вариантов геометрии масс) в случае быстрых вертикальных гармонических вибраций изучено в статье [53].

Важным направлением в динамике твердого тела является изучение стационарных режимов движения. Классической является задача об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, открытых в 1894 году одновременно Млодзеевским Б. К. [43] и Штауде О. [88]. Перманентные вращения представляют собой вращения вокруг осей, неподвижных в теле и в абсолютном пространстве. В более ранней работе [23] изучены

необходимые условия устойчивости волчка Лагранжа и несимметричного тела при вращении вокруг вертикальной оси, содержащей центр масс. Исследованию перманентных вращений посвящена обширная литература. Подробная история изучения вопроса и библиография содержатся в монографии [66].

Оси перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой всегда вертикальны, а множество допустимых осей перманентных вращений в общем случае геометрии масс тела располагаются на поверхности эллиптического конуса (конуса Штауде), в частных случаях геометрии масс — в фиксированных плоскостях. Наибольшее число работ посвящено исследованию устойчивости перманентных вращений тела вокруг главной оси инерции, содержащей центр масс тела. В монографии [79] Р. Граммель провел качественный анализ необходимых условий устойчивости, а также предложил их геометрическую интерпретацию в общем случае распределения масс в теле. Необходимые условия устойчивости изучались также в монографии [85] и работах [44–47]. Достаточные условия устойчивости были получены В. В. Румянцевым методом связки известных интегралов уравнений движения системы [48], разработанным Четаевым. Эти условия исследовались также в работах [45, 55]. Число перманентных вращений, а также смена устойчивости на них изучалась в [57] с помощью бифуркационных диаграмм, построенных с применением техники топологического описания совместных уровней интегралов момента и энергии в фазовом пространстве, предложенной Смейлом [87]. В нелинейной постановке вопрос устойчивости вращений рассмотрен в [29, 30, 54, 74]. Устойчивость перманентных вращений волчков Лагранжа и Ковалевской изучалась в работах [49, 51, 73]. Полное решение задачи об устойчивости перманентных вращений тела с неподвижной точкой в линейной и нелинейной постановках для частных и общего случаев геометрии масс твердого тела, охватывающее весь диапазон допустимых значений параметров, осуществлен в монографии [66].

Исследование устойчивости равномерных вращений твердого тела с непо-

движной точкой при некоторых постоянно действующих возмущениях проводятся в монографии [52]. В работах [3, 27, 28, 31, 36, 50, 58] рассматривается устойчивость перманентных вращений гиростата. В статьях [1, 2, 44] проводится исследование перманентных вращений тела с неподвижной точкой в центральном ньютоновском гравитационном поле.

Отметим, что в случае вертикальных вибраций точки подвеса, как и в случае тела с неподвижной точкой, одна из координат тела (угол прецессии) циклическая, а ось перманентного вращения может быть также только вертикальной. Поэтому для обоих случаев существуют общие типы перманентных вращений (хотя наличие вибраций может качественно изменить характер их устойчивости); в то же время в случае вибраций существуют перманентные вращения, невозможные для тела с неподвижной точкой. В работе [70] найдены и исследованы два новых типа стационарных вращений тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями точки подвеса и невозможными для тела с неподвижной точкой; первое представляет собой коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции, а второе — перманентное вращение вокруг главной оси инерции в случае, когда центр масс тела не лежит на этой оси.

Целью данной диссертационной работы является исследование устойчивости частных режимов движения тяжелого твердого тела и двойного маятника в предположении что точка подвеса совершает высокочастотные гармонические вибрации малой амплитуды.

Диссертационная работа состоит из введения, двух частей, включающих пять глав, и списка литературы.

В первой части изучается динамика тяжелого твердого тела для различных вариантов геометрии масс, одна из точек тела (точка подвеса) совершает быстрые вертикальные вибрации.

В *первой главе* приводится вывод приближенной системы автономных дифференциальных уравнений движения тела, записанных в форме канонических уравнений Гамильтона. Приведены также полученные в [40, 41] дифференциальные уравнения движения, записанные в виде модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона. На основе [40, 41] выписана погрешность аппроксимации решений полной неавтономной системы решениями исследуемой системы. Дальнейшее исследование проводится в рамках полученной приближенной автономной системы. Рассматриваются частные движения — перманентные вращения тела вокруг оси, неподвижной в теле и в системе координат, движущейся поступательно вместе с телом. Показано, что такие движения могут происходить только вокруг вертикально расположенных осей. Получено уравнение, обобщающее известное уравнение конуса Штауде, описывающее геометрическое место осей перманентных вращений. Описаны допустимые оси перманентных вращений, а также условия их существования для случаев расположения центра масс на главной оси инерции (вращение вокруг главной оси, содержащей центр масс, или оси, лежащей в смежной ей главной плоскости инерции) и динамически симметричного тела.

В следующих главах проводится линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений тела случаев, допустимые дуги для которых найдены в первой главе. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой.

Во *второй главе* исследуются перманентные вращения твердого тела вокруг главной оси инерции, содержащей его центр масс. Выделены случаи расположения центра масс выше или ниже точки подвеса. В пространстве четырех параметров задачи (двух инерционных параметров, а также безразмерных частоты вибрации и угловой скорости перманентного вращения) найдены необходимые и в ряде случаев достаточные условия устойчивости изучаемых движений тела. Выписаны уравнения поверхности резонанса четвертого порядка и

поверхности вырождения. В области существования только необходимых условий устойчивости проведен нелинейный анализ устойчивости для двух частных случаев геометрии масс: динамическая симметрия и случай Бобылева–Стеклова. При этом использованы известные методы исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

В *третьей главе* исследуются перманентные вращения твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции, примыкающей к главной оси инерции, содержащей центр масс. Эта задача также четырехпараметрическая. Проведен полный линейный анализ устойчивости, найдены некоторые достаточные условия устойчивости. Осуществлен нелинейный анализ устойчивости тех же, что и в предыдущей главе частных случаев геометрии масс тела. Рассмотрены случаи резонанса третьего и четвертого порядка, а также случай вырождения.

Исследование перманентных вращений твердого тела в случае динамически симметричного твердого тела для одного частного случая перманентных вращений, обусловленных вибрациями и не существующих для тела с неподвижной точкой, проведено в *четвертой главе*. Для этого случая ось вращения лежит в главной плоскости инерции, не содержащей центр масс тела и не совпадающей с экваториальной плоскостью инерции, а частота вибрации и угловая скорость вращения связаны специальным соотношением. В трехмерном пространстве параметров задачи проведен полный, линейный и нелинейный, анализ устойчивости соответствующего положения равновесия приведенной системы. Рассмотрены случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также случаи вырождения.

Во **второй части** исследуется двойной маятник — система из двух тонких шарнирно соединенных однородных стержней, точка подвеса которой, совпадающая с концом одного из стержней, совершает высокочастотные гармонические колебания малой амплитуды вдоль горизонтали. В приближенной

задаче решается вопрос об устойчивости четырех положений относительного равновесия маятника на вертикали, для которых точки подвеса и центры масс лежат на одной вертикали (висящий, перевернутый, два варианта сложенных маятников). Показано, что устойчивым может быть только нижнее («висящее») положение относительного равновесия. Для системы, состоящей из двух одинаковых стержней, проведен нелинейный анализ устойчивости рождающегося из него периодического движения. Для этой же системы изучен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости в линейном приближении высокочастотных периодических движений малой амплитуды, отличных от положений относительного равновесия на вертикали. Показано, что в зависимости от частоты колебаний точки подвеса дополнительных («боковых») периодических движений может быть от одной до шести симметричных пар. Одна или две пары устойчивы в области существования, остальные неустойчивы. Движения существуют только в диапазоне частот колебаний точки подвеса, для которых «висящее» положение относительного равновесия приближенной системы неустойчиво.

При проведении исследования в диссертационной работе использовались методы теорий устойчивости линейных и нелинейных гамильтоновых систем, включая устойчивость при резонансах и КАМ-теории. Были применены методы нормальных форм Пуанкаре, нормализация гамильтонианов проводилась при помощи преобразования Биркгофа и преобразования Депри-Хори. При проведении анализа использовались компьютерные системы аналитических вычислений и численные расчеты.

Основные результаты данной диссертационной работы докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях [11–17], а также были опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК [18–21].

Часть I. Исследование устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела при наличии высокочастотных гармонических вибраций одной из его точек

Глава 1. Постановка задачи. Допустимые дуги

1.1.1. Функция Гамильтона твердого тела с вибрирующей точкой подвеса

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести. Будем считать, что одна из точек тела O (точка подвеса) совершает вертикальные гармонические колебания относительно некоторой неподвижной точки O^* по закону $O^*O = \zeta(t) = a \cos \Omega t$.

Пусть $OXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх; $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, ее оси направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz обозначим через A, B и C . В системе $Oxyz$ радиус-вектор \overrightarrow{OG} центра масс имеет координаты x_G, y_G, z_G . Предполагается, что $\overrightarrow{OG} \neq 0$ и, без ограничения общности, $x_G > 0$.

Кинетическая и потенциальная энергии тела вычисляются по формулам:

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + m\vec{v}_O \cdot \vec{v}_{G_r} + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mg(\zeta(t) + \overrightarrow{OG} \cdot \vec{n}).$$

Здесь m — масса тела, $\vec{v}_O = \dot{\zeta}(t)\vec{n}$ — скорость точки подвеса, $\vec{v}_{G_r} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OG}$ — относительная (в системе координат $OXYZ$) скорость точки G ; $\vec{\omega}$ и \vec{n} — векторы абсолютной угловой скорости тела и орта оси OZ , компоненты $p, q,$

r и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ которых в связанной с телом системе координат определяются соотношениями

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad (1.1.1)$$

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \quad (1.1.2)$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергия могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) - \\ &- m a \Omega \sin \Omega t \left[\gamma_1 (q z_G - r y_G) + \gamma_2 (r x_G - p z_G) + \gamma_3 (p y_G - q x_G) \right], \\ \Pi &= m g a \cos \Omega t + m g (x_G \gamma_1 + y_G \gamma_2 + z_G \gamma_3). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Движения системы будем описывать при помощи канонических дифференциальных уравнений. Введем канонически сопряженные с координатами ψ, θ, φ импульсы по формулам

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \psi} = [A \gamma_1^2 + B \gamma_2^2 + C \gamma_3^2] \dot{\psi} + (A - B) \gamma_1 \cos \varphi \dot{\theta} + C \gamma_3 \dot{\varphi}, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = (A - B) \gamma_1 \dot{\psi} + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \dot{\theta} - \\ &- m a \Omega \sin \Omega t [(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \cos \theta - z_G \sin \theta], \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \varphi} = C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - m a \Omega \sin \Omega t (x_G \gamma_2 - y_G \gamma_1). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Разрешив соотношение (1.1.4) относительно обобщенных скоростей $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - \hat{p}_\varphi \cos \theta) - (A - B) \gamma_1 \cos \varphi \hat{p}_\theta}{AB \sin^2 \theta}, \\ \dot{\theta} &= \frac{(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \hat{p}_\theta \sin \theta - (A - B) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - \hat{p}_\varphi \cos \theta)}{AB \sin \theta}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\hat{p}_\varphi}{C} - \cos \theta \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - \hat{p}_\varphi \cos \theta) - (A - B) \gamma_1 \cos \varphi \hat{p}_\theta}{AB \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\theta &= p_\theta + ma\Omega \sin \Omega t [(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \cos \theta - z_G \sin \theta], \\ \widehat{p}_\varphi &= p_\varphi + ma\Omega \sin \Omega t \sin \theta (x_G \cos \varphi - y_G \sin \varphi).\end{aligned}\quad (1.1.6)$$

Используя выписанные соотношения (1.1.3) и (1.1.5), составим гамильтониан по формуле

$$H = p_\psi \dot{\psi} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - T + \Pi.$$

Осуществим далее каноническую унивалентную замену переменных, задаваемую формулами (1.1.6) и соотношениями

$$\widehat{\psi} = \psi, \quad \widehat{\theta} = \theta, \quad \widehat{\varphi} = \varphi, \quad \widehat{p}_\psi = p_\psi.\quad (1.1.7)$$

Эта замена задается производящей функцией

$$S = \psi \widehat{p}_\psi + \theta \widehat{p}_\theta + \varphi \widehat{p}_\varphi - ma\Omega \sin \Omega t [(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \sin \theta + z_G \cos \theta].$$

Преобразованный гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \frac{(A \cos^2 \widehat{\varphi} + B \sin^2 \widehat{\varphi})(\widehat{p}_\psi - \widehat{p}_\varphi \cos \widehat{\theta})^2}{2AB \sin^2 \widehat{\theta}} + \frac{A \sin^2 \widehat{\varphi} + B \cos^2 \widehat{\varphi}}{2AB} \widehat{p}_\theta^2 + \\ &+ \frac{\widehat{p}_\varphi^2}{2C} + \frac{(B - A) \sin \widehat{\varphi} \cos \widehat{\varphi} (\widehat{p}_\psi - \widehat{p}_\varphi \cos \widehat{\theta}) \widehat{p}_\theta}{AB \sin \widehat{\theta}} + \\ &+ m(g - a\Omega^2 \cos \Omega t) [(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \sin \theta + z_G \cos \theta].\end{aligned}\quad (1.1.8)$$

Будем предполагать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $\ell = A/(mx_G)$, а частота Ω колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, при этом считаем, что $a\Omega \sim 1$. Введем малый параметр ε и безразмерную частоту ω_0 по формулам

$$\varepsilon^2 = \frac{a}{\ell} \quad (0 < \varepsilon \ll 1); \quad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \varepsilon^2 \omega_0.\quad (1.1.9)$$

Перепишем гамильтониан (1.1.8) в безразмерном виде. С этой целью введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{A}{C}, \quad \sigma_1 = \frac{y_G}{x_G}, \quad \sigma_2 = \frac{z_G}{x_G}. \quad (1.1.10)$$

Параметры σ_1 и σ_2 , задающие положение центра масс в теле, неотрицательны, а инерционные параметры α и β должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции

$$\alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0, \quad \alpha - \beta + \alpha\beta \geq 0, \quad \beta - \alpha + \alpha\beta \geq 0. \quad (1.1.11)$$

Обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega$ и Ω соответственно. В безразмерных переменных и параметрах гамильтониан системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \frac{\alpha \cos^2 \hat{\varphi} + \sin^2 \hat{\varphi}}{2 \sin^2 \hat{\theta}} (\tilde{p}_\psi - \tilde{p}_\varphi \cos \hat{\theta})^2 + \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \hat{\varphi} + \cos^2 \hat{\varphi}) \tilde{p}_\theta^2 + \\ & + \frac{(1 - \alpha) \sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi}}{\sin \hat{\theta}} (\tilde{p}_\psi - \tilde{p}_\varphi \cos \hat{\theta}) \tilde{p}_\theta + \frac{1}{2} \beta \tilde{p}_\varphi^2 + \\ & + (\varepsilon^2 \omega_0^2 - \varepsilon \cos \tau) [(\sin \hat{\varphi} + \sigma_1 \cos \hat{\varphi}) \sin \hat{\theta} + \sigma_2 \cos \hat{\theta}]. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

1.1.2. Преобразование гамильтониана. Приближенная автономная система. Точность решений

Осуществим в (1.1.12) каноническую замену переменных по формулам:

$$\hat{\theta} = x_1, \quad \hat{\varphi} = x_2, \quad \tilde{p}_\psi = \varepsilon p, \quad \tilde{p}_\theta = \varepsilon X_1, \quad \tilde{p}_\varphi = \varepsilon X_2. \quad (1.1.13)$$

и представим функцию Гамильтона в виде:

$$\begin{aligned} H = & \varepsilon H_1 + \frac{\varepsilon^3}{6} H_3, \quad (1.1.14) \\ H_1 = & \frac{(1 - \alpha) \sin x_2 \cos x_2 (p - X_2 \cos x_1) X_1}{\sin x_1} + \frac{(\alpha \sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) X_1^2}{2} + \frac{1}{2} \beta X_2^2 + \\ & + \frac{(\alpha \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2) (p - X_2 \cos x_1)^2}{2 \sin^2 x_1} - \cos \tau [(\sin x_2 + \sigma_1 \cos x_2) \sin x_1 + \sigma_2 \cos x_1], \\ H_3 = & 6\omega_0^2 [(\sin x_2 + \sigma_1 \cos x_2) \sin x_1 + \sigma_2 \cos x_1]. \end{aligned}$$

Найдем далее близкую к тождественной унивалентную каноническую замену переменных, уничтожающую независимую переменную τ в слагаемых до четвертого порядка включительно относительно ε . Это преобразование может быть получено, например, при помощи метода Депри–Хори [71] и имеет вид:

$$\begin{aligned} x_j &= y_j + \varepsilon y_j^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} y_j^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ X_j &= Y_j + \varepsilon Y_j^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} Y_j^{(2)} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 0, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad Y_1^{(1)} = \sin \tau [(\sin y_2 + \sigma_1 \cos y_2) \cos y_1 - \sigma_2 \sin y_1], \\ Y_2^{(1)} &= \sin \tau \sin y_1 (\cos y_2 - \sigma_1 \sin y_2), \\ y_1^{(2)} &= -2 \cos \tau (\alpha \sin^2 y_2 + \cos^2 y_2) \left[(\sin y_2 + \sigma_1 \cos y_2) \cos y_1 - \sigma_2 \sin y_1 \right] + \\ &\quad + 2(1 - \alpha) \cos \tau \sin(2y_2) \cos y_1 (\cos y_2 - \sigma_1 \sin y_2), \\ y_2^{(2)} &= 4 \cos \tau (1 - \alpha) \sin(2y_2) \operatorname{ctg} y_1 \left[(\sin y_2 + \sigma_1 \cos y_2) \cos y_1 - \sigma_2 \sin y_1 \right] - \\ &\quad - \cos \tau \left[(\alpha \cos^2 y_2 + \sin^2 y_2) \operatorname{ctg}^2 y_1 + \beta \right] (\cos y_2 - \sigma_1 \sin y_2) \sin y_1. \end{aligned}$$

Слагаемые $Y_1^{(2)}$, $Y_2^{(2)}$ не выписаны в силу их громоздкости.

Преобразованный гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon K_1 + \frac{\varepsilon^3}{6} K_3 + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(\alpha \cos^2 y_2 + \sin^2 y_2)(p - Y_2 \cos y_1)^2}{2 \sin^2 y_1} + \frac{(\alpha \sin^2 y_2 + \cos^2 y_2) Y_1^2}{2} + \frac{1}{2} \beta Y_2^2 + \\ &\quad + \frac{(1 - \alpha) \sin y_2 \cos y_2 (p - Y_2 \cos y_1) Y_1}{\sin y_1}, \\ K_3 &= 6\omega_0^2 [(\sin y_2 + \sigma_1 \cos y_2) \sin y_1 + \sigma_2 \cos y_1] + \frac{3}{2} (\sigma_1 \cos y_1 - \sigma_2 \sin y_1 \cos y_2)^2 + \\ &\quad + \frac{3}{2} [\alpha (\cos y_1 - \sigma_2 \sin y_1 \sin y_2)^2 + \beta \sin^2 y_1 (\cos y_2 - \sigma_1 \sin y_2)^2]. \end{aligned}$$

Слагаемое $O(\varepsilon^4)$ 2π -периодично по времени τ и угловым координатам y_1, y_2 .

Отбросим в (1.1.16) слагаемые четвертого и более высоких порядков по ε . Полученный гамильтониан отвечает приближенной автономной системе. При этом решения полученной приближенной автономной системы аппроксимируют

решения системы (1.1.16) с погрешностью порядка $\varepsilon^{4-\kappa}$ на интервале времени τ порядка $\varepsilon^{-\kappa}$ ($0 < \kappa < 4$) [40, 41]. Далее будем считать, что $\kappa = 5/2$ (см [71]).

Вернемся к размерным импульсам и времени (при помощи множителей $A\Omega$ и Ω), а также сделаем обратную серию замен к (1.1.9), (1.1.10) и вернемся к размерным величинам. Сохраняя за переменными системы исходные обозначения, запишем полученный размерный гамильтониан в виде:

$$\begin{aligned} H = & \frac{(A \cos \varphi^2 + B \sin \varphi^2)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin \theta^2} + \frac{A \sin \varphi^2 + B \cos \varphi^2}{2AB} p_\theta^2 + \\ & + \frac{(B - A) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta}{AB \sin \theta} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \\ & + mg \left[(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \sin \theta + z_G \cos \theta \right] + \Pi^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Здесь $\Pi^{(\nu)}$ — вибрационный потенциал, который был впервые получен в [40, 41] для периодических или условно-периодических вибраций малой амплитуды и произвольной геометрии масс тела. Вибрационный потенциал задается формулой

$$\Pi^{(\nu)} = \frac{m^2 a^2 \Omega^2}{4} \left[\frac{(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3)^2}{A} + \frac{(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)^2}{B} + \frac{(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2)^2}{C} \right].$$

Отметим, что координата ψ в системе с гамильтонианом (1.1.17) как в исходной, так и в преобразованной приближенной системе циклическая, соответствующий ей импульс p_ψ постоянен.

Сделаем обратную замену (1.1.15) в гамильтониане (1.1.17). Сравним решения полученной системы с решением системы с гамильтонианом (1.1.8). Получаем, что решения полной неавтономной системы с гамильтонианом (1.1.8) на интервале времени τ порядка $\varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями преобразованной приближенной автономной системы с гамильтонианом (1.1.17) при помощи соотношений вида

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \theta + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{\varphi} = \varphi + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \hat{p}_\theta &= p_\theta - m\dot{\zeta}(t) \left[x_G \sin \varphi \cos \theta + y_G \cos \varphi \cos \theta - z_G \sin \theta \right] + O(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

$$\widehat{p}_\varphi = p_\varphi - m\dot{\zeta}(t) \left[x_G \cos \varphi - y_G \sin \varphi \right] \sin \theta + O(\varepsilon^{1/2}).$$

В гамильтониане (1.1.17) вновь перейдем к безразмерным параметрам (1.1.10) и обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 соответственно. Преобразованный гамильтониан примет вид (за переменными оставляем прежние обозначения):

$$\begin{aligned} H = & \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) p_\theta^2 + \\ & + \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta + \frac{1}{2} \beta p_\varphi^2 + \frac{\xi}{2} \left[(\sigma_2 \sin \theta \cos \varphi - \sigma_1 \cos \theta)^2 + \right. \\ & \left. + (\cos \theta - \sigma_2 \sin \theta \sin \varphi)^2 \alpha + (\cos \varphi - \sigma_1 \sin \varphi)^2 \beta \sin^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Здесь был введен безразмерный параметр ξ

$$\xi = \frac{m x_G a^2 \Omega^2}{2 A g} \quad (\xi > 0),$$

характеризующий частоту вибрации точки подвеса.

Уравнения движения системы с гамильтонианом (1.1.18) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi}. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

1.1.3. Приближенные уравнения движения в форме

модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона

Движения тела с вибрирующей точкой подвеса можно описать также при помощи приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона [40], в правые части которых следует добавить компоненты вектора вибрационного момента $M^{(\nu)}$, получаемые по формулам

$$M_x^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_2 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_3 = \frac{(m a \Omega)^2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{x_G \gamma_2 (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)}{B} - \frac{(z_G \gamma_3 + \gamma_2 y_G)(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3)}{A} - \frac{x_G \gamma_3 (x_G \gamma_2 - y_G \gamma_1)}{C} \right], \\
& M_y^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_3 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_1 = \frac{(ma\Omega)^2}{2}. \quad (1.1.20) \\
& \left[\frac{y_G \gamma_1 (z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3)}{A} - \frac{(x_G \gamma_1 + z_G \gamma_3)(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)}{B} - \frac{\gamma_3 y_G (x_G \gamma_2 - y_G \gamma_1)}{C} \right], \\
& M_z^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_1 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_2 = \frac{(ma\Omega)^2}{2}. \\
& \left[\frac{(x_G \gamma_1 + \gamma_2 y_G)(x_G \gamma_2 - y_G \gamma_1)}{C} + \frac{\gamma_2 z_G (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)}{B} + \frac{\gamma_1 z_G (z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3)}{A} \right].
\end{aligned}$$

Уравнения движения тела имеют вид:

$$\begin{aligned}
A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= mg(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + M_x^{(\nu)}, \\
B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + M_y^{(\nu)}, \\
C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= mg(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) + M_z^{(\nu)},
\end{aligned} \quad (1.1.21)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (1.1.22)$$

Решения приближенных уравнений (1.1.21), (1.1.22), (1.1.20) на интервале времени t порядка $\varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями исходных полных уравнений Эйлера–Пуассона [40, 41] при помощи соотношений:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_i &= \gamma_i + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (i = 1, 2, 3), \\
\hat{p} &= p + \delta_x + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \hat{q} = q + \delta_y + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \hat{r} = r + \delta_z + O(\varepsilon^{1/2}), \\
\delta_x &= \frac{m}{A}(z_G v_{Oy} - y_G v_{Oz}), \quad \delta_y = \frac{m}{B}(x_G v_{Oz} - z_G v_{Ox}), \quad \delta_z = \frac{m}{C}(y_G v_{Ox} - x_G v_{Oy}).
\end{aligned}$$

Исследование движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса будем проводить в рамках приближенной системы, описываемой каноническими уравнениями (1.1.5), (1.1.19) с функцией Гамильтона (1.1.18), либо уравнениями Эйлера–Пуассона (1.1.21).

1.1.4. Перманентные вращения

Рассмотрим частные движения — перманентные вращения тела, происходящие вокруг оси, фиксированной в теле и в системе координат $OXYZ$. Для перманентных вращений вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости тела и модуль вектора \vec{K}_O кинетического момента тела (в рамках приближенной системы) постоянны. По теореме об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{OG} \times m \vec{g} + \vec{M}^{(\nu)}.$$

Момент силы тяжести направлен по горизонтали. В силу условия

$$M_x^{(\nu)}\gamma_1 + M_y^{(\nu)}\gamma_2 + M_z^{(\nu)}\gamma_3 = 0$$

вибрационный момент также горизонтален.

При сделанных предположениях вектор $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ перпендикулярен оси вращения тела и вращается вокруг нее с угловой скоростью $\vec{\omega}$, оставаясь горизонтальным. Следовательно, как и для тела с неподвижной точкой подвеса, ось перманентного вращения тела может быть направлена только по вертикали. Для определенности считаем, что векторы $\vec{\omega}$ и \vec{n} сонаправлены. Тогда имеем

$$\frac{p}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma_2} = \frac{r}{\gamma_3} = \omega = \text{const} > 0. \quad (1.1.23)$$

Учитывая это условие и постоянство величин p, q, r , перепишем уравнения движения (1.1.21) в виде

$$\begin{aligned} (C - B)\gamma_2\gamma_3\omega^2 &= mg(z_G\gamma_2 - y_G\gamma_3) + M_x^{(\nu)}, \\ (A - C)\gamma_1\gamma_3\omega^2 &= mg(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1) + M_y^{(\nu)}, \\ (B - A)\gamma_1\gamma_2\omega^2 &= mg(y_G\gamma_1 - x_G\gamma_2) + M_z^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Если теперь умножить каждое из трех уравнений (1.1.24) соответственно на x_G, y_G, z_G и сложить их почленно, то получим уравнение

$$2ABC\omega^2 \left[(C - B)x_G\gamma_2\gamma_3 + (A - C)y_G\gamma_1\gamma_3 + (B - A)z_G\gamma_1\gamma_2 \right] = \quad (1.1.25)$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 m^2 \Omega^2 \left[A(C - B)x_G^2(x_G\gamma_2\gamma_3 - y_G\gamma_1\gamma_3 - z_G\gamma_1\gamma_2) + \right. \\
&+ B(C - A)y_G^2(x_G\gamma_2\gamma_3 - y_G\gamma_1\gamma_3 + z_G\gamma_1\gamma_2) - C(B - A)z_G^2(x_G\gamma_2\gamma_3 + \\
&+ y_G\gamma_1\gamma_3 - z_G\gamma_1\gamma_2) + x_G y_G z_G \left[(C - B)A\gamma_1^2 + (A - C)B\gamma_2^2 + (B - A)C\gamma_3^2 \right] \left. \right],
\end{aligned}$$

описывающее в пространстве величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ множество допустимых осей перманентных вращений. Так как правая и левая части в (1.1.25) — квадратичные формы этих величин, то уравнение (1.1.25) является в общем случае уравнением эллиптического конуса [22].

При $\Omega = 0$ (случай отсутствия вибрации) получаем известное уравнение конуса Штауде [88], описывающее множество осей перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой:

$$(C - B)x_G\gamma_2\gamma_3 + (A - C)y_G\gamma_1\gamma_3 + (B - A)z_G\gamma_1\gamma_2 = 0.$$

При $\omega = 0$ уравнение (1.1.25) определяет конус вертикальных осей в теле с вибрирующим подвесом в положениях относительного равновесия [40, 69]. Оба конуса (при $\Omega = 0$ и $\omega = 0$) фиксированы в теле.

В общем случае $\Omega \neq 0$ и $\omega \neq 0$ конус (1.1.25) не фиксирован, его положение в теле зависит от соотношения между этими параметрами. Оси перманентных вращений являются образующими конуса (1.1.25). К числу образующих относится прямая OG , проходящая через центр масс тела.

Величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, задающие ось перманентного вращения, и соответствующая угловая скорость ω должны удовлетворять геометрическому соотношению $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ и уравнениям из (1.1.24).

Введем безразмерную частоту перманентного вращения η :

$$\eta = \omega/\Omega_1 \quad (\eta > 0). \quad (1.1.26)$$

В безразмерных переменных (1.1.10), (1.1.26) система уравнений (1.1.24)

имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 \eta^2 = \sigma_2 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_3 - \\
& - \xi \left[(\sigma_2 \gamma_3 + \sigma_1 \gamma_2) (\sigma_2 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_3) - \alpha \gamma_2 (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1) - \beta \gamma_3 (\sigma_1 \gamma_1 - \gamma_2) \right], \\
& \frac{\beta - 1}{\beta} \gamma_1 \gamma_3 \eta^2 = \gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1 + \\
& + \xi \left[\sigma_1 \gamma_1 (\sigma_2 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_3) - \alpha (\gamma_1 + \sigma_2 \gamma_3) (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1) + \beta \gamma_3 \sigma_1 (\sigma_1 \gamma_1 - \gamma_2) \right], \\
& \frac{1 - \alpha}{\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \eta^2 = \sigma_1 \gamma_1 - \gamma_2 + \\
& + \xi \left[\sigma_2 \gamma_1 (\sigma_2 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_3) + \alpha \gamma_2 \sigma_2 (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1) - \beta (\gamma_1 + \sigma_1 \gamma_2) (\sigma_1 \gamma_1 - \gamma_2) \right],
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

а уравнение конуса (1.1.25) — вид

$$\begin{aligned}
& \eta^2 \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 + \frac{\beta - 1}{\beta} \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 \right) - \xi \left((1 - \alpha) \sigma_2^2 (\sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \right. \\
& \left. - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2 \gamma_3) + (1 - \beta) \sigma_1^2 (\sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3) + (\alpha - \beta) (\gamma_2 \gamma_3 - \right. \\
& \left. - \sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3) + \left[(1 - \alpha) \gamma_3^2 + (\beta - 1) \gamma_2^2 + (\alpha - \beta) \gamma_1^2 \right] \sigma_1 \sigma_2 \right) = 0. \tag{1.1.28}
\end{aligned}$$

1.1.5. Геометрическая интерпретация. Допустимые дуги

Рассмотрим множество допустимых осей перманентных вращений тела. Направляющие косинусы γ_1 , γ_2 , γ_3 этих осей в соотношениях (1.1.24) или (1.1.27), при заданном распределении масс в теле, должны быть выбраны так, чтобы обеспечить неотрицательность величины η^2 .

Заметим, что одновременная замена знаков γ_1 , γ_2 и γ_3 , не обязательно меняет знаки правых частей уравнений (1.1.27), в отличие от случая тела с неподвижной точкой. И, следовательно, любая из двух полуобразующих каждой образующей может быть направлена вертикально вверх. И наоборот, возможны случаи, когда ни одна из полуобразующих конуса не будет осью перманентного вращения. Это отличает данную задачу от случая тела с неподвижной точкой, для которого из двух полуобразующих конуса Штауде одна всегда служит осью

перманентного вращения (для тела с центром масс на главной оси обе полуоси этой оси могут быть направлены вертикально вверх).

Для исследования множества допустимых осей перманентных вращений строится сфера единичного радиуса с центром в точке O . Рассматриваются множества точек пересечения допустимых осей перманентных вращений тела с этой сферой, образующие на сфере дуги, которые также называются допустимыми.

В диссертации рассматриваются два частных случая геометрии масс тела, когда центр масс лежит на главной оси инерции тела и когда тело динамически симметрично. В этих случаях конус (1.1.28) распадается на две плоскости (как и в случае тела с неподвижной точкой подвеса) или, при некоторых значениях параметров, исчезает.

1. Допустимые дуги в случае расположения центра масс тела на одной из главных осей инерции

Рассмотрим частный случай, при котором центр масс лежит на одной из главных осей инерции, например, на оси Ox , тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Уравнение конуса (1.1.28) принимает следующий вид

$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 (\xi \alpha \beta - \eta^2) = 0. \quad (1.1.29)$$

Уравнения (1.1.27) сводятся к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 \eta^2 &= \xi \gamma_2 \gamma_3 (\alpha - \beta), \\ \frac{\beta - 1}{\beta} \gamma_1 \gamma_3 \eta^2 &= \gamma_3 (1 - \xi \alpha \gamma_1), \\ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \eta^2 &= \gamma_2 (1 - \xi \beta \gamma_1). \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

При $\alpha = \beta$ имеем случай Лагранжа, далее его рассматривать не будем. Рассмотрим другие варианты выполнения уравнений (1.1.29) и (1.1.30).

1. Если осью вращения является ось Ox , содержащая центр масс (случай $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$), то уравнения (1.1.30) удовлетворяются тождественно. Угловая скорость η перманентного вращения может быть произвольной, как и в случае тела с неподвижной точкой.

2. Если ось вращения лежит в одной из главных плоскостей инерции, например, в плоскости Oxz , но не совпадает с осью Ox . Тогда $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$. При этом первое и третье уравнения из (1.1.30) выполняются тождественно, а из второго получим соотношение

$$\frac{\beta - 1}{\beta} \eta^2 \gamma_1 = 1 - \xi \alpha \gamma_1. \quad (1.1.31)$$

Несложный анализ соотношения (1.1.31) показывает, что для значений ξ из интервала $0 \leq \xi < 1/\alpha$ (включающего случай отсутствия вибраций $\xi = 0$) при $\beta > 1$ ($A > C$) допустимые дуги определяются условием $\gamma_1 > 0$, означающим, что при вращении центр масс тела находится выше точки подвеса. Если же $\beta < 1$ ($A < C$), то имеем $\gamma_1 < 0$, и центр масс находится ниже точки подвеса. Допустимые дуги в плоскости Oxz составляют в этих двух случаях полуокружности, показанные тонкими сплошными линиями на рис. 1 *a* и *b* (дуги *I*) соответственно.

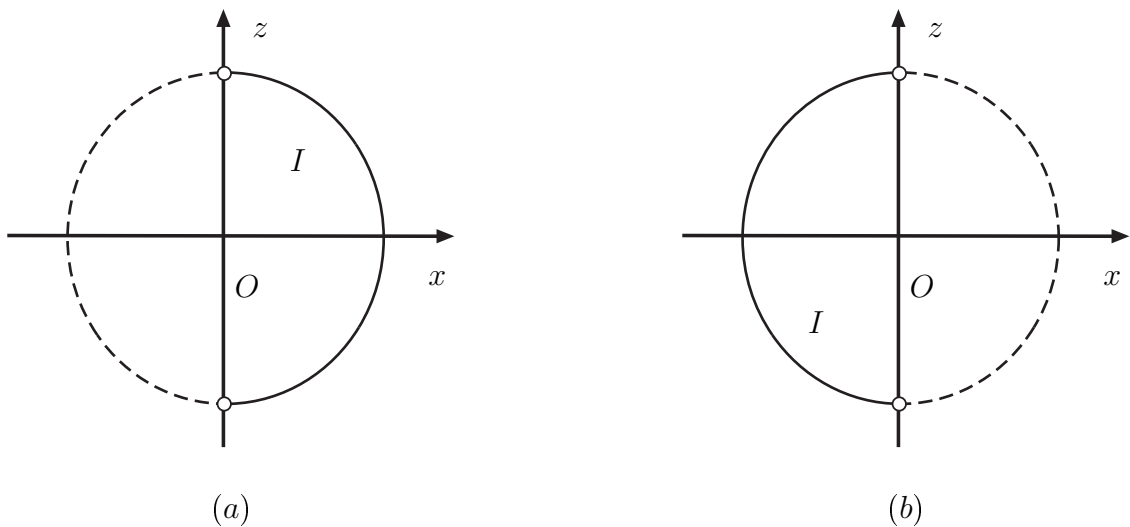


Рис. 1. Допустимые дуги в случае $\xi < 1/\alpha$ при $\beta > 1$ и $\beta < 1$

При увеличении параметра ξ ($\xi > 1/\alpha$) области допустимых дуг меняются: в случае $\beta > 1$ допустимые дуги определяются условием $0 < \gamma_1 < 1/(\xi\alpha)$, а в случае $\beta < 1$ — условием $0 < \gamma_1 < 1$, а также $1/(\xi\alpha) < \gamma_1 < 1$. Допустимые дуги в первом случае показаны тонкими сплошными линиями на рис. 2 *a* (дуги *I*, *II*), во втором случае — на рис. 2 *b* (дуги *I*, *II*).

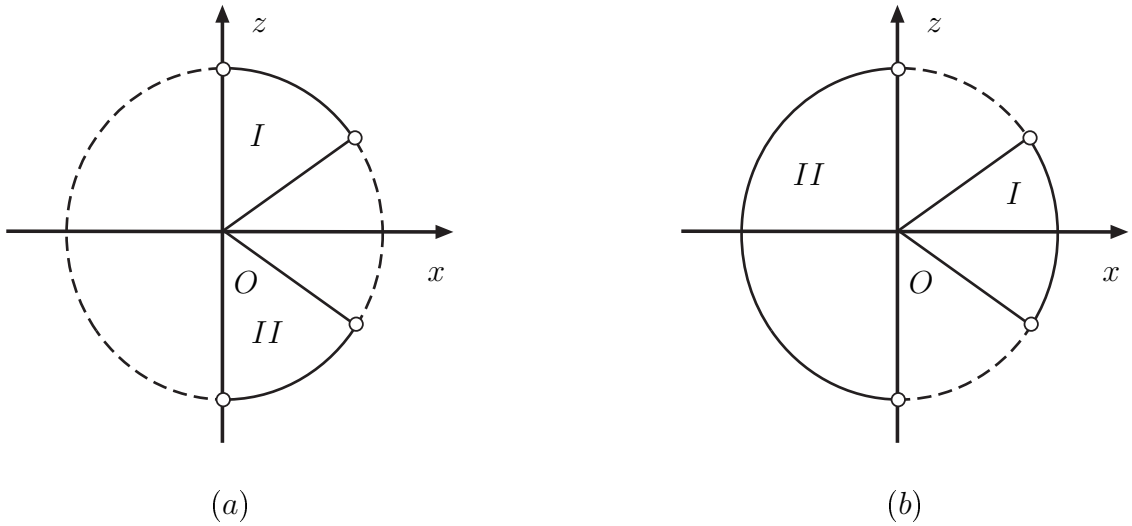


Рис. 2. Допустимые дуги в случае $\xi > 1/\alpha$ при $\beta > 1$ и $\beta < 1$

3. Для осей, лежащих в главной плоскости Oxy , но не совпадающих с осью Ox ($\gamma_2 \neq 0, \gamma_3 = 0$), имеем

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \eta^2 \gamma_1 = 1 - \xi \beta \gamma_1.$$

Этот случай формально сводится к предыдущему заменами $\beta \rightarrow \alpha$ и $\varphi_0 \rightarrow \theta_0$.

4. Уравнение (1.1.29) удовлетворяется при всех значениях γ_j , если выполнено условие $\eta^2 = \xi\alpha\beta$. При этом первое уравнение из (1.1.30) выполняется тождественно, а второе и третье приводятся к виду

$$\gamma_1 \gamma_3 (\xi \alpha \beta \gamma_1 - 1) = 0,$$

$$\gamma_2 (\xi \alpha \beta \gamma_1 - 1) = 0.$$

Оба этих условия выполняются при

$$\gamma_1 = \gamma_1^* = \frac{1}{\xi\alpha\beta} < 1. \quad (1.1.32)$$

Допустимой дугой является окружность радиуса $\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2\alpha^2\beta^2}}$, расположенная в плоскости γ_2 ($\gamma_2 \neq 0$), γ_3 ($\gamma_3 \neq 0$) с центром на оси $O\gamma_1$ в точке с координатой $\gamma_1 = \gamma_1^*$ ($\gamma_1^* > 0$).

2. Допустимые дуги в случае динамически симметричного тела

Рассмотрим случай динамически симметричного тела. Пусть, например, $A = B$ (т.е. $\alpha = 1$). Из ограничений на инерционные параметры (1.1.11) получаем, что параметр β изменяется в диапазоне $\beta \geq 1/2$. Исключим из этого диапазона точку $\beta = 1$, отвечающую частному случаю сферической симметрии. Центр масс тела расположен произвольно. Оси Ox и Oy подвижной системы координат $Oxyz$ выберем для выполнения предположения, что центр масс лежит в плоскости Oxz . Тогда $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 > 0$.

Уравнение (1.1.25) в безразмерных координатах сводится к виду:

$$\frac{\gamma_2}{\beta} \left[\eta^2 \gamma_3 - \beta \xi (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1) \right] = 0,$$

и, таким образом, описывает совокупность двух плоскостей в пространстве величин γ_1 , γ_2 , γ_3 , в которых могут располагаться допустимые оси перманентных вращений тела.

1. При $\gamma_2 = 0$ оси вращения лежат в плоскости Oxz , содержащей центр масс. Первое и третье из уравнений (1.1.27) удовлетворяются тождественно, а из первого уравнения получаем

$$\frac{\beta - 1}{\beta} \eta^2 \gamma_1 \gamma_3 = [\sigma_2 \gamma_1 - \gamma_3] [\xi (\sigma_2 \gamma_3 + \gamma_1) - 1].$$

При фиксированном значении параметра β знак величины η^2 меняется при переходе через прямые $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1 + \sigma_2 \gamma_3 = 1/\xi$ и $\gamma_3 = \sigma_2 \gamma_1$, разбивающие

плоскость $O\gamma_1\gamma_3$ на ряд областей (рис. 3). В случае $1/2 \leq \beta < 1$ области, где величина η^2 принимает отрицательные значения, закрашены; области, где $\eta^2 > 0$, оставлены незакрашенными. В случае $\beta > 1$ закрашенные и незакрашенные области меняются местами.

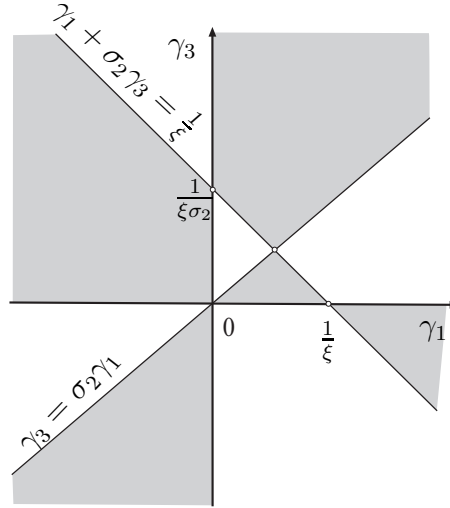


Рис. 3. Области возможного существования допустимых дуг в случае $1/2 \leq \beta < 1$ и $\gamma_2 = 0$

Точки пересечения прямых $\xi(\sigma_2\gamma_3 + \gamma_1) = 1$, $\sigma_2\gamma_1 = \gamma_3$ с осями координат и точки их взаимного пересечения таковы:

$$K(\kappa, \sigma_2\kappa), L\left(\frac{1}{\xi}, 0\right), M\left(0, \frac{1}{\xi\sigma_2}\right); \quad \zeta = \frac{1}{\sigma_2^2 + 1}, \quad \kappa = \frac{\zeta}{\xi}.$$

Величины γ_1 и γ_3 должны удовлетворять уравнению окружности $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1$. В зависимости от значений параметров ξ и σ_2 , возможны пять вариантов расположения точек K , M и L на рис. 3 относительно этой окружности: ни одна точка не попадает внутрь нее, попадает точка K , или точки K , L , или точки K , M , или все три точки. Дуги окружности, попадающие в незакрашенные области, являются допустимыми дугами в рассматриваемом случае.

Допустимые дуги для случая $1/2 \leq \beta < 1$ и пяти перечисленных вариантов описаны в таблице 1.1. В первом столбце таблицы приведены интервалы изменения безразмерной частоты вибрации точки подвеса ξ , а во втором — диапазоны изменения величин γ_1 и γ_3 на допустимых дугах, в зависимости от

параметра σ_2 , в третьем — ссылки на рисунок, где соответствующие дуги изображены в плоскости Oxz .

Таблица 1.1. Допустимые дуги

Интервал ξ	Доп. дуги	Рисунок
$\xi < \max(\kappa, \sigma_2\kappa)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma_2, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma_2 < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 4 а
$\max(\kappa, \sigma_2\kappa) < \xi < \min\left(\frac{1}{\sigma_2}, 1\right)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_*, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_{**} < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma_2, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $IV : \gamma_3/\sigma_2 < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 4 б
$1 < \xi < \frac{1}{\sigma_2} \quad (\sigma_2 < 1)$	$I : \gamma_{**} < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma_2, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma_2 < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$ $IV : \gamma_* < \gamma_1 < 1, \gamma_3 < 0$	рис. 4 в
$\frac{1}{\sigma_2} < \xi < 1 \quad (\sigma_2 > 1)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_*, \gamma_3 > 0$ $II : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma_2, \gamma_3 > 0$ $III : -1 < \gamma_1 < \gamma_{**}, \gamma_3 > 0$ $IV : \gamma_3/\sigma_2 < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 4 д
$\xi > \max\left(\frac{1}{\sigma_2}, 1\right)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma_2, \gamma_3 > 0$ $II : -1 < \gamma_1 < \gamma_{**}, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma_2 < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$ $IV : \gamma_* < \gamma_1 < 1, \gamma_3 < 0$	рис. 4 е

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_{*,**} = 1 \pm \kappa\sigma_2\sqrt{(\sigma_2^2 + 1)\xi^2 - 1},$$

причем знаки $+$ и $-$ соответствуют γ_* и γ_{**} .

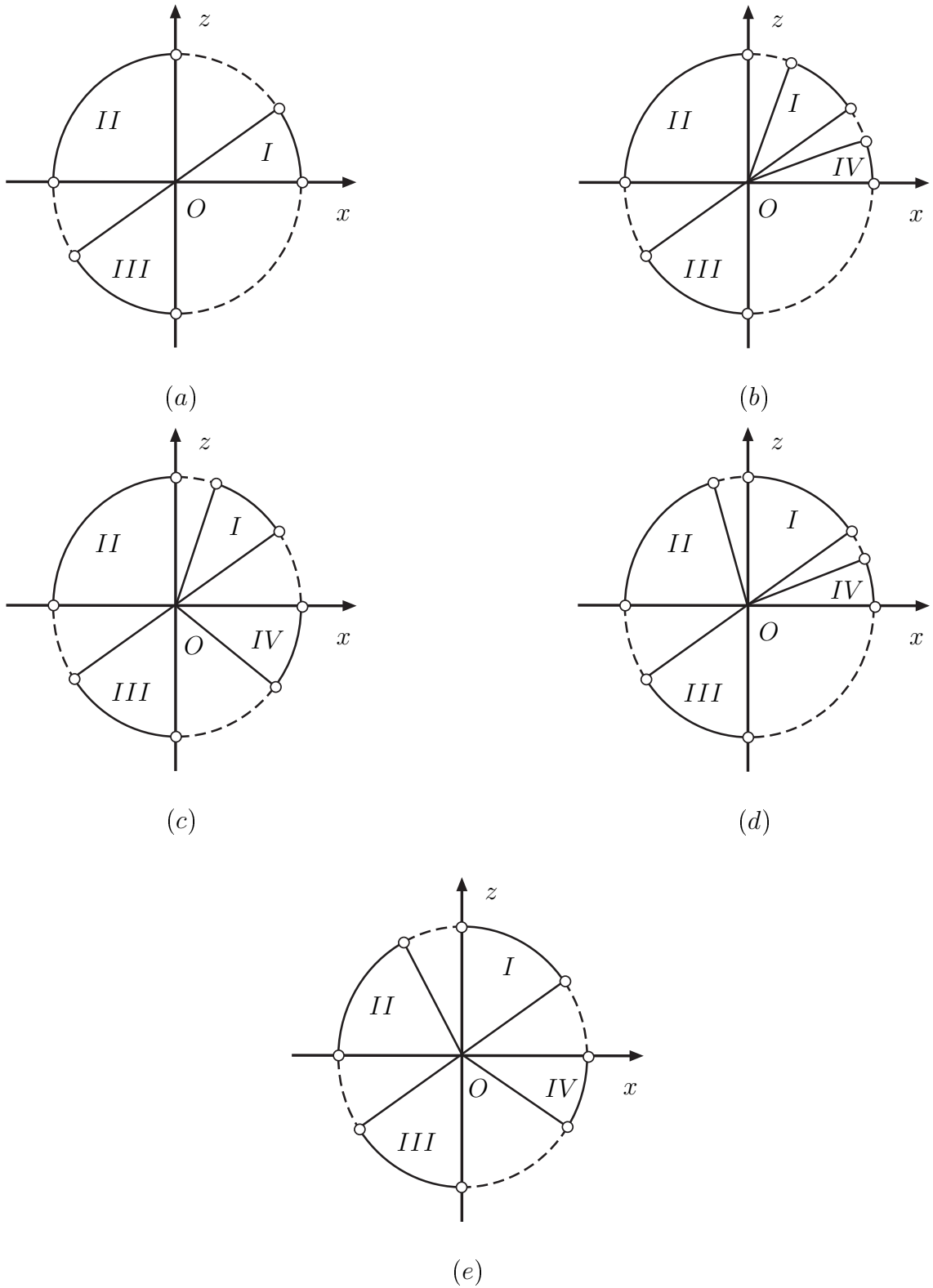


Рис. 4. Допустимые дуги для разных значений σ_2 и ξ при $1/2 \leq \beta < 1$

Для рассматриваемого на рис. 4 случая $1/2 \leq \beta < 1$ допустимые дуги показаны сплошными линиями, остальные части окружности — пунктирными

линиями. В случае $\beta > 1$ допустимые дуги — это пунктирные дуги на единичной окружности на рис. 4.

Анализируя результат, заключаем, что для достаточно небольших значений частоты вибрации ($\xi < \max(\kappa, \sigma\kappa)$) допустимые дуги, обозначенные на рис. 4 а цифрами *I*, *II*, *III*, совпадают с дугами в случае неподвижной ($\xi = 0$) точки подвеса тела. При увеличении ξ от одного из концов дуги *I* отделяется дуга *IV*, которая либо остается в первом квадранте, либо переходит в четвертый квадрант координатной плоскости. Допустимая дуга *II* во втором квадранте может составлять четверть окружности (рис. 4 а-с), с ростом ξ уменьшается (рис. 4 d, e). Допустимые дуги *III* в третьем квадранте плоскости *Oxz* не зависят от частоты вибрации точки подвеса.

2. Пусть теперь выполняется условие

$$\eta^2\gamma_3 - \beta\xi(\gamma_3 - \sigma_2\gamma_1) = 0. \quad (1.1.33)$$

Выразив из третьего уравнения из (1.1.27) γ_1 , имеем

$$\gamma_1 = \frac{1 - \xi\sigma_2\gamma_3}{\xi\beta}.$$

Тогда первое и второе из уравнений (1.1.27) принимают вид

$$\eta^2\gamma_3 = \xi(\beta + \sigma_2^2)\gamma_3 - \sigma_2, \quad (1.1.34)$$

$$\gamma_3\eta^2[\xi\sigma_2\gamma_3 - 1] = 0.$$

Если $\gamma_3 = 0$, то первое уравнение (1.1.34) может быть удовлетворено только при условии бесконечно большой угловой скорости перманентного вращения или бесконечно большой частоте вибрации точки подвеса. Таким образом, оси перманентных вращений тела не могут находиться в экваториальной плоскости инерции. Этот же результат справедлив и для случая тела с неподвижной точкой.

При $\gamma_3 \neq 0$ система уравнений (1.1.34), с учетом геометрического соотношения, имеет два решения вида

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2 \sigma_2^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\xi \sigma_2} \quad (\xi \sigma_2 > 1). \quad (1.1.35)$$

Соответствующие им оси перманентных вращений лежат в главной плоскости Oyz , см. рис. 5. Перманентные вращения вокруг этих осей отвечают физически одному и тому же движению тела. Отметим, что для тела с неподвижной точкой решения (1.1.35) не существуют, они обусловлены вибрациями точки подвеса тела.

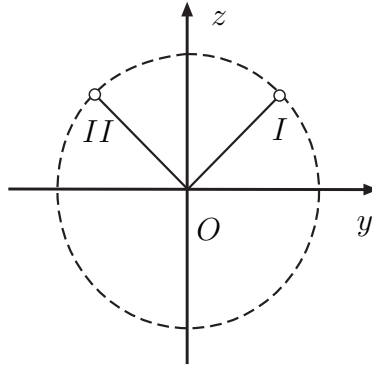


Рис. 5. Допустимые оси при $\eta^2 \gamma_3 - \beta \xi (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1) = 0$.

Подстановка решения (1.1.35) в условие (1.1.33) дает соотношение, связывающее параметры задачи (частоту вибраций точки подвеса и угловую скорость перманентного вращения):

$$\xi = \eta^2 / \beta. \quad (1.1.36)$$

Глава 2. Перманентные вращения вокруг главной оси, содержащей центр масс

Рассмотрим случай перманентных вращений вокруг главной оси, содержащей центр масс тела. Как найдено в разделе 1.1.5, угловая скорость вращения может быть произвольной.

Система (1.1.18) имеет частные решения — положения равновесия

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (\cos \varphi_0 = 0), \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = 0, \quad p_{\psi} = A\omega = \text{const}, \quad (1.2.1)$$

отвечающие перманентным вращениям тела вокруг вертикально расположенной оси Ox , содержащей центр масс тела, с постоянной угловой скоростью ω . При этом точка G может располагаться выше (случай $\varphi_0 = \pi/2$) или ниже (случай $\varphi_0 = 3\pi/2$) точки подвеса.

Будем исследовать устойчивость решений (1.2.1) (по отношению к координатам θ , φ и отвечающим им импульсам), оставаясь в рамках рассматриваемой приближенной системы.

Заметим, что постоянный безразмерный импульс, отвечающий координате ψ будет равен угловой скорости перманентного вращения η .

1.2.1. Линейный анализ устойчивости

Для исследования устойчивости описанных частных решений введем в гамильтониане (1.1.18) возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad p_2 = y_1, \quad p_3 = y_2$$

и представим его в виде (аддитивные постоянные отброшены)

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (1.2.2)$$

Здесь H_k ($k = 2, 3, 4$) – формы степени k относительно возмущений, имеющие вид:

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{\eta^2 - s + \alpha\xi}{2}x_1^2 + \frac{(\alpha - 1)\eta^2 - s + \beta\xi}{2}x_2^2 + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{2}y_2^2 + \eta x_1 y_2 + (\alpha - 1)\eta x_2 y_1, \\
H_3 &= 0, \quad H_4 = \frac{8\eta^2 - 4\alpha\xi + s}{24}x_1^4 - \frac{4(\alpha - 1)\eta^2 + 4\beta\xi - s}{24}x_2^4 + \\
&\quad + \frac{2(\alpha - 1)\eta^2 - 2\beta\xi + s}{4}x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 y_2^2 - \frac{\alpha - 1}{2}x_2^2 y_1^2 + \frac{5\eta}{6}x_1^3 y_2 - \\
&\quad - \frac{2(\alpha - 1)\eta}{3}x_2^3 y_1 + \frac{(\alpha - 1)\eta}{2}x_1^2 x_2 y_1 + (\alpha - 1)\eta x_1 x_2^2 y_2 + (\alpha - 1)x_1 x_2 y_1 y_2,
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

где $s = \text{sign}(\sin \varphi_0)$, а многоточие означает совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно возмущений.

Достаточные условия устойчивости исследуемых решений найдем как условия положительной определенности квадратичной формы H_2 из (1.2.3). Эти условия сводятся к системе неравенств

$$\eta^2(\alpha - 1) - s\alpha + \xi\alpha\beta > 0, \quad \eta^2(\beta - 1) - s\beta + \xi\alpha\beta > 0. \tag{1.2.4}$$

Если форма H_2 знакопеременна, то будем исследовать характеристическое уравнение соответствующей ей линейной системы, имеющее вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \tag{1.2.5}$$

$$a = (2 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\eta^2 - s(\alpha + \beta) + \xi(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$b = [\eta^2(\alpha - 1) - s\alpha + \xi\alpha\beta][\eta^2(\beta - 1) - s\beta + \xi\alpha\beta].$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \tag{1.2.6}$$

корни $\pm i\kappa_j$ ($j = 1, 2$) уравнения (1.2.5) чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Неравенства (1.2.6) являются необходимыми условиями устойчивости решений (1.2.1).

Если хотя бы одно из неравенств (1.2.6) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость, так как в этом случае у характеристического уравнения будут корни с положительной вещественной частью.

Изложим результаты, полученные при исследовании условий устойчивости (1.2.4), (1.2.6).

1. *Случай $s = -1$ (центр масс тела ниже точки подвеса).* Допустимую часть плоскости параметров α, β разобьем на 6 областей прямыми $\alpha = \beta, \alpha = 1, \beta = 1$. Эти области расположены симметрично относительно прямой $\alpha = \beta$; они обозначены цифрами 1–3 и 1'–3' (рис. 6).

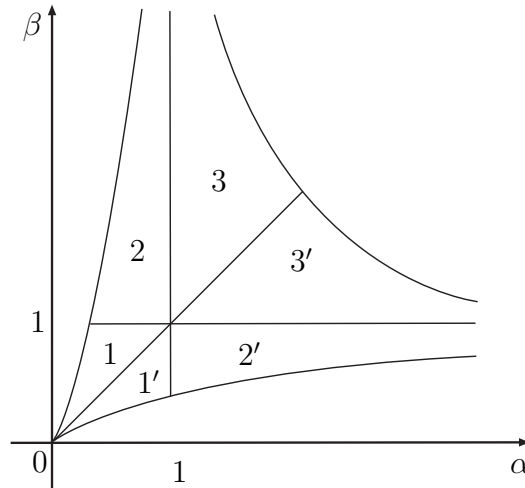


Рис. 6. Разбиение допустимой области параметров α, β при $s = -1$

В областях 1, 2 достаточные (и одновременно необходимые) условия устойчивости выполняются, если угловая скорость η перманентного вращения удовлетворяет условию $\eta < \eta_*(\xi)$, а в области 3 — при любых значениях параметра η ($\eta > 0$). В области 1 могут выполняться также только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости, определяемые неравенством $\eta > \eta_{**}(\xi)$. Величины $\eta_*(\xi)$, $\eta_{**}(\xi)$ задаются соотношениями

$$\eta_*^2(\xi) = \frac{\alpha(\xi\beta + 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_{**}^2(\xi) = \frac{\beta(\xi\alpha + 1)}{1 - \beta}.$$

В указанных условиях устойчивости параметр ξ в правых частях может принимать любые положительные значения (частота вибрации точки подвеса тела произвольна). Граница изменения параметра η (угловой скорости перманентного вращения) зависит от выбранного значения ξ .

В областях 1'–3' условия устойчивости получаются из соответствующих условий для областей 1–3 заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Из приведенных результатов следует, что наличие вибраций (по сравнению со случаем неподвижной точки подвеса) расширяет диапазон угловых скоростей перманентных вращений тела, для которых выполнены достаточные условия устойчивости. В то же время сдвигается, в сторону увеличения, нижняя граница угловых скоростей, обеспечивающих выполнение только необходимых условий устойчивости.

Заметим, что разбиение плоскости параметров α, β на области здесь (как и в случае $s = 1$, рассматриваемом в следующем разделе) не зависит от параметров ξ и η и совпадает с соответствующим разбиением при решении задачи для тела с неподвижной точкой подвеса [29, 66].

2. *Случай $s = 1$ (центр масс тела выше точки подвеса).* Выделим в допустимой части плоскости параметров α, β области 1–5 и симметричные им относительно прямой $\alpha = \beta$ области 1'–5' (рис. 7). Эти области разделены, помимо прямой $\alpha = \beta$, также прямыми $\alpha = 1, \beta = 1$ и двумя симметричными кривыми DB и $D'B$. Кривая DB задается уравнением

$$\alpha = \frac{\beta(2\beta - 3)}{(\beta - 1)^2}$$

и пересекает границы областей в точках $D((9 - \sqrt{17})/8; (\sqrt{17} - 1)/2)$, $B(2; 2)$ и $H(1; (\sqrt{5} + 1)/2)$.

В табл. 1.2 приведены условия устойчивости решений (1.2.1) в областях 1–5. Эти условия представляются следующим образом. Для каждой из областей полуось положительных значений параметра ξ разбита на несколько ин-

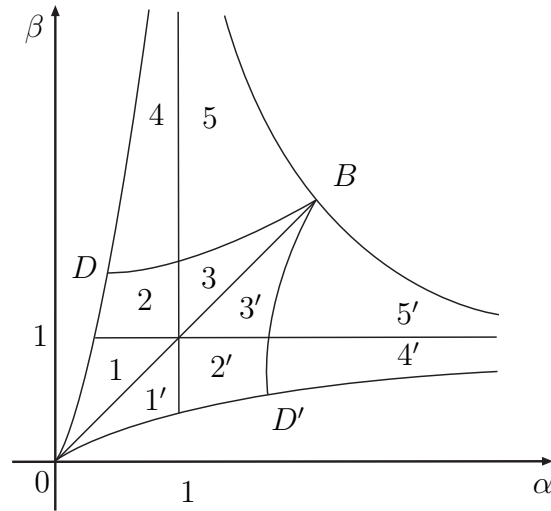


Рис. 7. Разбиение допустимой области параметров α, β при $s = 1$

тервалов (второй столбец табл. 1.2), границы которых зависят от исследуемой точки (α, β) области. Выбирается интервал с требуемым значением ξ (отвечающим требуемой частоте вибрации точки подвеса). В соответствующей ему строке табл. 1.2 выписаны достаточные (и одновременно необходимые) и только необходимые условия устойчивости в виде ограничений на (безразмерную) угловую скорость η перманентных вращений тела с границами — функциями выбранных значений α, β, ξ .

Таблица 1.2. Достаточные и необходимые условия устойчивости в случае $s = 1$

Обл.	Значения ξ	Достаточные условия	Только необходимые условия
1	$\xi \leq \xi_1$	—	$\eta > \eta_4$
	$\xi_1 < \xi < \xi_3$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_3, \quad \eta > \eta_4$
	$\xi_3 < \xi < 1/\alpha$	—	$\eta > \eta_1$
	$1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta < \eta_2$	$\eta > \eta_1$
	$\xi > 1/(\alpha\beta)$	$\eta < \eta_1$	$\eta > \eta_2$
	$\xi \leq \xi_1$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_3$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_3, \quad \eta_4 < \eta < \eta_2$

2	$\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_2 < \eta < \eta_1$	—
	$\xi > 1/\alpha$	$\eta < \eta_1$	—
3	$\xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta > \eta_1$	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$	$\eta > \eta_2$	$\eta_4 < \eta < \eta_1$
	$\xi_1 < \xi < 1/\alpha$	$\eta > \eta_2$	—
	$\xi > 1/\alpha$	$\forall \eta$	—
4	$\xi < \xi_2$	—	—
	$\xi_2 < \xi \leq \xi_1$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_3$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_3, \eta_4 < \eta < \eta_2$
	$\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_2 < \eta < \eta_1$	—
	$\xi > 1/\alpha$	$\eta < \eta_1$	—
5	$\xi < \xi_2$	$\eta > \eta_1$	—
	$\xi_2 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta > \eta_1$	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$	$\eta > \eta_2$	$\eta_4 < \eta < \eta_1$
	$\xi_1 < \xi < 1/\alpha$	$\eta > \eta_2$	—
	$\xi > 1/\alpha$	$\forall \eta$	—

Введенные в табл. 1.2 обозначения таковы:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{3\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta}{2\alpha\beta - \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^3 + \beta^2}, & (1.2.7) \\
 \xi_2 &= \frac{3\beta - 2\alpha\beta - 2\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha}{2\alpha\beta - 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \beta^3}, \\
 \xi_3 &= \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - \alpha - \beta}, \quad \eta_1^2 = \frac{\alpha(\xi\beta - 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_2^2 = \frac{\beta(\xi\alpha - 1)}{1 - \beta}, \\
 \eta_{3,4} &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta)\xi + 4 - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \mp \\
 &\mp \frac{2\sqrt{[(\alpha^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \alpha][(\beta^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \beta]}}{\alpha + \beta - \alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Здесь верхний и нижний знаки относятся соответственно к η_3 и η_4 .

Прочерк в таблице означает, что соответствующие условия не выполнены ни при каких значениях параметра η . В остальных случаях для не выписанных в таблице значений параметра η имеет место неустойчивость.

Анализируя приведенные результаты, заключаем, что в областях 3 и 5 при наличии вибрации нижняя граница диапазона угловых скоростей перманентных вращений, для которых выполнены достаточные условия устойчивости, ниже по сравнению со случаем неподвижной точки подвеса. Эта нижняя граница уменьшается с ростом частоты вибраций, а при $\xi > 1/\alpha$ достаточные условия устойчивости выполняются при любых значениях угловой скорости.

В областях 1 и 2 при отсутствии вибрации ($\xi = 0$) выполняются только необходимые условия устойчивости. Начиная с некоторого значения параметра ξ , появляются области достаточных условий устойчивости, для них угловая скорость перманентного вращения не должна превышать некоторого максимального значения.

В области 4 в случае отсутствия вибрации рассматриваемые перманентные вращения неустойчивы. С ростом ξ возникают сначала области выполнения только необходимых условий устойчивости (в ограниченном диапазоне угловых скоростей перманентных вращений), переходящие с последующим ростом частоты вибраций в достаточные условия.

Условия устойчивости в симметричных областях 1'–5' получаются из приведенных условий путем замены $\alpha \leftrightarrow \beta$, выводы по результатам устойчивости аналогичны.

Приведем также условия устойчивости исследуемых движений для случая динамически симметричного тела ($\alpha = 1$), соответствующего границам рассмотренных областей. В случае расположения центра масс тела ниже точки подвеса ($s = -1$) при $\beta < 1$ достаточные условия устойчивости определяются

соотношением

$$\eta^2 < \frac{\beta(1 + \xi)}{1 - \beta};$$

при выполнении неравенства с противоположным знаком имеем неустойчивость. Если же $\beta \geq 1$, то перманентные вращения устойчивы при любых значениях параметров η и ξ .

Результаты исследования для случая расположения центра масс тела выше точки подвеса ($s = 1$) представлены в табл. 1.3. Величины ξ_j и η_j определяются из формул (1.2.7) при $\alpha = 1$. Величина ξ_4 задается формулой

$$\xi_4 = \frac{\beta - 2}{\beta^2 - \beta - 1}. \quad (1.2.8)$$

Таблица 1.3. Достаточные и необходимые условия устойчивости в случае $\alpha = 1, s = 1$

Значения β	Значения ξ	Достаточные условия	Только необходимые условия
$\frac{1}{2} < \beta < 1$	$\xi \leq \xi_2$	—	$\eta > \eta_4$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	—	$\eta_2 < \eta < \eta_3$ или $\eta > \eta_4$
	$\xi_4 < \xi < 1/\beta$	—	$\eta > \eta_2$
	$\xi > 1/\beta$	$\eta < \eta_2$	—
$1 < \beta < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\xi < 1/\beta$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/\beta < \xi < 1$	$\eta > \eta_1$	—
	$\xi > 1$	$\forall \eta$	—
$\beta > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\xi < \xi_2$	—	—
	$\xi_2 < \xi < 1/\beta$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/\beta < \xi < 1$	$\eta > \eta_1$	—
	$\xi > 1$	$\forall \eta$	—

1.2.2. Нелинейный анализ устойчивости.

Продолжим исследование устойчивости решений (1.2.1) в тех областях, где выполнены только необходимые условия устойчивости. С этой целью проведем нормализацию гамильтониана возмущенного движения (1.2.3) в членах до четвертого порядка включительно.

Осуществим в (1.2.3) линейное унивалентное каноническое преобразование $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) по формулам

$$\begin{aligned}
 x_1 &= n_{11}q_1 + n_{12}q_2, & x_2 &= n_{23}p_1 + n_{24}p_2, \\
 y_1 &= n_{33}p_1 + n_{34}p_2, & y_2 &= n_{41}q_1 + n_{42}q_2, \\
 n_{11} &= \frac{\sqrt{2}\kappa_1(\varkappa(\beta - 2)\eta^2 + \beta(s - (\alpha + \beta)\xi)(\beta - \alpha) + \beta\sqrt{d})}{\sqrt{\varsigma}o_1}, \\
 n_{12} &= \frac{\sqrt{2}\kappa_2(\varkappa(\beta - 2)\eta^2 + \beta(s - (\alpha + \beta)\xi)(\beta - \alpha) - \beta\sqrt{d})}{\sqrt{\varsigma}o_2}, \\
 n_{23} &= \frac{\varkappa\eta\sqrt{2\varsigma}}{o_1}, & n_{24} &= -\frac{\varkappa\eta\sqrt{2\varsigma}}{o_2}, \\
 n_{33} &= -\frac{\sqrt{\varsigma}[(\beta - \alpha)[s - (\alpha + \beta)\xi] + \varkappa\eta^2 + \sqrt{d}]}{\sqrt{2}o_1}, \\
 n_{34} &= \frac{\sqrt{\varsigma}[(\beta - \alpha)[s - (\alpha + \beta)\xi] + \varkappa\eta^2 - \sqrt{d}]}{\sqrt{2}o_2}, \\
 n_{41} &= \frac{\eta\sqrt{2\kappa_1}[\varkappa\eta^2 - [2\alpha^2\beta - (\alpha + \beta)^2]\xi - (3\beta + \alpha - 2\alpha\beta)s - \sqrt{d}]}{\sqrt{\varsigma}o_1}, \\
 n_{42} &= \frac{\eta\sqrt{2\kappa_2}[\varkappa\eta^2 - [2\alpha^2\beta - (\alpha + \beta)^2]\xi - (3\beta + \alpha - 2\alpha\beta)s + \sqrt{d}]}{\sqrt{\varsigma}o_2}, \\
 \varsigma &= (1 - \beta)\eta^2 + (s - \alpha\xi)\beta, & \varkappa &= \alpha + \beta - \alpha\beta, \\
 o_1 &= \sqrt{\kappa_1 \left[-\beta\varkappa^2\eta^4 - 2\varkappa \left((v\xi + \chi s)\beta + (\beta - 2)\sqrt{d} \right) \eta^2 - z \right]}, \\
 o_2 &= \sqrt{\kappa_2 \left[\beta\varkappa^2\eta^4 + 2\varkappa \left((v\xi + \chi s)\beta - (\beta - 2)\sqrt{d} \right) \eta^2 + z \right]}, \\
 \chi &= \beta + \alpha - 4, & v &= \beta(2 - \beta) + \alpha(2 - \alpha), \\
 z &= \beta \left[\sqrt{d} - (\beta - \alpha)[(\beta + \alpha)\xi - s] \right]^2,
 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta^2(2 - \varkappa) + \xi(\alpha^2 + \beta^2) - s(\alpha + \beta) \pm \sqrt{d}}, \quad (\kappa_1 > \kappa_2).$$

Здесь d — дискриминант характеристического уравнения (1.2.5), определенный в соотношениях (1.2.6), а κ_1 и κ_2 — частоты малых линейных колебаний системы.

В результате этого преобразования квадратичная часть гамильтониана приводится к нормальной форме вида

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\kappa_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\kappa_2(q_2^2 + p_2^2). \quad (1.2.10)$$

Далее проведем нелинейную нормализацию. В гамильтониане возмущенного движения отсутствуют члены третьей степени относительно возмущений, поэтому резонанс третьего порядка несущественен (если исключить случай вырождения). При отсутствии резонанса четвертого порядка нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \kappa_1 r_1 - \kappa_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}), \quad (1.2.11) \\ c_{20} &= \frac{1}{16}(s + 8\eta^2 - 4\alpha\xi)n_{11}^4 + \frac{1}{16}(s + 4(\eta^2(1 - \alpha) - \beta\xi))n_{23}^4 + \frac{5}{4}n_{11}^3 n_{41} \eta + \\ &+ \eta(1 - \alpha)n_{33}n_{23}^3 + \frac{3}{4}(1 - \alpha)n_{23}^2 n_{33}^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)n_{11}n_{23}n_{41}(\eta n_{23} + n_{33}) + \\ &+ \frac{3}{4}n_{41}^2 n_{11}^2 + \frac{1}{8}(s + 2(\eta^2(\alpha - 1) - \beta\xi))n_{11}^2 n_{23}^2 + \frac{1}{4}(\alpha - 1)\eta n_{11}^2 n_{23} n_{33}, \\ c_{11} &= \frac{1}{4} \left[(4(1 - \alpha)\eta^2 + s - 4\beta\xi)n_{24}^2 - 8\eta(\alpha - 1)n_{24}n_{34} + 2(\alpha - 1)\eta^2 n_{12}^2 + \right. \\ &+ (s - 2\beta\xi)n_{12}^2 + 4(\alpha - 1)\eta n_{42}n_{12} - 2(\alpha - 1)n_{34}^2 \left. \right] n_{23}^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\eta n_{12}^2 + \\ &+ 2n_{42}n_{12} - 4\eta n_{24}^2 - 4n_{34}n_{24})n_{33}n_{23} + 2n_{11}n_{12}n_{41}n_{42} + 2\eta^2 n_{11}^2 n_{12}^2 + \\ &+ \frac{5}{2}\eta(n_{11}n_{42} + n_{12}n_{41})n_{11}n_{12} + \frac{1}{4} \left[4(\alpha - 1)\eta n_{11}n_{41} + (s - 2\beta\xi)n_{11}^2 + \right. \\ &+ 2(\alpha - 1)\eta^2 n_{11}^2 - 2(\alpha - 1)n_{33}^2 \left. \right] n_{24}^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\eta n_{11}^2 + 2n_{11}n_{41})n_{34}n_{24} + \\ &+ \frac{1}{2}n_{12}^2 n_{41}^2 + \frac{1}{4} \left[(s - 4\alpha\xi)n_{12}^2 + 2n_{42}^2 \right] n_{11}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{02} = & -\eta(\alpha - 1)n_{34}n_{24}^3 + \frac{1}{16} \left[4(1 - \alpha)\eta^2 + s - 4\beta\xi \right] n_{24}^4 + \frac{1}{16} (s - 4\alpha\xi)n_{12}^4 + \\
& + \frac{3}{4}n_{12}^2n_{42}^2 + \frac{1}{2}\eta^2n_{12}^4 + \frac{5}{4}\eta n_{12}^3n_{42} + \frac{1}{4}(\alpha - 1)(\eta n_{12}^2 + 2n_{42}n_{12})n_{34}n_{24} + \\
& + \frac{1}{8} \left[2(\alpha - 1)\eta^2n_{12}^2 + (s - 2\beta\xi)n_{12}^2 + 4(\alpha - 1)\eta n_{42}n_{12} - 6(\alpha - 1)n_{34}^2 \right] n_{24}^2.
\end{aligned}$$

Здесь введены симплектические «полярные» координаты φ_j и r_j , задаваемые формулами $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$).

Исследуемые перманентные вращения устойчивы по Ляпунову при выполнении условия теоремы Арнольда — Мозера [4].

$$\Delta = c_{20}\kappa_2^2 + c_{11}\kappa_1\kappa_2 + c_{02}\kappa_1^2 \neq 0. \quad (1.2.12)$$

Если в системе реализуется резонанс четвертого порядка ($\kappa_1 = 3\kappa_2$), то нормализованная функция Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned}
H = & \kappa_2(3r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + k_4\sqrt{r_1}r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + \\
& + O(r_j^{5/2}), \quad (1.2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 = & \frac{1}{12} \left[[(s - 4\beta\xi) - 4(\alpha - 1)\eta^2]n_{23} - 4\eta(\alpha - 1)n_{33} \right] n_{24}^3 - \frac{1}{4} \left[[2\eta(\alpha - 1) \times \right. \\
& \times (\eta n_{11} + n_{41}) + (s - 2\beta\xi)]n_{11}n_{12} + 2\eta(\alpha - 1)((n_{42}n_{11} + 2n_{23}n_{34}) + \\
& \left. + n_{34}n_{33}) \right] n_{24}^2 - \frac{1}{4} \left[[(\alpha - 1)\eta(2\eta n_{23} + n_{33}) + (s - 2\beta\xi)n_{23}]n_{12}^2 + \right. \\
& + 2(\alpha - 1)[\eta(n_{11}n_{34} + 2n_{23}n_{42}) + n_{33}n_{42} + n_{41}n_{34}]n_{12} + 2(\alpha - 1)(n_{23}n_{34} + \\
& \left. + n_{42}n_{11})n_{34} \right] n_{24} + \frac{1}{12}n_{12} \left[[6\eta^2n_{11} + 5\eta n_{41} + (s - 4\alpha\xi)n_{11}]n_{12}^2 - 3n_{12} \times \right. \\
& \left. \times [\eta((\alpha - 1)n_{23}n_{34} - 5n_{42}n_{11}) - 2n_{41}n_{42}] - 6((\alpha - 1)n_{23}n_{34} - n_{42}n_{11})n_{42} \right].
\end{aligned}$$

При этом, если выполняется условие

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}k_4 \quad (k \geq 0), \quad (1.2.14)$$

то исследуемое решение устойчиво по Ляпунову [38]. При выполнении неравенства с противоположным знаком имеем неустойчивость.

Из выражений для κ_1 , κ_2 следует, что резонансное соотношение $\kappa_1 = 3\kappa_2$ эквивалентно биквадратному относительно параметра η уравнению вида

$$u\eta^4 + 2v\eta^2 + w = 0, \quad (1.2.15)$$

$$u = (\alpha\beta - \alpha - \beta - 8)[9(\alpha\beta - \alpha - \beta) + 8],$$

$$v = sv_0 + v_1\xi, \quad v_0 = 9(\alpha^2 + \beta^2) - (9\alpha\beta + 68)(\alpha + \beta) + 118\alpha\beta,$$

$$v_1 = -9(\alpha^3 + \beta^3) + 18(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta[9(\alpha^2 + \beta^2) - 59(\alpha + \beta) + 100],$$

$$w = w_0 + sw_1\xi + w_2\xi^2, \quad w_0 = (9\beta - \alpha)(\beta - 9\alpha),$$

$$w_1 = 82\alpha\beta(\alpha + \beta) - 18(\alpha^3 + \beta^3), \quad w_2 = (9\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - 9\alpha^2).$$

Поэтому, в зависимости от выбранной области, в пространстве параметров задачи может быть две или одна поверхности резонанса четвертого порядка, или резонансный случай не реализуется.

Таким образом, устойчивость может нарушиться, если точка $(\alpha, \beta, \xi, \eta)$ из исследуемой области пространства параметров принадлежит поверхности резонанса четвертого порядка (случай $\kappa_1 = 3\kappa_2$) или поверхности вырождения (случай $\Delta = 0$).

1.2.3. Некоторые частные случаи.

Детальный нелинейный анализ устойчивости исследуемых решений проведем для двух частных значений параметра α : $\alpha = 1$ (случай динамически симметричного тела) и $\alpha = 2$ (случай Бобылева — Стеклова). В трехмерном пространстве параметров ξ, η, β будем строить сечения $\beta = \text{const}$ для различных (допустимых) значений параметра β . Результаты анализа устойчивости будем представлять в плоскости параметров ξ и η , характеризующих частоту вибрации точки подвеса и угловую скорость вращений. Здесь же будут приведены полученные в разд. 1.2.1 области достаточных условий устойчивости.

1. *Случай динамической симметрии тела.* Пусть тело динамически симметрично ($\alpha = 1$, $\beta > 1/2$). Рассмотрим случай $s = 1$ расположения центра масс тела выше точки подвеса, для которого могут выполняться как достаточные, так и только необходимые условия устойчивости (см. табл. 1.4).

Таблица 1.4. Достаточные и необходимые условия устойчивости в случае $\alpha = 1$, $s = 1$

Значения β	Значения ξ	Достаточные условия	Только необходимые условия
$1/2 < \beta < 1$	$\xi \leq \xi_2$	—	$\eta > \eta_4$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	—	$\eta_2 < \eta < \eta_3$, $\eta > \eta_4$
	$\xi_4 < \xi < 1/\beta$	—	$\eta > \eta_2$
	$\xi > 1/\beta$	$\eta < \eta_2$	—
$1 \leq \beta < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\xi < 1/\beta$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/\beta < \xi < 1$	$\eta > \eta_1$	—
	$\xi > 1$	$\forall \eta$	—
$\beta \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\xi < \xi_2$	—	—
	$\xi_2 < \xi < 1/\beta$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$1/\beta < \xi < 1$	$\eta > \eta_1$	—
	$\xi > 1$	$\forall \eta$	—

Эти области показаны на рис. 8 *a-c*, отвечающих интервалам $1/2 < \beta < 1$, $1 \leq \beta < (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta \geq (1 + \sqrt{5})/2$ изменения параметра β . Области неустойчивости на рис. 8 закрашены серым цветом. Области выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости не закрашены и лежат соответственно правее и левее граничной прямой $\xi = 1/\beta$. Кривые резонанса четвертого порядка показаны полужирными, а кривые вырождения — пунктирными линиями.

При $\beta \in (1/2, 1)$ (рис. 8 *a*) область выполнения только необходимых усло-

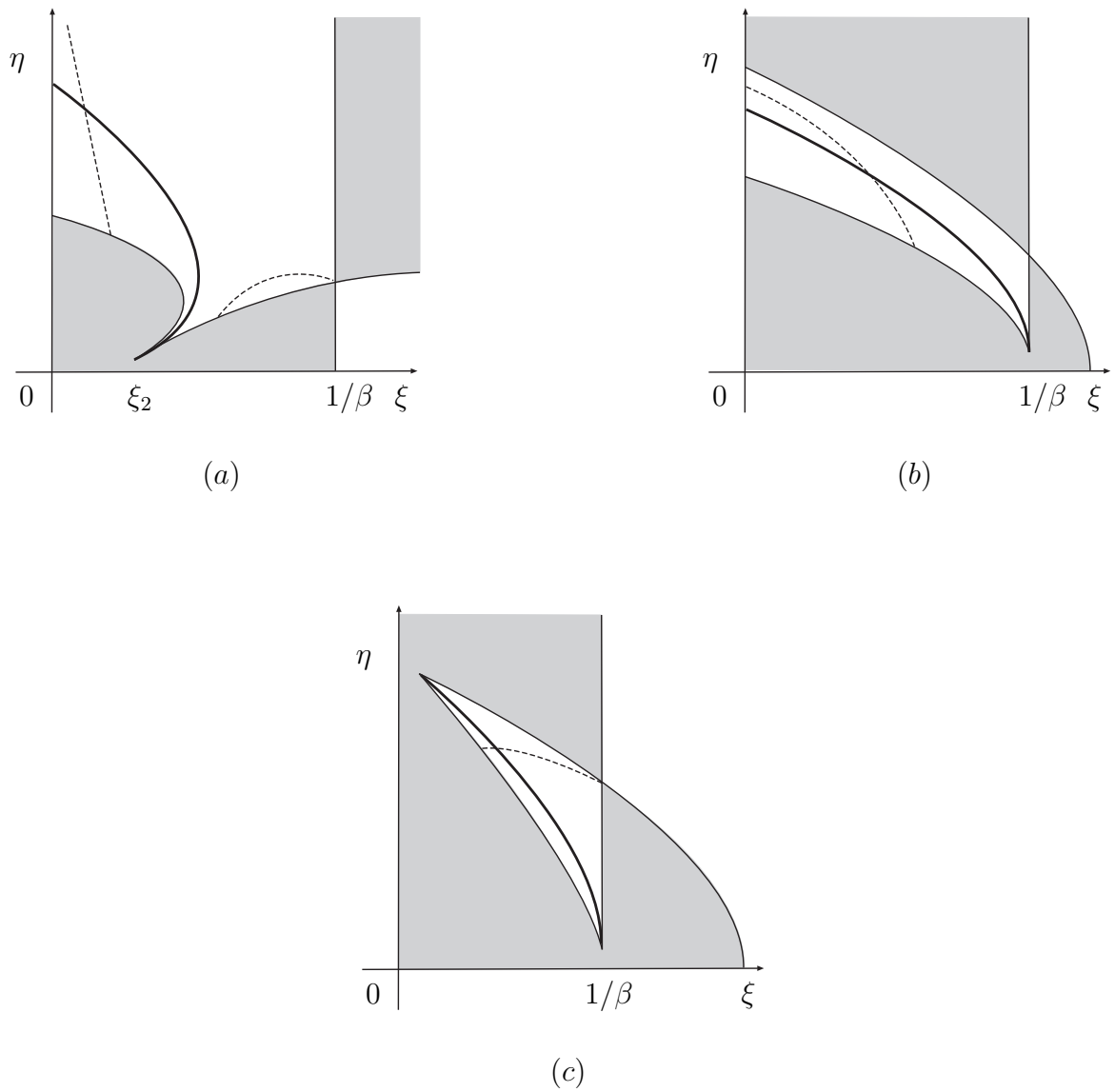


Рис. 8. Нелинейный анализ

вий устойчивости не ограничена сверху. В области имеется кривая резонанса четвертого порядка, соединяющая одну из точек левой границы области с угловой точкой (точкой возврата) нижней границы. Имеются также две ветви кривой вырождения, выходящие из точек нижней границы левее и правее точки возврата. Левая из этих ветвей, пересекая резонансную кривую, при $\eta \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к оси $\xi = 0$. Правая ветвь заканчивается в угловой точке на границе $\eta = 1/\beta$ области. С ростом β левый конец этой ветви «ползет» вдоль нижней границы области по направлению к угловой точке, при

$\beta = 2/3$ кривая вырождается в точку и с последующим ростом β исчезает. При $2/3 < \beta < 1$ качественный характер резонансной кривой и первой ветви кривой вырождения сохраняется. Этот случай на рис. 8 не отражен.

При переходе через точку $\beta = 1$ у области выполнения только необходимых условий устойчивости появляется верхняя граница, и область принимает вид криволинейного четырехугольника (рис. 8 *b*), а при $\beta > (1 + \sqrt{5})/2$ — криволинейного треугольника (рис. 8 *c*). В области имеется кривая резонанса четвертого порядка, которая соединяет либо точку левой границы области с угловой точкой на правой границе $\xi = 1/\beta$ (рис. 8 *b*), либо две «вершины» криволинейного треугольника (рис. 8 *c*). Единственная ветвь кривой вырождения соединяет точки на двух границах исследуемой области и имеет точку пересечения с резонансной кривой. В диапазоне $(1 + \sqrt{5})/2 < \beta < 2$ (рис. 8 *c*) правая граничная точка кривой вырождения с ростом β «ползет» вдоль верхней границы, при $\beta = 2$ (случай С. В. Ковалевской) оказывается в угловой точке и при всех $\beta > 2$ остается в этой точке.

Была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых решений для значений параметров ξ, η , лежащих на кривых резонансов четвертого порядка в построенных областях выполнения только необходимых условий устойчивости. Для рассмотренных значений параметра β установлено, что есть области, на которых критерий (1.2.12) не выполняется. Области неустойчивости на резонансной кривой не показаны на рис. 8.

При $\beta \in (1/2, 1)$ на резонансной кривой есть небольшой участок устойчивости, начинающийся после точки пересечения резонансной кривой и кривой вырождения и заканчивающийся до угловой точки области (до конца кривой). Остальные участки кривой являются неустойчивыми. С ростом β участки сокращаются, и при $\beta = 1$ первый из участков «отрывается» от оси ординат, а второй — пропадает. При этом общая точка резонансной кривой и кривой вырождения находится внутри зоны неустойчивости.

2. *Случай Бобылева — Стеклова* ($\alpha = 2$, $2/3 < \beta < 2$). Вновь рассмотрим только случай $s = 1$, для которого имеются области выполнения как достаточных, так и только необходимых условий устойчивости. Для всех значений β из исследуемого диапазона качественный вид областей устойчивости один и тот же (см. рис. 9). Области выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости имеют общую граничную точку с координатами $(1/(2\beta), 1)$.

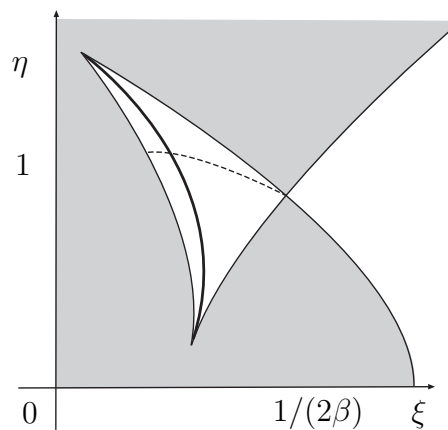


Рис. 9. Нелинейный анализ

Область выполнения необходимых условий устойчивости (левая область на рис. 9) имеет вид криволинейного треугольника. Внутри области имеются кривая резонанса четвертого порядка, соединяющая две угловые точки области, и кривая вырождения, соединяющая одну из точек левой границы с противоположной угловой точкой; две кривые имеют точку пересечения.

Аналогично предыдущему случаю была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых движений для значений параметров, лежащих на кривых резонанса четвертого порядка. Установлено, что для всех точек резонансных кривых, кроме небольшой зоны неустойчивости вокруг точек их пересечения с кривыми вырождения, имеет место устойчивость.

Глава 3. Перманентные вращения вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции

Рассмотрим случай перманентных вращений тела вокруг осей из главных плоскостей инерции; пусть это плоскость Oxz . Этим вращениям отвечают положения равновесия приведенной системы (1.1.18) с двумя степенями свободы, задаваемые соотношениями

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{\eta}{\beta} \cos \theta_0, \quad p_{\psi} = \eta \left(\sin^2 \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\beta} \right), \quad (1.3.1)$$

где $\varphi_0 = \pi/2$ или $\varphi_0 = 3\pi/2$, а величина θ_0 определяется из уравнения

$$\left(\frac{\beta - 1}{\beta} \eta^2 + \xi \alpha \right) s \sin \theta_0 = 1, \quad s = \text{sign}(\sin \varphi_0). \quad (1.3.2)$$

Будем исследовать устойчивость указанных положений равновесия при фиксированном значении параметра η .

Множество допустимых дуг вращений описано в разделе 1.1.5.

С учетом выписанных ограничений на θ_0 для каждой допустимой дуги можно при помощи (1.3.2) найти диапазон изменения величины η^2 . Все полученные результаты представим в виде таблицы 1.5, где введены обозначения

$$\eta_1^2 = \frac{(1 - \xi \alpha) \beta}{\beta - 1}, \quad \eta_2^2 = \frac{(\xi \alpha + 1) \beta}{1 - \beta}.$$

Таблица 1.5. Допустимые значения параметров s, θ_0, η

	$\beta > 1$		$\beta < 1$		
	$\xi > 1/\alpha$	$\xi < 1/\alpha$	$\xi > 1/\alpha$		$\xi < 1/\alpha$
s	1	1	1	-1	-1
$\sin \theta_0$	$(0, 1/(\xi \alpha))$	$(0, 1)$	$(1/(\xi \alpha), 1)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$
η	$\eta > 0$	$\eta^2 > \eta_1^2$	$\eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$

Далее, учитывая соотношение (1.3.2), за независимые выбираем параметры α , β , η и ξ . Устойчивость решений (1.3.1) по отношению к координатам θ , φ и отвечающим им импульсам будем исследовать в допустимой части пространства этих параметров.

1.3.1. Гамильтониан возмущенного движения

Аналогично разделу 1.2.1, введем возмущения и получим формы H_k гамильтониана (1.2.2):

$$H_2 = \frac{1}{2}a_1x_1^2 + \frac{1}{2}a_2x_2^2 + \frac{1}{2}a_3y_1^2 + \frac{1}{2}a_4y_2^2 + a_5x_1y_2 + a_6x_2y_1, \quad (1.3.3)$$

$$H_3 = b_1x_1^3 + b_2x_1^2y_2 + b_3x_1x_2^2 + b_4x_1x_2y_1 + b_5x_1y_2^2 + b_6x_2^2y_2 + b_7x_2y_1y_2, \quad (1.3.4)$$

$$H_4 = c_1x_1^4 + c_2x_1^3y_2 + c_3x_1^2x_2^2 + c_4x_1^2x_2y_1 + c_5x_1^2y_2^2 + c_6x_1x_2^2y_2 + \\ + c_7x_1x_2y_1y_2 + c_8x_2^4 + c_9x_2^3y_1 + c_{10}x_2^2y_1^2 + c_{11}x_2^2y_2^2. \quad (1.3.5)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{(3\beta^2 - 3\beta + 1)(\beta - 1)^2\eta^6 + \xi\alpha\beta(\beta - 1)(5\beta^2 - 5\beta + 2)\eta^4}{z^2\beta^2} + \\ + \frac{\beta^2[\xi^2\alpha^2(\beta^2 + 1 - \beta) - (3\beta^2 - 4\beta + 1)]\eta^2 - \alpha\xi\beta^4(\xi^2\alpha^2 - 1)}{z^2\beta^2}; \quad (1.3.6)$$

$$a_2 = \frac{\beta((\alpha\beta - 2\beta + 1)\eta^2 - \xi\beta(\alpha - \beta))}{z^2}; \quad a_5 = \frac{\eta(z^2(2\beta - 1) - (\beta - 1)\beta^2)s}{z\beta^2};$$

$$a_3 = \alpha; \quad a_4 = \frac{z^2 + (\beta - 1)\beta^2}{\beta^2}; \quad a_6 = \frac{s(\alpha - 1)\eta\beta}{z}; \quad z = (\beta - 1)\eta^2 + \xi\alpha\beta.$$

Коэффициенты форм H_3 и H_4 не приводятся в силу их громоздкости.

Разобьем область (1.1.11) допустимых значений параметров α , β на девять областей 1–9 (рис. 10). Границами областей служат прямые

$$\alpha = \beta, \quad \beta = 2/3, \quad \beta = 1, \quad \beta = 4/3, \quad \beta = 2.$$

Внутри области 2 выделим подобласть 2*, отделяемую кривой

$$(\beta^2 - 4\beta + 2)\alpha^2 + (3\beta - 1)(\beta - 1)\alpha - \beta(\beta - 1)^2 = 0.$$

Далее все результаты будем представлять для этих областей изменения параметров α , β и отвечающих им допустимых значений ξ , η .

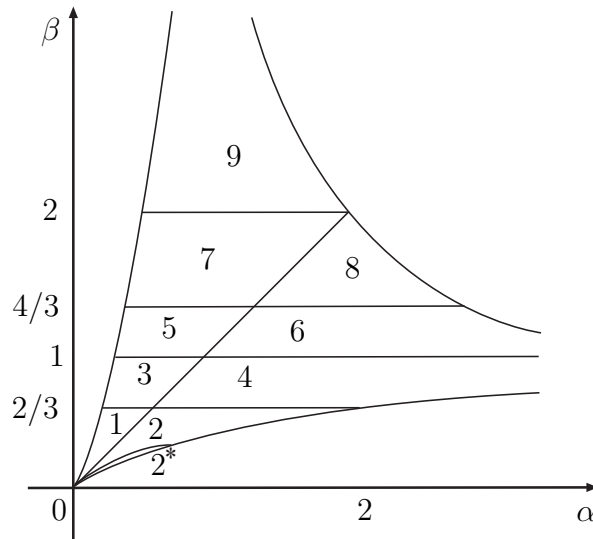


Рис. 10. Разбиение допустимой области параметров α , β

1.3.2. Достаточные условия устойчивости

Достаточными условиями устойчивости рассматриваемого движения записываются в виде системы неравенств

$$a_4 > 0, \quad a_2 a_3 > a_6^2, \quad a_1 a_4 > a_5^2. \quad (1.3.7)$$

Первое из них выполнено всегда в области допустимых значений параметров. Второе и третье неравенства сводятся к системе вида

$$(\beta - \alpha)(\xi\alpha\beta - \eta^2) > 0, \quad (1.3.8)$$

$$F(\zeta) = A'\zeta^3 + B'\zeta^2 + C'\zeta + D' < 0, \quad \zeta = \eta^2 \quad (\zeta \geq 0).$$

Здесь

$$A' = (\beta - 1)^3, \quad B' = 3\xi\alpha\beta(\beta - 1)^2, \quad C' = 3(\beta - 1)\beta^2(\xi^2\alpha^2 + 1 - \beta), \\ D' = \beta^3\xi\alpha(\beta + \xi^2\alpha^2 - 1).$$

К этой системе следует добавить ограничения на допустимые значения параметров из табл. 1.5.

Рассмотрим второе неравенство из (1.3.8). Дискриминант кубического уравнения $F(\zeta) = 0$ имеет вид

$$\Delta = -108\beta^6(\beta - 1)^8(4\xi^2\alpha^2 - \beta + 1).$$

При $\Delta > 0$ это уравнение имеет три вещественных корня, при $\Delta < 0$ — один.

Пусть сначала $\beta < 1$. Тогда старший коэффициент A' и дискриминант Δ кубического многочлена $F(\zeta)$ отрицательные, а уравнение $F(\zeta) = 0$ имеет единственный вещественный корень. При выполнении условия $\xi < \sqrt{1-\beta}/\alpha$ этот корень отрицателен, поэтому для любых значений параметров η, ξ получаем $F(\zeta) < 0$.

Исследуем два интервала допустимых значений параметра ζ из табл. 1.5 в случае $\xi > \sqrt{1-\beta}/\alpha$, когда корень многочлена $F(\zeta)$ положителен. Проверим интервал $\zeta > \eta_2^2$. Для его левого граничного значения имеем

$$F|_{\zeta=\eta_2^2} = \beta^3[-4\xi\alpha(1-\beta) + 3\beta - 4] < 0,$$

и значит, неравенство $F(\zeta) < 0$ выполнено для любых значений параметра ζ из данного интервала.

На правой границе $\zeta = \eta_1^2$ второго интервала $\zeta < \eta_1^2$ многочлен $F(\zeta)$ принимает значение

$$F|_{\zeta=\eta_1^2} = \beta^3[-4\xi\alpha(1-\beta) - 3\beta + 4],$$

знак которого может быть как положительным, так и отрицательным. Отсюда находим, что достаточное условие $F(\zeta) < 0$ удовлетворяется при выполнении неравенств

$$\xi > \frac{4-3\beta}{4\alpha(1-\beta)}, \quad \eta_*^2 < \zeta < \eta_1^2,$$

где η_* — корень бикубического уравнения. Для остальных значений параметров ξ и η из рассматриваемых интервалов это условие не выполняется.

В случае $\beta > 1$ старший коэффициент кубического многочлена $F(\zeta)$ положителен. При $\xi > \sqrt{\beta-1}/(2\alpha)$ дискриминант Δ отрицателен, поэтому многочлен $F(\zeta)$ имеет единственный вещественный корень (отрицательный), а неравенство $F(\zeta) < 0$ не имеет решений на положительной полуоси $O\zeta$.

Если $\xi \leq \sqrt{\beta-1}/(2\alpha)$, то дискриминант Δ положителен и многочлен $F(\zeta)$ имеет три вещественных корня. При этом функция $F(\zeta)$ имеет две точки экстремума (разных знаков). Учитывая, что свободный член D' положителен, заключаем, что один из корней отрицателен, а два положительны. Обозначим положительные корни через η_* и η_{**} ($\eta_* > \eta_{**}$). Таким образом, решение неравенства $F(\zeta) < 0$ в данном случае задается интервалом $\eta_{**}^2 < \zeta < \eta_*^2$.

Совместим полученные решения бикубического неравенства $F(\zeta) < 0$ с решением первого неравенства из (1.3.8). Несложный анализ приведет к результатам, приведенным в табл. 1.6.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi_1 = \frac{3\beta - 4}{4\alpha(\beta - 1)}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{3\beta^2 - 7\beta + 4}{\alpha^2\beta^3}}, \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\beta - 1}}{2\alpha}. \quad (1.3.9)$$

Эти результаты следует интерпретировать следующим образом. Для каждой точки области допустимой части плоскости параметров α, β , номер которой указан в первом столбце таблицы (см. также рис. 10), интервал допустимых значений параметра ξ делится на несколько интервалов, приведенных во втором столбце, границы которых зависят от исследуемой точки (α, β) области. Каждой точке выписанных интервалов соответствует ограничение на безразмерную угловую скорость η (третий столбец) с границами, зависящими от трех выбранных параметров α, β, ξ .

Для тех значений параметра ξ из множества его допустимых значений, которые не приведены в таблице, достаточные условия (1.3.8) не выполняются

Таблица 1.6. Достаточные условия устойчивости

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения ДУ
1	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_*^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
2	$\xi < 1/\alpha$	$\eta_2^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_2^2 < \eta^2$
		$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi > \xi_2$	$\eta_2^2 < \eta^2$
$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$		
4	$\xi < 1/\alpha$	$\eta_2^2 < \eta^2$
	$\xi > \xi_1$	$\eta_2^2 < \eta^2$
		$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
8	$\xi < \xi_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
9	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi_2 < \xi < \xi_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_1 < \xi < \min(\xi_3, 1/\alpha)$	$\eta_{**}^2 < \eta^2 < \eta_*^2$

при всех допустимых значениях η . В областях 3, 5 – 7 достаточные условия (1.3.8) не выполняются ни при каких допустимых значениях параметров ξ и η .

1.3.3. Необходимые условия устойчивости

Необходимые условия устойчивости задаются системой (1.2.6), где коэффициенты характеристического уравнения (1.2.5) имеют вид:

$$a = a_2a_4 - 2a_5a_6 + a_1a_3, \quad b = (a_2a_3 - a_6^2)(a_1a_4 - a_5^2).$$

Все полученные ранее достаточные условия являются также и необходимыми. Исследуем далее случаи, для которых выполняются только необходимые

условия устойчивости.

Неравенство $b > 0$ в рассматриваемом случае сводится ко второму и третьему неравенствам из (1.3.7), в которых взяты противоположные знаки. Результаты решения этой системы неравенств представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7. Условие выполнения неравенства $b > 0$.

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения $b > 0$
1	$\xi_2 < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_*^2$
2	$1/\alpha < \xi < \xi_1$	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
3	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_*^2$
4	$1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
5	$\xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_1^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$
6	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$1/\alpha < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
7	$\xi < \xi_1$	$\eta_*^2 < \eta^2$
	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_1^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$
8	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$1/\alpha < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
9	$\xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_1^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$

Неравенство $a > 0$ из (1.2.6) сводится к кубическому неравенству относи-

тельно $\zeta = \eta^2$:

$$a = F_a(\zeta) = A_a\zeta^3 + B_a\zeta^2 + C_a\zeta + D_a > 0, \quad (1.3.10)$$

$$A_a = (\beta - 1)^2(2\beta^2 - \beta - \beta\alpha + \alpha),$$

$$B_a = (\beta - 1)\beta \left[\beta^3 - (\alpha^2 - 3\alpha + 1)\beta^2 - (1 + \alpha)\alpha\beta + 2\alpha^2 \right] \xi,$$

$$C_a = \beta^2 \left[\left(2\alpha\beta^2(\beta - 1 - \alpha^2) + \alpha^2(\alpha + \beta + \alpha\beta) \right) \xi^2 + \right. \\ \left. + (\beta - 1) \left((\alpha - 2)\beta^2 - \alpha\beta - \beta + \alpha \right) \right],$$

$$D_a = \beta^4 \left[(\beta - \alpha - \alpha^2)\alpha^2\xi^2 + \alpha^2 + (1 - \beta)(\alpha - \beta) \right] \xi,$$

а неравенство $d > 0$ — к неравенству шестой степени относительно ζ :

$$d = F_d(\zeta) = A_d\zeta^6 + B_d\zeta^5 + C_d\zeta^4 + D_d\zeta^3 + E_d\zeta^2 + F_d\zeta + G_d > 0, \quad (1.3.11)$$

$$A_d = (\beta - 1)^4\rho^2,$$

$$B_d = 2\xi\beta\rho(\beta - 1)^3 \left((\beta - 1)[(\beta + 2)\alpha^2 + 2\beta^3 - \beta^2] - \alpha\beta(4\beta^2 - 5\beta - 1) \right),$$

$$C_d = \beta^2(\beta - 1)^2 \left[\xi^2 \left((\beta - 1)^2 [(\beta^2 + 8\beta + 6)\alpha^4 + \beta^4] - 2\alpha\beta(\beta - 1) \left[(17\beta^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 25\beta - 2)\alpha^2 + 7\beta^3 - 3\beta^2 \right] + 3\alpha^2\beta^2(6\beta^3 - 25\beta^2 + 24\beta - 3) \right) + 2\rho(\beta - 1) \right],$$

$$D_d = 2\xi\beta^3(\beta - 1) \left[2\alpha\xi^2 \left((\beta - 1)^2 [(\beta^2 + 3\beta + 1)\alpha^4 + \beta^4] + \beta^2(8\beta^3 - 30\beta^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 27\beta - 4)\alpha^2 - \alpha\beta(\beta - 1) \left[(14\beta^2 - 20\beta + 1)\alpha^2 + 4\beta^3 - \beta^2 \right] \right) + \alpha^2\beta(\beta - 1)(11\beta^3 - \right. \\ \left. - 18\beta^2 + 6\beta - 2) - (\beta - 1)^2 \left[\alpha^3\beta^2(\beta + 1) + \alpha\beta^3(5\beta - 4) + 2(\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \beta^3) \right] \right],$$

$$E_d = \alpha^2\beta^5 \left[\alpha^2\xi^4 \left((\beta - 1)^2 [\alpha^4(6\beta^2 + 8\beta + 1) + 6\beta^4] + \beta^2(28\beta^3 - 90\beta^2 + 72\beta - \right. \right. \\ \left. \left. - 9)\alpha^2 - 2\alpha\beta(\beta - 1) [\alpha^2(22\beta^2 - 30\beta + 3) - 2\beta^2(\beta + 1)] \right) + 2(\beta - 1)\xi^2 \left([(15\beta^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - 12\beta^2 - 8\beta + 2)\alpha - \beta(9\beta^3 - 10\beta^2 - 8\beta + 6)] - (\beta - 1)[(2\beta^3 + 3\beta + 1)\alpha^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\beta^3(\alpha\beta + \alpha + \beta^2 - \beta)] \right) + (\beta - 1)^2 \left((\beta^2 - \beta + 1)^2\alpha^2 + \beta^2(2\beta - 1)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\alpha\beta(2\beta^3 - \beta^2 - 5\beta + 1) \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
F_d = 2\beta^6\xi \left[\alpha^3\xi^4 \left(\alpha^4[2\beta^2 - \beta - 1] - \alpha^3(8\beta^2 - 10\beta + 1) + \alpha\beta^2(2\beta - 3)(3\alpha - 1) + \right. \right. \\
\left. \left. + 2\beta^3(\beta - 1) \right) - \alpha\xi^2 \left((\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 2)\alpha^4 - (5\beta^3 + 2\beta^2 - 10\beta + 2)\alpha^3 + \right. \right. \\
\left. \left. + \beta(3\beta - 1)(\beta^2 - 2)\alpha^2 + 2\beta^2(\beta - 1)(2\beta\alpha - \alpha - \beta^2 + \beta) \right) + (\beta - 1) \left((\beta^2 - \right. \right. \\
\left. \left. - \beta + 1)\alpha^3 - \alpha(\beta^3 + 6\beta^2 - \beta - 1)(\alpha - \beta) - \beta(2\beta + 1)(\alpha + \beta^2 - \beta) \right) \right], \\
G_d = \beta^8\xi^2 \left[\alpha^2\xi^2(\beta - \alpha + \alpha^2) - \alpha^2 + \beta^2 - \rho \right]^2, \quad \rho = \beta + \alpha\beta - \alpha
\end{aligned}$$

Решение этих двух неравенств системы (1.2.6) будем искать в областях выполнения условия $b > 0$ из таблицы 1.7.

Рассмотрим систему уравнений

$$b = 0, \quad F_a = 0, \quad F_d = 0, \quad (1.3.12)$$

решения которой соответствуют точкам пересечения поверхностями $F_a = 0$, $F_d = 0$ (в пространстве параметров α, β, ξ, η) границ исследуемых областей, задаваемых равенством $b = 0$. Заметим, что на этих границах выполняется равенство $d = a^2$, а значит, поверхности $F_a = 0$ и $F_d = 0$ пересекают граничные поверхности в одних и тех же точках.

Определим сначала множество точек пересечения поверхностей $F_a = 0$ и $F_d = 0$ с границей $\zeta = \xi\alpha\beta$ (см. третий столбец в таблице 1.7). Система (1.3.12) сводится в этом случае к уравнению

$$\begin{aligned}
F_a |_{\zeta=\xi\alpha\beta} &= \beta^3\xi[Q\xi^2 + W] = 0, \\
Q &= \alpha^2\beta^2(2\alpha\beta - \alpha + \beta)(\beta - \alpha), \\
W &= (\beta^3 - 2\beta^2 + 3\beta - 1)\alpha^2 + 2\alpha\beta(1 - \beta^2) + \beta^2(\beta - 1).
\end{aligned}$$

Знак коэффициента Q совпадает со знаком разности $\beta - \alpha$. Свободный член W представляет собой квадратное уравнение относительно α , которое принимает положительные значения в областях 1 – 6 и 8 изменения параметров α, β , а отрицательные — в области 9.

При этом в областях 1, 3 и 5 выражения Q и W одного знака, а значит $F_a |_{\zeta=\xi\alpha\beta} = 0$ в этих областях не имеет решений для любых значений параметров.

В остальных областях система имеет решение при $\xi = \xi_4 = \sqrt{-W/Q}$. Проверим попадание значения ξ_4 в области изменения параметра ξ , выписанные во втором столбце таблицы 1.7. Сравним, например,

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2} - \xi_4^2 = \frac{(\alpha\beta - \alpha - \beta)^2}{\alpha^2\beta(2\alpha\beta - \alpha + \beta)(\beta - \alpha)} = \frac{\text{const}}{(\beta - \alpha)}, \quad \text{const} > 0.$$

Таким образом получаем, что

$$\frac{1}{\alpha\beta} > \xi_4 \quad \text{если} \quad \beta > \alpha, \quad \frac{1}{\alpha\beta} < \xi_4 \quad - \quad \text{в противном случае.}$$

В области 7 (для которой $\beta > \alpha$) пересечение с границей $\zeta = \xi\alpha\beta$ может быть только при условии $\xi > 1/(\alpha\beta)$ (см. таблицу 1.7), поэтому найденная точка ξ_4 не попадает в данный интервал, и вне зависимости от знака W система (1.3.12) при $\zeta = \xi\alpha\beta$ в области 7 решений не имеет.

В областях с четными номерами (2, 4, 6, 8) значение $\xi = \xi_4$ попадает в один из интервалов допустимых значений ξ , определенных во втором столбце таблицы 1.7. Таким образом, для этих областей всегда имеются точки пересечения исследуемых поверхностей с граничной поверхностью $\zeta = \xi\alpha\beta$.

Точки пересечения поверхностей $F_a = 0$, $F_d = 0$ с границами $\zeta = \eta_i^2$ ($i = 1, 2$) ищутся аналогично и определяются условием $\xi = \xi_{5,6} = -W/Q_{\pm}$. Здесь

$$Q_{\pm} = -\alpha^2[\beta - 1]^2 \pm \alpha\beta(\beta - 2) \pm \beta^2(\beta - 1), \quad W = \alpha[\beta - 1]^2 + \beta(3 - 2\beta).$$

Здесь плюсы и минусы относятся к ξ_5 (при $\zeta = \eta_1^2$) и ξ_6 (при $\zeta = \eta_2^2$) соответственно. Исследование показало, что система (1.3.12) для этих границ, аналогично рассмотренной выше границе $\zeta = \xi\alpha\beta$, имеет решение только для областей с четными номерами, для которых $\alpha > \beta$.

Проверка пересечений для границ $\zeta = \eta_{*,**}^2$ приводит к системе кубических уравнений

$$F(\zeta) = 0, \quad F_a(\zeta) = 0.$$

Здесь $F(\zeta)$ — введенное ранее кубическое уравнение (1.3.8) (причем η_*^2, η_{**}^2 — корни этого уравнения). Рассмотрим области 1, 2, 3, 7, 9, где следует искать пересечения поверхностей (см. таблицу 1.7). Два многочлена $F(\zeta)$ и $F_a(\zeta)$ имеют общие корни, если их результат обращается в нуль; результат представляется в виде биквадратного трехчлена относительно ξ :

$$A_1\xi^4 + B_1\xi^2 + C_1 = 0,$$

$$A_1 = -\alpha^2[(\beta - 1)^2\alpha^2 + \beta(3\beta - 2)\alpha - \beta^2(\beta - 1)]^3,$$

$$B_1 = \frac{\beta - 1}{2} [(\beta + 1)(\beta - 2)^2(\beta - 1)^3\alpha^6 + 6\beta(\beta - 1)(\beta^4 - \beta^3 - 5\beta^2 + 6\beta - 2)\alpha^5 - 3\beta^2(3\beta^4 - 34\beta^3 + 56\beta^2 - 32\beta + 6)\alpha^4 + 2\beta^3(6\beta^4 - 61\beta^3 + 105\beta^2 - 63\beta + 12)\alpha^3 - 3\beta^4(\beta - 1)(\beta^3 - 21\beta^2 + 26\beta - 8)\alpha^2 - 6\beta^5(3\beta - 2)(\beta - 1)^2\alpha + 2\beta^6(\beta - 1)^3],$$

$$C_1 = -\frac{(\beta - 1)^2}{16} [(\beta - 2)^2\alpha + 4\beta(\beta - 1)]^2 [(\beta + 1)^2\alpha^2 - \beta(5\beta - 2)\alpha + 3\beta^2(\beta - 1)].$$

Биквадратное уравнение относительно ξ имеет положительные вещественные корни, если его дискриминант, определяемый выражением

$$[(\beta^2 - 4\beta + 2)\alpha^2 + (3\beta - 1)(\beta - 1)\alpha - \beta(\beta - 1)^2] (\alpha - \beta) \geq 0,$$

неотрицателен, а коэффициенты A_1, B_1 и C_1 удовлетворяют некоторым неравенствам, следующим из формул Виета для корней квадратного уравнения. Перечисленные условия накладывают ограничения на область изменения инерционных параметров α, β , для которой возможны искомые пересечения. Эти пересечения (в точках $\xi = \xi_*$ и $\xi = \xi_{**}$, $\xi_* > \xi_{**}$) обнаружены только для подобласти 2^* области 2.

Решения уравнений $F_a = 0$ и $F_d = 0$ на границе $\xi = 0$ в исследуемых областях не обнаружены.

Таким образом, выявлено, что в областях с нечетными номерами (1, 3, 5, 7) система (1.3.12) несовместна. Это означает, что на граничных поверхностях $b = 0$ знаки функций F_a и F_d сохраняются; проверка показывает, что эти знаки положительные. Аналитическая проверка знаков указанных функций на границе $\xi = 0$ и в случае неограниченных значений ξ (для тех областей, где такие значения возможны), а также численно-графический анализ, проведенный внутри областей $b > 0$, показали, что знаки функций F_a и F_d в рассматриваемых областях 1, 3, 5, 7 положительны. Поэтому необходимые условия устойчивости в этих областях сводятся к одному неравенству $b > 0$ и представлены в таблице 1.7.

Для всех областей с четными номерами найдены случаи пересечения поверхностей $F_a = 0$ и $F_d = 0$ с границами $b = 0$ и, значит, области $b > 0$ разбиваются на подобласти с различными знаками функций F_a и F_d . Анализ показывает, что знаки обеих функций положительны для значений параметров, приведенных в таблице 1.8.

На рис. 11 представлены результаты проведенного анализа устойчивости перманентных вращений для областей 1–9. Найденные области устойчивости изображены в плоскости параметров η , ξ при фиксированных значениях инерционных параметров α , β . Показана характерная для каждой области картина устойчивости.

Прямые $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ на рисунках, относящихся к областям 1–4, отвечают правой и левой границам областей существования перманентных вращений при $s = 1$ и $s = -1$ (см. также табл. 1.5). В областях между этими прямыми перманентные вращения не существуют. Области 5–9 относятся к вращениям, для которых $s = 1$.

В областях существования перманентных вращений на рис. 11 сплошным цветом закрашены области выполнения как необходимых, так и достаточных условий устойчивости, в заштрихованных областях выполняются только необ-

Таблица 1.8. Необходимые условия устойчивости в областях с четными номерами

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения НУ
2	$\xi_5 < \xi < \xi_1$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
2*	$\xi_5 < \xi < \xi_1$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_{**}$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_* < \xi < \xi_2$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
4	$\xi_5 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
6	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_7$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi_7 < \xi < \xi_6$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
8	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_7$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi_7 < \xi < \xi_6$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$

ходимые условия, в остальной части области имеет место неустойчивость. Введены следующие обозначения:

$$\xi_6 = \max(\xi_4, \xi_5), \quad \xi_7 = \min(\xi_4, \xi_5),$$

Приведенный анализ показывает, что перманентные вращения, для которых центр масс тела расположен ниже точки подвеса тела (случай $s = -1$) в областях 2, 2*, 4 устойчивы при всех допустимых значениях параметров η , ξ . Эти движения устойчивы и в случае отсутствия вибрации ($\xi = 0$), однако с появлением вибрации точки подвеса нижняя граница диапазона допустимых значений угловых скоростей перманентных вращений возрастает. В областях 1

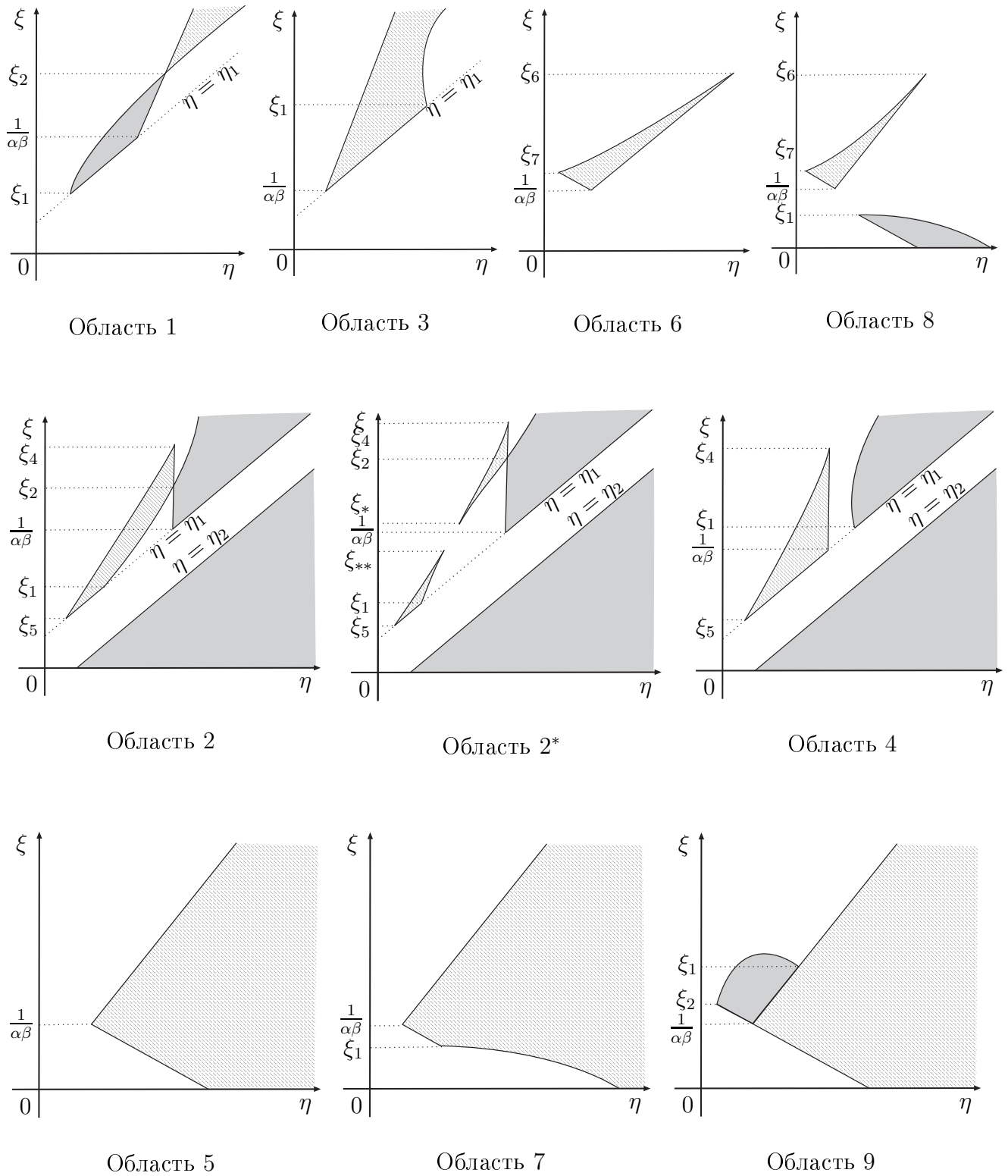


Рис. 11. Области устойчивости

и 3 рассматриваемые перманентные вращения всегда неустойчивы, как и при отсутствии вибраций.

Перманентные вращения, для которых центр масс расположен выше точки подвеса (случай $s = 1$), можно стабилизировать в областях 1–4 в определенном диапазоне угловых скоростей за счет вибраций точки подвеса; при отсутствии вибраций имеет место неустойчивость.

В областях 5, 7, 8, 9, по сравнению со случаем отсутствия вибрации, сдвигается в сторону уменьшения нижняя граница угловых скоростей устойчивых перманентных вращений. Для точек области 8 увеличение параметра ξ приводит к исчезновению подобласти выполнения достаточных условий устойчивости, при этом имеется новая подобласть устойчивости в линейном приближении, появляющаяся за счет вибрации. В области 9 при $\xi > 0$, кроме расширения области устойчивости в линейном приближении, отметим появление подобласти выполнения достаточных условий устойчивости. В области 6 имеет место стабилизация рассматриваемых перманентных вращений для определенного диапазона угловых скоростей и частоты вибрации точки подвеса.

1.3.4. Нелинейный анализ устойчивости

В областях изменения параметров задачи, где выполняются только необходимые условия устойчивости, может быть проведен нелинейный анализ устойчивости решений (1.3.1).

Нормализуем гамильтониан возмущенного движения (1.2.2) в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений. Сначала приведем квадратичную часть (1.3.3) гамильтониана к нормальной форме вида (1.2.10), используя линейное унивалентное каноническое преобразование (1.2.9), где

$$n_{11} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}(a_1 a_3 - a_2 a_4 + \sqrt{d})}{o_1 \sqrt{\chi}}, \quad n_{12} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}(a_1 a_3 - a_2 a_4 - \sqrt{d})}{o_2 \sqrt{\chi}},$$

$$n_{23} = \frac{1}{2} \frac{\zeta \kappa_1 (a_2 a_4 a_6 + a_1 a_3 a_6 - 2a_2 a_3 a_5 - a_6 \sqrt{d})}{o_1 \kappa},$$

$$\begin{aligned}
n_{24} &= -\frac{1}{2} \frac{\varsigma \kappa_2 (a_2 a_4 a_6 + a_1 a_3 a_6 - 2a_2 a_3 a_5 + a_6 \sqrt{d})}{o_2 \varkappa}, \\
n_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\varsigma \kappa_1 (a_1 a_2 a_3 + a_2 \sqrt{d} - a_2^2 a_4 + 2a_2 a_5 a_6 - 2a_6^2 a_1)}{o_1 \varkappa}, \\
n_{34} &= -\frac{1}{2} \frac{\varsigma \kappa_2 (a_1 a_2 a_3 - a_2 \sqrt{d} - a_2^2 a_4 + 2a_2 a_5 a_6 - 2a_6^2 a_1)}{o_2 \varkappa}, \\
n_{41} &= -\frac{\sqrt{2\chi\varkappa}}{o_1}, \quad n_{42} = -\frac{\sqrt{2\chi\varkappa}}{o_2}, \\
\varsigma &= \sqrt{2\chi\varkappa}, \quad \varkappa = \chi(a_2 a_3 - a_6^2), \quad \chi = a_6 a_1 - a_2 a_5, \\
\lambda &= -a_2^2 a_4 + 2a_2 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 - 2a_6^2 a_1, \\
o_1 &= \sqrt{\kappa_1 \sqrt{d} (\lambda + a_2 \sqrt{d})}, \quad o_2 = \sqrt{\kappa_2 \sqrt{d} (\lambda - a_2 \sqrt{d})}, \\
\kappa_{1,2} &= \frac{1}{2} \sqrt{2a_2 a_4 - 4a_5 a_6 + 2a_1 a_3 \pm 2\sqrt{d}} \quad (\kappa_1 > \kappa_2).
\end{aligned}$$

Здесь d — дискриминант характеристического уравнения, введенный в (1.2.6), а κ_1 и κ_2 — частоты малых линейных колебаний системы. Параметры $a_1 - a_6$ введены ранее в соотношениях (1.3.6).

Затем в преобразованном гамильтониане проведем нормализацию слагаемых третьей и четвертой степеней. При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков нормализованный гамильтониан возмущенного движения в координатах φ_j и r_j , задаваемых формулами $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$), имеет вид (1.2.11). Здесь слагаемое $O(r_j^{5/2})$ 2π -периодично по угловым переменным φ_j ($j = 1, 2$), а коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{02} представляются в виде

$$\begin{aligned}
c_{20} &= \frac{3}{2(4\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\kappa_1\kappa_2} \left(8(l_2 + l_6)^2 \kappa_1^3 + 8(3m_2 + m_6 + 3m_9) \kappa_2 \kappa_1^3 - \right. \\
&\quad \left. -(3l_2^2 + 2l_2 l_6 + 3l_6^2 + l_7^2) \kappa_1 \kappa_2^2 - 2(3m_2 + m_6 + 3m_9) \kappa_2^3 \kappa_1 + 3(5l_1^2 + 2l_1 l_5 + l_5^2) \kappa_2^3 \right), \\
c_{02} &= \frac{3}{2(\kappa_1^2 - 4\kappa_2^2)\kappa_1\kappa_2} \left(8(l_3 + l_9)^2 \kappa_2^3 + 2(m_{17} + 3m_3 + 3m_{19})(\kappa_1^2 - 4\kappa_2^2) \kappa_1 \kappa_2 - \right. \\
&\quad \left. -4 \left[3(l_{10} + l_4)^2 + 12l_4^2 - l_8(l_3 - l_9) \right] \kappa_1 \kappa_2^2 + 3 \left[4l_4^2 + (l_{10} + l_4)^2 \right] \kappa_1^3 - \right. \\
&\quad \left. - \left[3(l_3 + l_9)^2 + l_8^2 \right] \kappa_1^2 \kappa_2 \right),
\end{aligned}$$

$$c_{11} = -\frac{6}{(4\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(\kappa_1^2 - 4\kappa_2^2)\kappa_1\kappa_2} \left((m_4 + m_7 + m_{14} + m_{15})(17\kappa_1^2\kappa_2^2 - 4\kappa_1^4 - 4\kappa_2^4)\kappa_1\kappa_2 - \left[17(3l_1 + l_5)(l_3 + l_9) + 8(l_2 - l_6)^2 - 2l_8(l_3 - l_9) + 8l_7^2 \right] \kappa_1^2\kappa_2^3 + 4(l_3 + l_9)(3l_1 + l_5)\kappa_2^5 - 4(l_2 + l_6)(3l_4 + l_{10})\kappa_1^5 - 2 \left[2(l_2 + l_6)(3l_4 + l_{10}) + (l_3 - l_9)^2 + l_8^2 - 4l_7(l_2 - l_6) \right] \kappa_1\kappa_2^4 + \left[17(3l_4 + l_{10})(l_2 + l_6) - 2l_7(l_2 - l_6) + 8(l_3 - l_9)^2 + 8l_8^2 \right] \kappa_1^3\kappa_2^2 + 2 \left[2(l_3 + l_9)(3l_1 + l_5) + (l_2 - l_6)^2 - 4l_8(l_3 - l_9) + l_7^2 \right] \kappa_1^4\kappa_2 \right).$$

Явный вид величины Δ здесь и для рассматриваемых ниже частных случаев не приводим в силу громоздкости. Случай вырождения $\Delta = 0$ требует анализа в гамильтониане возмущенного движения слагаемых до шестого порядка включительно относительно возмущений, такой анализ в данной работе не проводится.

Если в системе реализуется резонанс третьего порядка ($\kappa_1 = 2\kappa_2$), то с помощью нелинейной нормализации гамильтониан приводится к виду

$$H = 2\kappa_2 r_1 - \kappa_2 r_2 + k_3 \sqrt{r_1} r_2 \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}), \quad (1.3.13)$$

в котором резонансный коэффициент вычисляется по формуле

$$k_3 = l_3 - l_8 - l_9.$$

При выполнении условия $k_3 \neq 0$ исследуемое решение неустойчиво. Если же $k_3 = 0$ и при этом

$$c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0, \quad (1.3.14)$$

то имеет место устойчивость [38].

Пусть в системе нет резонанса третьего порядка, но есть резонанс четвертого порядка ($\kappa_1 = 3\kappa_2$). Гамильтониан преобразуется к виду (1.3.13), где

$$k_4 = \frac{3}{5\kappa_2} \left(5(m_5 - m_{11} - m_{16} + m_{18})\kappa_2 - (6l_2 + 10l_4 + 4l_6 - l_7 + 10l_{10})l_3 + (6l_2 + 20l_4 + 4l_6 - l_7)l_9 + (4l_2 + 15l_4 + 6l_6 + l_7 + 5l_{10})l_8 \right).$$

В выражениях для величин c_{ij} и резонансных коэффициентов k_3, k_4 введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
l_1 &= n_{11} \left(n_{41}^2 b_4 + n_{11} b_5 n_{41} + n_{11}^2 b_2 \right), \\
l_2 &= 3(b_2 n_{12} + n_{42} b_5) n_{11}^2 + 2n_{41} (b_5 n_{12} + b_4 n_{42}) n_{11} + b_4 n_{12} n_{41}^2, \\
l_3 &= \left(2n_{42} b_5 n_{12} + n_{42}^2 b_4 + 3b_2 n_{12}^2 \right) n_{11} + n_{12} n_{41} \left(2b_4 n_{42} + b_5 n_{12} \right), \\
l_4 &= n_{12} \left(n_{42}^2 b_4 + n_{42} b_5 n_{12} + b_2 n_{12}^2 \right), \\
l_5 &= \left((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{11} + n_{41} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33}) \right) n_{23}, \\
l_6 &= \left((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{12} + n_{42} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33}) \right) n_{23}, \\
l_7 &= \left((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{11} + n_{41} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34}) \right) n_{23} + \\
&\quad + \left((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{11} + n_{41} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33}) \right) n_{24}, \\
l_8 &= \left((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{12} + n_{42} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34}) \right) n_{23} + \\
&\quad + \left((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{12} + n_{42} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33}) \right) n_{24}, \\
l_9 &= \left((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{11} + n_{41} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34}) \right) n_{24}, \\
l_{10} &= \left((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{12} + n_{42} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34}) \right) n_{24}, \\
m_1 &= n_{11} \left((4n_{12} c_3 + n_{42} c_9) n_{11}^2 + (2n_{42} c_8 + 3n_{12} c_9) n_{11} n_{41} + 2n_{12} n_{41}^2 c_8 \right), \\
m_2 &= \left(c_3 n_{11}^2 + n_{11} n_{41} c_9 + n_{41}^2 c_8 \right) n_{11}^2, \quad m_3 = \left(c_9 n_{42} n_{12} + c_3 n_{12}^2 + n_{42}^2 c_8 \right) n_{12}^2, \\
m_4 &= \left(6c_3 n_{12}^2 + 3c_9 n_{42} n_{12} + n_{42}^2 c_8 \right) n_{11}^2 + n_{11} n_{12} n_{41} \left(3n_{12} c_9 + 4c_8 n_{42} \right) + n_{12}^2 n_{41}^2 c_8, \\
m_5 &= \left(3n_{11} n_{42} c_9 n_{12} + 4n_{11} c_3 n_{12}^2 + 2n_{11} n_{42}^2 c_8 + 2n_{12} n_{41} c_8 n_{42} + n_{12}^2 n_{41} c_9 \right) n_{12}, \\
m_6 &= \left((c_1 n_{11}^2 + c_{11} n_{41} n_{11} + n_{41}^2 c_7) n_{23} + n_{11} n_{33} (c_5 n_{11} + n_{41} c_{10}) \right) n_{23}, \\
m_9 &= \left(n_{23} c_4 n_{33} + n_{33}^2 c_6 + n_{23}^2 c_2 \right) n_{23}^2, \quad m_{19} = \left(c_4 n_{24} n_{34} + n_{34}^2 c_6 + c_2 n_{24}^2 \right) n_{24}^2, \\
m_7 &= \left((c_1 n_{12}^2 + n_{42}^2 c_7 + c_{11} n_{42} n_{12}) n_{23} + n_{33} n_{12} (c_5 n_{12} + c_{10} n_{42}) \right) n_{23}, \\
m_8 &= \left(((2c_1 n_{12} + c_{11} n_{42}) n_{11} + (2c_7 n_{42} + c_{11} n_{12}) n_{41}) n_{23} + \right. \\
&\quad \left. + ((2c_5 n_{12} + c_{10} n_{42}) n_{11} + c_{10} n_{12} n_{41}) n_{33} \right) n_{23},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{10} &= \left((2n_{24}c_1 + n_{34}c_5)n_{23} + n_{24}n_{33}c_5 \right) n_{11}^2 + \\
&+ \left((c_{10}n_{34} + 2c_{11}n_{24})n_{23} + c_{10}n_{33}n_{24} \right) n_{41}n_{11} + 2n_{23}n_{24}n_{41}^2c_7, \\
m_{11} &= \left((2n_{24}c_1 + n_{34}c_5)n_{23} + n_{24}n_{33}c_5 \right) n_{12}^2 + \\
&+ \left((c_{10}n_{34} + 2c_{11}n_{24})n_{23} + c_{10}n_{33}n_{24} \right) n_{42}n_{12} + 2n_{23}n_{24}n_{42}^2c_7, \\
m_{12} &= \left((2(2c_1n_{12} + c_{11}n_{42})n_{11} + 2(2c_7n_{42} + c_{11}n_{12})n_{41})n_{24} + (c_{10}n_{12}n_{41} + \right. \\
&+ \left. (2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11})n_{34} \right) n_{23} + n_{33}n_{24} \left((2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11} + c_{10}n_{12}n_{41} \right), \\
m_{13} &= \left(4n_{23}^2c_2n_{24} + n_{23}^2n_{34}c_4 + 2n_{33}n_{23}c_6n_{34} + 3n_{23}c_4n_{33}n_{24} + 2c_6n_{24}n_{33}^2 \right) n_{23}, \\
m_{14} &= \left(n_{34}^2c_6 + 3c_4n_{24}n_{34} + 6c_2n_{24}^2 \right) n_{23}^2 + n_{23}n_{24}n_{33} \left(3n_{24}c_4 + 4c_6n_{34} \right) + c_6n_{24}^2n_{33}^2, \\
m_{15} &= \left((c_1n_{11}^2 + c_{11}n_{41}n_{11} + n_{41}^2c_7)n_{24} + n_{11}n_{34}(c_5n_{11} + n_{41}c_{10}) \right) n_{24}, \\
m_{16} &= \left((2c_1n_{12} + c_{11}n_{42})n_{24}n_{11} + (2c_7n_{42} + c_{11}n_{12})n_{24}n_{41} + \right. \\
&+ \left. (2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11}n_{34} + c_{10}n_{34}n_{12}n_{41} \right) n_{24}, \\
m_{17} &= \left((c_1n_{12}^2 + n_{42}^2c_7 + c_{11}n_{42}n_{12})n_{24} + n_{34}n_{12}(c_5n_{12} + c_{10}n_{42}) \right) n_{24}, \\
m_{18} &= \left(4n_{23}c_2n_{24}^2 + 3n_{23}c_4n_{24}n_{34} + 2n_{23}n_{34}^2c_6 + n_{33}n_{24}^2c_4 + 2n_{24}n_{33}c_6n_{34} \right) n_{24}.
\end{aligned}$$

Таким образом, устойчивость стационарного вращения в исследуемых областях устойчивости в линейном приближении может нарушиться для значений параметров (β, ξ, η) , принадлежащих поверхностям резонансов третьего и четвертого порядков или поверхности вырождения $\Delta = 0$ из (1.2.12).

1.3.5. Частные случаи геометрии масс тела

Нелинейный анализ устойчивости проведем для тех же, что и в 1.2.3, частных случаев инерционного параметра α : $\alpha = 1$ (динамическая симметрия) и $\alpha = 2$ (случай Бобылева–Стеклова).

1. Случай динамической симметрии

Случаю динамической симметрии $\alpha = 1$ ($A = B$) соответствует отрезок

прямой $\alpha = 1$ при $\beta > 1/2$ (рис. 10).

Для анализа устойчивости рассматривались сечения изучаемых областей трехмерного пространства параметров плоскостями $\beta = \text{const}$ при различных значениях параметра β из интервала $\beta > 1/2$. В получаемых сечениях в плоскости параметров η, ξ строились области устойчивости в линейном приближении, а также имеющиеся в них кривые резонансов третьего и четвертого порядков и кривые вырождения; на кривых резонанса четвертого порядка выделялись участки устойчивости и неустойчивости. При этом отслеживалась эволюция изучаемых областей и картины устойчивости.

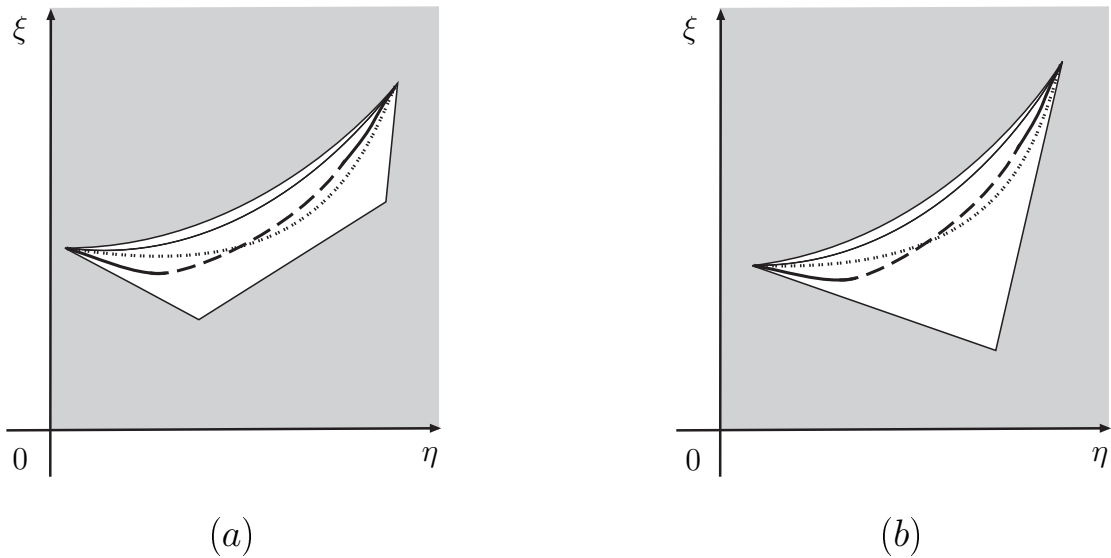
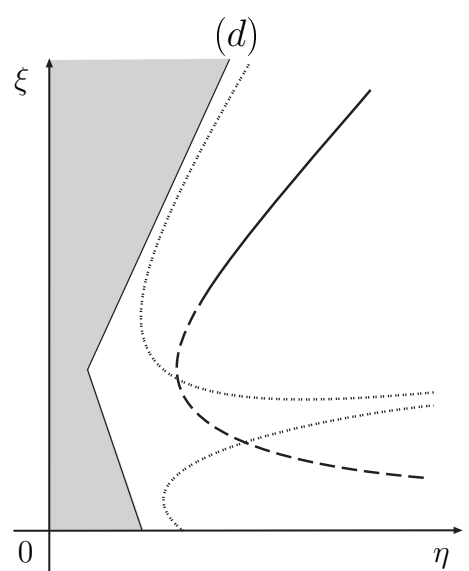
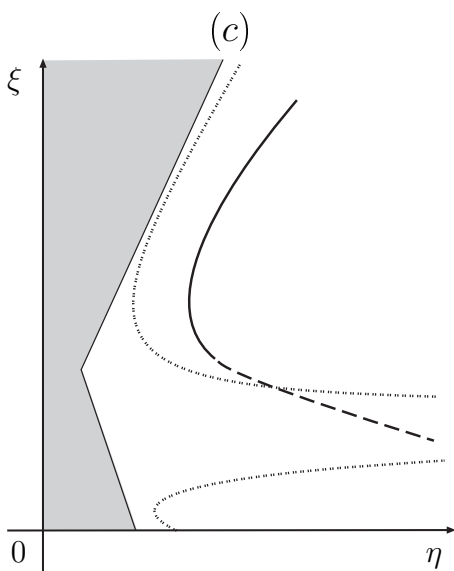
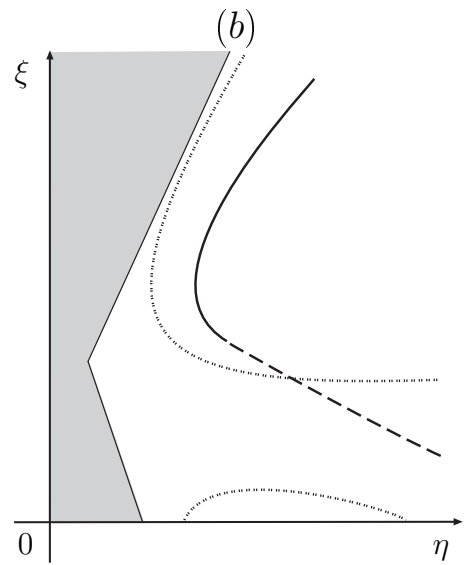
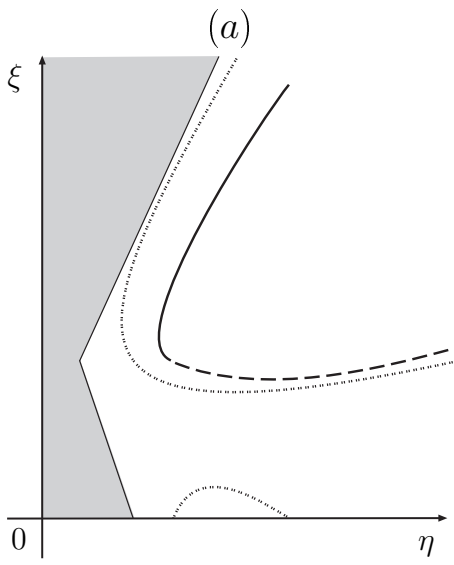
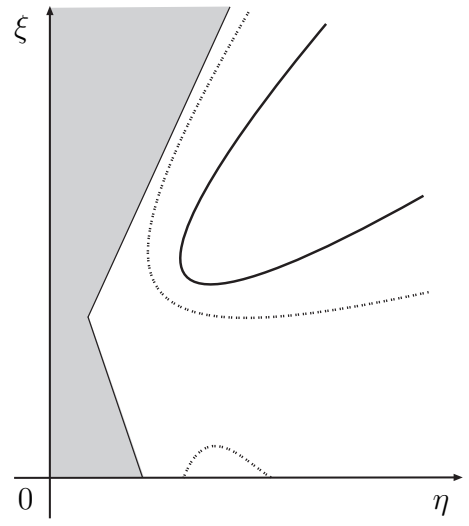
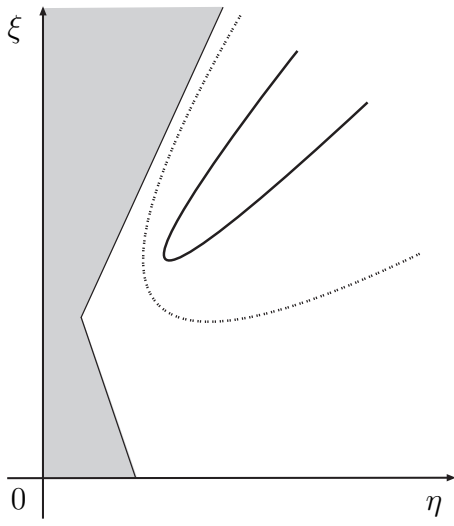


Рис. 12. Области 2, 4

На рисунках, иллюстрирующих полученные результаты (см. рис. 12, 13), области, где не выполняются необходимые условия устойчивости, закрашены серым цветом. Кривые резонанса третьего порядка показаны тонкими линиями. Кривые резонанса четвертого порядка изображены полужирными линиями на участках устойчивости и пунктирными линиями на участках неустойчивости. Кривые вырождения показаны точечными линиями.

Вид полученных сечений и картина устойчивости в них качественно отли-



(e)

(f)

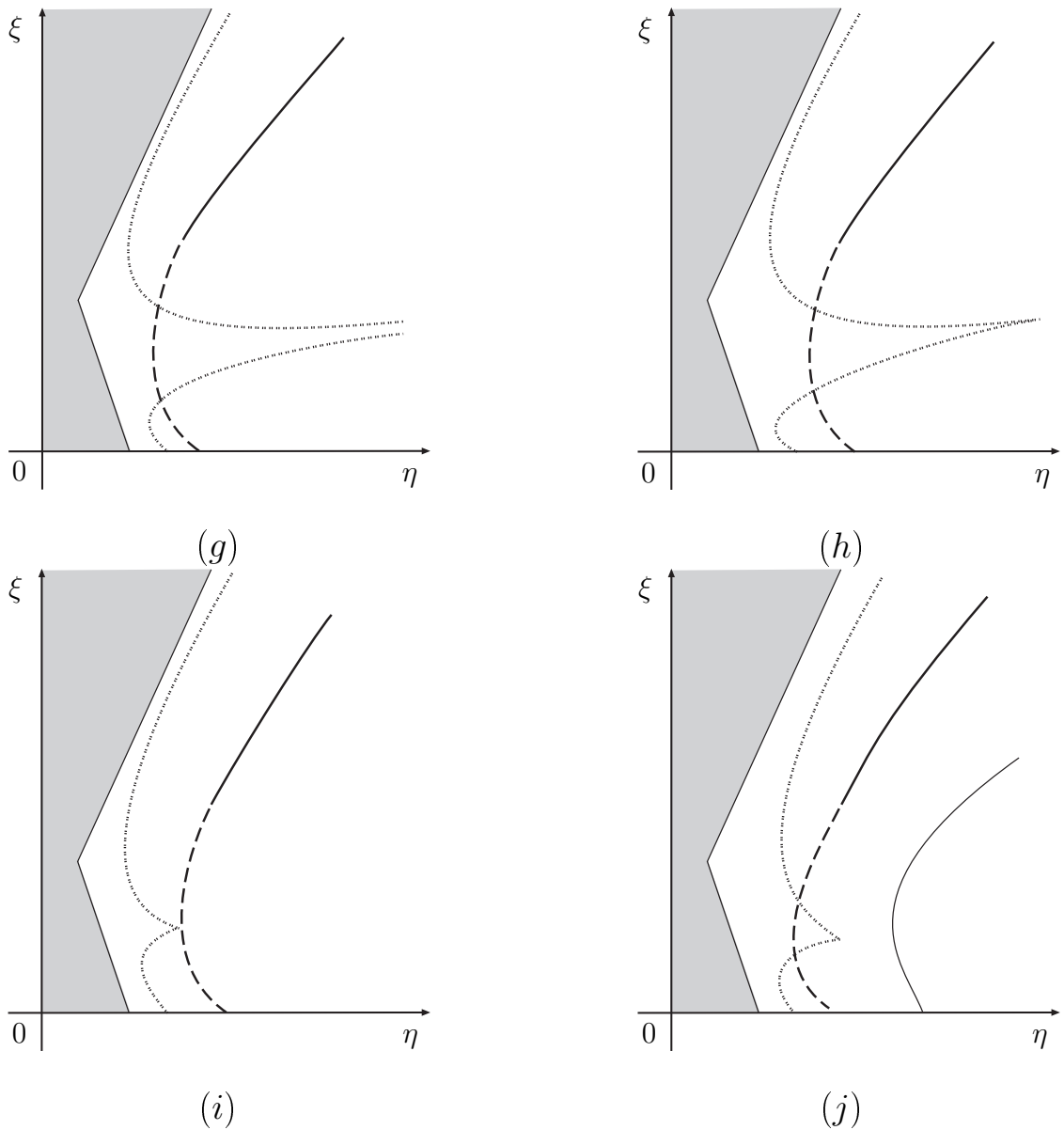


Рис. 13. Области 5, 7, 9

чаются для значений β из интервалов $1/2 < \beta < 1$ (области 2 и 4) и $\beta > 1$ (области 5, 7, 9).

Для областей 2 и 4 исследуемые области в плоскости параметров ξ, η ограничены и представляют собой криволинейный четырехугольник (для области 2 рис. 12 *a*) или криволинейный треугольник (для области 4 рис. 12 *b*). В этих областях во всех исследуемых сечениях существуют кривая вырождения, а также кривые резонансов третьего и четвертого порядков. Все три кривые имеют общие концы в угловых точках области.

Для точек кривой резонанса третьего порядка всегда имеет место неустойчивость. Кривые вырождения и резонанса четвертого порядка имеют точку пересечения; в этой точке, а также на среднем участке резонансной кривой, содержащем эту точку, исследуемое перманентное вращение неустойчиво, вне данного участка имеем устойчивость.

Для значений параметра β (при $\alpha = 1$) из областей 5, 7, 9 области выполнения только необходимых условий устойчивости неограниченны (см. рис. 13). Рис. 13 $a-j$ соответствуют области 5 (a), области 7 при $4/3 < \beta < 1.352$ (b), $1.352 < \beta < 1.395$ (c), $1.395 < \beta < 1.459$ (d), $(1.459 < \beta < 1.483$ (e), $1.483 < \beta < 1.5$ (f), $1.5 < \beta < 1.54$ (g), $1.54 < \beta < 1.64$ (h), $(1.64 < \beta < 2$ (i), области 9 (j).

В области 5 (рис. 13 a) в исследуемой области существует одна кривая резонанса четвертого порядка и одна ветвь кривой вырождения. На резонансной кривой перманентное вращение устойчиво.

При переходе в область 7 (рис. 13 $b-i$) эти две кривые сохраняются, а картина устойчивости качественно такая же, как в области 5 (рис. 13 b). С ростом β две кривые «сближаются», при этом на резонансной кривой появляется участок неустойчивости (рис. 13 c). При переходе через значение $\beta = 1.395$ (рис. 13 d) у резонансной кривой и кривой вырождения появляется точка пересечения в зоне неустойчивости на резонансной кривой.

В области 7 существует также вторая ветвь кривой вырождения, имеющая при $4/3 < \beta < 1.459$ две общие точки с осью абсцисс (рис. 13 $b-d$). С ростом β правая точка пересечения «ползет» вдоль оси абсцисс, а при переходе через $\beta = 1.459$ (рис. 13 e) «отрывается» от нее. Начиная со значения $\beta = 1.483$ (рис. 13 f), кривая резонанса четвертого порядка пересекает (на участке неустойчивости) обе ветви кривой вырождения, а при переходе через $\beta = 1.5$ (рис. 13 g) пересекает также и ось абсцисс.

С дальнейшим увеличением β две ветви кривой вырождения сближаются

и при $\beta = 1.54$ (рис. 13 *h*) «смыкаются» в общей точке; при этом резонансная кривая и кривая вырождения по-прежнему имеют две точки пересечения. Участок между этими общими точками с ростом β уменьшается, при $\beta = 1.64$ (рис. 13 *i*) стягивается в точку, после чего кривая вырождения «отрывается» от резонансной кривой.

В области 9 ($\beta > 2$, см. рис. 13 *j*) две кривые снова имеют две точки пересечения. Кроме того, в этой области появляется кривая резонанса третьего порядка, на которой рассматриваемое движение неустойчиво.

2. Случай $\alpha = 2$

В случае $\alpha = 2$ ($A = 2B$) параметр β меняется в диапазоне $2/3 < \beta < 2$. Анализ проводится аналогично предыдущему, в каждом сечении $\beta = \text{const}$ область выполнения только необходимых условий устойчивости представляет собой криволинейный треугольник в плоскости параметров ξ, η . Его характерный вид такой же, как и для точек области 4 рассмотренного выше случая динамической симметрии (см. рис. 12 *b*). Состав кривых и картина устойчивости внутри самой области также качественно не отличаются от представленных на этом рисунке.

Глава 4. Частный случай перманентных вращений динамически симметричного тела, обусловленный вибрациями

В данной главе будет проведен анализ устойчивости перманентных вращений динамически симметричного тела, оси которых определяются соотношениями (1.1.35). Эти вращения возможны только при наличии вибраций и не существуют в случае тела с неподвижной точкой. Для определенности будет рассмотрен случай, для которого $\gamma_2 > 0$.

1.4.1. Достаточные и необходимые условия устойчивости

Рассматриваемому вращению отвечает положение равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (1.1.18), имеющее вид

$$\theta_0 = \arccos \frac{\beta}{\sigma_2 \eta^2} \quad (\eta^2 > \beta/\sigma_2), \quad \varphi_0 = 0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{1}{\sigma_2 \eta}. \quad (1.4.1)$$

При этом постоянный импульс p_ψ связан с безразмерной угловой скоростью η равенством

$$p_\psi = \frac{\eta^4 \sigma_2^2 - \beta(\beta - 1)}{\eta^3 \sigma_2^2}.$$

Будем исследовать устойчивость указанных положений равновесия при фиксированном значении параметра η . При этом параметры η и ξ связаны соотношением (1.1.36).

За независимые параметры принимаем величины η , σ_2 , β .

Аналогично предыдущим случаям введем возмущения и получим формы H_k гамильтониана (1.2.2). Квадратичная форма гамильтониана имеет следующую структуру:

$$H_2 = \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{2} a_2 x_2^2 + \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} a_4 y_2^2 + a_5 x_1 y_2 + a_6 x_1 x_2. \quad (1.4.2)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2(1 - \sigma_2^2)\eta^4 + \beta[\beta\sigma_2^2 + (4\beta - 1)(\beta - 1)]}{\eta^2\sigma_2^2\beta}; \quad a_2 = \frac{\beta^2}{\eta^2\sigma_2^2} - \eta^2; \quad (1.4.3)$$

$$a_4 = \frac{(\beta^2 - \beta - \eta^4\sigma_2^2)\beta}{\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2}; \quad a_5 = \frac{\beta^2 - \beta + \eta^4\sigma_2^2}{\eta\sigma_2\sqrt{\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2}}; \quad a_6 = -\frac{\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2}{\eta^2\sigma_2\beta}.$$

Формы третьей и четвертой степени гамильтона записываются в виде

$$H_3 = -\frac{x_1\eta^4y_2^2\sigma_2^2\beta}{(\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2)^{3/2}} + \frac{x_1^2y_2(\beta^2(\beta - 1) + \eta^4\sigma_2^2(5\beta - 2))}{2\sigma_2\eta(\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2)} - \frac{x_1x_2^2\beta\sqrt{\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2}}{\eta^2\sigma_2^2} +$$

$$+ \frac{3x_1^2x_2\sqrt{\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2}}{2\sigma_2\eta^2} + \frac{x_1^3(\beta(\beta\sigma_2^2 + \beta - 1) - \eta^4\sigma_2^2(4\beta - 3 + \sigma_2^2))}{2\sqrt{\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2}\sigma_2^2\eta^2}, \quad (1.4.4)$$

$$H_4 = \frac{x_1^2y_2^2\eta^4\sigma_2^2(\eta^4\sigma_2^2 + 2\beta^2)}{2(\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2)^2} + \frac{x_1^3y_2(\beta^3(\beta - 1) + \eta^4\sigma_2^2(5\eta^4\sigma_2^2 + 18\beta^2 - 11\beta))}{6\eta\sigma_2(\eta^4\sigma_2^2 - \beta^2)^{3/2}} -$$

$$- \frac{x_2^4(\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2)}{6\eta^2\sigma_2^2} + \frac{x_1x_2^3(\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2)}{6\sigma_2\eta^2\beta} - \frac{x_1^2x_2^2(2\beta^2 - \eta^4\sigma_2^2)}{2\eta^2\sigma_2^2} + \frac{x_2x_1^3(7\beta^2 - 4\eta^4\sigma_2^2)}{6\sigma_2\eta^2\beta} -$$

$$- \frac{x_1^4[4\sigma_2^4(3\beta + \sigma_2^2 - 1)\eta^8 + \sigma_2^2\beta(32\beta^2 - 11\sigma_2^2\beta - 33\beta + 8)\eta^4]}{24\eta^6\sigma_2^2\beta} -$$

$$- \frac{x_1^4\beta^2(16\beta^2 + 7\sigma_2^2\beta - 23\beta + 7)}{24\eta^6\sigma_2^2}$$

Достаточные условия устойчивости исследуемого решения имеют вид:

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_6^2 > 0, \quad a_1a_2a_4 - a_6^2a_4 - a_5^2a_2 > 0. \quad (1.4.5)$$

Эти условия, с учетом области существования решения, сводятся к системе неравенств

$$\eta^4\sigma_2^2(1 - \sigma_2^2) + \beta(4\beta^2 + \beta[\sigma_2^2 - 5] + 1) > 0,$$

$$\eta^4\sigma_2^2(\beta + \sigma_2^2 - \beta\sigma_2^2) + \beta^2(\beta - 1)(\sigma_2^2 + 4\beta - 1) < 0, \quad (1.4.6)$$

$$(\beta - 1)[\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma_2^2) - \eta^4\sigma_2^4] < 0.$$

Необходимые условия устойчивости задаются системой (1.2.6), где

$$a = a_1 + a_2a_4, \quad b = a_1a_2a_4 - a_6^2a_4 - a_5^2a_2.$$

Заметим, что неравенство $b > 0$ совпадает с третьим неравенством из (1.4.5). Два других сводятся к системе вида

$$\beta(\beta^3 + 3\beta^2 + \beta[\sigma_2^2 - 5] + 1) - \eta^4 \sigma_2^2 (\sigma_2^2 + \beta^2 - 1) > 0, \quad (1.4.7)$$

$$\eta^8 \sigma_2^4 \Gamma - 2\beta \sigma_2^2 \eta^4 \Lambda + \beta^2 \Upsilon > 0, \quad (1.4.8)$$

$$\Gamma = \sigma_2^4 - 2(\beta - 1)^2 \sigma_2^2 + (\beta^2 - 1)^2,$$

$$\Lambda = \sigma_2^4 \beta - (\beta - 1)(2\beta^2 - 7\beta + 1)\sigma_2^2 + (\beta - 1)^5,$$

$$\Upsilon = \sigma_2^4 \beta^2 - 2\beta(\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)\sigma_2^2 + (\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)^4.$$

Исследовать достаточные и необходимые условия будем в области, определяемой общим для выписанных условий третьим неравенством в (1.4.6). Область выполнения этого неравенства иллюстрирует рис. 14, на котором представлена допустимая часть плоскости параметров σ_2 , β . При $1/2 \leq \beta < 1$

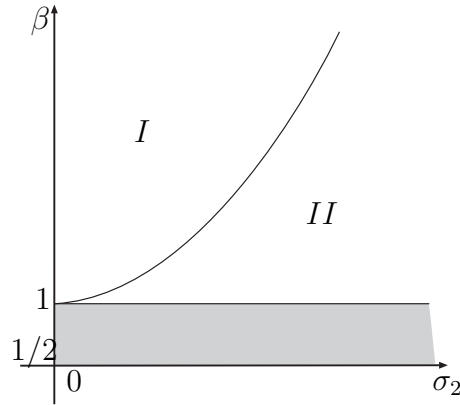


Рис. 14. Область исследования

неравенство не выполняется, и имеет место неустойчивость.

В области $\beta > 1$ выделим подобласти I и II , разделенные кривой

$$2\beta = 1 + \sqrt{1 + \sigma_2^2}.$$

В этих подобластях имеем следующие ограничения на параметр η (угловую

скорость перманентного вращения):

$$\eta^4 > \eta_A^4 = \frac{\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma_2^2)}{\sigma_2^4} \quad (I), \quad \eta^2 > \beta/\sigma_2 \quad (II).$$

Далее заметим, что в области $\beta > 1$ второе неравенство в (1.4.6) может быть удовлетворено, когда коэффициент при η^4 отрицателен, что дает условие

$$\sigma_2^2 > \frac{\beta}{\beta - 1} > 1.$$

При этом условии первое неравенство в (1.4.6) сводится к соотношению

$$\eta^4 < \eta_B^4 = \frac{\beta[4\beta^2 + \beta(\sigma_2^2 - 5) + 1]}{\sigma_2(\sigma_2^2 - 1)},$$

а второе — к соотношению

$$\eta^4 > \eta_C^4 = \frac{\beta^2(1 - \beta)(4\beta + \sigma_2^2 - 1)}{\sigma_2^2(\beta + \sigma_2^2 - \beta\sigma_2^2)}.$$

Однако в области $\beta > 1$ при любых значениях угловой скорости η справедливо неравенство

$$\eta_B^4 < \eta_C^4.$$

Таким образом, для любых значений параметров η , β , σ_2 достаточные условия устойчивости (1.4.6) не выполняются.

Проверим выполнение только необходимых условий устойчивости (1.4.7) в областях I , II на рис. 14. Первое из неравенств для любых значений β , σ_2 из этих областей удовлетворяется при условии

$$\eta^4 < \eta_D^4 = \frac{\beta(\beta\sigma_2^2 + (\beta - 1)(\beta^2 + 4\beta - 1))}{\sigma_2^2(\sigma_2^2 + \beta^2 - 1)}$$

причем имеем

$$\eta_A^4 < \eta_D^4 \quad \text{при} \quad \sigma_2^4 > 4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2 \quad (1.4.9)$$

Таким образом, в области I рис. 14 появляется область неустойчивости (при $\eta_A^4 > \eta_D^4$). В оставшейся части области I , обозначенной на рис. 15 через I' ,

а также в области II имеем ограничение на максимальное значение скорости перманентного вращения: $\eta^4 < \eta_D^4$.

Рассмотрим условие (1.4.8). Левая часть этого неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно η^4 с коэффициентами — квадратными трехчленами относительно σ_2 . Дискриминант квадратного трехчлена Γ отрицателен, поэтому старший коэффициент исследуемого неравенства всегда положителен.

Дискриминант квадратного неравенства (1.4.8) имеет вид

$$D = 16\beta^3\sigma_2^4(\beta - 1)^2[(4\beta - 1)\sigma_2^4 - 8\beta^2(\beta - 1)\sigma_2^2 + 4\beta(\beta - 1)^4].$$

Выражения для D содержит квадратный трехчлен относительно σ_2^4 с положительным дискриминантом. Учитывая знаки коэффициентов квадратного трехчлена (в области $\beta > 1$), заключаем, что он имеет два положительных вещественных корня. При этом левая граница рассматриваемой области параметра σ_2 , задаваемая в (1.4.9), лежит правее обоих корней и таким образом, в этой области дискриминант D всегда положителен.

Аналогичный анализ коэффициентов Λ и $\Upsilon = 0$ из (1.4.8) показывает, что исследуемой области параметров β , σ_2 они принимают только положительные значения. Таким образом, квадратный трехчлен в левой части неравенства (1.4.8) имеет два вещественных положительных корня.

Найдем взаимное расположение этих корней относительно найденных выше граничных значений η_A^4 , β/σ_2 и η_D^4 . Подстановка этих значений в левую часть неравенства (1.4.8) дает соответственно выражения:

$$\begin{aligned} d|_{\eta=\eta_A} &= \frac{\beta^2[4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2 - \sigma_2^4]^2}{\sigma_2^4} > 0, \\ d|_{\eta=\sqrt{\beta/\sigma_2}} &= \beta^2(3\beta - 1)^2(\beta - 1)^2 > 0, \\ d|_{\eta=\eta_D} &= \frac{4\beta^3(3\beta - 1)(\beta - 1)^2[4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2 - \sigma_2^4]}{(1 - \sigma_2^2 - \beta^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

Объединяя результаты, получаем следующие ограничения на величину η угловой скорости перманентного вращения, представляющие только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости (см. рис. 15):

$$\eta_A^4 < \eta^4 < \eta_E^4 \quad (I'), \quad \beta^2/\sigma_2^2 < \eta^4 < \eta_E^4 \quad (II). \quad (1.4.10)$$

Здесь η_E^4 — меньший из корней квадратного трехчлена в (1.4.8).

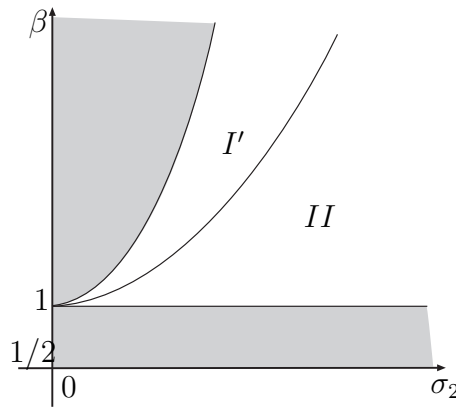


Рис. 15. Области только необходимых условий устойчивости

Заметим, что на границе (1.4.9) (верхней границе области I') $\eta_E^4 = \eta_A^4$.

1.4.2. Нелинейный анализ устойчивости

В областях изменения параметров задачи, где выполняются только необходимые условия устойчивости, проведем нелинейный анализ устойчивости решений (1.4.1).

Осуществим нормализацию гамильтониана возмущенного движения (1.2.2), (1.4.2)–(1.4.4) в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений. Сначала приведем квадратичную часть (1.4.2) гамильтониана к нормальной форме вида (1.2.10), где

$$\kappa_{1,2} = \frac{\sqrt{2\beta(\beta[\beta^3 + 3\beta^2 + \beta(\sigma_2^2 - 5) + 1] - \sigma_2^2(\beta^2 + \sigma_2^2 - 1)\eta^4 \pm \sqrt{d})}}{2\beta\sigma_2\eta}, \quad (\kappa_1 > \kappa_2),$$

$$d = \sigma_2^4 \left[\sigma_2^4 - 2(\beta - 1)^2 \sigma_2^2 + (\beta^2 - 1)^2 \right] \eta^8 - 2\beta \sigma_2^2 \left[\sigma_2^4 \beta - (\beta - 1)(2\beta^2 - 7\beta + 1) \sigma_2^2 + (\beta - 1)^5 \right] \eta^4 + \beta^2 \left[\beta^2 \sigma_2^4 - 2\beta(\beta - 1)(\beta^2 - 6\beta + 1) \sigma_2^2 + (\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)^4 \right].$$

Здесь d — дискриминант характеристического уравнения, введенный в (1.2.6), а κ_1 и κ_2 — частоты малых линейных колебаний системы в окрестности исследуемого положения равновесия. Квадратичная форма (1.2.10) получается в результате линейного унивалентного канонического преобразования $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) вида

$$\begin{aligned} x_1 &= n_{13}p_1 + n_{14}p_2, & x_2 &= n_{21}q_1 + n_{22}q_2 + n_{23}p_1 + n_{24}p_2, & (1.4.11) \\ y_1 &= n_{31}q_1 + n_{32}q_2, & y_2 &= n_{41}q_1 + n_{42}q_2 + n_{43}p_1 + n_{44}p_2, \\ n_{13,14} &= (-1)^{j+1} \varkappa_j, & n_{21,22} &= -\frac{\varkappa_j o_j (\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma_2^2) \kappa_j \sigma_2 \eta}{2z \sqrt{\eta^4 \sigma_2^2 - \beta^2}}, \\ n_{23,24} &= (-1)^{j+1} \frac{\varkappa_j o_j \sigma_2 (\beta^2 - \beta - \eta^4 \sigma_2^2)}{2z}, & n_{31,32} &= -\varkappa_j \kappa_j, \\ n_{41,42} &= \frac{\varkappa_j \sigma_2 \kappa_j o_j (\eta^4 \sigma_2^2 - \beta^2)}{2\beta z}, & n_{43,44} &= (-1)^{j+1} \frac{\varkappa_j (\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma_2^2) o_j \sqrt{\eta^4 \sigma_2^2 - \beta^2}}{2\sigma_2 z \eta}, \\ o_{1,2} &= \eta^4 \sigma_2^4 - ((\eta^4 + 1)\beta^2 + \eta^4)\sigma_2^2 + \beta(\beta - 1)(\beta^2 - 4\beta + 1) \pm \sqrt{d}, \\ z &= \beta^5 - (\sigma_2^2 + 2)\beta^4 + (1 + (2\eta^4 + 1)\sigma_2^2)\beta^3 + \eta^4 \sigma_2^2 (2\beta^2(\sigma_2^2 - 1) + \\ &\quad + \sigma_2^2[(\beta - \sigma_2^2)\eta^4 - \beta]), \\ \varkappa_1 &= \frac{\sqrt{2\beta z}}{\sqrt{\kappa_1((\sigma_2^2(\beta^2 - \sigma_2^2 + 1)\eta^4 - \beta(\beta^3 - 5\beta^2 + 5\beta - \beta\sigma_2^2 - 1))\sqrt{d} - d)}}, \\ \varkappa_2 &= \frac{2\sqrt{\beta z}}{\sqrt{\kappa_2((\beta^4 - 5\beta^3 + (5 - (\eta^4 + 1)\sigma_2^2)\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma_2^4 - \eta^4 \sigma_2^2 - \sqrt{d})^2 - 4\beta z)}}. \end{aligned}$$

Величина j для коэффициентов n_{kl} с нечетными и четными индексами равен 1 и 2 соответственно. Параметры $a_1 - a_6$ введены выше в соотношениях (1.4.3).

После проведения линейной подстановки (1.4.11) формы третьей и четвертой степеней из (1.4.4) принимают следующий вид:

$$H_3 = (l_1 q_1^2 + l_2 q_2^2 + l_3 q_1 q_2) p_1 + (l_4 q_2 + l_5 q_1) p_1^2 + l_6 p_1^3 + (l_7 p_1^2 + (l_8 q_2 + l_9 q_1) p_1 +$$

$$\begin{aligned}
& +l_{10}q_2^2 + l_{11}q_1^2 + l_{12}q_1q_2)p_2 + (l_{13}p_1 + l_{14}q_2 + l_{15}q_1)p_2^2 + l_{16}p_2^3, \\
H_4 = & m_1q_1^2q_2^2 + m_2q_1^4 + m_3q_2^4 + m_4q_1q_2^3 + m_5q_1^3q_2 + m_6p_2^4 + (m_7q_1 + m_8p_1 + \\
& +m_9q_2)p_2^3 + (m_{10}q_1q_2 + (m_{11}q_1 + m_{12}q_2)p_1 + m_{13}p_1^2 + m_{14}q_2^2 + m_{15}q_1^2)p_2^2 + \\
& +(m_{16}q_2^3 + m_{17}p_1^3 + (m_{18}q_1^2 + m_{19}q_1q_2 + m_{20}q_2^2)p_1 + m_{21}q_1^3 + m_{22}q_1q_2^2 + \\
& +m_{23}q_1^2q_2 + (m_{24}q_2 + m_{25}q_1)p_1^2)p_2 + m_{26}p_1^4 + (m_{27}q_1 + m_{28}q_2)p_1^3 + \\
& +(m_{29}q_1q_2^2 + m_{30}q_2^3 + m_{31}q_1^3 + m_{32}q_1^2q_2)p_1 + (m_{33}q_1q_2 + m_{34}q_2^2 + m_{35}q_1^2)p_1^2.
\end{aligned}$$

Явный вид коэффициентов l_j и m_j достаточно громоздкий и здесь не приводится.

Затем при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных $q_i, p_i \rightarrow \tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ ($i = 1, 2$) проведем нормализацию преобразованных форм H_3 и H_4 .

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков нормализованный гамильтониан возмущенного движения в симплектических полярных координатах φ_i и r_i , задаваемых формулами $\tilde{q}_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$, $\tilde{p}_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$ ($i = 1, 2$), имеет вид (1.2.11). Здесь слагаемое $O(r_i^{5/2})$ 2π -периодично по угловым переменным φ_i ($i = 1, 2$). Постоянные коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{02} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
c_{20} = & \frac{3}{2(\kappa_2^2 - 4\kappa_1^2)\kappa_2\kappa_1} \left[(2(m_5 + 3m_2 + 3m_{17})\kappa_1 - 3((l_1 + l_6)^2 + 4l_6^2 + l_5^2))\kappa_2^3 + \right. \\
& + ((l_7 + l_{11})^2 + 2l_7^2 + 2l_{11}^2 + l_9^2 + l_3^2 + 3l_4^2)\kappa_1\kappa_2^2 - 8((l_{11} + l_7)^2 + l_4^2)\kappa_1^3 + \\
& \left. + (4(3(l_6 + l_1)^2 + 5l_6^2 + l_3(l_{11} - l_7) + l_4l_9 + 3l_5^2) - 8(m_5 + 3m_{17} + 3m_2)\kappa_1)\kappa_1^2\kappa_2 \right], \\
c_{02} = & \frac{3}{2\kappa_1\kappa_2(\kappa_1^2 - 4\kappa_2^2)} \left[8((l_2 + l_{13})^2 + l_{15}^2 - (m_{14} + 3m_3 + 3m_6)\kappa_1)\kappa_2^3 + 4(l_{12}(l_{13} - \right. \\
& - l_2) - l_8l_{15} - 2l_{14}^2 - 3((l_{10} + l_{16})^2 + 4l_{16}^2))\kappa_1\kappa_2^2 + (2(3m_3 + m_{14} + 3m_6)\kappa_1 - \\
& \left. - (3l_{15}^2 + l_{12}^2 + 2l_{13}^2 + 2l_2^2 + (l_{13} + l_2)^2 + l_8^2))\kappa_1^2\kappa_2 + 3((l_{16} + l_{10})^2 + 4l_{16}^2 + l_{14}^2)\kappa_1^3 \right], \\
c_{11} = & \frac{6}{\kappa_1\kappa_2(4\kappa_1^4 - 17\kappa_1^2\kappa_2^2 + 4\kappa_2^4)} \left[4((3l_{16} + l_{10})(l_{11} + l_7) + l_4l_{14})\kappa_1^5 - 4((3l_6 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +l_1)(l_2 + l_{13}) + l_5l_{15} - (m_1 + m_{13} + m_9 + m_{15})\kappa_1)\kappa_2^5 + 2((l_2 - l_{13})^2 + l_{12}^2 + \\
& +2(l_{10} + 3l_{16} - 2l_3)(l_{11} + l_7) + l_8^2 + l_{15}^2 + 2l_4(l_{14} + 2l_9))\kappa_1\kappa_2^4 - (17(m_1 + m_{13} + \\
& +m_9 + m_{15})\kappa_1 - 8(l_9^2 + (l_7 - l_{11})^2 + l_3^2 + l_4^2) - 2l_{12}(l_2 - l_{13}) - 17(3l_6 + l_1)(l_2 + \\
& +l_{13}) - l_{15}(2l_8 - 17l_5))\kappa_1^2\kappa_2^3 - (17(l_7 + l_{11})(l_{10} + 3l_{16}) + 8(l_{15}^2 + l_8^2 + (l_{13} - l_2)^2 + \\
& +l_{12}^2) - 2l_3(l_7 - l_{11}) + l_4(2l_9 + 17l_{14}))\kappa_1^3\kappa_2^2 - 2((l_{11} - l_7)^2 + l_4^2 + l_9^2 + l_3^2 + 2l_{15}(l_5 + \\
& +2l_8) + 2(l_1 + 3l_6)(l_{13} + l_2) + 4l_{12}(l_2 - l_{13}) - 2(m_1 + m_{13} + m_9 + m_{15})\kappa_1)\kappa_1^4\kappa_2 \Big].
\end{aligned}$$

Случай вырождения $\Delta = 0$ требует анализа в гамильтониане возмущенного движения слагаемых до шестого порядка включительно относительно возмущений, такой анализ в данной работе не проводится.

Если в системе реализуется резонанс третьего порядка ($\kappa_1 = 2\kappa_2$), то нормализованный гамильтониан записывается в виде (1.3.13), где

$$k_3 = \sqrt{k_{31}^2 + k_{32}^2}.$$

Величины k_{31} и k_{32} в резонансном коэффициенте определяются выражениями

$$k_{31} = \sqrt{2}(l_{15} + l_8), \quad k_{32} = -\sqrt{2}(l_2 - l_{13} + l_{12}),$$

а коэффициенты c_{ij} вычисляются по приведенным выше формулам для нерезонансного случая, в которые сделана подстановка $\kappa_1 = 2\kappa_2$.

Если в системе нет резонанса третьего порядка, но имеется резонанс четвертого порядка ($\kappa_1 = 3\kappa_2$), то нормализованный гамильтониан представляется в виде (1.2.13), где

$$k_4 = \sqrt{k_{41}^2 + k_{42}^2}.$$

Здесь коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{02} совпадают с аналогичными для нерезонансного случая (при подстановке $\kappa_1 = 3\kappa_2$), а величины k_{41} и k_{42} вычисляются по формулам

$$k_{41} = -\frac{3}{5\kappa_2} \left[5(m_{18} + m_{11} - m_7 - m_{12})\kappa_2 - 2l_2[3l_4 + 5l_{14}] - l_{12}[5l_{14} + 4l_4] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2l_{11}[3l_{15} + 2l_8] + l_{15}[4l_7 + 10l_{16} + 10l_{10} + l_3] + l_8[6l_7 + 15l_{16} + 5l_{10} - l_3] + \\
& \quad + l_{13}[l_9 + 6l_4] + l_9[l_{12} - l_2] \Big], \\
k_{42} = & \frac{3}{5\kappa_2} \Big[5(m_8 + m_4 - m_{10} - m_{19})\kappa_2 + l_{12}[6l_{11} + 4l_7 + 15l_{16} + l_3 + 5l_{10}] + \\
& + l_{15}[4l_4 - l_9] + l_{13}[l_3 - 4l_{11} - 10l_{16} - 10l_{10} - 6l_7] + l_2[20l_{16} - l_3 + 6l_7 + 4l_{11}] + \\
& \quad + l_8[6l_4 + l_9 + 5l_{14}] \Big].
\end{aligned}$$

Таким образом, устойчивость исследуемого решения может нарушиться, если точка из рассматриваемой области пространства параметров, в которой выполнены только необходимые условия устойчивости, принадлежит поверхностям резонансов третьего или четвертого порядков или поверхности вырождения $\Delta = 0$.

Из выражений для κ_1 и κ_2 в формулах (1.2.10) следует, что резонансные соотношения $\kappa_1 = 2\kappa_2$ и $\kappa_1 = 3\kappa_2$ эквивалентны квадратным относительно величины η^4 уравнениям вида

$$u_1\eta^8 + v_1\eta^4 + w_1 = 0, \quad (1.4.12)$$

$$u_2\eta^8 + v_2\eta^4 + w_2 = 0, \quad (1.4.13)$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sigma_2^4(4\sigma_2^4 - (17\beta - 8)(\beta - 1)\sigma_2^2 + 4(\beta^2 - 1)^2), \\
v_1 &= -\beta\sigma_2^2(8\beta\sigma_2^4 - (\beta - 1)(34\beta^2 - 65\beta + 8)\sigma_2^2 + 4(2\beta^3 - 15\beta^2 + 6\beta - 2)(\beta - 1)^2), \\
w_1 &= \beta^2(4\beta^2\sigma_2^4 - \beta(\beta - 1)(17\beta^2 - 57\beta + 8)\sigma_2^2 + 4(\beta^4 - 17\beta^3 + 14\beta^2 - \\
& - 8\beta + 1)(\beta - 1)^2), \quad u_2 = \sigma_2^4(9\sigma_2^4 - 2(41\beta - 9)(\beta - 1)\sigma_2^2 + 9(\beta^2 - 1)^2), \\
v_2 &= 2\beta\sigma_2^2((\beta - 1)(82\beta^2 - 95\beta + 9)\sigma_2^2 - 9\beta\sigma_2^4 - (9\beta^3 - 155\beta^2 + 27\beta - 9)(\beta - 1)^2), \\
w_2 &= \beta^2(9\beta^2\sigma_2^4 - 2\beta(\beta - 1)(41\beta^2 - 86\beta + 9)\sigma_2^2 + (9\beta^4 - 328\beta^3 + 126\beta^2 - 72\beta + \\
& \quad + 9)(\beta - 1)^2)
\end{aligned}$$

Из соотношений (1.4.12) и (1.4.13) следует, что в пространстве парамет-

ров задачи могут существовать не более двух резонансных поверхностей каждого вида. Проведенный расчет показал, что в исследуемой области имеются по одной резонансной поверхности третьего и четвертого порядков.

Для получения результатов нелинейного анализа в исследуемой части пространства параметров строились различные сечения $\beta = \text{const}$ ($\beta > 1$), в которых численно и аналитически определялись резонансные кривые и кривые вырождения и проверялись соответствующие критерии устойчивости. Расчеты были проведены на интервале $1 < \beta < 10$; выявлено, что картина устойчивости в рассмотренных сечениях для значений β из этого интервала качественно не меняется.

На рис. 16 в плоскости параметров σ_2, β представлен характерный вид описанных сечений, при этом показаны одновременно части сечения, относящиеся к областям I' и II на рис. 15. Исследуемая область устойчивости на рис. 16 не закрашена. Согласно (1.4.10), верхняя граница области задается соотношением $\eta = \eta_E$, нижняя — частями кривых $\eta = \eta_A$ и $\eta = \sqrt{\beta/\sigma_2}$, переходящими одна в другую при $\sigma_2 = 2\sqrt{\beta(\beta-1)}$. Координаты угловой точки области имеют вид

$$\sigma_2 = \sqrt[4]{4\beta(\beta+1)(\beta-1)^2}, \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{2\beta + (\beta-1)\sqrt{\beta(\beta+1)}}{2(\beta^2-1)}}.$$

Кривая резонанса третьего порядка показана на рис. 16 тонкой линией, кривая резонанса четвертого порядка — полужирной линией. Расчеты показали, что в каждом сечении имеется кривая вырождения (пунктирная линия). Все три кривые выходят из угловой точки области и вместе с граничными кривыми асимптотически приближаются к оси абсцисс при $\sigma_2 \rightarrow \infty$. Кривая вырождения расположена между резонансными кривыми и внутри области не имеет с ними точек пересечения.

Была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых движений для значений параметров, принадлежащих кривым резонансов третьего и четвертого порядков. С использованием условий (1.2.12), (1.3.14) и (1.2.14)

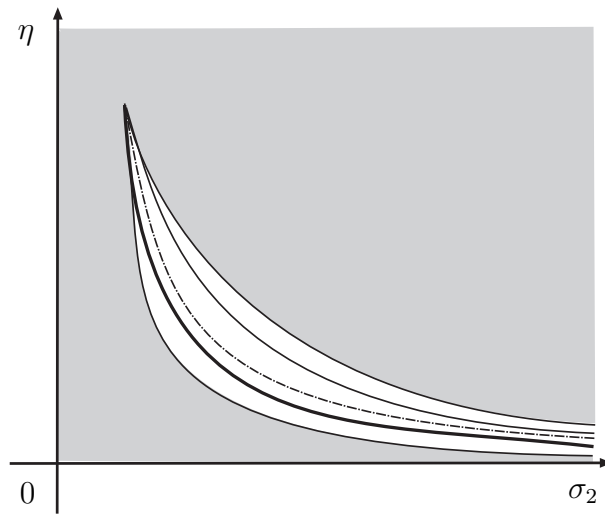


Рис. 16. Картина устойчивости в сечениях $\beta = \text{const.}$

установлено, что на резонансных кривых третьего порядка имеет место неустойчивость, а на резонансных кривых четвертого порядка — устойчивость по Ляпунову.

Часть II. Исследование устойчивости двойного маятника при наличии высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса

2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух шарнирно соединенных тонких однородных стержней 1 и 2 (рис. 17), вращающихся вокруг горизонтальных осей в поле тяжести. Конiec O_1 стержня 1 является точкой подвеса системы. Предполагаем, что точка O_1 совершает гармонические колебания вдоль горизонтали по закону $OO_1 = a \cos(\Omega t)$ относительно некоторой фиксированной точки O .

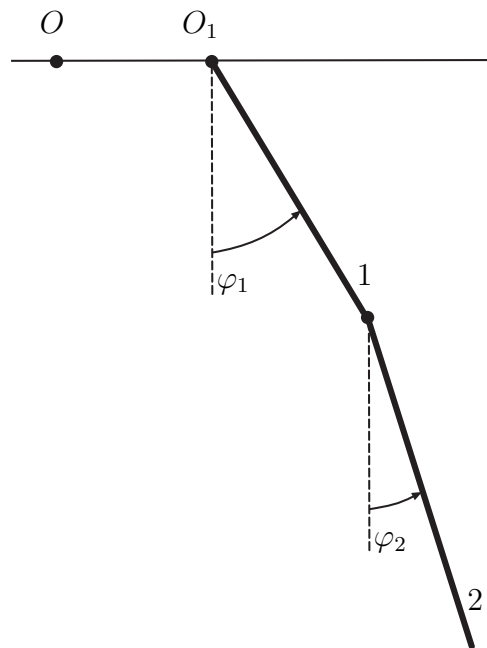


Рис. 17. Двойной маятник.

Пусть m_1 и m_2 — массы стержней, l_1 и l_2 — их длины. Углы отклонения стержней от нижних вертикальных положений обозначим через φ_1 и φ_2 .

Кинетическая и потенциальная энергии системы определяются выражени-

ями

$$T = \frac{1}{6} \left[l_1^2 (m_1 + 3m_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 (l_2 \dot{\varphi}_2 + 3l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \right] -$$

$$-\frac{a\Omega}{2} \sin(\Omega t) \left[(m_1 + 2m_2) l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \right] + \frac{a^2 \Omega^2}{2} \sin^2(\Omega t) (m_1 + m_2),$$

$$\Pi = -g \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) l_1 \cos \varphi_1 + m_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \right].$$

Введем канонически сопряженные с координатами φ_j импульсы $p_{\varphi_j} = \partial T / \partial \dot{\varphi}_j$ ($j = 1, 2$).

$$p_{\varphi_1} = \frac{m_1 + 3m_2}{3} l_1^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{m_2}{2} l_2 \dot{\varphi}_2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_1 + 2m_2}{2} a\Omega \sin(\Omega t) l_1 \cos \varphi_1,$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{m_2}{3} l_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{m_2}{2} l_2 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_2}{2} a\Omega \sin(\Omega t) l_2 \cos \varphi_2.$$

Разрешив эти соотношения относительно обобщенных скоростей $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{6m_2 \left(2\hat{p}_{\varphi_1} l_2 - 3\hat{p}_{\varphi_2} l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}{m_2 l_1^2 l_2 \left(4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}, \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{6 \left(2\hat{p}_{\varphi_2} l_1 (m_1 + 3m_2) - 3\hat{p}_{\varphi_1} l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}{m_2 l_2^2 l_1 \left(4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)},$$

$$\hat{p}_{\varphi_1} = p_{\varphi_1} + \frac{m_1 + 2m_2}{2} a\Omega \sin(\Omega t) l_1 \cos \varphi_1, \quad (2.1.2)$$

$$\hat{p}_{\varphi_2} = p_{\varphi_2} + \frac{m_2}{2} a\Omega \sin(\Omega t) l_2 \cos \varphi_2.$$

Сделаем далее каноническую замену переменных $\varphi_j, p_{\varphi_j} \rightarrow \hat{\varphi}_j, \hat{p}_{\varphi_j}$, в которой $\hat{\varphi}_j = \varphi_j$ ($j = 1, 2$), а новые импульсы вычисляются по формулам (2.1.2).

Гамильтониан преобразованной системы имеет вид (слагаемое — функция времени — отброшено)

$$H = \frac{6 \left(m_2 l_2^2 \hat{p}_{\varphi_1}^2 + (m_1 + 3m_2) l_1^2 \hat{p}_{\varphi_2}^2 - 3m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \hat{p}_{\varphi_1} \hat{p}_{\varphi_2} \right)}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left(4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}$$

$$-\frac{(m_1 + 2m_2) l_1}{2} (g \cos \varphi_1 + a\Omega^2 \sin \varphi_1 \cos(\Omega t)) - \frac{m_2 l_2}{2} (g \cos \varphi_2 + a\Omega^2 \sin \varphi_2 \cos(\Omega t)).$$

При $l_1 = 0$ имеем случай одного стержня. Результаты исследования этого случая аналогичны результатам, полученным ранее при исследовании математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса [59].

Далее считаем, что $l_1 \neq 0$. Будем предполагать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной l_1 , а частота Ω велика по сравнению с характерной частотой $\sqrt{g/l_1}$. Введем малый параметр $\varepsilon = a/l_1$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и безразмерную частоту ω , определяемую формулой $\varepsilon^2 \omega^2 = g/(l_1 \Omega^2)$. Полагаем $\omega \sim 1$, тогда $a\Omega \sim 1$.

Обезразмерим импульсы \widehat{p}_{φ_1} и \widehat{p}_{φ_2} при помощи множителя $m_1 l_1^2 \Omega$. Введем безразмерное время $\tau = \Omega t$ и безразмерные параметры $\mu = m_2/m_1$, $\lambda = l_2/l_1$.

В безразмерных переменных гамильтониан системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = & \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_1^2 + (1+3\mu)p_2^2 - 3\mu\lambda p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)\right)} - \\ & - \frac{1+2\mu}{2}(\varepsilon^2 \omega^2 \cos \varphi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \cos \tau) - \frac{\mu\lambda}{2}(\varepsilon^2 \omega^2 \cos \varphi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2 \cos \tau). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2.1.2. Преобразование гамильтониана

Введем новый малый параметр $e = \sqrt{\varepsilon}$ и сделаем в гамильтониане (2.1.3) каноническое преобразование вида $\varphi_j = \varphi'_j$, $p_j = e p'_j$ ($j = 1, 2$).

Функция Гамильтона системы примет вид

$$\begin{aligned} H' = & e H'_1 + \frac{e^3}{6} H'_3, \\ H'_1 = & \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_1'^2 + (1+3\mu)p_2'^2 - 3\mu\lambda p_1' p_2' \cos(\varphi_1' - \varphi_2')\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\varphi_1' - \varphi_2')\right)} - \\ & - \frac{1}{2}\left\{(1+2\mu) \sin \varphi_1' \cos \tau + \mu\lambda \sin \varphi_2' \cos \tau\right\}, \\ H'_3 = & -3\left(\mu\lambda \omega^2 \cos \varphi_2' + (1+2\mu)\omega^2 \cos \varphi_1'\right). \end{aligned}$$

Затем осуществим каноническую замену переменных $\varphi'_j, p'_j \rightarrow \theta_j, p_{\theta_j}$, включающую в полученном гамильтониане время τ из слагаемых до порядка e^3

включительно. Это преобразование может быть получено при помощи метода Депри–Хори [38] и имеет вид

$$\varphi'_j = \theta_j + e\theta_j^{(1)} + \frac{e^2}{2!}\theta_j^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (2.1.4)$$

$$p'_j = p_{\theta_j} + ep_{\theta_j}^{(1)} + \frac{e^2}{2!}p_{\theta_j}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (2.1.5)$$

$$\theta_1^{(1)} = 0, \quad \theta_2^{(1)} = 0, \quad p_{\theta_1}^{(1)} = \frac{1+2\mu}{2} \cos \theta_1 \sin \tau, \quad p_{\theta_2}^{(1)} = \frac{\mu}{2} \lambda \cos \theta_2 \sin \tau,$$

$$\theta_1^{(2)} = \frac{\partial W_2}{\partial p_{\theta_1}} + L_1 \theta_1^{(1)}, \quad \theta_2^{(2)} = \frac{\partial W_2}{\partial p_{\theta_2}} + L_1 \theta_2^{(1)},$$

$$p_{\theta_1}^{(2)} = -\frac{\partial W_2}{\partial \theta_1} + L_1 p_{\theta_1}^{(1)}, \quad p_{\theta_2}^{(2)} = -\frac{\partial W_2}{\partial \theta_2} + L_1 p_{\theta_2}^{(1)},$$

$$L_1 f = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{\partial W_1}{\partial p_{\theta_j}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\theta_j}} \frac{\partial W_1}{\partial \theta_j} \right),$$

$$W_1 = -\left(\frac{1}{2} + \mu \right) \sin \theta_1 \sin \tau - \frac{1}{2} \mu \lambda \sin \theta_2 \sin \tau,$$

$$W_2 = -\frac{6\left(2\mu\lambda^2 p_{\theta_1} - 3\mu\lambda p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)(1+2\mu) \cos \theta_1 \cos \tau}{\mu\lambda^2\left(4+12\mu-9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)} -$$

$$-\frac{6\left(2(1+3\mu)p_{\theta_2} - 3\mu\lambda p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \cos \theta_2 \cos \tau}{\lambda\left(4+12\mu-9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)}.$$

При помощи указанного преобразования, получим гамильтониан требуемого вида:

$$K = eK_1 + \frac{e^3}{6}K_3 + O(e^4),$$

$$K_1 = \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_{\theta_1}^2 + (1+3\mu)p_{\theta_2}^2 - 3\mu\lambda p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)},$$

$$K_3 = -3\left(\mu\lambda\omega^2 \cos \theta_2 + (1+2\mu)\omega^2 \cos \theta_1\right) +$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{(1+2\mu) \cos \theta_1 [36(1+2\mu) \cos \theta_1 - 54\mu \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2]}{4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} +$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{\mu \cos \theta_2 [36(1+3\mu) \cos \theta_2 - 54 \cos(\theta_1 - \theta_2)(1+2\mu) \cos \theta_1]}{4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Делая еще одну замену $\theta_j = \theta_j$, $p_{\theta_j} = p_j/e$ и возвращаясь к параметру ε , получим функцию Гамильтона

$$H = \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_1^2 + (1+3\mu)p_2^2 - 3\mu\lambda p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\Pi + O(\varepsilon^3), \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & -2\left(\mu\lambda\omega^2 \cos\theta_2 + (1+2\mu)\omega^2 \cos\theta_1\right) + \\ & + 3\frac{(1+2\mu)^2 \cos^2\theta_1 - 3\mu(1+2\mu) \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \mu(1+3\mu) \cos^2\theta_2}{4(1+3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Слагаемое $O(\varepsilon^3)$ в соотношении (2.1.6) является 2π -периодической функцией τ .

2.1.3. Положения равновесия приближенной системы

Если в гамильтониане (2.1.6), (2.1.7) отбросить слагаемое $O(\varepsilon^3)$, получим приближенный гамильтониан, отвечающий консервативной системе с двумя степенями свободы с потенциальной энергией $\varepsilon^2\Pi/4$.

Приближенная система имеет четыре частных решения, отвечающих положениям относительного равновесия двойного маятника, для которых два стержня маятника расположены на одной вертикали. При этом $p_1 = p_2 = 0$ и выполняется одно из соотношений:

$$\begin{aligned} 1)\theta_{1*} = \theta_{2*} = 0; \quad 2)\theta_{1*} = \theta_{2*} = \pi; \\ 3)\theta_{1*} = \pi, \theta_{2*} = 0; \quad 4)\theta_{1*} = 0, \theta_{2*} = \pi. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Решения 1) и 2) соответствуют «висящему» и «перевернутому» положениям относительного равновесия стержней. Решения 3) и 4) отвечают «сложенному» состоянию системы, для которого точка подвеса второго стержня расположена соответственно выше и ниже точки подвеса маятника.

Исследуем устойчивость названных положений равновесия.

Поочередно полагая

$$\begin{aligned} 1) \theta_1 = q_1, \theta_2 = q_2; \quad 2) \theta_1 = \pi + q_1, \theta_2 = \pi + q_2; \\ 3) \theta_1 = \pi + q_1, \theta_2 = q_2; \quad 4) \theta_1 = q_1, \theta_2 = \pi + q_2. \end{aligned}$$

получим потенциальную энергию в окрестности каждого положения равновесия.

Условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия $q_j = 0$, $p_j = 0$ ($j = 1, 2$) приближенных систем найдем, исследуя квадратичную относительно величин q_j , p_j часть потенциальной энергии.

Эта квадратичная часть может быть представлена в виде (множитель $\varepsilon^2/4$ отброшен):

$$\Pi_2(q_1, q_2) = u_{20}q_1^2 + 2u_{11}q_1q_2 + u_{02}q_2^2, \quad (2.1.9)$$

где u_{ij} — постоянные коэффициенты.

Достаточные условия устойчивости рассматриваемого положения равновесия (условия минимума функции потенциальной энергии) задаются неравенствами:

$$u_{20} > 0, \quad d = u_{20}u_{02} - u_{11}^2 > 0. \quad (2.1.10)$$

1) *Случай* $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Для коэффициентов u_{ij} имеем выражения:

$$\begin{aligned} u_{20} = (1 + 2\mu)\omega^2 - 3\frac{(1 + 3\mu)(2 + \mu)^2}{(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{11} = \frac{9\mu(2 + \mu)}{2(4 + 3\mu)^2}, \\ u_{02} = \mu\lambda\omega^2 - \frac{3\mu}{(4 + 3\mu)^2}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Первое неравенство из (2.1.10) выполняется при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{3(1 + 3\mu)(\mu + 2)^2}{(4 + 3\mu)^2(1 + 2\mu)} > 0. \quad (2.1.12)$$

Рассмотрим второе неравенство из (2.1.10), сводящееся к виду

$$d = \frac{\mu}{4(4 + 3\mu)^3} F > 0, \quad (2.1.13)$$

$$F = 4\lambda(1 + 2\mu)(4 + 3\mu)^3\omega^4 - 12(4 + 3\mu)(3\mu^3\lambda + 13\mu^2\lambda + 2\mu + 16\mu\lambda + 1 + 4\lambda)\omega^2 + 9(\mu + 2)^2.$$

Рассмотрим дискриминант квадратного относительно ω^2 трехчлена F :

$$D = 144(4 + 3\mu)^2 F_1,$$

$$F_1 = (1 + 3\mu)^2(\mu + 2)^4\lambda^2 + (1 + 2\mu)(3\mu - 2)(\mu + 2)^2\lambda + (1 + 2\mu)^2.$$

В свою очередь, дискриминант квадратного относительно λ трехчлена F_1 равен

$$D_1 = -36\mu^7(3\mu + 31) - 27\mu^5(177\mu + 404) - 72\mu^3(197\mu + 144) - 144\mu(27\mu + 4).$$

Так как при всех $\mu > 0$ величина D_1 отрицательная, функция F_1 сохраняет постоянный знак (положительный). Следовательно, квадратичный относительно ω^2 трехчлен F имеет два корня. Эти корни вычисляются по формулам:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{2\lambda(4 + 3\mu)^2(1 + 2\mu)}(3\mu^3\lambda + 13\lambda\mu^2 + 16\lambda\mu + 4\lambda + 2\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 2)^4(3\mu + 1)^2\lambda^2 + (6\mu^4 + 23\mu^3 + 18\mu^2 - 12\mu - 8)\lambda + (2\mu + 1)^2}),$$

причем $0 < \omega_2^2 < \omega_1^2$.

Поэтому решение неравенства (2.1.13) составляют два интервала $0 < \omega^2 < \omega_2^2$ и $\omega^2 > \omega_1^2$.

Определим положение величины ω_0^2 относительно корней $\omega_{1,2}^2$. Так как

$$F(\omega_0^2) = -\frac{81\mu^2(\mu + 2)^2}{64(4 + 3\mu)^4} < 0,$$

то $\omega_2^2 < \omega_0^2 < \omega_1^2$.

Таким образом, неравенства (2.1.12) и (2.1.13) одновременно выполняются при

$$\omega^2 > \omega_1^2. \quad (2.1.14)$$

Соотношение (2.1.14) определяет условие устойчивости «висящего» положения равновесия приближенной системы. В исходных размерных переменных, данное условие имеет вид:

$$\Omega < \Omega_*, \quad \Omega_* = \frac{\Upsilon \sqrt{gl_1}}{a} \quad (2.1.15)$$

$$\Upsilon^2 = \frac{3 \left((4l_2 + l_1)m_1^3 + (16l_2 + 2l_1)m_2m_1^2 + 13l_2m_2^2m_1 + 3l_2m_2^3 + \sqrt{\varkappa} \right)}{2l_2(4m_1 + 3m_2)^2(2m_2 + m_1)}$$

$$\varkappa = (m_1 + 3m_2)^2(2m_1 + m_2)^4l_2^2 - (2m_1 + m_2)^2m_1^2(2m_2 + m_1)(2m_1 - 3m_2)l_1l_2 + m_1^4l_1^2(2m_2 + m_1)^2.$$

Величина \varkappa получена из положительной функции F_1 , поэтому $\varkappa > 0$.

Таким образом, нижнее положение равновесия приближенной системы устойчиво, если частота Ω колебаний точки подвеса не превышает предельного значения, определяемого правой частью неравенства (2.1.15).

2) *Случай* $\theta_1 = \theta_2 = \pi$.

Коэффициенты u_{ij} функции (2.1.9) имеют вид (2.1.11), где ω^2 заменяются на $-\omega^2$.

При любом значении параметра μ ($\mu > 0$) имеем $u_{20} < 0$, поэтому условия (2.1.10) не выполняются. Значит, для любых значений ω «перевернутое» положение равновесия неустойчиво.

3) *Случай* $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$.

Коэффициенты функции (2.1.9) имеют вид:

$$u_{20} = -(1 + 2\mu)\omega^2 - 3 \frac{(1 + 3\mu)(2 + \mu)^2}{(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{11} = \frac{9\mu(2 + \mu)}{2(4 + 3\mu)^2},$$

$$u_{02} = \mu\lambda\omega^2 - \frac{3\mu}{(4 + 3\mu)^2}. \quad (2.1.16)$$

Как и для случая 2), имеем $u_{20} < 0$, поэтому рассматриваемое положение равновесия неустойчиво при любых значениях частоты ω .

4) *Случай* $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$.

Коэффициенты u_{ij} функции (2.1.9) имеют вид (2.1.16), где ω^2 заменяются на $-\omega^2$.

Как и для случая 1), первое неравенство из (2.1.10) выполняется при условии (2.1.12). Проведем проверку второго условия (2.1.10), сводящегося к неравенству

$$F' = -(4\lambda(1+2\mu)(4+3\mu)^3\omega^4 - 12(4+3\mu)(3\mu^3\lambda + 13\mu^2\lambda - 2\mu + 16\mu\lambda - 1 + 4\lambda)\omega^2 - 9(\mu+2)^2) > 0.$$

Рассмотрим дискриминант квадратного относительно ω^2 трехчлена F' :

$$D = 144(4+3\mu)^2 F_1',$$

$$F_1' = (1+3\mu)^2(\mu+2)^4\lambda^2 - (1+2\mu)(3\mu-2)(\mu+2)^2\lambda + (1+2\mu)^2.$$

Дискриминант квадратного относительно λ трехчлена F_1' имеет вид

$$D_1 = -9(1+2\mu)^2(\mu+2)^4\mu(4+3\mu) < 0.$$

Значит, функция F_1' сохраняет постоянный знак (положительный). Следовательно, квадратный относительно ω^2 трехчлен F' будет иметь два корня:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{2\lambda(4+3\mu)^2(1+2\mu)}(3\mu^3\lambda + 13\lambda\mu^2 - 2\mu + 16\lambda\mu - 1 + 4\lambda \pm \sqrt{(\mu+2)^4(3\mu+1)^2\lambda^2 + (-6\mu^4 - 23\mu^3 - 18\mu^2 + 12\mu + 8)\lambda + (2\mu+1)^2}).$$

причем $\omega_2^2 < 0 < \omega_1^2$.

Следовательно, решение второго неравенства из (2.1.10) имеет вид

$$0 \leq \omega^2 < \omega_1^2. \quad (2.1.17)$$

Сравним величины ω_0^2 и ω_1^2 . Вычислим

$$F'(\omega_0^2) = -\frac{81\mu^2(\mu+2)^2}{64(4+3\mu)^4} < 0.$$

Таким образом, ω_0^2 лежит вне интервала (ω_2^2, ω_1^2) . А так как $\omega_0^2 > 0$, то справедливо соотношение $0 < \omega_1^2 < \omega_0^2$. Следовательно, неравенства (2.1.12) и (2.1.17) несовместны, а рассматриваемое решение неустойчиво при любых значениях частоты ω .

Таким образом, из четырех рассмотренных положений равновесия приближенной системы устойчивым может быть только нижнее положение, и условие его устойчивости задается неравенством (2.1.14).

Отметим, что в случае математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса [59], аналогично, верхнее положение относительного равновесия (в приближенной задаче) неустойчиво, нижнее устойчиво при не слишком больших значениях частоты колебаний точки подвеса. В случае двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, при вертикальных вибрациях точки подвеса, все четыре положения относительного равновесия на вертикали могут быть устойчивы при достаточно большом значении частоты вибраций [61].

2.1.4. Периодические движения маятника, рождающиеся из относительных равновесий на вертикали

Возвращаясь к полной системе, заметим, что согласно теории периодических движений Пуанкаре из каждого определяемого уравнениями (2.1.8) положения равновесия $\theta_1 = \theta_{1*}$, $\theta_2 = \theta_{2*}$ приближенной системы рождается единственное, аналитическое по ε , 2π -периодическое по τ решение полной системы с периодическими членами порядка $O(\varepsilon^3)$ и выше,

$$\theta_1(\tau) = \theta_{1*} + O(\varepsilon^3), \quad \theta_2(\tau) = \theta_{2*} + O(\varepsilon^3).$$

Этому решению, в свою очередь отвечает единственное 2π -периодическое решение исходной системы с гамильтонианом (2.1.3), описывающее движение рассматриваемой системы и имеющее вид

$$\begin{aligned}\varphi'_1(\tau) &= \theta_{1*} + \varepsilon \frac{6(3\mu \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*}) \cos \theta_{2*} - 2(1 + 2\mu) \cos \theta_{1*})}{9\mu \cos^2(\theta_{1*} - \theta_{2*}) - 4 - 12\mu} \cos \tau + O(\varepsilon^2), \\ \varphi'_2(\tau) &= \theta_{2*} + \varepsilon \frac{6(3(1 + 2\mu) \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*}) \cos \theta_{1*} - 2(1 + 3\mu) \cos \theta_{2*})}{\lambda(9\mu \cos^2(\theta_{1*} - \theta_{2*}) - 4 - 12\mu)} \cos \tau + O(\varepsilon^2), \\ p'_{\varphi_1}(\tau) &= \varepsilon \frac{(1 + 2\mu) \cos \theta_{1*}}{2} \sin \tau + O(\varepsilon^2), \\ p'_{\varphi_2}(\tau) &= \varepsilon \frac{\mu \lambda \cos \theta_{2*}}{2} \sin \tau + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Эти соотношения описывают высокочастотные периодические колебания двойного маятника вблизи вертикальных положений равновесия приближенной системы. Каждый стержень маятника «дрожит» с малой (порядка ε) амплитудой в окрестности «среднего» значения θ_{j*} ($j = 1, 2$), являющиеся равновесными значениями углов приближенной системы. Период колебаний равен периоду колебаний точки подвеса.

Периодическое движение, рождающееся из «висящего» относительного равновесия, устойчиво в линейном приближении, остальные периодические движения неустойчивы. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

2.1.5. Нелинейный анализ устойчивости в случае двух одинаковых стержней

Рассмотрим случай двух одинаковых стержней ($l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$, то есть $\lambda = 1$, $\mu = 1$) и проведем нелинейный анализ устойчивости периодического движения, рождающегося из нижнему положению равновесия приближенной системы, в предположении, что выполнено условие (2.1.14) устойчивости в ли-

нейном приближении. В исследуемом случае это условие принимает вид

$$\omega > \omega_1 = \frac{1}{14} \sqrt{78 + 12\sqrt{37}} \approx 0.87772 \quad (2.1.19)$$

или, в исходных переменных,

$$\Omega < \frac{\sqrt{gl_1}}{14a} \sqrt{78 + 12\sqrt{37}}.$$

Положим в гамильтониане (2.1.6) $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\theta_i = q_i$ ($i = 1, 2$) и разложим его в ряд по q_i , p_i . Гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{K}_2 + \tilde{K}_4 + O_5 + O(\varepsilon^3), \\ \tilde{K}_2 &= \left[\left(-\frac{27}{49} + \frac{3}{4}\omega^2 \right) q_1^2 + \frac{27}{196} q_1 q_2 + \left(-\frac{3}{196} + \frac{1}{4}\omega^2 \right) q_2^2 \right] \varepsilon^2 - \\ &\quad - \frac{18}{7} p_1 p_2 + \frac{6}{7} p_1^2 + \frac{24}{7} p_2^2, \\ \tilde{K}_4 &= \left[\left(\frac{306}{343} - \frac{1}{16}\omega^2 \right) q_1^4 - \frac{9}{1372} q_2 q_1 (257q_1^2 - 186q_2 q_1 + 47q_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{17}{686} - \frac{1}{48}\omega^2 \right) q_2^4 \right] \varepsilon^2 - \frac{9}{49} (q_1 - q_2)^2 (8p_2 - 3p_1)(3p_2 - 2p_1). \end{aligned}$$

Слагаемое O_5 означает совокупность членов не менее пятой степени относительно q_j , p_j , ($j = 1, 2$).

Сделаем каноническое преобразование $q_j = \tilde{q}_j \sqrt{\varepsilon}$, $p_j = \tilde{p}_j \varepsilon \sqrt{\varepsilon}$ ($j = 1, 2$).

Гамильтониан системы примет вид

$$\begin{aligned} K' &= \varepsilon K'_2 + \varepsilon^2 K'_4 + O(\varepsilon^3), \quad (2.1.20) \\ K'_2 &= \left(-\frac{27}{49} + \frac{3}{4}\omega^2 \right) \tilde{q}_1^2 + \frac{27}{196} \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 + \left(-\frac{3}{196} + \frac{1}{4}\omega^2 \right) \tilde{q}_2^2 + \frac{6}{7} (\tilde{p}_1^2 - 3\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_2^2) \\ K'_4 &= \left(\frac{306}{343} - \frac{1}{16}\omega^2 \right) \tilde{q}_1^4 - \frac{9}{1372} \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 (257\tilde{q}_1^2 - 186\tilde{q}_2 \tilde{q}_1 + 47\tilde{q}_2^2) + \\ &\quad + \left(\frac{17}{686} - \frac{1}{48}\omega^2 \right) \tilde{q}_2^4 - \frac{9}{49} (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)^2 (8\tilde{p}_2 - 3\tilde{p}_1)(3\tilde{p}_2 - 2\tilde{p}_1). \end{aligned}$$

Затем при помощи линейного 2π -периодического по τ унивалентного канонического преобразования

$$\tilde{q}_1 = n_{13} P_1 + n_{14} P_2, \quad \tilde{q}_2 = n_{23} P_1 + n_{24} P_2,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1 &= n_{31}Q_1 + n_{32}Q_2, & \tilde{p}_2 &= n_{41}Q_1 + n_{42}Q_2, \\
n_{13} &= \frac{1}{12} \frac{\sqrt{6}(686\sigma_2^2 - 1764\omega^2 + 1539)}{\sqrt{\sigma_1}\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{14} &= \frac{1}{12} \frac{\sqrt{6}(686\sigma_1^2 - 1764\omega^2 + 1539)}{\sqrt{\sigma_2}\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{23} &= \frac{9}{2} \frac{(49\omega^2 - 48)\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_1}\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), & n_{24} &= \frac{9}{2} \frac{(49\omega^2 - 48)\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_2}\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{31} &= -\frac{1}{36} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1}(2744\sigma_2^2 - 3087\omega^2 + 2268)}{\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{32} &= -\frac{1}{36} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_2}(2744\sigma_1^2 - 3087\omega^2 + 2268)}{\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{41} &= -\frac{7}{24} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1}(98\sigma_2^2 - 27)}{\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
n_{42} &= -\frac{7}{24} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_2}(98\sigma_1^2 - 27)}{\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\
\sigma_1 &= \frac{1}{98} \sqrt{28812\omega^2 - 13482 - 168\sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}}, \\
\sigma_2 &= \frac{1}{98} \sqrt{28812\omega^2 - 13482 + 168\sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}}, \\
a &= 1715\omega^2 - 528, & c &= \sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}. \tag{2.1.21}
\end{aligned}$$

приведем квадратичную часть гамильтониана к нормальной форме.

$$K_2^* = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + O(\varepsilon))(Q_1^2 + P_1^2) + (\sigma_2 + O(\varepsilon))(Q_2^2 + P_2^2) \right]. \tag{2.1.22}$$

Здесь σ_j ($j = 1, 2$) — частоты малых колебаний приближенной системы в окрестности нижнего положения равновесия, а поправки $O(\varepsilon)$ не зависят от τ .

Выражение под радикалом в (2.1.21), а также величина a в области исследования всегда положительны, поэтому при выполнении условия (2.1.19) имеем $16c^2 + ac > 0$. Выражение $16c^2 - ac$ положительно для всех исследуемых значений частоты, кроме $\omega = \frac{4}{7}\sqrt{3} \approx 0.98974$, при котором это выражение обращается в нуль. Этот случай далее будет рассмотрен отдельно.

Для последующего исследования перейдем к симплектическим полярным

координатам координатам

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \sin \theta_j, \quad P_j = \sqrt{2r_j} \cos \theta_j \quad (j = 1, 2)$$

и затем при помощи близкого к тождественному 2π -периодического по τ преобразования типа преобразования Биркгофа нормализуем в гамильтониане члены четвертой степени. Это преобразование может быть получено методом Делпри-Хори. Отметим, что при $\omega = \frac{1}{98} \sqrt{294 + 210\sqrt{2149}} \approx 1.0218$ в системе имеет место резонанс четвертого порядка $3\sigma_1 = \sigma_2$, который будет рассмотрен позже. При отсутствии резонанса четвертого порядка нормализованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \varepsilon \left[(\sigma_1 + O(\varepsilon))r_1 + (\sigma_2 + O(\varepsilon))r_2 \right] + \quad (2.1.23) \\ &+ \varepsilon^2 \left[(c_{20} + O(\varepsilon))r_1^2 + (c_{11} + O(\varepsilon))r_1r_2 + (c_{02} + O(\varepsilon))r_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \\ c_{20} &= \frac{1}{784} \frac{a_2 + a_1c}{c^2a_3}, \quad c_{02} = \frac{1}{784} \frac{a_2 - a_1c}{c^2a_3}, \\ c_{11} &= \frac{81}{2744} \frac{117649\omega^6 + 1513728 + 806736\omega^4 + 829962\omega^2}{\sigma_1\sigma_2c^2}, \\ a_1 &= 372712032\omega^6 - 1006466958\omega^4 + 617372280\omega^2 - 14874516, \\ a_2 &= -48735627654\omega^8 + 156828117033\omega^6 - 151648837956\omega^4 + \\ &+ 49864296762\omega^2 - 1196073216, \quad a_3 = 1372\omega^4 - 1092\omega^2 + 27, \end{aligned}$$

где поправки $O(\varepsilon)$ к величинам c_{ij} не зависят от τ , а слагаемое $O(\varepsilon^3)$ означает совокупность членов не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$) с 2π -периодическими по τ коэффициентами.

Отметим, что при выполнении условия (2.1.19) выражение a_3 в знаменателях коэффициентов c_{20} и c_{02} всегда положительно.

Будем использовать следующие критерии, принятые при исследовании устойчивости неавтономных, периодических по времени гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [4, 38, 78].

Если для коэффициентов гамильтониана Γ выполняется неравенство

$$D_2 = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0,$$

то при достаточно малых значениях ε положение равновесия $r_1 = r_2 = 0$ устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [4, 38].

Если квадратичная форма

$$c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \quad (2.1.24)$$

знакоопределена при $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, то положение равновесия $r_1 = r_2 = 0$ формально устойчиво [78].

Расчеты показывают, что

$$D_2 = -\frac{189}{37632} \frac{16807\omega^8 b_1 - 108\omega^2 b_2 - 140683308703488}{a_3 c^4},$$

$$b_1 = 517134583\omega^4 - 3712669044\omega^2 + 3367743948,$$

$$b_2 = 2206392428884\omega^4 + 1066954222677\omega^2 + 1351117444500.$$

При выполнении условия (2.1.19), знаменатель функции D_2 положителен, а числитель обращается в нуль при $\omega = \omega^* = 2.619576184$, положителен при $\omega_1 < \omega < \omega^*$ и отрицателен при $\omega^* < \omega$.

Коэффициент квадратичной формы c_{02} обращается в нуль при $\omega = \omega_2 = 1.339314671$; в интервалах $\omega_1 < \omega < \omega_2$ и $\omega_2 < \omega \leq \omega^*$ имеем соответственно $c_{02} > 0$ и $c_{02} < 0$. Коэффициент c_{20} обращается в нуль при $\omega = \omega_3 = 1.505177934$; при $\omega_1 < \omega < \omega_3$ и $\omega_3 < \omega \leq \omega^*$ имеем соответственно $c_{20} > 0$ и $c_{20} < 0$. Коэффициент c_{11} положителен в области $\omega_1 < \omega$.

Совместный анализ знаков функции D_2 и коэффициентов c_{ij} квадратичной формы приводит к следующим результатам. В области $\omega_1 < \omega < \omega_2$ все коэффициенты положительны, поэтому квадратичная форма определена положительно. В области $\omega \geq \omega^*$ имеем $D_2 < 0$, $c_{20} < 0$, $c_{02} < 0$, значит квадратичная форма определена отрицательно. При $\omega_2 \leq \omega < \omega^*$ квадратичная форма знакопеременная.

Таким образом, в области устойчивости в линейном приближении исследуемое периодическое движение двойного маятника устойчиво для большинства начальных условий (кроме, может быть, точки $\omega = \omega^*$) и формально устойчиво в интервалах $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ и $\omega^* \leq \omega$.

Случай $\omega = \frac{4}{7}\sqrt{3} \approx 0.98977$. Замена переменных, нормализующая квадратичную часть функции Гамильтона (2.1.20) имеет вид

$$\tilde{q}_1 = n_{12}Q_2 + n_{13}P_1, \quad \tilde{q}_2 = n_{23}P_1, \quad \tilde{p}_1 = n_{34}P_2, \quad \tilde{p}_2 = n_{41}Q_1 + n_{44}P_2,$$

где

$$\begin{aligned} n_{12} &= -\frac{1}{6}6^{1/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon), & n_{13} &= \frac{1}{1988}2982^{3/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), \\ n_{23} &= -\frac{2}{1491}2982^{3/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), & n_{34} &= -\frac{1}{21}6^{3/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon), \\ n_{41} &= \frac{1}{56}2982^{1/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), & n_{44} &= -\frac{1}{56}6^{3/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Частоты малых колебаний равны $\sigma_1 = \frac{3}{196}\sqrt{2982}$, $\sigma_2 = \frac{3}{28}\sqrt{6}$.

Нормализация в члена четвертой степени приводит гамильтониан к виду (2.1.25), где

$$c_{20} = \frac{162831}{27832}, \quad c_{02} = \frac{285}{112}, \quad c_{11} = \frac{531}{568}\sqrt{497}.$$

Так как $c_{ij} > 0$, то квадратичная форма (2.1.24) определенно положительная, ее дискриминант $D_2 = 374.81 > 0$. Таким образом, при данном значении частоты исследуемое периодическое движение двойного маятника устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

В случае $3\sigma_1 = \sigma_2$ ($\omega = \sqrt{294 + 210\sqrt{2149}}/98 \approx 1.0218$) резонанса четвертого порядка нормализованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \varepsilon \left[(\sigma_1 + O(\varepsilon))r_1 + (3\sigma_1 + O(\varepsilon))r_2 \right] + \varepsilon^2 \left[(c_{20} + O(\varepsilon))r_1^2 + \right. & (2.1.25) \\ & \left. + (c_{11} + O(\varepsilon))r_1r_2 + (k + O(\varepsilon))r_1^{3/2}r_2^{1/2} \cos(3\varphi_1 - \varphi_2) + (c_{02} + O(\varepsilon))r_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{3\sqrt{14\sqrt{2149} - 280}}{98} \approx 0.588, \quad k \approx 17.942833,$$

$$c_{20} \approx 8.684697, \quad c_{02} \approx 92.685511, \quad c_{11} \approx 30.6526.$$

Наличие резонанса четвертого порядка означает, что в этой системе есть также резонансы восьмого, двенадцатого и т.д. порядков. Можно продолжить нормализацию гамильтониана относительно возмущений, учитывая наличие этих резонансов. Так как частоты σ_1 , σ_2 несоизмеримы в частотой внешнего возмущения ($\sim \varepsilon^{-1}$), то независимая переменная τ на каждом этапе будет уничтожаться. Главная (линейная по r_1 , r_2) часть нормализованного автономного гамильтониана, являющегося формальным интегралом системы, положительно определена. В достаточно малой окрестности начала координат этот формальный интеграл также положительно определен, поэтому исследуемое периодическое движение в случае реализации резонанса $3\sigma_1 = \sigma_2$ формально устойчиво.

2.1.6. О других периодических движениях в системе двух одинаковых стержней

2.1.6.1. Положения равновесия приближенной системы, отличные от вертикальных. Решим теперь вопрос о существовании и устойчивости высокочастотных периодических движений системы двух одинаковых стержней, отличных от периодических движений вблизи вертикали.

В приближенной системе им отвечают положения равновесия, определяемые условиями

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0,$$

где функция Π определяется формулой (2.1.7) при $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Указанные соотношения равносильны системе уравнений

$$\frac{9 \left[2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \sin(2\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 \right]}{4 \left[9 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - 16 \right]} + \frac{\omega^2 \sin \theta_1}{2} = \frac{9}{4} \zeta, \quad (2.1.26)$$

$$\frac{3}{4} \frac{[9 \cos \theta_1 \sin(2\theta_2 - \theta_1) - 4 \sin 2\theta_2]}{9 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - 16} - \frac{\omega^2 \sin \theta_2}{2} = \frac{27}{4} \zeta,$$

$$\zeta = \frac{[9 \cos \theta_1 (\cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos \theta_1) - 4 \cos^2 \theta_2] \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{(9 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - 16)^2}.$$

Рассматривая частоту ω как параметр и придавая ей различные значения ($\omega > 0$), построим в плоскости величин θ_1, θ_2 геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнениям (2.1.26) и соответствующих искомым положениям равновесия

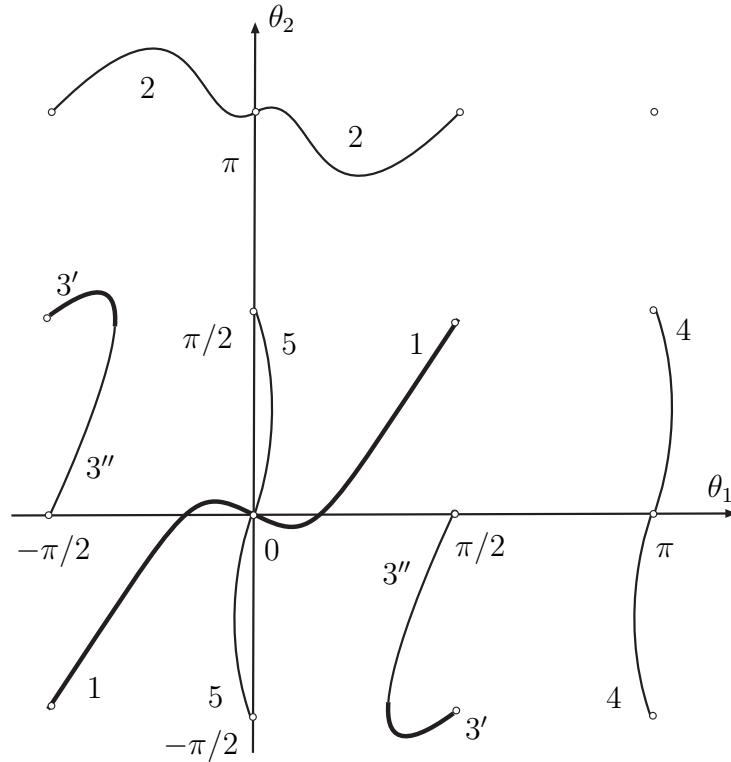


Рис. 18. Положения равновесия

Одновременно будем проверять полученные решения на устойчивость с помощью условий, аналогичных неравенствам (2.1.10).

Численно-графический анализ решений этой системы приводит к следующим результатам.

При $\omega > 0.87772$ в приближенной системе, кроме четырех положений равновесия на вертикали, другие положения равновесия отсутствуют. При этом равновесным точкам $[0, 0]$ и $[\pi, \pi]$ отвечают точка минимума и точка максимума потенциальной энергии соответственно, а равновесным точкам $[0, \pi]$, $[\pi, 0]$ — седловые точки.

При $\omega \leq 0.87772$ в окрестности точки $[0, 0]$, преобразующейся в седловую, возникают две симметричные устойчивые равновесные точки — точки минимума функции Π . В плоскости θ_1, θ_2 геометрическое место этих равновесных точек для значений $0 \leq \omega \leq 0.87772$ образуют кривые, помеченные на рис. 18 номером 1. Кривые при $\omega = 0.87772$ берут начало в точке $[0, 0]$ и при $\omega \rightarrow 0$ (то есть при $\Omega \rightarrow \infty$) заканчиваются в точках $[\pi/2, \pi/2]$ и $[-\pi/2, -\pi/2]$, соответствующих «развернутому» расположению стержней вдоль горизонтали.

При $\omega \leq 0.8376$ в окрестности точки $[0, \pi]$, преобразующейся в точку максимума функции Π , появляются две симметричные неустойчивые (седловые) равновесные точки. Геометрическое место этих равновесных точек в плоскости θ_1, θ_2 для значений $0 \leq \omega \leq 0.8376$ образуют кривые, помеченные на рис. 18 номером 2. Предельными точками этих кривых при $\omega \rightarrow 0$ являются точки $[\pi/2, \pi]$ и $[-\pi/2, \pi]$, соответствующих горизонтальному положению стержня 1 и верхнему вертикальному положению стержня 2.

При $\omega \leq 0.6128$ возникают еще четыре дополнительные равновесные точки, первая пара возникает в окрестности точки $A_1 = [-1.11402, 1.65229]$, а вторая — в окрестности $A_2 = [1.11402, -1.65229]$. В точках A_1, A_2 $\partial^2 \Pi / \partial \theta_2^2$ обращается в нуль. Геометрическое место равновесных точек при $0 \leq \omega \leq 0.6128$ образуют кривые $3'$ и $3''$. Точки, образующие кривые $3'$, являются устойчивыми точками (точками минимума потенциальной энергии), а точки, образующие кривые $3''$, — неустойчивыми (седловыми). В граничных точках A_1 и A_2 устойчивость не исследуется. Предельными точками кривых $3'$ при $\omega \rightarrow 0$ являются точки $[-\pi/2, \pi/2]$ и $[\pi/2, -\pi/2]$, отвечающие «сложенному» расположению

стержня вдоль горизонтали. Предельными точками кривых Z'' при $\omega \rightarrow 0$ являются точки $[-\pi/2, 0]$ и $[\pi/2, 0]$, соответствующих горизонтальному положению стержня 1 и нижнему вертикальному положению стержня 2.

При $\omega \leq 0.1673$ в окрестности точки $[\pi, 0]$, преобразующейся в точку максимума потенциальной энергии, появляются две симметричные неустойчивые (седловые) равновесные точки. Геометрическое место этих равновесных точек при $0 \leq \omega \leq 0.1673$ образуют кривые, помеченные на рис. 18 номером 4. Предельными точками этих кривых при $\omega \rightarrow 0$ являются точки $[\pi, \pi/2]$ и $[\pi, -\pi/2]$, отвечающих верхнему вертикальному положению стержня 1 и горизонтальному положению стержня 2.

При $\omega \leq 0.1598$ в окрестности точки $[0, 0]$, преобразующейся в точку максимума функции Π , возникают две симметричные неустойчивые (седловые) точки, геометрическое место которых образуют кривые 5. В пределе при $\omega \rightarrow 0$ имеем точки $[0, \pi/2]$ и $[0, -\pi/2]$, соответствующие нижнему вертикальному положению стержня 1 и горизонтальному положению стержня 2.

Таким образом, дополнительные («боковые») положения равновесия приближенной системы существуют только в диапазоне частот колебаний точки подвеса, для которых вертикальные относительные равновесия неустойчивы. В зависимости от частоты вибрации точки подвеса таких равновесий может быть от одного до шести (для каждого еще имеется симметричная пара). Одна или две пары устойчивы в области существования, остальные неустойчивы.

Заметим, что в случае математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса «боковое» положение равновесия соответствующей приближенной системы устойчиво в области существования [59]. В случае двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, при вертикальных вибрациях точки подвеса, все существующие «боковые» равновесия приближенной системы неустойчивы [61].

2.1.6.2. Периодические движения в системе двух одинаковых стерж-

ней и их устойчивость. Методом Пуанкаре построены аналитические по ε , 2π -периодические по τ движения двойного маятника, рождающиеся из найденных в разд. 2.1.6.1 боковых относительных равновесий приближенной системы. Эти периодические движения описываются формулами (2.1.18) при подстановке в них $\lambda = 1$, $\mu = 1$ и имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_1'(\tau) &= \theta_{1*} + \varepsilon \frac{3(3 \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*}) \cos(\theta_{2*}) - 6 \cos(\theta_{1*}))}{16 - 9 \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*})^2} \cos(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (2.1.27) \\ \varphi_2'(\tau) &= \theta_{2*} + \varepsilon \frac{3(9 \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*}) \cos(\theta_{1*}) - 8 \cos(\theta_{2*}))}{16 - 9 \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*})^2} \cos(\tau) + O(\varepsilon^2), \\ p_1'(\tau) &= \frac{3}{2} \varepsilon \cos(\theta_{1*}) \sin(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad p_2'(\tau) = \frac{1}{2} \varepsilon \cos(\theta_{2*}) \sin(\tau) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Неустойчивые решения в линейном приближении являются также неустойчивыми в исходной системе в силу непрерывности по ε характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Часть порождающих положений равновесия приближенной системы устойчивы (на рис. 18 им соответствуют кривая 1, пара кривых 3'). Отвечающие им периодические решения полной системы устойчивы в линейном приближении.

Проведем нелинейный анализ устойчивости этих решений. Процедура исследования аналогична процедуре, описанной для периодического движения, возникающего из нижнего вертикального положения относительного равновесия приближенной системы.

Положим в (2.1.6) $\mu = 1$, $\lambda = 1$ и введем возмущения по формулам

$$\theta_j = \varphi_j'(\tau) + x_j, \quad p_j = p_j'(\tau) + y_j, \quad (j = 1, 2), \quad \omega = \omega^*.$$

Функции $\varphi_j'(\tau)$, $p_j'(\tau)$ ($j = 1, 2$) вычисляются по формулам (2.1.27).

Далее, проводя нормализацию гамильтониана возмущенного движения в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений, приведем его к виду (2.1.25).

Описываемая процедура реализована численно при помощи расчета на компьютере вдоль кривых 1 и 3'. Результаты расчета таковы.

Для всех точек исследуемых кривых коэффициенты c_{20} , c_{02} , c_{11} всегда отрицательны. Значит, квадратичная форма определенно отрицательная при любых значениях $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. Дискриминант D_2 квадратичной формы (2.1.14) также всегда отрицателен.

Таким образом, в области устойчивости в линейном приближении рассматриваемые периодические движения устойчивы для большинства начальных условий и формально устойчивы.

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. В приближенной задаче динамики тяжелого твердого тела с произвольной геометрией масс, одна из точек которого совершает вертикальные высокочастотные гармонические вибрации, получено уравнение, описывающее множество допустимых осей перманентных вращений. Это уравнение является (в общем случае) уравнением эллиптического конуса и обобщает известное уравнение конуса Штауде допустимых осей перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой. Описаны допустимые дуги перманентных вращений в случае расположения центра масс тела на главной оси инерции для точки подвеса, а также в случае динамически симметричного тела.
2. В рамках приближенной автономной системы канонических дифференциальных уравнений выполнено исследование устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела в случае расположения центра масс тела на главной оси инерции. Рассмотрены вращения вокруг этой главной оси, а также вокруг допустимых осей, лежащих в главных плоскостях инерции, примыкающих к данной оси инерции. Проведен полный анализ устойчивости в линейном приближении. В ряде случаев получены достаточные условия устойчивости. Проведено сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой. Выявлены случаи стабилизации и дестабилизации перманентных вращений, вызванные наличием вибраций.
3. В областях изменения параметров, соответствующих только необходимым условиям устойчивости, проведен нелинейный анализ устойчивости исследуемых перманентных вращений. Найдены уравнения поверхностей резо-

нанса третьего и четвертого порядков, а также поверхности вырождения гамильтониана возмущенного движения в членах четвертой степени относительно возмущений. Подробно изучены два частных случая геометрии масс тела, когда тело динамически симметрично или распределение масс в нем соответствует случаю Бобылева–Стеклова. Проведена проверка критериев устойчивости в резонансных случаях.

4. Рассмотрен частный случай перманентных вращений динамически симметричного твердого тела, обусловленного вибрациями и не существующего для тела с неподвижной точкой, для которого частота вибраций точки подвеса и угловая скорость перманентного вращения связаны соотношением специального вида. Проведен полный, линейный и нелинейный, анализ устойчивости этого движения.
5. Исследованы движения системы, состоящей из двух шарнирно соединенных тонких однородных стержней, вращающихся вокруг горизонтальных осей, точка подвеса которой совершает быстрые горизонтальные высокочастотные гармонические вибрации малой амплитуды. В приближенной задаче изучена устойчивость четырех положений относительного равновесия на вертикали. Показано, что устойчивым может быть только нижнее («висящее») положение относительного равновесия. Для системы двух одинаковых стержней вопрос об устойчивости рождающегося из него периодического движения решен в строгой нелинейной постановке.
6. Для системы двух одинаковых стержней решен также вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости (в нелинейной постановке) высокочастотных периодических движений малой амплитуды, происходящих в окрестности наклонных положений стержней.

Список литературы

1. Апыхтин Н. Г. Перманентные вращения и возмущенные движения твердого тела. М: Издательство РУДН, 2004. 174 с.
2. Анчев А. О перманентных вращениях твердого тела с одной неподвижной точкой и их устойчивости. ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 380–386.
3. Анчев А. О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
4. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 3-е. — М.: Эдиториал УРСС, 2009. 416 с.
5. Бардин Б. С., Маркеев А. П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
6. Беличенко М. В., Холостова О. В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.
7. Беличенко М. В. Об устойчивости высокочастотных периодических движений тяжелого твердого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // МТТ. 2016. № 6. С. 15–28.
8. Блехман И. И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
9. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Трудов Института строит. механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
10. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Математические заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 325–330.
11. Вишенкова Е. А. Об устойчивости перманентного вращения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса вокруг главной оси, содержащей центр масс // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссий-

- ской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 23–27 апреля 2012 года. С. 169–171.
12. Вишенкова Е. А. Исследование влияния быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг оси, содержащей центр масс // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Россия. Москва, ИПУ РАН, 16–19 2014 года. Тезисы докладов. С. 1863–1871.
 13. Вишенкова Е. А. Исследование влияния быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела с центром масс на главной оси // Сборник трудов XVIII Международного Симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем», Dyvis-2015. Москва — Бекасово. М: ИМАШ РАН, 2015. С. 84–92.
 14. Вишенкова Е. А. Об устойчивости перманентных вращений несимметричного гироскопа с вибрирующей точкой подвеса // 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика–2015». 16–20 ноября 2015 года. Тезисы докладов. Москва. С. 392–394.
 15. Вишенкова Е. А. О влиянии быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей из главной плоскости инерции // XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов «МИКМУС-2015». Тезисы докладов. Москва: ИМАШ РАН. С. 207–210.
 16. Вишенкова Е. А. Влияние высокочастотных вибраций точки подвеса на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, 17–19 мая 2016 года. Тезисы докладов. С. 124–128.
 17. Вишенкова Е. А. Исследование устойчивости перманентных вращений твердого тела с вибрирующим подвесом вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // XLIII Международная молодежная научная конферен-

- ция «Гагаринские чтения–2017». Тезисы докладов. 5–19 апреля 2017 года. Москва. С. 1041–1042.
18. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Механика. 2012. Вып. 2. С. 25–40.
 19. Вишенкова Е. А. Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474.
 20. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Механика. 2017. Вып. 1. С. 98–120.
 21. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. Исследование перманентных вращений тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Механика. 2017. Вып. 4. С. 590–607.
 22. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. «Физматлит», 2014. — 240 с.
 23. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Полн. собр. соч. Т. 1. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. С. 110–208.
 24. Журавлёв В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: Ленанд, 2015. 304 с.
 25. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
 26. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21, Вып. 5. С. 588–597.
 27. Ковалев А. М., Киселев А. М. О конусе осей равномерного вращения гироскопа

- стата. Механика твердого тела (Киев), 1972. Вып. 4. С. 36–45.
28. Ковалев А. М., Киселев А. М. Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата. Механика твердого тела (Киев), 1972. Вып. 4. С. 46–48.
29. Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 650–660.
30. Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела. Киев: Наукова думка. 1977. Вып. 9. С. 40–44.
31. Ковалев А. М., Чуденко А. Н. Исследование достаточных и необходимых условий равномерных вращений гиростата вокруг главной оси. Механика твердого тела (Киев), 1982. Вып. 14. С. 93–99.
32. Кугушев Е. И., Левин М. А., Попова Т. В. Об уравнениях движения систем на быстро колеблющемся основании // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. 2015. С. 2118–2120.
33. Кугушев Е. И., Левин М. А., Попова Т. В. О положениях равновесия и стационарных движениях голономных систем на вибрирующем основании // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XIII Международной конференции. 2016. С. 223–225.
34. Кугушев Е. И., Левин М. А., Попова Т. В. О голономных системах быстро колеблющемся основании // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 5. С. 523–533.
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М: Наука, 1965. 204 с.
36. Лесина М. Е., Кудряшова Л. В. Новые постановки и решения задач динамики системы тел. Донецк, 1999. 268 с.
37. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат. 1956. 491 с.

38. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.
39. Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
40. Маркеев А. П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427 № 6. С. 771–775.
41. Маркеев А. П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
42. Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 4. С. 3–10.
43. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды отделения физ. наук Об-ва любителей естествознания. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
44. Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616–627.
45. Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1975. С. 121–200.
46. Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела в случае, когда его центр масс вблизи главной плоскости инерции // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1982. С. 3–55.
47. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
48. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого

- тел // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–66.
49. Румянцев В. В. К устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела около неподвижной точки // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 339–352.
50. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопов. ПММ. 1961. Т. 25, Вып. 1. С. 9–16.
51. Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской. Механика твердого тела (Киев), 1972. Вып. 4. С. 48–51.
52. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наукова думка, 1977. 160 с.
53. Сафонов А. И. О влиянии вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом // Вестник МАИ. 2014. Т. 21. № 2. С. 158–168.
54. Сергеев В. С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 408–416.
55. Скимель В. Н. К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 130–132.
56. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
57. Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер. Мат., мех. 1974. № 6. С. 99–105.
58. Харламов П. В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку. ПММ. 1965. Вып. 2. С. 373–375.
59. Холостова О. В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 1997. N 4. С. 35–39.
60. Холостова О. В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–796.
61. Холостова О. В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса

- //Сб. научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ. 2000. Вып. 24. С. 157–167.
62. Холостова О. В. Об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 858–868.
63. Холостова О. В. Об одном случае периодических движений волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2000. Т. 375. № 5. С. 627–630.
64. Холостова О. В. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. М.:Изд-во МАИ, 2000. 84 с.
65. Холостова О. В. О периодических движениях волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 34–48.
66. Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 128 с.
67. Холостова О. В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 25–40.
68. Холостова О. В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 18–30.
69. Холостова О. В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 111–122.
70. Холостова О. В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 99–116.
71. Холостова О. В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 308 с.
72. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 308 с.

73. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 123–124.
74. Чудненко А. Н. К устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня // МТТ. Киев: Наукова думка, 1978. Вып. 10. С. 54–60.
75. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
76. Acheson D. J. A pendulum theorem // Proc. R. Soc. Lond. 1993. A443. P. 239–245.
77. Erdélyi A. Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1934. Bd. 14. № 4 S. 235–247.
78. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems. —// Commun. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.
79. Grammel R. Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Berlin, 1950. Bd. 1, 2. (Перевод: Граммель Р. Гирокосп, его теория и применения. В 2-х томах. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1962.)
80. Hirsch P. Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1930. Bd. 10, № 1. S. 41–52.
81. Hsu C. S. On a restricted class of coupled Hill's equations and some applications // J. Appl. Mech. 1961. 28. P. 551–556.
82. Kholostova O. V. On a case of periodic motions of the Lagrangian top with vibrating fixed point // Regular & Chaotic Dynamics. 1999. Vol. 4. № 4. P. 81–93.
83. Klotter K., Kotowski G. Über die Stabilität der Bewegungen des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1939. Bd. 19, № 5. S. 289–296.
84. Lowenstern E. R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency

- on a dynamical system // *Philosoph. Magazine*. 1932. 8. P. 458–486.
85. Magnus K. Kreisel. *Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, 1971. (Перевод: Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир. 1974. 526 с.)
86. Otterbein S. Stabilisierung des n-Pendels und der Indische Seiltrick // *Arch. ration. Mech. Analysis* 1982. 78. P. 381–393.
87. Smale S. Topology and mechanics. «*Inventiones math.*», 1970, 10, № 6. P. 305–331; 11, № 1. P. 45–64.
88. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // *J. Reine Angew. Math.* 1894. Bd. 113. № 4. S. 318–334.
89. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // *Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc.* 1908. V. 52, Pt. 2. № 8. P. 1–10.
90. Stephenson A. On induced stability // *Phil. Mag. Ser. 7*. 1909. V. 17. P. 765–766.