

УДК 531.5

## **Методика обработки данных авиационной гравиметрии с учетом пространственной неоднородности гравитационной аномалии.\***

Д.Р. Дорошин

### **Аннотация**

Рассматривается решение задачи авиационной гравиметрии с учетом ее пространственной статистической неоднородности. Задача сводится к оцениванию в пространстве состояний для систем с марковскими скачками. Рассмотрено применение методики оценивания параметров аномалии силы тяжести и погрешностей системы, основанное на решении задачи идентификации для модели вида смеси скользящих средних с марковскими скачками. Решение задачи идентификации позволяет построить оптимальный калмановский сглаживатель для оценивания аномалии на траектории. Приведены результаты тестирования данной методики на полетных данных.

### **Ключевые слова**

гравиметрия; аномалия силы тяжести; скрытые марковские модели; mjls; обучение; распознавание; фильтр калмана;

### **1. Введение**

Гравиметрия – наука, изучающая силу тяжести. Авиационная гравиметрия занимается определением силы тяжести по измерениям гравиметра на траектории полета летательного аппарата (ЛА). Наличие погрешностей измерений системы требует введения дополнительных предположений как о структуре погрешностей, так и о структуре силы тяжести. Стандартным подходом для авиационной гравиметрии является оптимальное стохастическое оценивание [1, 2], при котором сила тяжести в процессе полета и погрешности измерений моделируются стационарными случайными процессами. При этом задача сводится к задаче оценивания для линейных систем в пространстве состояний [1, 2].

Моделирование силы тяжести вдоль траектории стационарным случайным процессом предполагает однородное распределение притягивающих масс в районе съемок. Данное предположение не всегда адекватно реальности, к примеру, для участков с преобладающе гористой местностью. В работе [3] предложена модель статистической пространственной неоднородности силы тяжести, описывающая неоднородное распределение притягивающих масс в земной коре. Неоднородность силы тяжести в пространстве эквивалентна нестационарности силы тяжести на траектории ЛА. Для описания нестационарности

---

\* Работа частично поддержана граном РФФИ 10-01-00703-а

используется марковская цепь (МЦ), позволяющая моделировать изменения во времени параметров формирующей линейной системы [3, 4]. Комбинация системы в пространстве состояний и МЦ соответствует модели MJLS (Markov Jump Linear System) [5].

Задача оценивания силы тяжести рассматривается как задача оценивания вектора состояния MJLS модели. Задача может быть поставлена как задача максимизации апостериорной плотности (МАП).

Однако в случае решения задачи авиационной гравиметрии значения некоторых параметров формирующей системы также неизвестны. В данном случае существует ряд субоптимальных алгоритмов идентификации параметров MJLS, основанных на применение EM-алгоритма (Expectation-Maximization algorithm [6]) для решения задачи методом максимизации правдоподобия (ММП) [7, 8, 9]. В работах [10, 11] рассматривается применение методов Монте-Карло для решения задачи идентификации.

В данной работе рассмотрена методика оценивания силы тяжести на траектории, состоящая из двух этапов: идентификации и фильтрации. Задача идентификации MJLS сводится к эквивалентной задаче идентификации для модели вида смеси скользящих средних (СС) [3, 4]. Для данной модели ставятся задачи обучения и распознавания. Задача обучения – оценивание параметров формирующей системы и параметров МЦ. Задача распознавания – оценивание траектории МЦ. Каждая задача является оптимизацией по отдельной группе параметров. Задача обучения решается ММП. Оптимизация проводится с помощью EM-алгоритма [4]. Распознавание решается путем МАП. Задача сводится [4] к алгоритму динамического программирования [12]. Идентификация позволяет оценить изменение параметров системы во времени, что дает возможность на этапе фильтрации получить оценку силы тяжести с помощью алгоритма калмановского сглаживания. Применение предложенной методики рассмотрено на примере обработки полетных данных гравиметра GT1A. Также приведены сглаженные результаты распознавания, учитывающие результаты распознавания на соседних галсах.

## **2. Пространственная неоднородность силы тяжести**

Силу тяжести  $g$  принято представлять в виде суммы нормального поля  $g_0$  и аномалии силы тяжести  $\delta g$  [1]:  $g = g_0 + \delta g$ . Нормальное поле силы тяжести  $g_0$  является функцией географической широты  $\varphi$  и высоты  $h$  над референц-эллипсоидом [1]. Значение вертикальной составляющей  $g_0(\varphi, h)$  вычисляется по формуле Гельмерта [1]. Аномалия силы тяжести  $\delta g(\varphi, \psi, h)$  является, неизвестной, непараметрической функцией широты  $\varphi$ , долготы  $\psi$ , и

высоты  $h$  над референц-эллипсоидом [1]. Для измерения силы тяжести в гравиметрии используется единица измерения ускорения в системе СГС - 1 Гал =  $1 \text{ см/с}^2$ .

Как правило, гравиметрические съемки проводятся путем облета испытательного полигона сетью прямолинейных галсов [1, 2]. При известных координатах  $\varphi, \psi, h$  ЛА в процессе полета, силу тяжести на траектории можно рассматривать как функцию полетного времени  $t$ :  $g(t) = g_0(t) + \delta g(t)$ .

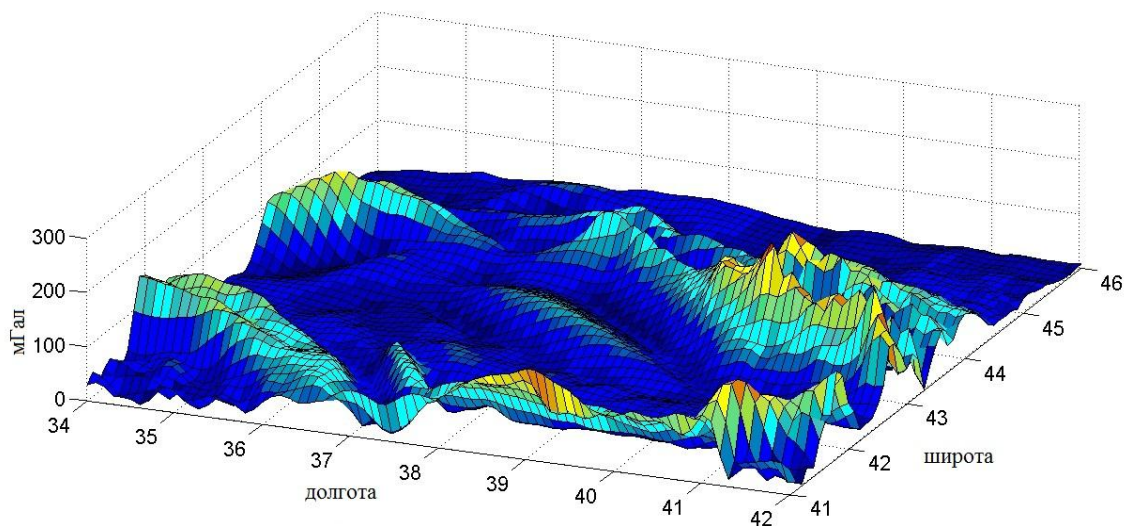


Рис. 1. Аномалия силы тяжести района Черного моря. Гладкие участки аномалии отвечают районам Черного моря и равнинным участкам. Участки интенсивной аномалии соответствуют гористым участкам Крыма, Кавказа и Турции.

Решение задачи авиационной гравиметрии связано с введением дополнительных предположение на структуру измерений системы, так как погрешности измерений сильно влияют на измерения силы тяжести [2]. Одним из стандартных подходов является предположение о том, что ошибки измерений и аномалия силы тяжести - стационарные случайные процессы [1, 2, 13, 14]. В такой постановке задача оценивания аномалии силы тяжести сводится к задаче оптимального стохастического оценивания [2, 13, 14]. Предположение о стационарности рассматриваемых процессов подразумевает, что параметры их функций распределения постоянны во времени. Данное предположение не всегда соответствует действительности. Наличие сильных неоднородностей в распределении притягивающих масс над участком полета ЛА влияет на структуру измеряемой аномалии. Такие неоднородности, например, могут быть вызваны съемками горных и равнинных участков в течение галса. Неоднородность аномалии в пространстве эквивалентна нестационарности аномалии вдоль галса. В качестве примера пространственной неоднородности аномалии, на рис. 1. приведена карта аномалии района Черного моря.

Нестационарность аномалии вдоль галса требует адаптивной подстройки параметров алгоритма оценивания к структуре сигнала. Неточный выбор значений параметров может привести к эффектам пересглаживания/недосглаживания итоговых оценок аномалии [2].

### 3. Динамические уравнения и уравнения измерений

В состав типичной аэрогравиметрической системы входит спутниковая навигационная система (СНС), набор датчиков угловой скорости, и набор высокоточных гравиметров (акселерометров), измеряющих так называемую удельную силу - проекцию силы, действующей на чувствительный элемент (ЧЭ) единичной массы со стороны подвеса, на оси чувствительности прибора. В качестве примера, на рис. 2. изображена структурная схема гравиметра GT-1А производства ЗАО НТП «Гравтехнология» [15], данные которого использовались в работе.

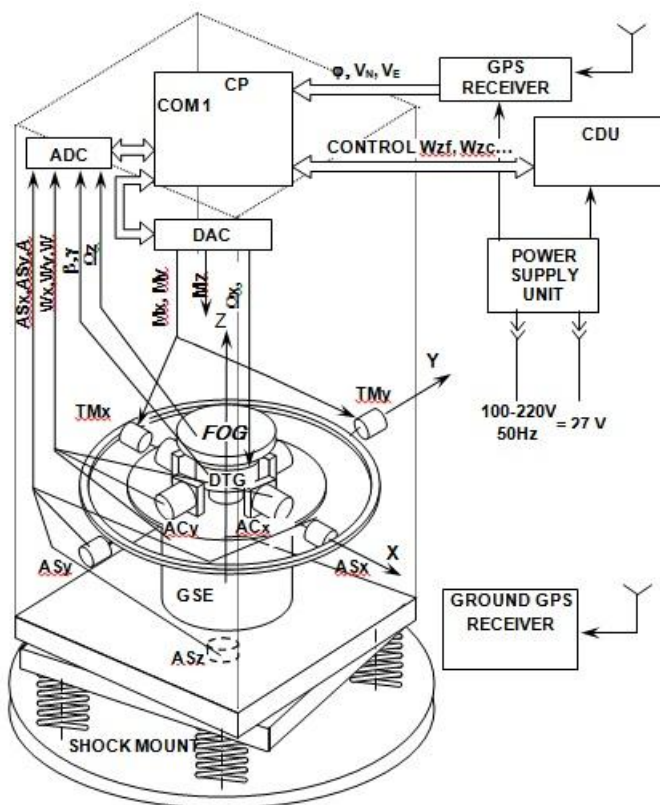


Рис. 2. Структурная схема гравиметра GT1A. Обозначения: DTG – динамический гироскоп, GSE – гравиметрические датчики, GPS RECEIVER – приемник СНС (подробно см. [15])

В данной работе рассматривается задача скалярной авиационной гравиметрии – оценивание вертикальной проекции силы тяжести на траектории по измерениям вертикального канала гравиметра. Проекция удельной силы на географическую вертикаль определяется методами инерциальной навигации [1]. Запишем основное уравнение скалярной аэрогравиметрии [1, 2] в проекции на географическую вертикаль:

$$\dot{V} = f + g_0 + \delta g + g_{ETV} \cdot \quad (1)$$

Здесь  $f$  - вертикальная проекция удельной силы, действующей на ЧЭ со стороны подвеса;  $V$  - вертикальная компонента скорости ЧЭ;  $\Delta g_{ETV}$  - поправка Этвеша [1]. Поправка Этвеша  $g_{ETV}$

обусловлена влиянием кориолисова и центробежного ускорения во время движения [1]. Члены  $g_0$  и  $g_{ETV}$  в (1) с высокой степенью точности определяются по показаниям СНС [2],  $f$  и  $V$  измеряются, а аномалия  $\delta g$  неизвестна и является искомой величиной.

Измерениями в уравнении (1) являются оценка  $V'$  вертикальной скорости ЧЭ, вычисленная по показаниям СНС, и величина вертикальной проекции удельной силы, действующей на ЧЭ. Частота измерений СНС обычно существенно ниже частоты измерений гравиметра [1, 2], так что измерения гравиметра можно путем интерполяции с высокой точностью привести к частоте СНС [2]. Уравнения измерений гравиметра и СНС можно записать в виде:

$$f'(t_k) = f(t_k) + \delta f(t_k), \quad (2)$$

$$V'(t_k) = V(t_k) + \delta V(t_k), \quad (3)$$

где  $t_k - t_{k-1} = \Delta t$  - интервал дискретизации СНС,  $\delta f(t_k)$  и  $\delta V(t_k)$  - ошибки измерений удельной силы и вертикальной скорости.

#### 4. Стохастическая модель измерений. Постановка задачи оценивания

В данной работе рассматривается модель аномалии [13] с формирующим шумом переменной интенсивности [3, 4]:

$$\nabla^m \delta g(t_k) = q(t_k), \quad E[q(t_k)q(t_l)] = Q(t_k)\delta_{k,l}, \quad (4)$$

где  $\nabla^m$  оператор  $m$ -ой конечной разности назад, и  $q(t_k)$  - центрированный гауссов белый шум в дискретном времени  $t_k$ . Выбор параметра  $m$  позволяет строить адекватные модели для аномалий в геологически разных регионах [2, 13].

В качестве модели шума СНС рассматривается нестационарный центрированный гауссов белый шум [3, 4]:

$$E[\delta V(t_k)\delta V(t_l)] = R(t_k)\delta_{k,l}. \quad (5)$$

Модель в виде белого шума хорошо согласуется с физикой фазовых измерений СНС [14]. Переменная во времени дисперсия моделирует влияние помех многолучевости и потери спутников на измерения СНС.

Обозначим  $\delta V(t_k) = r(t_k)$ . Комбинируя формирующие уравнения для аномалии (4), шума (5) составим следующую систему уравнений [4]:

$$\begin{cases} \nabla^m \delta g(t_k) = q(t_k) & E[q(t_k)q(t_l)] = Q(t_k)\delta_{k,l} \\ z(t_k) = \delta g(t_k) + \frac{1}{\Delta t} \nabla r(t_k) & E[r(t_k)r(t_l)] = R(t_k)\delta_{k,l} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $z(t_k)$  - измерения аномалии, полученные с использованием разностного эквивалента основного уравнения авиационной гравиметрии (1) и уравнений измерений (2, 3):

$$z(t_k) = \frac{\nabla V'(t_k)}{\Delta t} - f'(t_k) - g_0(t_k) - g_{ETV}(t_k).$$

Система (6) представляет из себя процесс авторегрессии, измеряемый с шумом, который может быть сведен к системе в пространстве состояний [16]. Введем вектор состояния:

$$y(t_k) = (\delta g(t_k), \delta g(t_{k-1}), \dots, \delta g(t_{k-m+1}), r(t_k), r(t_{k-1}))^T$$

В терминах вектора состояний система (6) записывается в виде:

$$\begin{cases} y(t_k) = Ay(t_{k-1}) + Be(t_k) \\ z(t_k) = Cy(t_k) \end{cases}, \quad (7)$$

где  $A, B, C$  - формирующие матрицы для системы в пространстве состояний [16],  $e(t_k)$  - центрированный двумерный гауссов шум, составленный из формирующих шумов системы (6):

$$e(t_k) = \begin{pmatrix} q(t_k) \\ r(t_k) \end{pmatrix}, \quad O(t_k) = E[e(t_k)e^T(t_l)] = \begin{pmatrix} Q(t_k) & 0 \\ 0 & R(t_k) \end{pmatrix} \delta_{k,l}. \quad (8)$$

В случае, когда  $Q(t_k), R(t_k)$  - известные функции времени, задача оптимального оценивания вектора состояния  $y(t_k)$  решается методом оптимального сглаживания [17, 18]. Критерий оптимизации – МАП. В авиационной гравиметрии, как правило, отсутствует точная априорная информация об интенсивности силы тяжести и об уровне ошибок СНС. Для постановки задачи оценивания введем модель на дисперсии формирующих шумов системы. Дисперсии  $Q(t_k), R(t_k)$  предполагаются кусочно постоянными функциями, принимающими значения из наборов:  $Q(t_k) \in \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_1}\}, R(t_k) \in \{R_1, R_2, \dots, R_{N_2}\}$ . В каждый момент времени  $t_k$  дисперсии формирующих шумов могут принимать значения из пары  $\{Q_i, R_j\}$ . Общее число возможных пар дисперсий -  $N = N_1 N_2$ .

Для описания дисперсий как функций времени, вводится стохастическая модель. Введем МЦ, состоящую из  $N$  состояний. Обозначим  $s(t_k) \in \{1, 2, \dots, N\}$  - состояние МЦ в момент времени  $t_k$ ,  $S = [s(t_0), s(t_1), \dots, s(t_{T-1})]$  - траектория цепи, где  $T$  - количество отсчетов. МЦ определяется набором переходных  $a_{i,j}$  и начальных  $\pi_i$  вероятностей:

$$a_{i,j} = P_S\{s(t_k) = j | s(t_{k-1}) = i\}, \quad i, j = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (9)$$

$$\pi_i = P_S\{s(t_0) = i\}, \quad i = \{1, 2, \dots, N\}. \quad (10)$$

Пронумеруем все возможные пары дисперсий  $\{Q_i, R_j\}$  индексами от 1 до  $N$ . Каждое состояние МЦ ассоциируем с соответствующей парой дисперсий. Так, как состояние МЦ  $s(t_k)$  задает значения дисперсий формирующих шумов в момент  $t_k$ , траектория цепи  $S$  задает дисперсии  $Q(t_k), R(t_k)$  как функции времени.

Если рассматривать систему в пространстве состояний (7), то траектория МЦ определяет зависимость ковариационной матрицы  $O(t_k)$  от времени. Представленная модель является частным случаем модели MJLS [5]. Также, в литературе фигурирует название Switching State Space Model [9]. В общем случае, MJLS описывает процесс в пространстве состояний с переменными во времени параметрами  $\{A, C, O\}$ . При этом параметры MJLS модели могут принимать значения из конечного множества, и каждый возможный набор параметров ассоциирован с состоянием МЦ.

Задача оценивания аномалии может быть поставлена как задача МАП:

$$\tilde{y}(t_k) = \operatorname{argmax}_{y(t_k)} f_Y(y(t_k) | Z),$$

где  $Z = [z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_{T-1})]$  - набор измерений на галсе. Сложность данной задачи заключается в том, что часть параметров системы (7) неизвестны. Для идентификации параметров MJLS существует ряд субоптимальных алгоритмов идентификации [7-11].

В данной работе используется подход, описанный в [3, 4], основанный на сведении задачи оценивания MJLS модели к задаче оценивания для модели вида смеси СС, являющейся скрытой марковской моделью (СММ) специального вида. Данная методика позволяет построить оценивание аномалии в несколько этапов, каждый из которых является оптимизацией по определенной группе параметров.

#### 1. Идентификация:

- Регуляризация: Нормализация отношения сигнал-шум (ОСШ). Аппроксимация модели смеси СС.
- Обучение: Оценивание всех возможных дисперсий формирующих шумов, переходных и начальных вероятностей МЦ.
- Распознавание: Оценивание пути МЦ. Определение дисперсий формирующих шумов как функций времени.

#### 2. Фильтрация: Оценивание аномалии при известных дисперсиях формирующих шумов.

Задача идентификации MJLS сводится к эквивалентной задаче идентификации для модели вида смеси СС:

$$x(t_k) = \sum_{l=0}^K c_l q(t_{k-l}) + \sum_{l=0}^L d_l r(t_{k-l}), \quad (11)$$

где  $x(t_k)$  - измеряемый процесс,  $q(t_k)$ ,  $r(t_k)$  - белые шумы в дискретном времени,  $K$ ,  $L$  - порядки СС. Дисперсии шумов кусочно постоянны, и могут принимать значения из конечного

множества. Как и в случае MJLS, возможные пары дисперсий ассоциированы с состояниями МЦ. Порождающий данные (11) процесс представлен на схеме 1.

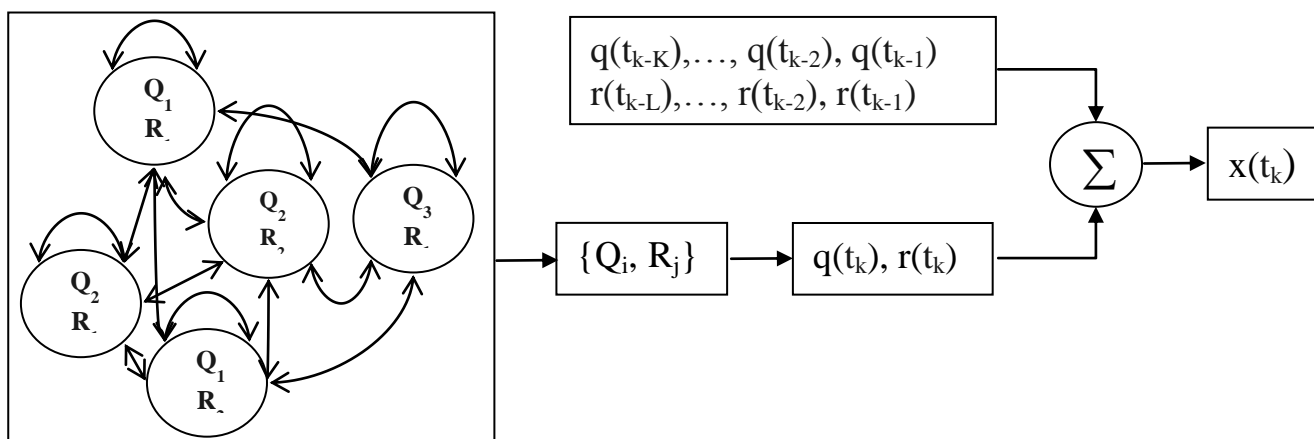


Схема 1. Модель смеси СС с марковскими скачками параметров.

Задача обучения ставится как задача ММП. Для оптимизации используется EM-алгоритм. В отличие от модели в пространстве состояний, процесс (11) обладает конечным радиусом корреляции. Это позволяет реализовать алгоритм прямого обратного хода [4], являющийся частью EM-алгоритма. Задача распознавания ставится как задача МАП, и сводится [4] к алгоритму динамического программирования.

Проведение обучения и распознавания позволяет оценить дисперсии формирующих шумов как функции времени. Далее задача оценивания аномалии сводится к задаче нестационарного калмановского сглаживания [17, 18] для системы (7) – этап фильтрации.

#### 4. Идентификация

Задача идентификации решается для процесса вида смеси СС. Рассмотрим процесс  $x(t_k) = \nabla^m z(t_k)$ , представимый в виде смеси СС:

$$x(t_k) = q(t_k) + \frac{1}{\Delta t} \nabla^{m+1} r(t_k). \quad (12)$$

Здесь  $q(t_k)$  - тривиальное СС, отвечающее полезному сигналу – аномалии,  $\frac{1}{\Delta t} \nabla^{m+1} r(t_k)$  - СС, отвечающее шуму СНС. Процесс (12) является частным случаем процесса (11).

##### 4.1. Регуляризация

Особенностью данных аэрогравиметрии является низкое ОСШ, так как шумовая помеха на несколько порядков больше полезного сигнала [2]. Поэтому задача идентификации плохо обусловлена в том смысле, что второй член в (12) на несколько порядков больше первого члена. С целью повышения обусловленности задача идентификации сводится в область низких частот, где энергии двух сигналов сопоставимы. Эта операция проводится при помощи сглаживания и прореживания данных. После сглаживания и прореживания данные не представляются



моделью смеси СС. Для прореженных данных строится аппроксимирующая модель в виде смеси СС.

Ширина низкочастотной области при сглаживании выбирается исходя из априорных соображений о дисперсиях  $Q$  и  $R$  (на этапе регуляризации  $Q$  и  $R$  предполагаются не зависящими от времени). В данной работе для сглаживания используется окно Кайзера [19]. Частота среза фильтра  $\omega_s$  выбирается так, чтобы в области  $|\omega| < \omega_s$  энергия компоненты аномалии и энергия компоненты шума СНС (12) были соизмеримы [4].

Фильтрация данных представляет свертку сигнала (12) с импульсной характеристикой фильтра [19]. В результате сглаживания коэффициенты СС в (12) сворачиваются с коэффициентами фильтра [19]. Это приводит к тому, что порядки СС существенно увеличиваются. Это неблагоприятно для задачи идентификации, так как для оценивания неизвестных параметров требуется рассматривать блоки данных большого размера. Чтобы избавиться от избыточности данных, применяется прореживание данных. Наблюдения прореживаются в  $n$  раз так, чтобы новая частота Найквиста  $\omega_n = \pi/n$  прореженного сигнала совпадала с частотой подавления фильтра  $\omega_{stop}$  [19]. Частота подавления фильтра Кайзера  $\omega_{stop}$  определяется как  $\omega_{stop} = \omega_s + \omega_p/2$ , где ширина переходной области фильтра  $\omega_p$  - одна из характеристик фильтра. Фильтрация данных до частоты подавления позволяет минимизировать влияние маскировки частот при прореживании [19].

Прореживание данных в общем случае приводит к тому, что данные не представляются в виде смеси СС. Чтобы вернуть структуру смеси СС, в прореженной временной сетке строится новая аппроксимирующая модель:

$$x'(\tau_k) = \sum_{l=0}^{K'} c_l' q'(\tau_{k-l}) + \sum_{l=0}^{L'} d_l' r'(\tau_{k-l}), \quad \tau_k - \tau_{k-1} = n\Delta t. \quad (13)$$

Здесь  $q'(\tau_k)$ ,  $r'(\tau_k)$  - формирующие шумы в прореженном времени  $\tau_k$ ,  $K'$ ,  $L'$  - порядки СС после аппроксимации. Аппроксимация строится, используя МНК в спектральной области [3, 4]. Далее, для краткости, штрихи будем опускать. Учитывая вышесказанное, (13) представится в следующем виде:

$$x(\tau_k) = \sum_{l=0}^K c_l q(\tau_{k-l}) + \sum_{l=0}^L d_l r(\tau_{k-l}), \quad \tau_k - \tau_{k-1} = n\Delta t \quad (14)$$

## 4.2. Обучение

Задача обучения – это задача оценивания параметров  $\Theta = \{a_{ij}, \pi_i, Q_i, R_j\}$  модели по измерениям (14). Данная задача эквивалентна задаче оценивания соответствующих параметров модели в пространстве состояний (7). При обучении используются измерения со всех полетных галсов. При этом предполагается, что аномалия на одном галсе не коррелирует с аномалией на

другом, что является допущением для близких галсов. Проиндексируем данные индексом галса  $w$ :

$$X(w) = [x(\tau_0, w), x(\tau_1, w), \dots, x(\tau_{T(w)-1}, w)], \quad w = 1, 2, \dots, W$$

Здесь  $T(w)$  - количество наблюдений на галсе с индексом  $w$ ,  $W$  - количество галсов. Обозначим  $p = \max\{K, L\}$ . Каждый набор  $X(w)$  порожден некоторой последовательностью состояний  $S(w)$  МЦ [3, 4]:

$$S(w) = [s(\tau_{-p}, w), \dots, s(\tau_0, w), s(\tau_1, w), \dots, s(\tau_{T(w)-1}, w)]$$

В данном случае множество неизвестных параметров  $\Theta$  включает неизвестные дисперсии формирующих шумов, матрицу переходных вероятностей, и индивидуальные для каждого набора галса, векторы начальных вероятностей:  $\Theta = \{Q_i, R_j, a_{ij}, \pi_i(w)\}$ .

Задача обучения ставится как задача ММП:

$$\tilde{\Theta} = \operatorname{argmax}_{\Theta} f_X(X(1), X(2), \dots, X(W) | \Theta)$$

Оптимизация осуществляется при помощи EM-алгоритма, стандартного для оценивания параметров СММ [20]. EM-алгоритм – итерационный алгоритм [6]. Обозначим  $\Theta_m$  набор параметров, оцененный на  $m$ -ой итерации EM-алгоритма. Параметры  $\Theta_{m+1}$  получаются путем оптимизации целевой функции EM-алгоритма:

$$\Theta_{m+1} = \operatorname{argmax}_{\Theta} U(\Theta, \Theta_m),$$

где  $U(\Theta, \Theta_m)$  - целевая функция EM-алгоритма:

$$U(\Theta, \Theta_m) = \sum_{w=1}^W \sum_{S(w)} \log(f_{X,S}(X(w), S(w) | \Theta)) P_S\{S(w) | X(w), \Theta_m\}. \quad (15)$$

Путем применения ряда преобразований целевая функция EM-алгоритма представляется в виде суммы компонент, зависящих от различных групп параметров [4]. Оптимизация по одной группе параметров не зависит от другой группы. Оценивание матрицы переходных вероятностей и векторов начальных вероятностей МЦ проводится путем прямой оптимизацией целевой функции EM-алгоритма [4].

Оптимизация параметров СС при помощи EM-алгоритма сводится к нелинейной оптимизационной задаче. Задача решается путем численной оптимизации (15) с помощью алгоритма модифицированного покоординатного спуска [21]. В качестве начальных условий для алгоритма покоординатного спуска брались значения параметров на текущей итерации  $\Theta_m$ . Итерации прекращались, когда относительное приращение целевой функции (15) становилось меньше заданного порога.

### 4.3. Распознавание

Задача распознавания решается методом МАП. Задача рассматривается для каждого галса в отдельности, поэтому, в дальнейшем, индекс галса в обозначениях будет опускаться:

$$\tilde{S} = \arg \max_S P(S | X, \Theta) \quad (16)$$

Здесь  $\tilde{S}$  - распознанная последовательность состояний. В качестве  $\Theta$  в (16) выбираются параметры, полученные в результате работы алгоритма обучения.

Максимизация (16) по всем возможным последовательностям  $S$  - переборная задача большой вычислительной сложности. Однако, используя свойство марковости, задачу распознавания для смеси СС можно свести [4] к задаче динамического программирования [12].

Воспользовавшись тем, что каждому состоянию МЦ соответствует пара дисперсий  $\{Q_i, R_j\}$ , получим оценки дисперсий  $Q(\tau_k)$ ,  $R(\tau_k)$  как функций времени. Для реализации алгоритмов оптимального оценивания вектора состояния системы (7), необходимы значения дисперсий формирующих шумов  $Q(t_k)$ ,  $R(t_k)$  на непрореженной временной сетке. Данные значения могут быть получены путем интерполяции имеющихся оценок дисперсий  $Q(\tau_k)$ ,  $R(\tau_k)$  с помощью подходящего алгоритма интерполяции.

## 5. Фильтрация

При известных дисперсиях формирующих шумов, полученных на этапе идентификации модели, задача оценивания аномалии сводится к задаче оптимального сглаживания для системы (7). Критерий оптимизации - МАП:

$$\tilde{y}(t_k) = \arg \max_{y(t_k)} f_Y(y(t_k) | Z, O(t_{0:T-1})).$$

Здесь  $O(t_{0:T-1}) = [O(t_0), O(t_1), \dots, O(t_{T-1})]$  - значения ковариационной матрицы (8) формирующей системы (7). Алгоритмически задача оптимального сглаживания решается в два этапа. Первый этап - применение фильтра Калмана (ФК) [22]. ФК оценивает состояние системы  $y(t_k)$  по набору измерений  $[z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_k)]$ . Второй этап - применение обратного фильтра. Для обратного фильтра существуют два подхода к его реализации.

Первый подход заключается в построении ФК для системы в обратном времени. Итоговая оценка  $\tilde{y}(t_k)$  получается путем взвешивания оценок ФК и обратного фильтра [17]. Формирование системы в обратном времени требует обращения матрицы  $A$ . В случае системы (7) матрица  $A$  необратима. Второй подход заключается в построении оптимальной оценки  $\tilde{y}(t_k)$  по оптимальной оценке соответствующей моменту времени  $t_{k+1}$  и оценке ФК, соответствующей моменту  $t_k$ . В качестве реализации алгоритма в данной работе используется

BF-сглаживатель [23], являющийся модифицированным вариантом RTS-сглаживателя [18]. В данной работе для оптимального сглаживания применяется второй подход.

Результаты тестирования работы алгоритмов регуляризации, обучения, распознавания, и фильтрации приведены в следующем разделе.

## 6. Обработка данных

Гравиметрические съемки проходили в районе реки Омолон. Местность в районе съемок представляла собой равнинные участки перемежающиеся горными хребтами и холмистой местностью. Съемки проводились гравиметрической системой GT-1A (производство ЗАО НТП «Гравтехнология») с самолета Ан-26. В процессе съемок проводился облет двух прямоугольных участков местности. Каждый прямоугольный участок покрывался системой параллельных галсов. Дополнительно, для каждого из участков проводились съемки на секущих галсах (секущими галсами называется множество галсов, перпендикулярных основной системе галсов). Самолетом было совершено 12 вылетов. В общей сложности получены измерения на 74 галсах, 17 их которых - секущие. Полетные данные были предоставлены компанией ЗАО «ГНПП Аэрогеофизика».

Средняя скорость самолета в процессе съемок - 100 м/с. Частота съема СНС - 10 Гц. СКО погрешности СНС в определении скорости находилось в диапазоне  $10^{-2}$  -  $2 \cdot 10^{-2}$  м/с. Измерения СНС обрабатывались в дифференциальном режиме, используя данные с двух базовых станций. Частота съема гравиметра – 18,24 Гц. В случае необходимости, в процессе обработке измерения гравиметра приводились к частоте СНС. Предобработка проводилась средствами программного обеспечения GTNAV-GTGRAV.

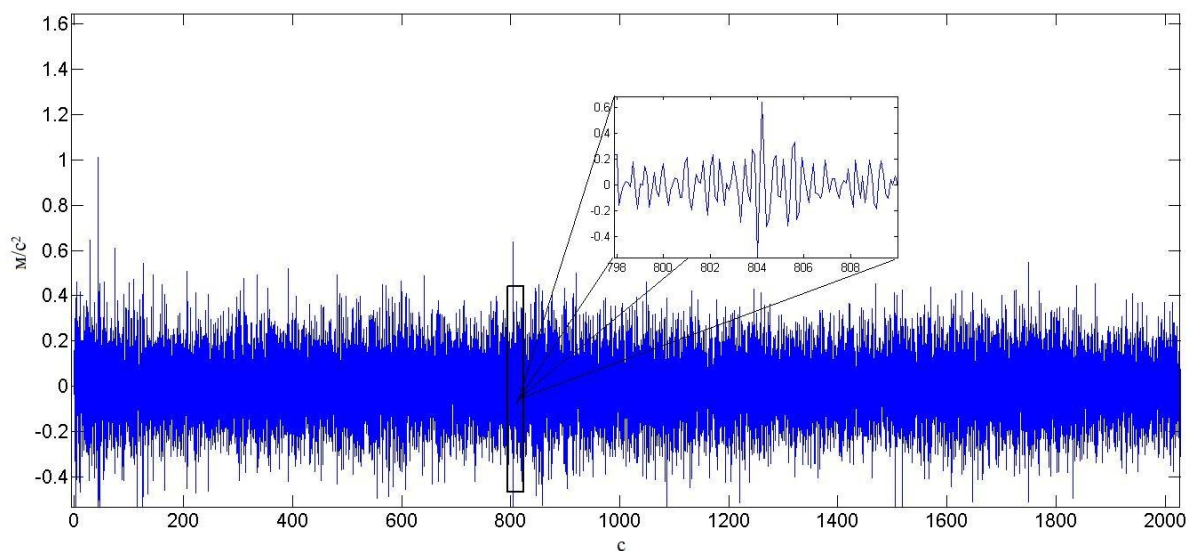


Рис. 3. Пример “сырых” данных  $z(t_k)$  для одного галса.

Перед применением алгоритмов обучения и распознавания проводилась регуляризация данных. Измерения сглаживались низкочастотным фильтром Кайзера. После сглаживания измерения прореживались. Частота прореживания выбиралась так, чтобы минимизировать эффект маскировки частот [18]. При обработке данные прореживались в  $n=100$  раз, что при частоте съема 10 Гц и средней скорости самолета 100 м/с эквивалентно пространственному

разрешению в 1 км. Частота среза фильтра  $\omega_s = 0,0237$  Гц и частота подавления  $\omega_{stop} = 0,05$  Гц, что эквивалентно длине волны 4,22 км и 2 км, соответственно.

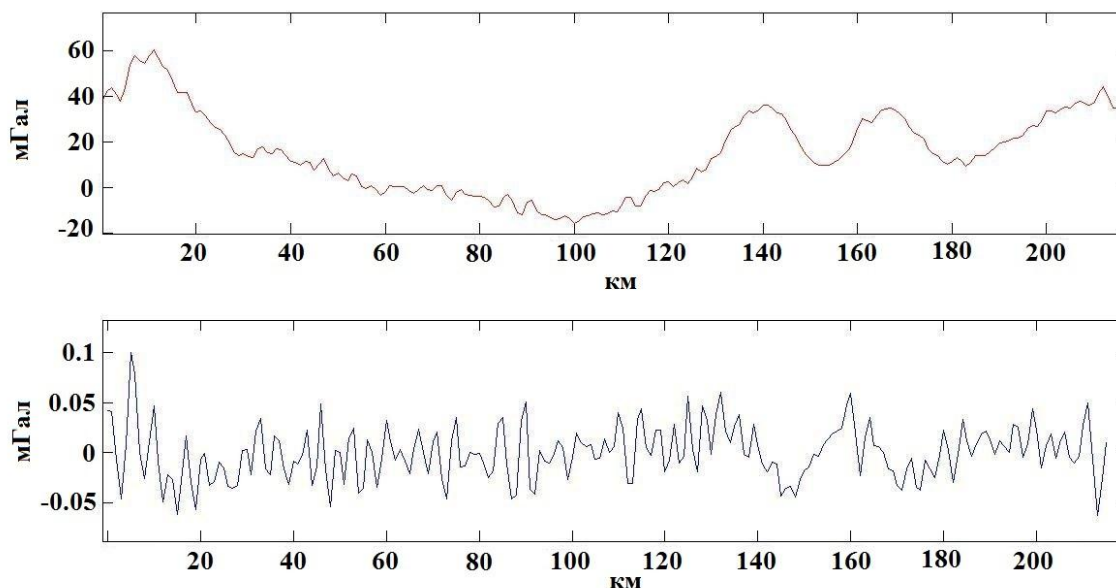


Рис. 4. Пример регуляризованных данных для одного галса. Верхний график – измерения  $z(\tau_k)$ , нижний -  $x(\tau_k)$ .

На рис. 4 представлены регуляризованные данные для одного галса. На графике выделяются два участка со сравнительно интенсивной аномалией: 0 - 20 км, и 120 - 180 км. Участки интенсивной аномалии обусловлены полетом ЛА над горной местностью. Для построения адаптивного фильтра, учитывающего изменение характера аномалии, использовалась МЦ, состоящая из двух состояний. Каждое состояние МЦ эквивалентно паре  $\{Q_i, R\}$ . Здесь  $Q_1$  - дисперсия формирующего шума аномалии, соответствующая участкам с менее интенсивной аномалией,  $Q_2$  - дисперсия, соответствующий участкам с более интенсивной аномалией,  $R$  - дисперсия ошибок определения скорости по данным СНС. Для обучения использовались 57 галсов (все, кроме текущих галсов). В таблице 1 приведены значения оцениваемых параметров в зависимости от итерации алгоритма. Первой строчке соответствуют начальные значения неизвестных дисперсий. В качестве результатов обучения брались значения параметров, полученные на последней итерации алгоритма.

Номер итерации	$Q_1$ (мГал <sup>2</sup> )	$Q_2$ (мГал <sup>2</sup> )	$R$ (см <sup>2/с<sup>2</sup></sup> )
0	0,1000	1,0000	10,0
1	0,1128	0,4632	1,6909
2	0,0832	0,4038	1,6619
3	0,0672	0,3831	1,6678
4	0,0577	0,3731	1,6715
5	0,0516	0,3666	1,6740
6	0,0476	0,3619	1,6762
7	0,0448	0,3583	1,6773
8	0,0428	0,3555	1,6781
9	0,0414	0,3533	1,6787

Таблица 1. Значения оцениваемых дисперсий в зависимости от итерации EM-алгоритма.

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$
0,9876	0,0124	0,0303	0,9697

Таблица 2. Оценки переходных вероятностей МЦ.

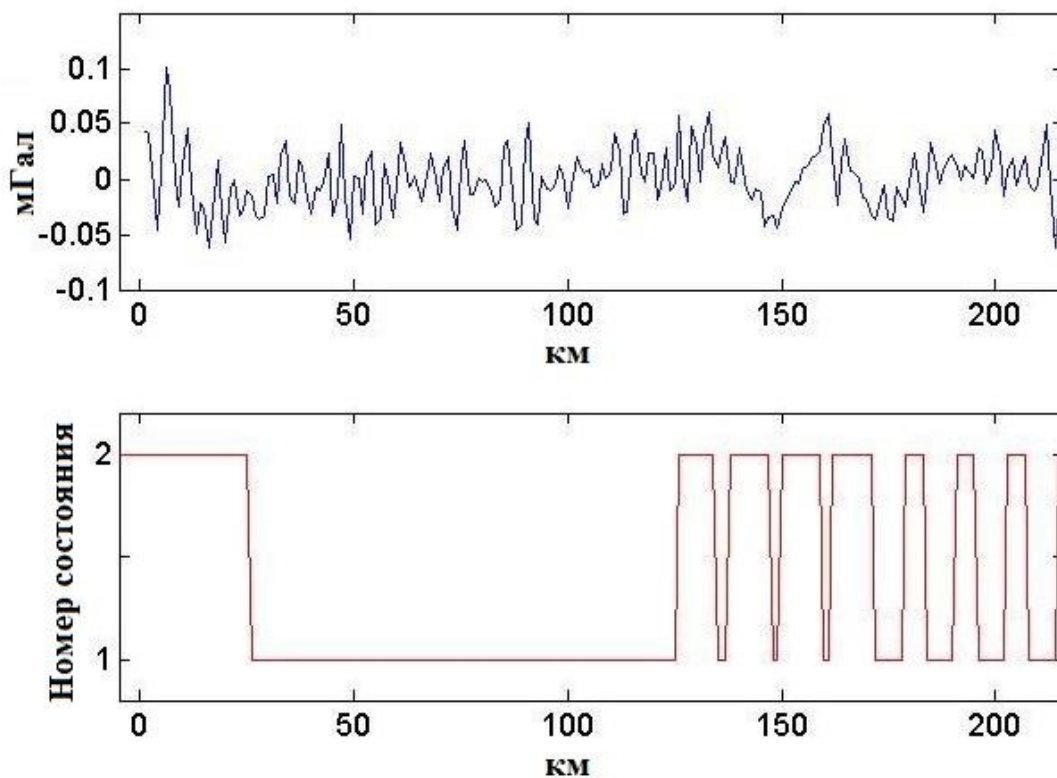


Рис. 5. Регуляризованные измерения  $x(\tau_k)$  и соответствующие им результаты распознавания. Состояние с номером 1 соответствует более интенсивной аномалии (пара  $\{Q_1, R\}$ ), с номером 2 - менее интенсивной (пара  $\{Q_2, R\}$ ).

В процессе обучения также оценивались матрица переходных вероятностей (9) и начальные вероятности (10) для каждого галса. Результаты представлены в табл. 2. Для галса,

представленного на рис. 4, оценка вектора начальных вероятностей есть  $\pi_1 = 0,0246$ ,  $\pi_2 = 0,9753$ .

Следующий этап - распознавание. В качестве параметров модели для распознавания использовались значения параметров полученные в результате работы алгоритма обучения. При распознавании, для каждого галса использовались соответствующие ему значения начальных вероятности. На рис. 5 представлены результаты распознавания для одного галса.

На графике результатов распознавания видны ошибки работы алгоритма - частые смены состояний в интервале 130 - 200 км. На рис. 6 приводятся результаты распознавания на всем множестве галсов. Результаты представлены в виде карты. На карте также видны ошибки распознавания.

Наличие информации о состояниях на соседних галсах позволяет улучшить алгоритм. Для сглаживания результатов распознавания, в данной работе применен алгоритм нелокальных средних (NL-means) [24]. В процессе работы алгоритма происходит переоценка состояния, соответствующего точке  $(t_k, w)$ . Для всех точек соответствующих первому и второму распознанному состоянию, и находящихся в  $\rho$  окрестности данной, проводится сглаживание ядровой функцией  $e^{-h\rho_{(t_i,v)}}$ , где  $\rho_{(t_i,v)}$  - расстояние до точки  $(t_i, v)$ . В результате вычисляются значения  $p_1, p_2$ , которые могут быть интерпретированы как вероятность реализации соответствующего состояния при условии полного набора наблюдений на всех галсах:

$$p_1 = P_S\{s(t_k, w) = 1 | X(1), X(2), \dots, X(W)\}, \quad p_2 = P_S\{s(t_k, w) = 2 | X(1), X(2), \dots, X(W)\},$$

где  $W$  - количество галсов. В качестве результата распознавания берется состояние с максимальной вероятностью.

На рис. 7 представлены результаты сглаживания карты распознавания, использованные для дальнейшей обработки. Сглаживание проводилось при  $h = 1,4$ ,  $\rho = 5$  км. [24].

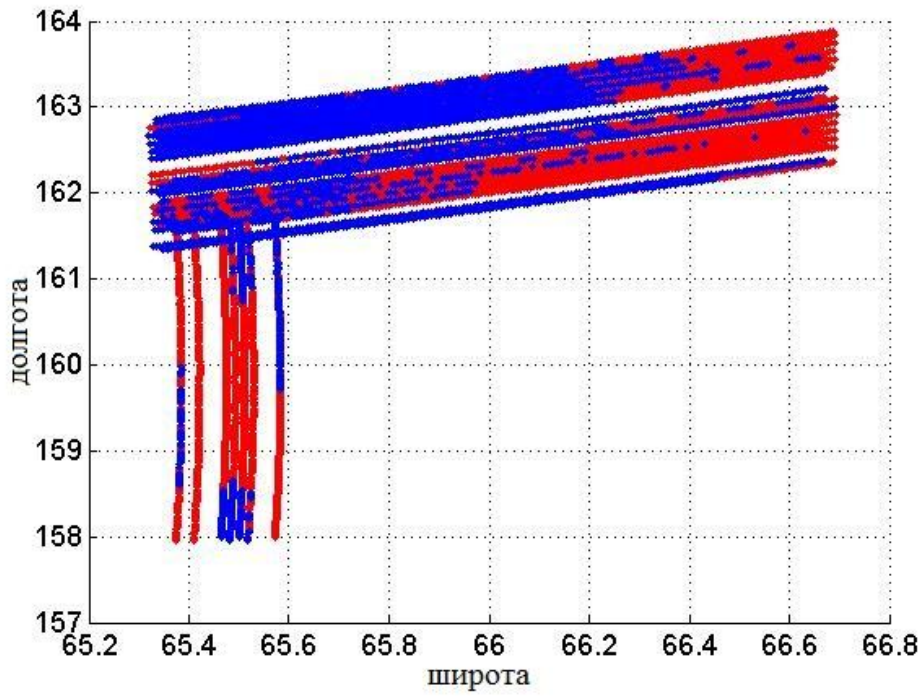


Рис 6. Результаты распознавания на всем множестве галсов. Синие точки – состояние  $\{Q_1, R\}$ , красные – состояние  $\{Q_2, R\}$ .

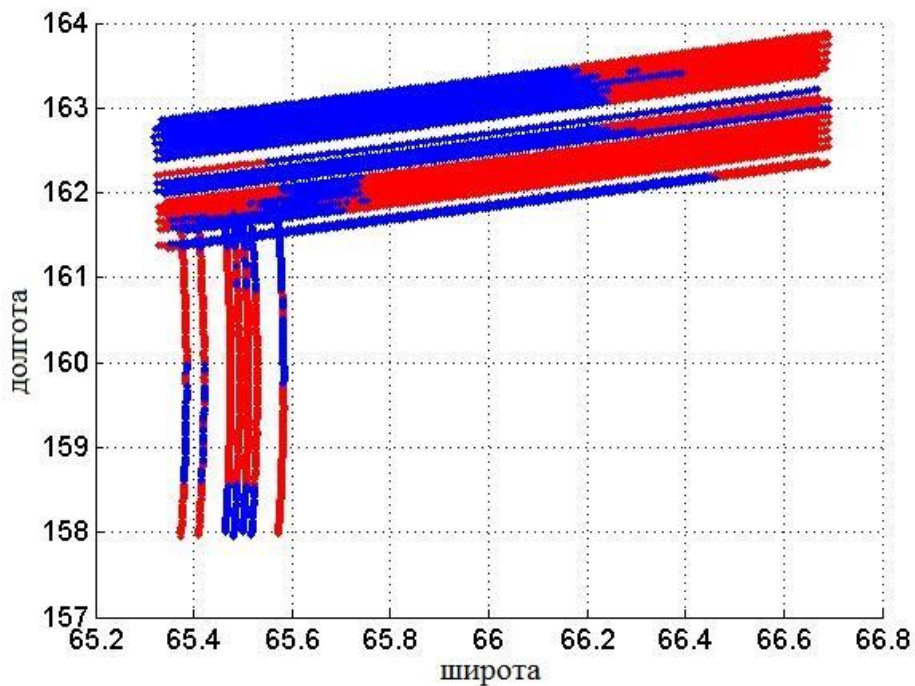


Рис 7. Результаты распознавания на всем множестве галсов после сглаживания. Синие точки – состояние  $\{Q_1, R\}$ , красные – состояние  $\{Q_2, R\}$ .



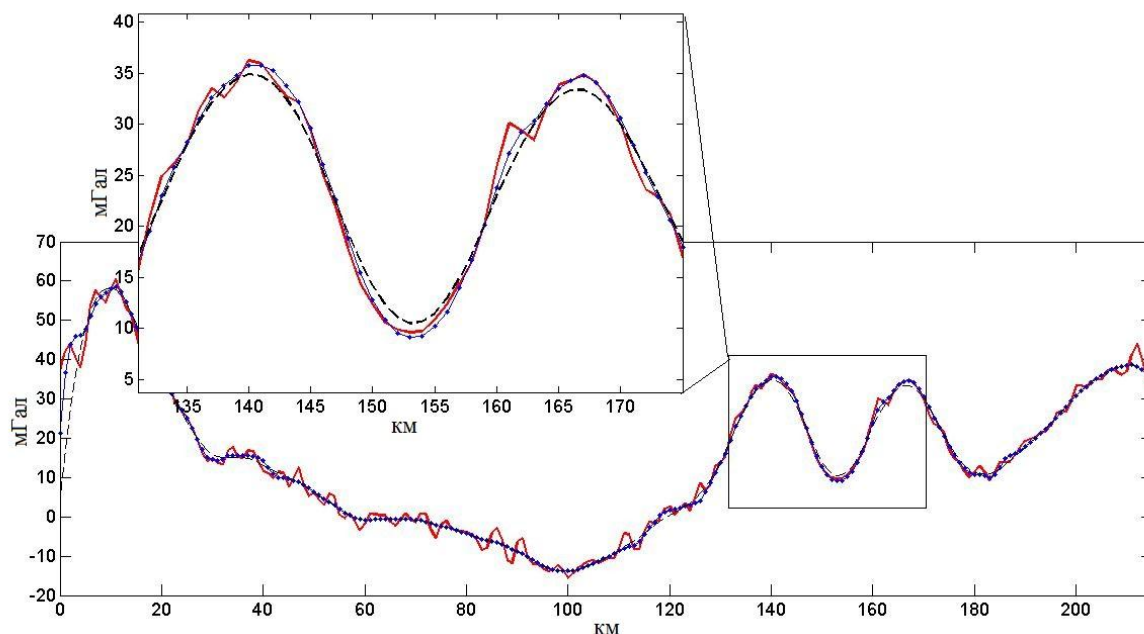


Рис. 8. Сравнение со стационарным сглаживанием. Красная линия – регуляризованные измерения аномалии, синяя линия с точками – адаптивная оценка аномалии, черная пунктирная линия – оценка, полученная стационарным алгоритмом при  $Q(t_k) = Q_1, R(t) = R$ .

На этапе фильтрации использовались сглаженные результаты распознавания. Оценивание аномалии проводилось для каждого галса в отдельности. На рис. 8 представлены результаты оценивания аномалии предложенным алгоритмом. Для сравнения, на рис. 8 также приведен график оценки аномалии, полученный стационарным алгоритмом при  $Q(t_k) = Q_1, R(t) = R$ , где  $(Q_1, R)$  - пара дисперсий, соответствующих первому состоянию. Представлен увеличенный фрагмент участка, соответствующего распознанному второму состоянию. Из графика видно, что неточные значения параметров алгоритма оценивания приводит к эффектам пересглаживания в итоговых оценках. По предварительным выводам, можно сказать, что адаптивный алгоритм позволяет повысить точность оценивания аномалии на 50% для гористых районов съемок. В данном случае, под мерой точности понимается среднеквадратическое отклонение (СКО).

В результате тестирования предложенной методики была получена карта аномалии силы тяжести района съемок. На рис. 9 представлена полученная карты аномалии.

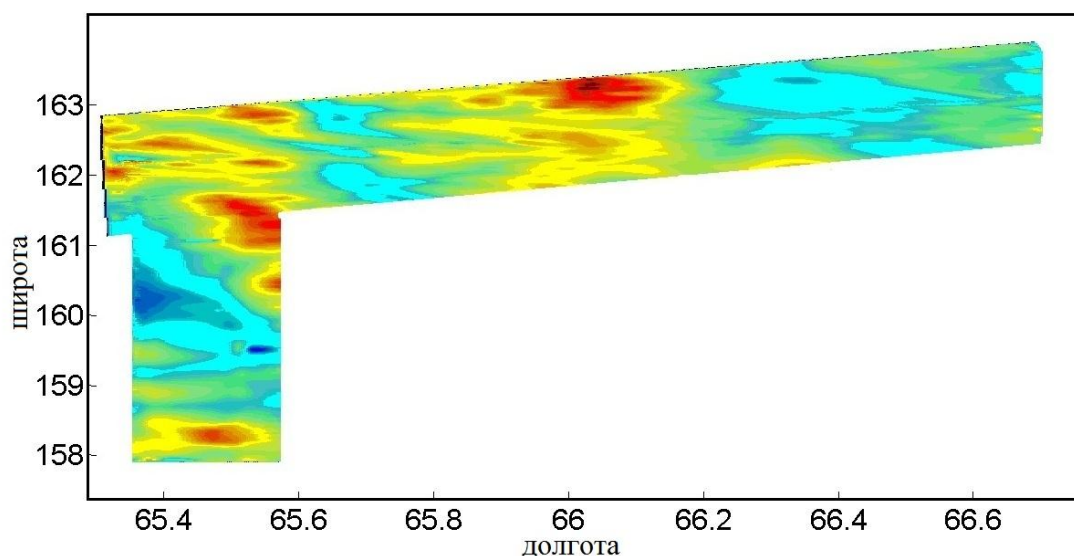


Рис 9. Карта аномалии силы тяжести.

При построении карты применялся метод сглаживания полученных оценок аномалии кубическими сплайнами [25].

### Выводы

Предложена и опробована на полетных данных методика оценивания аномалии силы тяжести с учетом ее пространственной статистической неоднородности.

Идентификация параметров модели данных, состоящая из регуляризации, обучения, и распознавания, позволяет построить оценку аномалии, адаптивную к структуре измерений. Алгоритм регуляризации нормализует ОСШ данных, что позволяет применить алгоритмы обучения и распознавания. Результатом обучения являются оценки статистических параметров аномалии и шума СНС. Распознавание позволяет оценить динамику параметров системы в пространстве. По результатам идентификации, для испытательного полигона выделены участки с различной интенсивностью аномалии силы тяжести. По предварительным оценкам предложенная методика позволяет улучшить точность оценивания (СКО) на 50% для гористых участков съемок.

### Библиографический список

1. Торге В. Гравиметрия/ Пер. с англ.// М.: Мир, 1999.
2. Болотин Ю. В., Голован А. А., Парусников Н. А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний// М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002.

3. *Болотин Ю В., Дорошин Д.Р.* Адаптивная фильтрация данных авиагравиметрии с использованием скрытых марковских моделей// Вестник МГУ. Серия 1, Маткматика. Механика. М.: Издательство МГУ, 2011. 36-42
4. *Bolotin Yu., Doroshin D.* Adaptive in airborne gravimetry with hidden Markov chains// Preprints of the 18<sup>th</sup> IFAC World Congress, Milano, Italy. August-September 2011, 9996-10001
5. *Costa O. L. V., Fragoso M. D., Marques R. P.* Discrete-Time Markov Jump Linear Systems// Springer, 2005
6. *Dempster, A., Laird, N., and Rubin, D.* Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm// J. Royal Statistical Society, Series B, Vol. 39, No 1. 1977, 1-38
7. *Shumway R. H., Stoffer D. S.* Dynamic linear models with switching// J. Amer. Stat. Assoc., Vol. 86, No. 415, September 1991, 763-769.
8. *Kim C.-J.* Dynamic linear models with Markov-switching// J. Econometrics, Vol. 60, issue 1-2, 1994, 1-22.
9. *Ghahramani Z., Hinton G.* Variational Learning for Switching State-Space Models// Neural Computation, Vol 12, No. 4. April 2000, 831-864
10. *Carter, C. K. and Kohn, R.* On Gibbs sampling for state space models. Biometrika, Vol. 81, No. 3 August 1994, 541-553
11. *Athaide C. R.* Likelihood Evaluation and State Estimation for Nonlinear State Space Models// Ph.D. Thesis, Graduate Group in Managerial Science and Applied Economics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA. 1995
12. *Беллман Р.* Динамическое программирование/ Пер. с англ.// М.: ИЛ, 1960.
13. *Болотин Ю.В., Попеленский М.Ю.* Анализ точности решения задачи авиагравиметрии при идентификации параметров гравиметра в полете// Фундам. и прикл. матем., 2005. 11. вып. 7. 167-180.
14. *Stepanov O.A., Blazhnov B.A., Koshaev D.A.* The Efficiency of Using Velocity and Coordinate Satellite Measurements in Determining Gravity Aboard an Aircraft// Proc. of the 9th Saint-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, Russia, St.Petersburg, May 27-29, 2002.
15. *Berzhitzky V.N., Bolotin Y.V., Golovan A.A., Ilyin V.N., Parusnikov N.A., Smoller Y.L., Yurist S.S.* GT-1A Inertial Gravimeter system. Results of flight tests// MSU, 2002.
16. *Katayama T.* Subspace Methods for System Identification// Springer, October 20, 2005.-392с.
17. *Mayne D. Q.* A solution of the smoothing problem for linear dynamic systems// Automatica, Vol 4, 1966, 73-92

18. *Rauch H. E., Tung F., Striebel C. T.* Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems// *AIAA J.*, Vol. 3, No. 8, pp. 1445–1450, August 1965.
19. *Хемминг Р.В.* Цифровые фильтры/Пер. с англ.// М.: Недра. 1987.
20. *Young S.J., Woodland P.C., Byrne W.J.* HTK: Hidden Markov Model Toolkit V1.5// Cambridge University Engineering Department Speech Group and Entropic Research Laboratories Inc., September 1993
21. *Bonnans J.F., Gilbert J.-C., Lemarechal C., Sagastizabal C.A.* Numerical optimization: theoretical and practical aspects// Springer, New York NY, 2003.
22. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems// *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, Vol. 82, No. 1, pp. 35–45, 1960.
23. *Bryson A. E., Frazier M.* Smoothing for Linear and Nonlinear Dynamic Systems// *Proc. Optimum Sys. Synthesis Conf.*, U. S. Air Force Tech. Rept. ASD-TDB, Feb. 1963. 63-119
24. *Buades A., Coll B., Morel J.-M.* A non-local algorithm for image denoising// *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005. CVPR 2005.
25. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам// РиС, 1985

### **Сведение об авторах**

Дорошин Данила Рубенович, аспирант Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, тел.: 8-926-248-75-53, e-mail: <mailto:doroshindr@mail.ru>