УДК 621.396.96

Алгоритм оценки состояния цифровой системы.

А.В.Чикин

В данной работе полагается, что состояния цифровой системы описывается заданными двоичными временными последовательностями. По наблюдениям за последовательностью в дискретном времени в присутствии шума наблюдений решается задача оптимальной оценки состояния цифровой системы. Предлагаются алгоритмы разовой и последовательной оценки, требующие малых вычислительных затрат.

Введение.

В большинстве практически важных случаев возникает необходимость оценивания состояния некоторой цифровой системы по результатам наблюдений в присутствии шума. Считается, что состояния системы принадлежат некоторому множеству и при этом, если система находится в каком-либо определенном состоянии, то наблюдению доступен взаимно однозначно связанный с этим состоянием элемент из другого заданного множества. Присутствие шума наблюдения не позволяет непосредственно определять состояние системы. Это довольно общее определение может описывать очень широкий класс систем цифровой радиосвязи.

В данной работе считается, что доступные наблюдению элементы из множества, взаимнооднозначно связанного с множеством состояний цифровой системы, представляют собой элементы расширенного поля Галуа $GF\left(2^n\right)$. Отсюда известные оптимальные методы теории оптимальных оценок при реализации наталкиваются на значительные вычислительные трудности, что существенно ограничивает их использование [1-4].

Качественно подобные алгоритмы разумно характеризовать вероятностью ошибки оценки и, следовательно, считать оптимальным такой алгоритм, который обеспечивает минимум этой характеристики. В данной работе синтез осуществляется методом наименьших расстояний. Это – обобщение метода наименьших квадратов (МНК) на произвольную метрику в рассматриваемом пространстве. В важном частном случае, когда пространство линейно и метрика в нем квадратична, а шум наблюдений аддитивный гауссовский с независимыми значениями, можно показать, что синтезированный МНК–алгоритм обеспечивает минимум вероятности ошибки оценки [3].

Чтобы «обойти» в какой-то степени указанные вычислительные трудности, в работе рассматриваются алгоритмы разовой и последовательной оптимальной оценки, основанные на идее покоординатного приближения Гаусса–Зайделя. При этом уточняется задача оценивания для множеств состояний и наблюдений различной структуры.

Постановка задачи (разовое оценивание)

Зададим линейное [5] относительно операции логического суммирования по модулю два $\oplus$ n–мерное пространство векторов $\mathbf{V}^n$ над полем коэффициентов из множества $\{0,1\}$. Это пространство структурно совпадает с расширенным полем Галуа $GF\left(2^n\right)$ и далее будет называться *основным пространством*. В $\mathbf{V}^n$ выделяется некоторое подпространство 2^m векторов $\mathbf{V}_m^n \subset \mathbf{V}^n$, которое далее будет называться *пространством состояний* цифровой системы. Количество векторов в пространстве состояний в общем случае может отличаться от 2^m. Чтобы наделить основное пространство свойствами расстояний, необходимо ввести некоторую удобную метрику ρ_{V}, характеризующую расстояние между двумя произвольными векторами пространства. Как будет видно при дальнейшем изложении наиболее целесообразно ввести метрику Хэмминга

$$\rho_{\mathrm{V}}\left(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(v_{1i}\oplus v_{2i}\right),$$

где обозначено $\mu\left(x\right)=\begin{cases}1, & хлюг \quad .1\\ 0, & хлюг \quad .0\end{cases}$, $\mathbf{v_1}=\left\{v_{1,1},\ldots,v_{1,n}\right\},\mathbf{v}_2=\left\{v_{2,1},\ldots,v_{2,n}\right\}\in\mathbf{V}^n$. Равенство может быть представлено в другом аналогичном виде. Для этого введем оператор ортогонального проектирования $\mathbf{P}$, отображающий основное пространство $\mathbf{V}^n$ на k-мерную проекцию $\mathbf{V}^k$. Считая, что $k=1$, равенство переписывается в следующем виде

$$\rho_{\mathrm{V}}\left(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(\mathbf{P}_i v_1\oplus\mathbf{P}_i v_2\right),$$

где нижний индекс оператора указывает номер координатного множества в базисе, на который осуществляется проектирование.

Введем n-мерное линейное относительно операции алгебраического суммирования банахово пространство векторов $\mathbf{U}^n$ с σ-алгеброй $B^n=B^{\otimes n}$ борелевских множеств на нем. Символом $\otimes$ обозначается тензорное произведение множеств. Все пространство $\mathbf{U}^n$ представляется как прямое произведение $\mathbf{U}^n=\mathbf{U}\times\ldots\times\mathbf{U}=\mathbf{U}^{\times n}$ множеств. Из физических соображений норма векторов в $\mathbf{U}^n$ задается соотношением

$$\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + \ldots + u_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 ,$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in \mathbf{U}^n$. Далее введенное пространство векторов будет называться *пространством наблюдений.* Норма в пространстве естественным образом порождает метрику ρ_{U}, характеризующую расстояние между векторами,

$$\rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u_2}\| = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u_2}|^2 =$$
$$= (u_{1,1} - u_{1,2})^2 + \ldots + (u_{n,1} - u_{n,2})^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_{i,1} - u_{i,2})^2,$$

где $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathbf{U}^n$. Аналогично основному пространству в пространстве наблюдений может быть задан оператор ортогонального проектирования. Необходимо отметить, что в рамках данной задачи также может рассматриваться пространство наблюдений, полученное в результате $n-$ кратного прямого произведения компактов.

Будем считать, что основное пространство $\mathbf{V}^n$ изоморфно некоторому точечному подмножеству $\tilde{\mathbf{U}}^n \subset \mathbf{U}^n$ с $\sigma-$алгеброй $\Omega^{\otimes n} \subset B^{\otimes n}$ относительно отношения частичной упорядоченности векторов, $\tilde{\mathbf{U}}^n \leftrightarrow \mathbf{V}^n$ и, следовательно, $\mathbf{U}_m^n \leftrightarrow \mathbf{V}_m^n$. В силу этого метрика $\rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}^n, \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathbf{U}}^n$ может быть перенесена на основное пространство в виде меры $J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, заданной на множестве векторов из $\mathbf{V}^n$. Данная мера может рассматриваться как функционал, заданный на множестве векторов основного пространства. Если $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_m^n$, то функционал $J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ называется *целевым функционалом.* Таким образом, задача оптимальной оценки состояния цифровой системы заключается в минимизации целевого функционала с ограничениями, т.е.

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \min$$
$$\mathbf{v} \in \mathbf{V}_m^n.$$

при некотором фиксированном векторе $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^n$. $\Omega^{\otimes n} \times B^{\otimes n}-$измеримое отображение $\mathbf{A} : \mathbf{U}_m^n \to \mathbf{U}^n$ подмножества $\mathbf{U}_m^n$ на $\mathbf{U}^n$ задает шум наблюдения.

Из следует, что целесообразно выбирать в качестве оценки состояния системы $\hat{\mathbf{v}}$ такой вектор, что

$$\rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j \leftrightarrow \hat{\mathbf{v}}) \le \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_k \leftrightarrow \mathbf{v}_k \ne \hat{\mathbf{v}})$$

для всех k. Решение задачи осложнено тем, что множество $\mathbf{V}^n$ конечно и, следовательно, для оценки невозможно применять хорошо разработанные экстремальные методы для функций с выпуклыми носителями. Более того, в большинстве случаев количество векторов в $\mathbf{V}^n$ имеет очень большое значение, что затрудняет использование очевидного метода перебора всех возможных вариантов с последующим выбором вектора, для которого соблюдается . Тем не менее, указанный способ все равно остается общим для такого рода задач.

Распишем подробно формирование целевого функционала $J(\mathbf{u},\cdot)$. Для этого произвольно выберем некоторый вектор $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^n$. Этому вектору в пространстве взаимнооднозначно соответствует вектор $\tilde{\mathbf{u}}$, т.е. $\tilde{\mathbf{v}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{u}}$. Тогда значение целевого функционала будет равно

$$J(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}) = J(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}) = \sigma(\tilde{\mathbf{v}})$$

в силу того, что на каждой проекции вектора $\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}$ может быть задана мера $\sigma(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}})$, совпадающая с расстоянием $\rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{P}_i\mathbf{u})$ между соответствующими проекциями векторов в метрике ρ_{U}. Может быть показано, что введенная мера удовлетворяет всем аксиомам меры [5] на множестве ортопроекций $\tilde{\mathbf{F}} = \{\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}} : \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^n, i = 1,\dots,n\}$. Тогда мера всего множества $\sigma(\tilde{\mathbf{F}}) = \sigma(\tilde{\mathbf{v}})$ вычисляется как интеграл Лебега по мере σ

$$J(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}) = \sigma(\tilde{\mathbf{v}}) = \sigma(\tilde{\mathbf{F}}) = \sum_{\tilde{\mathbf{F}}}\sigma(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}})$$

Множество ортопроекций $\mathbf{F}$ любого другого вектора $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ в силу конструкции основного пространства отличается от $\tilde{\mathbf{F}}$ только на некотором подмножестве $\mathbf{F}' = \tilde{\mathbf{F}} \setminus \{\mathbf{P}\mathbf{v} : \mathbf{P}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{v}\}$, причем мера $\sigma(\mathbf{P}_i\mathbf{v})$ каждого из элементов подмножества $\mathbf{F}'$ вычисляется как сумма

$$\sigma(\mathbf{P}_i\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}})$$

для произвольного вектора $\mathbf{v}$, где $f_{\mathrm{U}}(g)$ - функция расстояния. Если $\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}} < \mathbf{P}_i\mathbf{v}$, то, как нетрудно показать, указанная функция вычисляется следующим образом

$$f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i\mathbf{v} \neq \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{cases} \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\mathbf{u},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}) + \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}'), & , \quad \mathbf{P}_i\mathbf{u} \le \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}} \\ \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\mathbf{u},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}) - \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}') & , \quad \mathbf{P}_i\mathbf{u} \ge \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}' \\ \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}') - \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\mathbf{u},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}) & , \quad \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}} < \mathbf{P}_i\mathbf{u} < \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}' \end{cases}.$$

При этом, также соблюдается неравенство треугольника

$$f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i\mathbf{v} \neq \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) = \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\mathbf{u}, \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}' \leftrightarrow \mathbf{P}_i\mathbf{v} \neq \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) \le \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\mathbf{u},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}) + \rho_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{u}}'),$$

определяющее верхнюю грань функции расстояния.

Теперь мера $\sigma(\mathbf{F}')$ подмножества $\mathbf{F}'$ равна

$$\sigma(\mathbf{F}') = \sum_{i=1}^{n}\sigma(\mathbf{P}_i\mathbf{v})\mathbf{I}_{\mathbf{F}'} = \sum_{\mathbf{F}'}\left(\sigma(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i\tilde{\mathbf{v}})\right),$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{F}'} = \begin{cases} 1, & \mathbf{F}' \\ 0, & \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}' \end{cases}$ – индикатор множества. Отсюда

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\tilde{\mathbf{F}}) - \sigma(\mathbf{F}') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sigma(\mathbf{P}_i \mathbf{v}) \mathbf{I}_{\mathbf{F}'} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sum_{\mathbf{F}'} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) \right).$$

Пусть существует вектор $\hat{\mathbf{v}}$, решающий задачу . Тогда, в силу , можно записать неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sum_{\hat{\mathbf{F}}'} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{v}}) \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sum_{\mathbf{F}'} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) \right).$$

Сокращая и меняя знаки на противоположные, имеем

$$\sum_{\hat{\mathbf{F}}'} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{v}}) \right) \geq \sum_{\mathbf{F}'} \left(\sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) \right).$$

Раскрывая скобки под знаками суммирования, получаем

$$\sum_{\hat{\mathbf{F}}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + \sum_{\hat{\mathbf{F}}'} f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{v}}) \geq \sum_{\mathbf{F}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) + \sum_{\mathbf{F}'} f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}})$$

или

$$\sum_{\hat{\mathbf{F}}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) \geq \sum_{\mathbf{F}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sum_{\mathbf{F}' \Delta \hat{\mathbf{F}}'} f_{\mathrm{U}}(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{\mathbf{F}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) - \sum_{\mathbf{F}' \Delta \hat{\mathbf{F}}'} const,$$

где под символом Δ обозначена симметрическая разность множеств.

Основываясь на построениях и , видно, что оптимальный алгоритм, решающий задачу , должен искать вектор $\hat{\mathbf{v}}$ среди совокупности векторов в пространстве состояний по следующему принципу:

1. Мера $\sigma(\hat{\mathbf{F}}')$ множества ортопроекций $\hat{\mathbf{F}}'$, являющегося результатом операции пересечения данного множества и множества ортопроекций $\tilde{\mathbf{F}}$ некоторого заранее выбранного опорного вектора $\tilde{\mathbf{v}}$, меньше либо равна соответствующей мере для всех других векторов из пространства состояний, т.е. должна быть максимизирована.
2. Мощность множества, являющегося пересечением множества ортопроекций $\hat{\mathbf{F}}'$ и соответствующего множества для каждого из векторов пространства состояний, должна быть минимизирована.

Формально это может быть записано как

$$\begin{cases} \sum_{\hat{\mathbf{F}}'} \sigma(\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{v}}) \to \max \\ \sum_{\mathbf{F}' \cap \hat{\mathbf{F}}'} const \to \min \end{cases}$$

Ниже предлагается алгоритм решения данной задачи, сохраняющий значительную степень общности и, в то же время, требующий малых вычислительных затрат.

Алгоритм разового оценивания.

Представим каждый вектор $\mathbf{v}$ пространства состояний $\mathbf{V}_m^n$ в виде разложения по некоторой конечной системе базисных векторов

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{b}_i \ ,$$

где суммирование и произведение понимается в смысле по модулю два. Это возможно в силу линейности рассматриваемого множества. В общем случае $\mathbf{b}_i$ может и не принадлежать $\mathbf{V}_m^n$. Обозначая совокупность координат $\{c_1, \ldots, c_N\}$ как координатный вектор-строку $\mathbf{c}$ с коэффициентами из $GF(2)$, а $\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{b}_N \end{Vmatrix}$ – матрица размером $n \times N$, выражение может быть переписано следующим образом

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}} \mathbf{B} \,.$$

Теперь задача сводится к оценке координатного вектора $\hat{\mathbf{c}}$. При этом

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}} \mathbf{B} \,.$$

Алгоритм оценки основывается на методе покоординатного приближения Гаусса–Зайделя [7]. Суть метода может быть кратко изложена следующим образом. Алгоритм работает в несколько итераций. На первом шаге выбирается некоторое начальное приближение координатного вектора $\mathbf{c_0}$, соответствующего некоторой точке в выбранном пространстве. Последовательно варируя каждую координату вычисляется значение минимизируемого функционала. Далее выбирается точка, для которой функционал достигает минимума. Этой точке соответствует вектор $\mathbf{c_1}$, который и берется в качестве начального координатного вектора для следующего шага работы алгоритма. Итерации повторяются до тех пор, пока приращения функционала не станут меньше некоторой наперед заданной величины, характеризующей точность получаемого решения. В большинстве случаев данный алгоритм сходится к решению. Тем не менее, в каждой практической ситуации остается необходимость проверять данный алгоритм на сходимость непосредственно. В рамках данной задачи указанный алгоритм в явном виде использоваться не может, поэтому возникает необходимость в его модификации.

Пусть в качестве первого приближения выбран нулевой координатный вектор $\mathbf{c_0} = \{0,...,0\}$. Последовательные вариации координат фактически означают вычисление значений для каждого базисного вектора $\mathbf{b}_i$. Совокупность этих значений запишем в виде векторов

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \{\sigma(\mathbf{b_1}),...,\sigma(\mathbf{b}_N)\} \quad , \quad \mathbf{d}_1 = \{d(\mathbf{b_1}),...,d(\mathbf{b}_N)\},$$

или, что равносильно,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \{\sigma(\mathbf{c}_{0,1}),...,\sigma(\mathbf{c}_{0,N})\} \quad , \quad \mathbf{d}_0 = \{d(\mathbf{c}_{0,1}),...,d(\mathbf{c}_{0,N})\},$$

где второй нижний индекс у координатного вектора указывает по какой координате выполнялась вариация. Далее фиксируется позиция j в векторах $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\mathbf{d}_1$, при которой соблюдается . На этом шаге «просматривались» N векторов из пространства состояний. Меняя j–ю координату в векторе $\mathbf{c_0}$, получим координатный вектор $\mathbf{c_1}$ для следующего шага работы алгоритма.

Второй шаг аналогичен первому, при этом теперь «просматриваются» только $N-1$ новых векторов из основного пространства, в результате чего вычисляются новые значения

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \{\sigma(\mathbf{c}_{1,1}),...,\sigma(\mathbf{c}_{1,N})\} \quad , \quad \mathbf{d}_1 = \{d(\mathbf{c}_{1,1}),...,d(\mathbf{c}_{1,N})\},$$

среди которых ищется позиция k, при которой выполняется условие . Работа алгоритма прекращается, если соотношение перестает выполняться или в случае, когда все вариации координат исчерпаны.

Максимальное значение вычислительной сложности данного алгоритма может быть получено из следующего соотношения, описывающего каждую итерацию,

$$V = N + (N-1) + ... + (N-N-1) = \sum_{i=0}^{N-1}(N-i) = \frac{1}{2}(N^2 + N).$$

Алгоритм последовательного оценивания.

С практической точки зрения определенный интерес представляет рассмотрение вопроса оценки состояния двоичной системы последовательно во времени при поступлении новых данных наблюдений. Другими словами, необходимо синтезировать алгоритм оценивания при одновременном увеличении размерности пространства наблюдений и основного пространства.

Введем в $n-$мерных пространствах $\mathbf{U}^n$ и $\mathbf{V}^n$ операторы ортогонального проектирования $\mathbf{Q}_k$ и $\mathbf{Q}_r$

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_k \mathbf{u} + \mathbf{Q}_r \mathbf{u}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_k \mathbf{v} + \mathbf{Q}_r \mathbf{v}$$
$$k + r = n.$$

Пусть в $k-$мерных пространствах $\mathbf{U}^k = \mathbf{Q}_k \mathbf{U}^n, \mathbf{V}^k = \mathbf{Q}_k \mathbf{V}^n$ решена задача приближения и найдена оценка состояния системы – некоторый вектор $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \in \mathbf{V}_m^k$, т.е. $\sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_1\right) = \min$. В общем случае $\sigma\left(\hat{\mathbf{v}}_1\right) \neq \min$ и, следовательно, существует некоторый вектор $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$, для которого $\sigma\left(\hat{\mathbf{v}}_2\right) = \min$. Отсюда, неравенство с учетом может быть переписано в виде

$$\sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right) + \sigma\left(\mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right) \geq \sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_2\right) + \sigma\left(\mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{v}}_2\right).$$

Это соотношение дополняется неравенством, справедливым в $\mathbf{V}^k$,

$$\sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right) \leq \sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_2\right).$$

Теперь неравенство может быть записано как

$$\Delta_r - \Delta_k \geq 0$$

или

$$\Delta_r \geq \Delta_k ,$$

где обозначено

$$\Delta_r = \sigma\left(\mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right) - \sigma\left(\mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{v}}_2\right),$$
$$\Delta_k = \sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right) - \sigma\left(\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{v}}_2\right).$$

Полученное условие показывает, что новая оценка состояния системы $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$ решает задачу в случае, если разность мер между векторами новой и прошлой оценки на пространстве $\mathbf{V}^r$ превышает соответствующую меру на пространстве $\mathbf{V}^k$.

Алгоритм последовательной оценки работает аналогично алгоритму разовой оценки. Отличие заключается в том, что оценивание модифицированным методом Гаусса–Зайделя выполняется на ортопроекции $\mathbf{V}^r$ пространства $\mathbf{V}^n$. К целевому функционалу добавляется дополнительное условие .

Заключение.

Рассмотренные выше алгоритмы оценки помимо малой вычислительной сложности предъявляют слабые требования к априорному знанию распределения шума наблюдений. Однако, только в частном случае, когда шум наблюдений стационарный с независимыми значениями и имеет аддитивный характер, данные алгоритмы являются оптимальными по критерию минимума вероятности ошибки оценки. Несмотря на это, они не теряют своего практического значения, так как в большом количестве практических случаев шум наблюдений всегда может быть с той или иной степенью точности аппроксимирован гауссовской моделью. Более того, шум с независимыми значениями всегда присутствует в наблюдениях. В противном случае задача может быть сведена к сингулярному случаю [8]. Учет характера шума наблюдений выражается в изменении оператора $\mathbf{A}$ и выборе соответствующих метрик ρ_u, ρ_v.

Рассмотренная задача носит достаточно общий характер и поэтому не делалось никаких предположений о характере дополнительных связей между векторами пространства состояний. Как отмечалось выше, в каждом конкретном практическом случае наличие таких связей приводит к необходимости проверять алгоритмы на сходимость к решению и в случае неудовлетворительной сходимости принимать дополнительные меры по модификации алгоритмов.

Литература.

1. *Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. - М.: МАИ, 1998. - 344с.*
2. *Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. Пер. с англ. – М.: Энергия, 1973. - 440с.*
3. *Теряев Е.Д., Шамриков Б.М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление. - М.: Наука, 1999. -330с.*
4. *В.И.Тихонов, В.Н.Харисов. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991. - 608с.*
5. *Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. - М.: МАИ, 1996. - 744с.*
6. *Садовничий В.А. Теория операторов. - М.: Высшая школа, 1999. - 368с.*
7. *Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наукова Думка, 1980. – 208с.*
8. *Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне помех. - М.: Советское радио, 1960. - 448с.*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чикин Алексей Викторович, аспирант кафедры радиосистем передачи информации и управления Московского авиационного института (государственного технического университета) e-mail: avchikin@yandex.ru.