

УДК 539.3

Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий

Белосточный Г.Н.*, Мыльцина О.А.**

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
СГУ, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия*

**e-mail: belostochny@mail.ru*

***e-mail: omyltcina@yandex.ru*

Аннотация

На базе несвязанной термоупругости получены решения краевых задач для пологих оболочек двоякой кривизны и постоянного кручения в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с внешней средой. В случае оболочки двоякой кривизны быстропеременное, по пространственной координате, температурно-силовое воздействие происходит на границе. Оболочка постоянного кручения, со стороны одной из основных поверхностей, подвергается воздействию, на малом временном интервале, сосредоточенной силы и на этом же временном интервале происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды, что приводит к кратковременному перепаду температуры по толщине термоупругой системы. Решения теплопроводности и термоупругости получены методами одинарных и двойных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами. Выражения для коэффициентов рядов записываются в замкнутом виде. На основании решений получены трехмерные

изображения термических поверхностей и функции прогиба, а также изображения частотно-амплитудных характеристик в зависимости от параметров геометрического толка, числа Био, интенсивности силовых и температурных нагрузок.

Ключевые слова: конвективный теплообмен, термоупругость, пологие оболочки, обобщенные функции, статика, динамика, амплитуда, частота.

1. Рассмотрим пологую оболочку двоякой кривизны, перекрывающую прямоугольный план в координатной плоскости xOy , со сторонами a и b , с теплоизолированными основными поверхностями под действием линейного по толщине температурного поля $\theta(x, y, z) = \theta_0 + \frac{z}{h}\theta_1$ ($\theta_0, \theta_1 - const$). Два противоположных края оболочки, расположенные по координатным прямым $y=0, y=b$, шарнирно оперты и нагружены быстропеременными по пространственной переменной « x » усилиями и моментами:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0, y=b: u=0, T_{22} = T^0 \left(\frac{x-x_1}{a} \right)^4 H(x-x_1), w=0, \\ M_{22} = M^0 \left(\frac{x-x_1}{a} \right)^4 H(x-x_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где $H(x-x_1)$ - функция Хевисайда, неопределенная, но ограниченная в точке x_1 .

Два других края оболочки могут быть закреплены любым из известных способов.

Неоднородные краевые условия (1) переписутся в компонентах поля перемещений $\bar{u}(u, v, w)$ в виде

$$\text{при } y=0, y=b: u=0, v_{22}=\alpha(1+\nu)\theta_0+\frac{T^0}{B}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^4 H(x-x_1), w=0, \quad (2)$$

$$w_{22}=-\frac{\alpha(1+\nu)}{h}\theta_1-\frac{M^0}{D}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^4 H(x-x_1).$$

$$\text{Здесь } B=\frac{Eh}{1-\nu^2}, D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Решение несвязной термоупругости полой оболочки двойкой кривизны будем разыскивать в виде, тождественно удовлетворяющим всем краевым условиям (2)

$$u(x,y)=\sum_k u_k(x)\sin\frac{k\pi y}{b},$$

$$v(x,y)=\sum_k v_k(x)\cos\frac{k\pi y}{b}+\frac{T^0}{B}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^4 H(x-x_1)y+\alpha\theta_0(1+\nu)y+B(x), \quad (3)$$

$$w(x,y)=\sum_k w_k(x,y)\sin\frac{k\pi y}{b}-\frac{1}{2}(y^2-by)\left(\frac{\alpha(1+\nu)}{h}\theta_1+\frac{M^0}{D}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^4 H(x-x_1)\right),$$

где $B(x)$ подлежащая (в дальнейшем) определению функция, как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 B}{dx^2}=-\frac{T^0}{B}12\frac{b}{a}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^2 H(x-x_1)\frac{1}{a}$$

$$\text{и имеет вид } B(x)=-\frac{T^0}{B}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^4 H(x-x_1)\frac{b}{2}+D_0+D_1x.$$

На основании стандартных процедур метода одинарных тригонометрических рядов получим систему обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $u_k(x)$, $v_k(x)$, $w_k(x)$

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2}-\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 u_k-\frac{1+\nu}{2}\frac{k\pi}{b}\frac{dv_k}{dx}-(k_1+\nu k_2)\frac{dw_k}{dx}=-B_{1k}\left(\frac{x-x_1}{a}\right)^3 H(x-x_1)\frac{1}{a}, \quad (4)$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{k\pi}{b}\frac{du_k}{dx}-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 v_k+\frac{1-\nu}{2}\frac{d^2 v_k}{dx^2}-(\nu k_1+k_2)\frac{k\pi}{b}w_k=$$

$$= -B_{2k} \frac{1}{a} - B_{3k} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 H(x - x_1) \frac{1}{a} - B_{4k} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \frac{1}{a},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_k}{dx^4} - 2 \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 w_k + \frac{B}{D} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) w_k - \frac{B}{D} (k_1 + \nu k_2) \frac{du_k}{dx} + \frac{B}{D} (\nu k_1 + k_2) \frac{k\pi}{b} v_k = \\ = B_{5k} H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{6k} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{7k} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{8k} \frac{1}{a^3}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} B_{1k} &= 2(1 + \nu) \frac{T^0}{B} a_k^0 + 2(k_1 + \nu k_2) a \frac{M^0 a}{D} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \tilde{a}_k^2, \quad B_{2k} = (\nu k_1 + k_2) a (1 + \nu) \frac{b}{h} \alpha \theta_1 \tilde{b}_k, \\ B_{3k} &= 6(1 - \nu) \frac{T^0}{B} \tilde{b}_k \frac{b}{a}, \quad B_{4k} = (\nu k_1 + k_2) a \frac{M^0 a}{D} \frac{b}{a} \tilde{b}_k, \quad B_{5k} = 12 \frac{M^0}{D} a \left(\frac{b}{a} \right)^2 \tilde{a}_k^2, \dots, \\ B_{8k} &= 6(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 (1 + \nu) \alpha \theta_1 \tilde{a}_k^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{h} \right)^3 - 12(1 - \nu^2) k_1 a \alpha \theta_0 a_k^0 \left(\frac{a}{h} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Определяя частные интегралы первых двух уравнений системы (4)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= C_k \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^5 H(x - x_1), \quad \tilde{v}_k = \left(B_k \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + E_k \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) + F_k, \\ \tilde{w}_k &= \left(A_k \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + D_k \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) \end{aligned} \quad (6)$$

решение, с помощью подстановок:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1 - \nu}{2} \left((k_1 + \nu k_2) \frac{d^3 \Phi_k}{dx^3} + (k_2 - (2 + \nu) k_1) \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d\Phi_k}{dx} \right) + \tilde{u}_k, \\ v_k &= \frac{1 - \nu}{2} \left(-(k_2 + \nu k_1) \left(\frac{k\pi}{b} \right)^3 \Phi_k + (-k_1 + (2 + \nu) k_2) \left(\frac{k\pi}{b} \right) \frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} \right) + \tilde{v}_k, \\ w_k &= \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{d^4 \Phi_k}{dx^4} - 2 \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 \Phi_k \right) + \tilde{w}_k, \end{aligned} \quad (7)$$

тождественно удовлетворяющих первым двум уравнениям системы (4), сводится к интегрированию неоднородных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функции $\Phi_k(x)$

$$\begin{aligned} & \Phi_k^{(8)} + I_k^6 \Phi_k^{(6)} + I_k^4 \Phi_k^{(4)} + I_k^2 \Phi_k^{(2)} + I_k^0 \Phi_k = G_k a^5 + \\ & + \left(G_k^0 + G_k^2 \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^2 + G_k^4 \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^4 + G_k^6 \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) a^5 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I_k^0 &= \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^5 + \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^4 12(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 k_1^2 a^2, \quad I_k^2 = -24(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^2 k_1 k_2 a^2 - 4 \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^6, \\ I_k^4 &= 6 \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 k_k^2 a^2, \quad I_k^6 = -4 \left(\frac{k\pi a}{b} \right)^2, \quad G_k^0 = -4! \tilde{A}_k + B_{\nu k}, \dots, \\ G_k^6 &= - \left(\left(\frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 \right) \tilde{D}_k - 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 (k_2 + \nu k_1) a \frac{k\pi a}{b} \tilde{E}_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Решения неоднородных дифференциальных уравнений (8) запишутся в виде

[1]

$$\begin{aligned} \Phi_k(x) &= \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}(x) + \frac{G_k}{I_k^0} a^5 + \left(\sum_{m=1}^8 \tilde{C}_{km} \varphi_{km}(x) + \tilde{A}_{k0} + \tilde{A}_{k2} \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \tilde{A}_{k4} \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^4 + \tilde{A}_{k6} \left(\frac{x - x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) a^5. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь C_k^m - постоянные интегрирования, $\varphi_{km}(x)$ - фундаментальная система функций для однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (8), \tilde{C}_{km} - являются решениями неоднородных алгебраических систем [1]

$$\begin{aligned} F_k(x)|_{x_1} &= -\tilde{A}_{k0} a^5, \quad F_k^{(1)}(x)|_{x_1} = 0, \quad F_k^{(2)}(x)|_{x_1} = -2! \tilde{A}_{k2} a^5, \quad F_k^{(3)}(x)|_{x_1} = 0, \\ F_k^{(4)}(x)|_{x_1} &= -4! \tilde{A}_{k4} a^5, \quad F_k^{(5)}(x)|_{x_1} = 0, \quad F_k^{(6)}(x)|_{x_1} = -6! \tilde{A}_{k6} a^5, \quad F_k^{(7)}(x)|_{x_1} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь обозначено $F_k(x) = \sum_{m=1}^8 \tilde{C}_{km} \varphi_{km}(x)$, $\tilde{A}_{k6} = \frac{G_k^6}{I_k^0}$, $\tilde{A}_{k4} = \frac{1}{I_k^0} \left(G_k^4 - \frac{6!}{4!} I_k^2 \tilde{A}_{k6} \right)$, $\tilde{A}_{k2} = \frac{1}{I_k^0} \left(G_k^2 - \frac{4!}{2!} I_k^2 \tilde{A}_{k4} - \frac{6!}{2!} I_k^4 \tilde{A}_{k6} \right)$, $\tilde{A}_{k0} = \frac{1}{I_k^0} \left(G_k^0 - 2! I_k^2 \tilde{A}_{k2} - 4! I_k^4 \tilde{A}_{k4} - 6! I_k^6 \tilde{A}_{k6} \right)$.

Отметим, что в решении (10) коэффициент при функции Хевисайда в точке $x = x_1$ (где она не определена) обращается в нуль вместе со своими производными до 7-го порядка включительно.

Постоянные интегрирования C_k^m определялись из граничных условий на двух противоположных краях оболочки, которые задавались в виде обеспечивающих непрерывность силовых нагрузок в угловых точках

при $x = 0$ $v = 0$, $T_{11} = 0$, $M_{11} = 0$, $w = 0$;

при $x = a$ $v = 0$, $T_{11} = T^0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4$, $M_{11} = M^0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4$, $w = 0$. (12)

Подстановка решений (3) в (12) позволяет определить постоянные D_0 и D_1 , которые содержит функция $B(x)$

$$D_0 = (1 + \nu)\alpha\theta_0 \frac{b}{2}, \quad D_1 = \frac{1}{2} \left((1 + \nu)\alpha\theta_0 - \frac{T^0}{B} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right) \frac{b}{a}.$$

Окончательно выражение для функции прогиба примет вид

$$w(x, y) = \sum_k \left(\frac{1 - \nu}{2} \left(L^4 \left(\sum_m C_k^m \varphi_{km} \right) + L^4 \left(\tilde{\varphi}_k \right) + \tilde{w}_k \right) \sin \frac{k\pi y}{b} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (y^2 - by) \left(\frac{\alpha\theta_1(1 + \nu)}{h} + \frac{M^0}{D} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \right) \right), \quad (13)$$

где $\tilde{\varphi}_k(x)$ - частное решение дифференциального уравнения (8), \tilde{w}_k - одно из частных решений первых двух уравнений системы (4). По этой же схеме определяются и тангенциальные компоненты поля перемещений.

2. Рассмотрим пологую оболочку постоянного кручения, перекрывающую в координатной плоскости прямоугольный план со сторонами a и b . Внешняя и внутренняя поверхности оболочки находятся в условиях конвективного

теплообмена с окружающей средой, а на краях оболочки поддерживается нулевая температура. В некоторый момент времени t_1 внешняя поверхность испытывает воздействие сосредоточенной силы, которое продолжается до момента времени t_2 и на этом же временном интервале $|t_2 - t_1| \ll 1$ происходит «скачкообразное» изменение температуры окружающей среды на величину T_1^* со стороны действия сосредоточенной силы $q_0 a_1 b_1 \delta(x - x_1, y - y_1)(H(t - t_1) - H(t - t_2))$, что приводит к кратковременному изменению перепада температуры по толщине термоупругой системы на указанном временном интервале.

Решение несвязанной термодинамической задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,12} - (1-\nu) k_{12} w_{,2} = \frac{\gamma h}{gB} u_{,tt},$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,11} - (1-\nu) k_{12} w_{,1} = \frac{\gamma h}{gB} v_{,tt},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{B}{D} (1-\nu) k_{12}^2 w - \frac{B}{D} (1-\nu) k_{12} (v_{,1} + u_{,2}) = -\frac{\alpha}{h} (1+\nu) \nabla^2 \theta_1 +$$

$$+ \frac{q_0}{D} a_1 b_1 \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) - \frac{\gamma h}{gD} w_{,tt},$$
(14)

где $\theta_1(x, y, t)$ - температурная функция [2, 3], которая является интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\beta} \theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + \left(6 \frac{\kappa}{\lambda h} + \frac{12}{h^2} \right) \theta_1 = 6 \frac{\kappa}{\lambda h} (T_0^+ + T_1^+ (H(t - t_1) - H(t - t_2)) - T^-),$$
(15)

и имеет вид

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{km} \left(\Delta T_{km} \left(1 - 6 \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{1}{s_{km}} \right) e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + 6 \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\Delta T_{km}}{s_{km}} + \right.$$
(16)

$$+ 6 \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} T_1^* \frac{e_{km}}{s_{km}} \left(\left(1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_1)} \right) H(t-t_1) - \left(1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_2)} \right) H(t-t_2) \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Здесь $H(t-t_i)$ ($i=1,2$) – функции Хевисайда, неопределенные, но ограниченные в точках t_i временной оси, T_0^* , T^- – температуры сред с внешней и внутренней поверхностей оболочки, β – коэффициент теплопроводности, κ – коэффициент теплоотдачи. Температурная функция θ_1 связана с температурным полем $\theta(x, y, z, t)$ равенством [2]

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{z}{h} \theta_1(x, y, t). \quad (17)$$

Компоненты поля перемещений термоупругой системы $\bar{u}(u, v, w)$, тождественно удовлетворяющие всем краевым условиям

$$\begin{aligned} x=0, \quad x=a \quad u=0, \quad T_{12}=0, \quad w=0, \quad M_{11}=0, \\ y=0, \quad y=b \quad v=0, \quad T_{12}=0, \quad w=0, \quad M_{22}=0, \end{aligned} \quad (18)$$

будем разыскивать в виде сумм двойных тригонометрических рядов с переменными, по временной координате, коэффициентами

$$u(x, y, t) = \sum_{km} u_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad v(x, y, t) = \sum_{km} v_{km}(t) \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (19)$$

После ряда стандартных процедур метода двойных тригонометрических рядов, с помощью подстановок

$$\begin{aligned} u_{km} &= (1-\nu) k_{12} a \frac{m\pi a}{b} \left(-G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + \tilde{L}_{km}^v \Phi_{km} \right), \quad v_{km} = -(1-\nu) k_{12} a k\pi \left(G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + L_{km}^v \Phi_{km} \right), \\ w_{km} &= G^2 \frac{d^4 \Phi_{km}}{dt^4} + \frac{3-\nu}{2} L_{km} G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + \frac{1-\nu}{2} (L_{km})^2 \Phi_{km}, \end{aligned} \quad (20)$$

тождественно удовлетворяющих первым двум уравнениям системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\bar{u}_{km}(t)$, решение сводится к интегрированию обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений шестого порядка относительно функций $\Phi_{km}(t)$

$$G^6 \frac{d^6 \Phi_{km}}{dt^6} + G^4 G^4 \frac{d^4 \Phi_{km}}{dt^4} + G^2 G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + G^0 \Phi_{km} = A_{km}^1 a + A_{km}^2 e^{\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + \left(q_{km} + A_{km}^3 \left(1 - e^{\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_1)} \right) \right) H(t-t_1) a - \left(q_{km} + A_{km}^3 \left(1 - e^{\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_2)} \right) \right) H(t-t_2) a, \quad (21)$$

где $L_{km} = (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2$, $L_{km}^v = (k\pi)^2 - v \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2$, $\tilde{L}_{km}^v = v(k\pi)^2 - \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2$, $\tilde{L}_{km} = (k\pi)^2 - \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2$, $G = \sqrt{\frac{\gamma h a^2}{g B}}$,

$$G_{km}^4 = \frac{3-v}{2} L_{km} + L_{km}^2 \frac{D}{Ba^2} + 2(1-v)(k_{12}a)^2,$$

$$G_{km}^2 = \frac{1-v}{2} L_{km}^2 + \frac{3-v}{2} L_{km} \left(L_{km}^2 \frac{D}{Ba^2} + 2(1-v)(k_{12}a)^2 \right) + (1-v)^2 (k_{12}a)^2 \tilde{L}_{km},$$

$$G_{km}^0 = \frac{1-v}{2} L_{km}^2 \left(L_{km}^2 \frac{D}{Ba^2} + 2(1-v)(k_{12}a)^2 \right) + (1-v)^2 (k_{12}a)^2 \left((k\pi)^2 L_{km}^v + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 \tilde{L}_{km}^v \right),$$

$$A_{km}^1 = (1+v) \frac{a}{h} \frac{D}{Ba^2} L_{km} \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\alpha \Delta T_{km}}{s_{km}}, \quad A_{km}^2 = (1+v) \frac{a}{h} \frac{D}{Ba^2} L_{km} \alpha \Delta T_{km} \left(1 - 6 \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{1}{s_{km}} \right),$$

$$A_{km}^3 = (1+v) \frac{a}{h} \frac{D}{Ba^2} L_{km} \frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{e_{km}}{s_{km}} \alpha T_1^+.$$

Интегралы уравнений (21) запишутся

$$\Phi_{km}(t) = C^1 \cos \frac{\lambda^1 t}{G} + C^2 \sin \frac{\lambda^1 t}{G} + C^3 \cos \frac{\lambda^2 t}{G} + C^4 \sin \frac{\lambda^2 t}{G} + C^5 \cos \frac{\lambda^3 t}{G} + C^6 \sin \frac{\lambda^3 t}{G} + B_{km}^1 a + B_{km}^2 e^{\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + \left(\sum_{l=1}^6 D_l \Phi'_{km}(t) + B_{km}^3(t) \right) H(t-t_1) a + \left(\sum_{l=1}^6 \tilde{D}_l \Phi'_{km}(t) + \tilde{B}_{km}^3(t) \right) H(t-t_2) a. \quad (22)$$

Отметим, что коэффициенты при функциях Хевисайда $H(t-t_l)$ обращаются в нуль вместе со своими производными до пятого порядка включительно при $t = t_l$ ($l=1,2$),

так как постоянные D_i и \tilde{D}_i являются решениями неоднородных алгебраических систем [1,4]

$$\text{при } t = t_1 \left[\sum_{j=1}^6 D_j \varphi'_{km}(t) + B_{km}^3 \right]^{(n)} \Big|_{t_1} = 0, \quad (n = 0,1,2,3,4,5);$$

$$\text{при } t = t_2 \left[\sum_{j=1}^6 D_j \varphi'_{km}(t) + B_{km}^3 \right]^{(n)} \Big|_{t_2} = 0, \quad (n = 0,1,2,3,4,5).$$

Постоянные интегрирования C^j ($j=1,2,3,4,5,6$) определяются из начальных условий, которые задавались в виде $\bar{u} = \bar{0}, \dot{\bar{u}} = \bar{0}$ при $t = 0$.

Уравнения срединных поверхностей пологих оболочек $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z(x,y)\bar{e}_3$ двойкой кривизны и постоянного кручения при расчетах задавались, соответственно в видах [2, 5]

$$z(x,y) = \begin{cases} \tilde{\delta} \left(1 - 2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right) - \text{оболочка двойкой кривизны} \\ \tilde{\delta} \frac{xy}{ab} - \text{оболочка постоянного кручения} \end{cases}$$

$\tilde{\delta}$ - наибольшая высота подъема оболочки над ее планом.

3. На основании полученных решений построены трехмерные изображения поверхностей прогиба и их сечений одной из координатных плоскостей для оболочки двойкой кривизны, а также графики изменений положений точек срединной поверхности оболочки постоянного кручения во времени, при различных значениях температурных величин, интенсивности силовых нагружений границ, температурного скачка, геометрических параметров и числа Био.

Изображения поверхности прогиба для оболочки двойкой кривизны при значениях параметров:

$$\frac{a}{b} = 0,9901, \quad x_1 = \frac{a}{4}, \quad \frac{h}{a} = 0,005, \quad k_{11} = -4 \frac{\tilde{\delta}}{a^2}, \quad k_{22} = -4 \frac{\tilde{\delta}}{b^2},$$

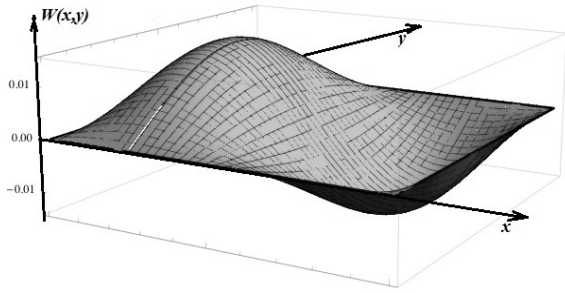


Рис. 1. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50,$

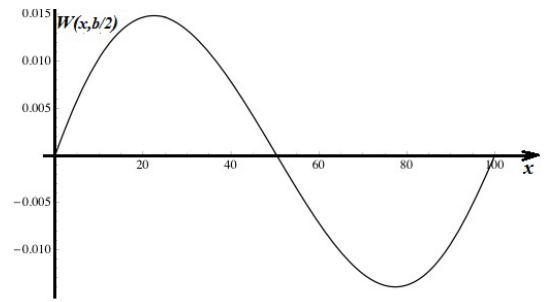


Рис. 2. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50,$

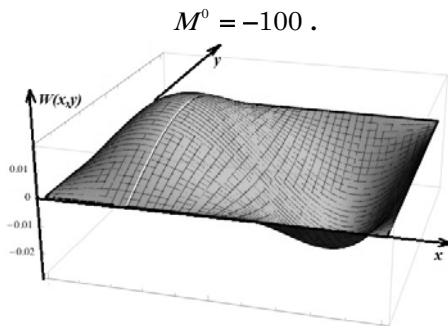


Рис. 3. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50,$

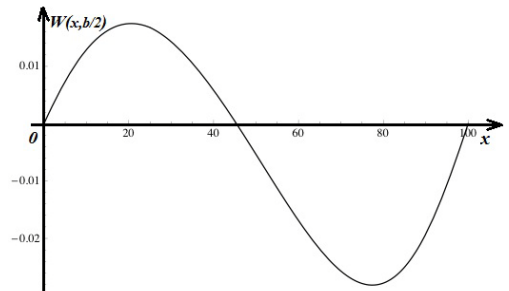


Рис. 4. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50,$

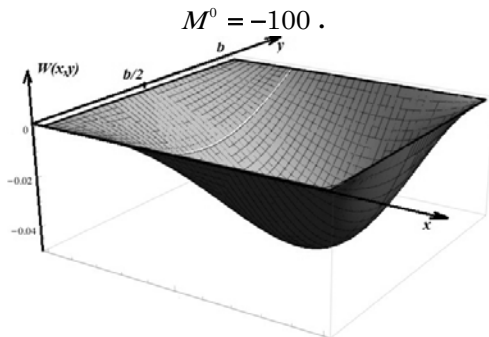


Рис. 5. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \theta_0 = 0, T^0 = 20, \theta_1 = 0, M^0 = -100.$

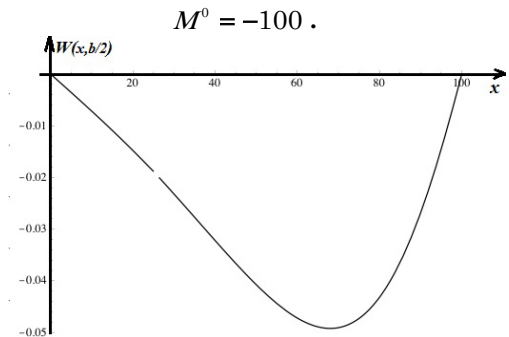


Рис. 6. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \theta_0 = 0, T^0 = 20, \theta_1 = 0,$

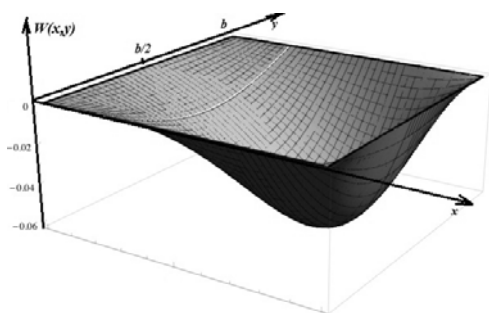


Рис. 7. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 0, T^0 = 20, \theta_1 = 0, M^0 = -100.$

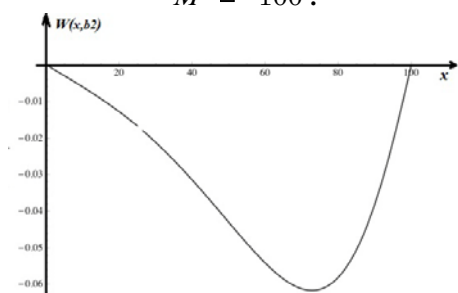


Рис. 8. $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 0, T^0 = 20, \theta_1 = 0,$

$M^0 = -100.$

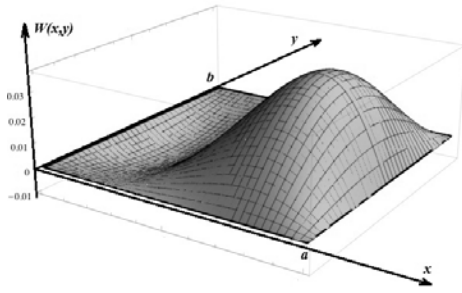


Рис. 9. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 50$, $T^0 = 20$, $\theta_1 = -50$,
 $M^0 = 100$.

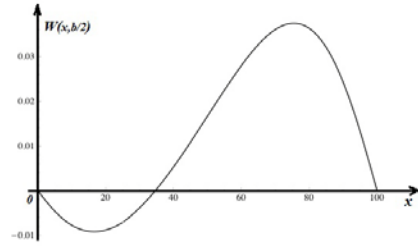


Рис. 10. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 50$, $T^0 = 20$, $\theta_1 = -50$,
 $M^0 = 100$.

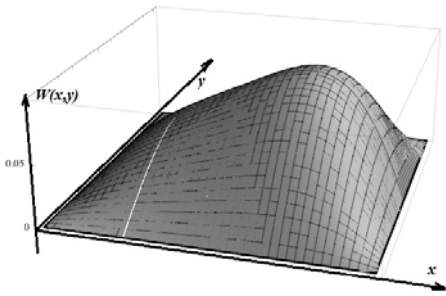


Рис. 11. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 50$, $T^0 = 20$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = 100$.

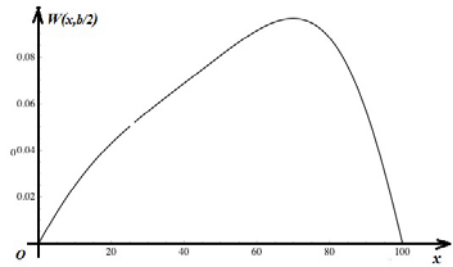


Рис. 12. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 50$, $T^0 = 20$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = 100$.

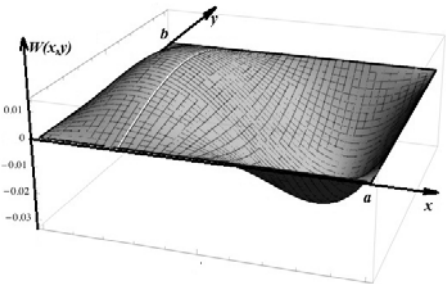


Рис. 13. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 0$, $T^0 = 0$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

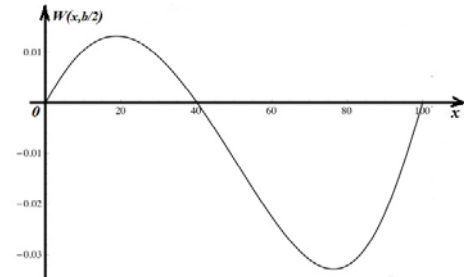


Рис. 14. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 0$, $T^0 = 0$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

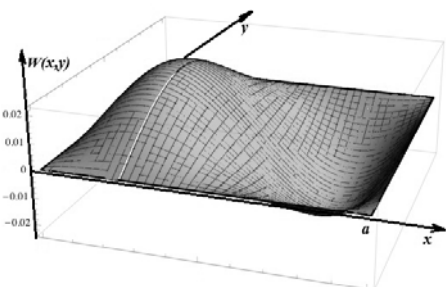


Рис. 15. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

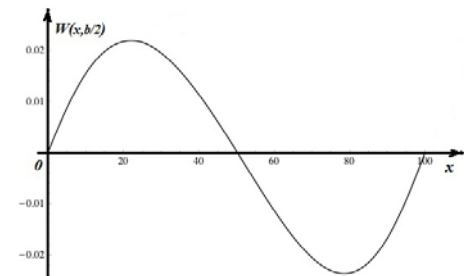


Рис. 16. $\frac{\delta \tilde{z}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

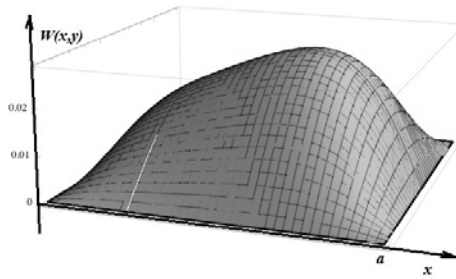


Рис. 17. $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

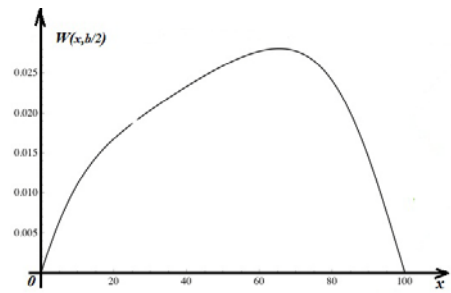


Рис. 18. $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$,
 $\theta_1 = 50$, $M^0 = -100$.

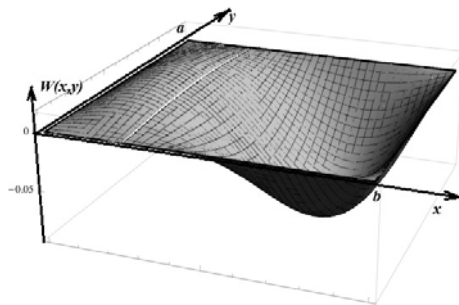


Рис. 19. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$, $\theta_1 = 50$,
 $M^0 = -100$.

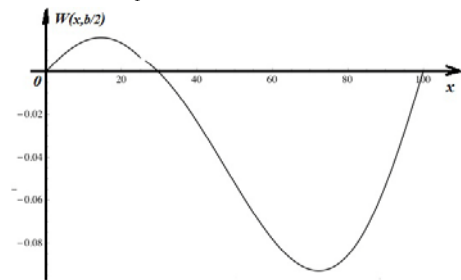


Рис. 20. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\theta_0 = 100$, $T^0 = 50$,
 $\theta_1 = 50$, $M^0 = -100$.

Количественный анализ выявил следующие закономерности:

- прогиб оболочки двоякой кривизны и конфигурация поверхности прогиба малочувствительны к изменениям параметров θ_0 и T^0 (Рис.13-16);
- существенное влияние на прогиб и конфигурацию поверхности прогиба оказывают параметры θ_1 и M^0 . С увеличением указанных параметров, при прочих равных условиях, прогибы оболочки растут (Рис. 9-12);
- на конфигурацию поверхности прогиба значительно влияет параметр $\frac{b}{a}$ (Рис. 17-19).

Во всех рассмотренных случаях увеличение стрелы подъема оболочки над планом ведет к росту величины прогиба во всех точках срединной поверхности оболочки, даже в случае «холодной» оболочки ($\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0$) (Рис.1-8).

На основании полученных решений для оболочки постоянного кручения построены изображения изменений форм прогибов в различные моменты времени (внутри и вне временного интервала $|t_2 - t_1|$) и графики движения точки срединной поверхности оболочки с координатами $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ при значениях параметров: $a = 100$ см, $\frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{h} = 0,005$, $\frac{a_1}{a} = 10^{-3}$, $\frac{b_1}{b} = 10^{-3}$, $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$, $t_1 = 1$ сек, $t_2 = 1,005$ сек, $T_0^* = T^* = 20^\circ C$, материал типа «дюралюминий». На рис. 21-27 кривая 1 соответствует $t = 1,0025$, кривая 2 соответствует $t = 2$, кривая 3 соответствует $t = 3$.

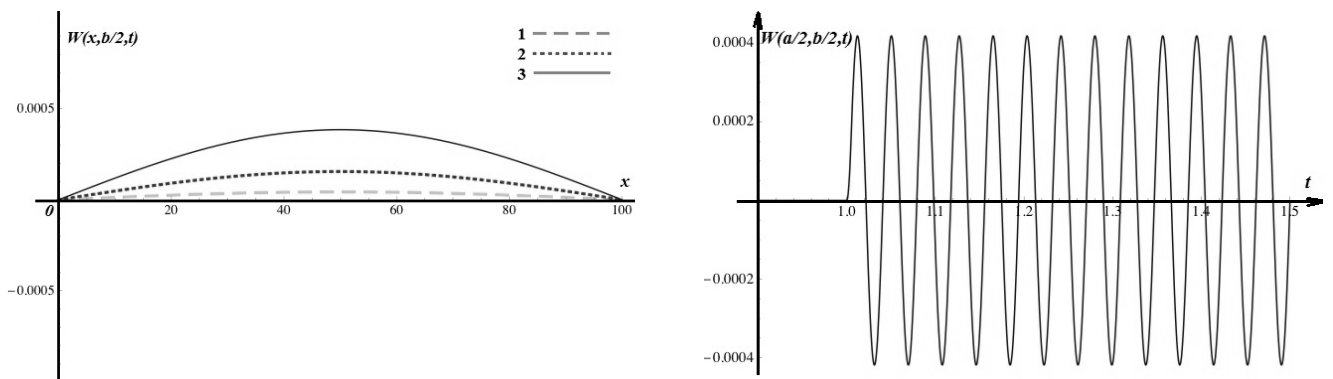


Рис. 21. $Bio = 20$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 0$.

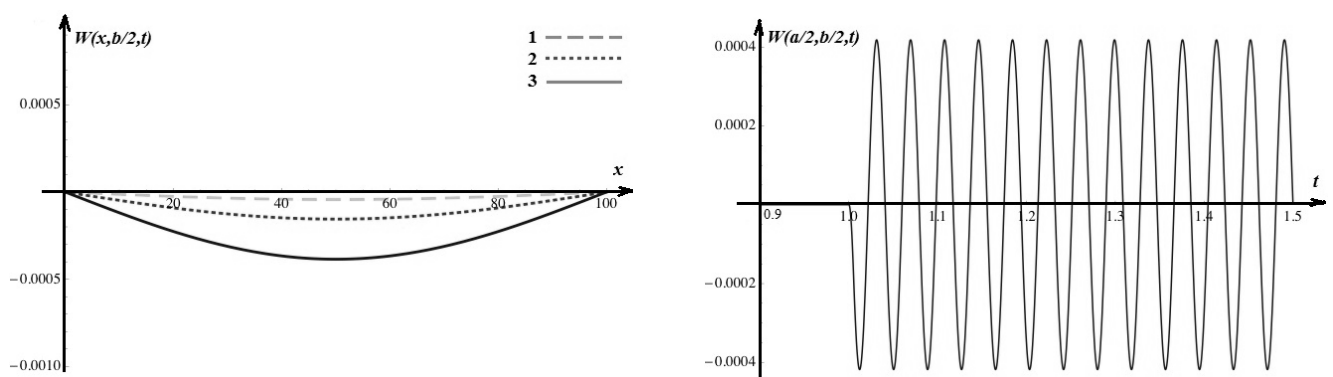


Рис. 22. $Bio = 20$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$, $q_0 = -5$, $T_1^* = 0$.

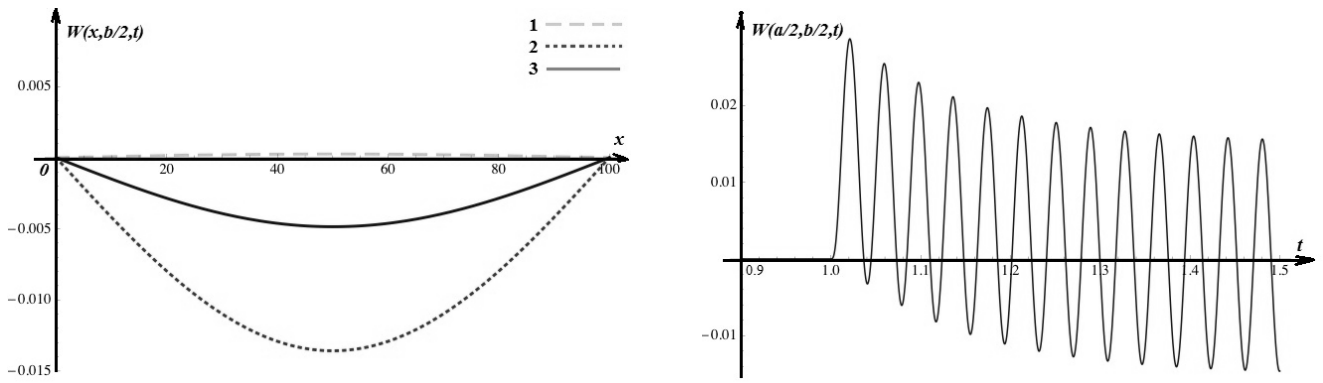


Рис. 23. $Bio = 20$, $\frac{\delta \approx}{h} = 2,5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 200$.

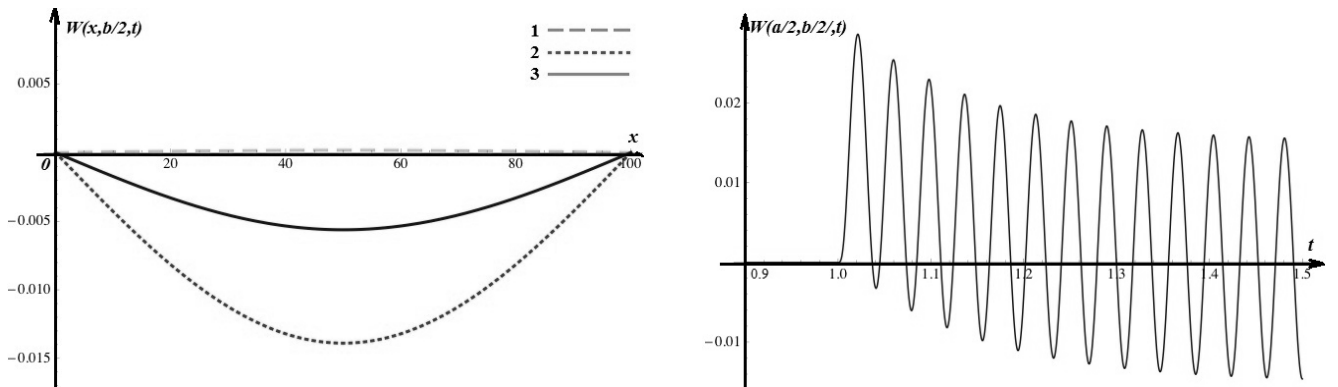


Рис. 24. $Bio = 20$, $\frac{\delta \approx}{h} = 2,5$, $q_0 = -5$, $T_1^* = 200$.

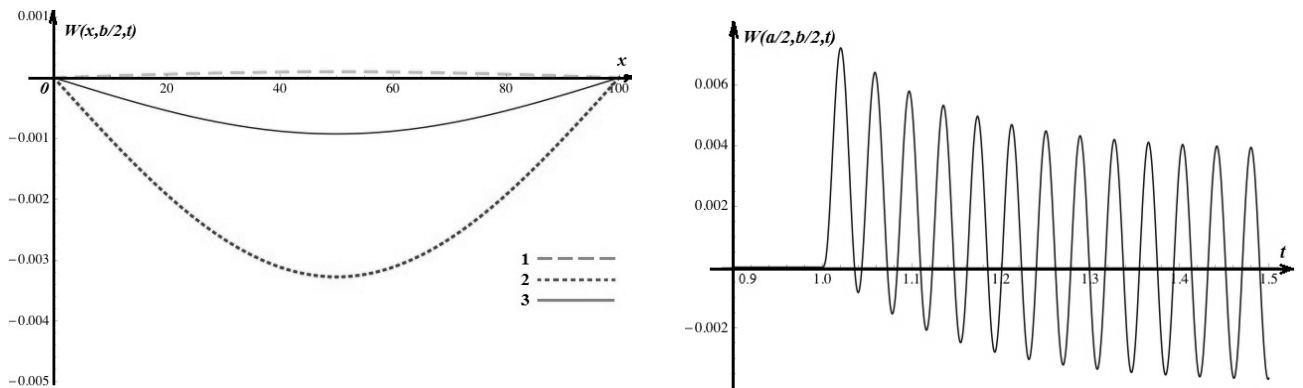


Рис. 25. $Bio = 20$, $\frac{\delta \approx}{h} = 2,5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 50$.

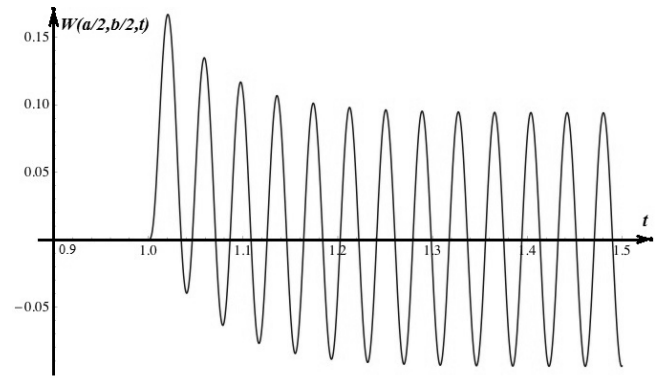
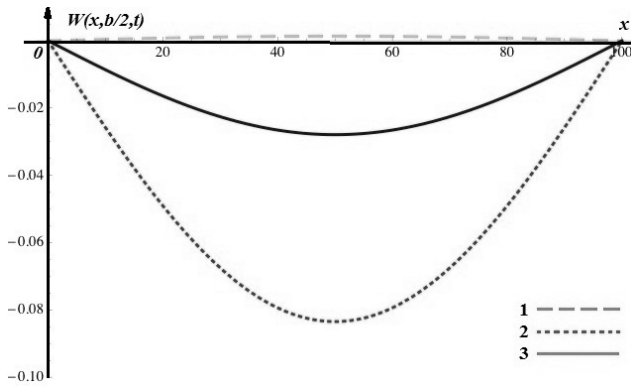


Рис. 26. $Bio = 500$, $\frac{\delta}{h} = 2,5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 50$.

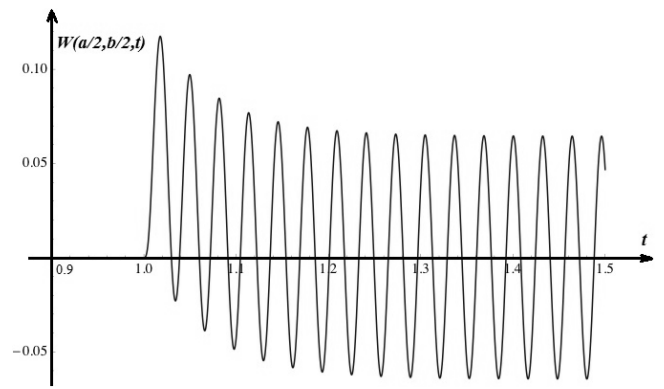
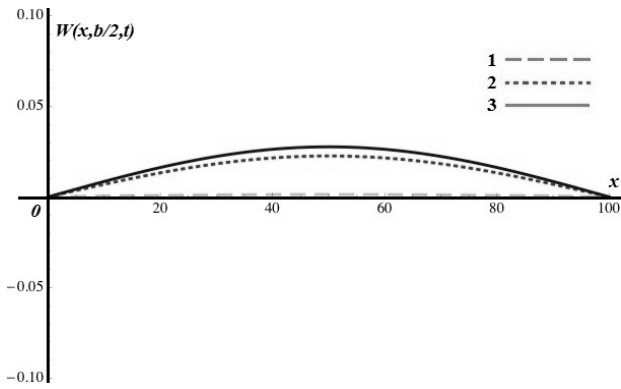


Рис. 27. $Bio = 500$, $\frac{\delta}{h} = 5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 50$.

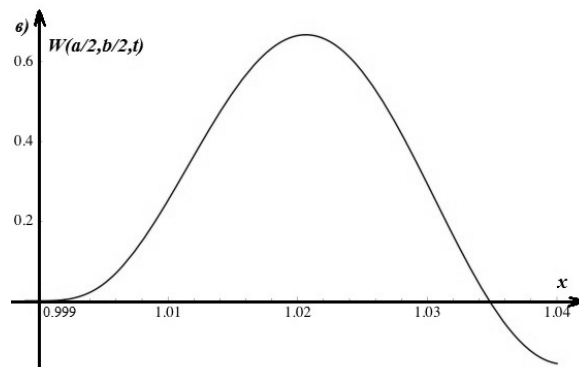
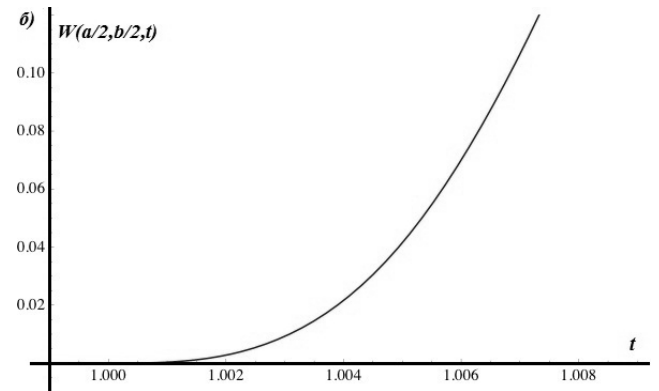
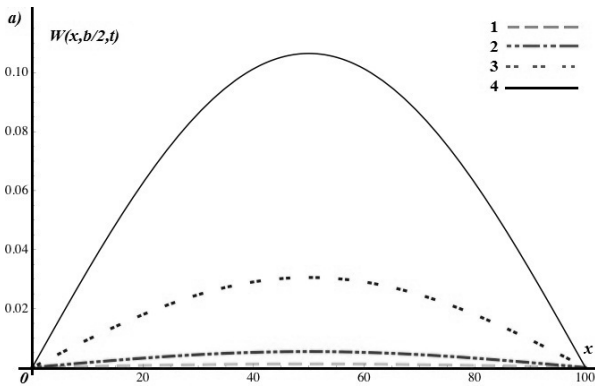


Рис. 28. $Bio = 500$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$, $q_0 = 5$, $T_1^* = 200$; а) $W\left(x, \frac{b}{2}, t\right)$ для различных значений времени: 1 – соответствует $t = 1,0015$, 2 – $t = 1,0025$, 3 – $t = 1,0045$, 4 – $t = 1,007$, б) $W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$, $t \in [0,999; 1,01]$, в) $W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$, $t \in [0,999; 1,04]$.

Количественный анализ показал:

- величины размахов колебаний незначительно уменьшаются с увеличением относительной стрелы подъема оболочки – параметр $\frac{\tilde{\delta}}{h}$, этот процесс сопровождается увеличением частоты колебаний (Рис. 26, 27);
- при отсутствии перепада температуры по толщине колебания симметричны относительно временной оси и происходят с постоянной амплитудой (Рис. 23, 24). При этом, как и следовало ожидать, знак прогиба, при прочих равных условиях, зависит от направления сосредоточенной силы только при отсутствии температурного скачка (Рис. 21, 22);
- наличие скачкообразного изменения температуры (параметр T_1^*) на временном интервале $|1,4 - 1,0|$ сек нарушает отмеченную симметрию, колебания асимметричны и при $t > 1,4$ сек симметрия восстанавливается. С увеличением параметра Био размахи колебаний значительно возрастают (Рис. 25, 26) при той же частоте;
- после прекращения кратковременного температурно-силового воздействия прогибы оболочки продолжают расти в течение временного промежутка почти в 4 раз превосходящего временной интервал нагружения (Рис. 28).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-08-00644 А).

Библиографический список

1. Белосточный Г.Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек. Доклады Академии военных наук. №1. Поволжское межрегиональное отделение. Саратов. 1999. С. 14-25.
2. Рассудов В.М., Красюков В.П., Панкратов Н.Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Саратов. Изд-во Саратовского университета, 1973. 154 с.
3. Огибалов П.М., Грибанов В.Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. М., Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
4. Мыльцина О.А., Белосточный Г.Н. Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // Вестник Московского авиационного института, 2014 г., том 21, № 2. с. 169-174.
5. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Москва - Ленинград, Стройиздат, 1966. 302 с.