

На правах рукописи



Павлов Арсений Михайлович

СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА СТЕРЖНЕЙ

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Темнов Александр Николаевич

Официальные оппоненты: **Никитин Илья Степанович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
директор, ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва

Смыслов Всеволод Игоревич,
доктор технических наук, доцент,
главный научный сотрудник, ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт имени проф.Н.Е.Жуковского», г. Жуковский

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», г. Томск

Защита состоится 19 июня 2019 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 на базе ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=102636.

Автореферат разослан «__» _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.125.05, к.ф.-м.н., доцент

Федотенков Григорий Валерьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача о собственных колебаниях стержней является классической задачей математической физики. Возможность использования стержней в качестве расчетной модели многих механических систем обуславливает большое число практических приложений данной задачи.

В настоящее время, в различных областях науки и техники все чаще возникает необходимость исследования динамических характеристик механических объектов, моделируемых стержневыми системами, состоящими из упруго-соединенных стержней. Примерами таких объектов являются ракеты-носители (РН) пакетной компоновки и крупногабаритные космические конструкции. В то же время динамика подобных механических систем изучена относительно слабо, что в совокупности указывает на актуальность исследований в данной области.

Целью данной работы является разработка методов расчета, анализа и классификации частот и форм собственных колебаний механических систем, обладающих пространственной симметрией и состоящих из идентичных (боковых) стержней, упруго-соединенных с центральным (пакет стержней).

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Проведено исследование задачи о собственных и свободных колебаниях пакета стержней, совершающих продольные колебания. Исследована симметрия системы исходных дифференциальных уравнений, приведена операторная постановка задачи, и исследован спектр соответствующего оператора. На основании полученных результатов проведена симметричная классификация форм и частот собственных колебаний рассмотренной механической системы
2. Проведено исследование задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих пространственные колебания. Получена алгебра инфинитезимальных операторов системы исходных дифференциальных уравнений. Приведена операторная постановка задачи и сформулирован ряд теорем о спектре соответствующего оператора. Выполнена классификация собственных форм колебаний пакетов с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями

3. Проведен численный расчет собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, для случая четырех боковых стержней

Научная новизна: В ходе работы над диссертацией был применен теоретико-групповой подход для исследования динамики пакета стержней, благодаря чему были получены следующие результаты

1. Проведена классификация форм и частот собственных продольных колебаний пакета стержней по неприводимым представлениям группы S_n
2. Получены выражения для ортопроекторов на пространства неприводимых представлений групп симметрии пакетов стержней, совершающих пространственные колебания, для случаев двух, четырех и шести боковых стержней
3. Разработан метод приведения форм колебаний, соответствующих кратным частотам, к плоскостям пространственной симметрии пакета
4. Разработан метод проектирования вектора внешних нагрузок на пространства неприводимых представлений группы симметрии пакета стержней, при записи слабого решения эволюционной задачи

Методология и методы исследования. В диссертации исследована задача о собственных (свободных) колебаниях пакетов упруго-соединенных стержней без учета демпфирования. Перемещения стержней описаны дифференциальными уравнениями в частных производных с использованием модели Эйлера-Бернулли. Для получения разрешающей краевой задачи был применен метод разделения переменных. При исследовании задачи о собственных колебаниях использовалась спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Классификация форм и частот колебаний, и исследование их свойств проводились с использованием теории представлений конечных групп преобразований симметрии. Для проведения численного расчета частот и форм колебаний с помощью метода конечных элементов использован процессор NX NASTRAN.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих продольные колебания, с использованием теоретико-группового подхода
2. Постановка задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих пространственные колебания
3. Классификация форм собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, по неприводимым представлениям соответствующих групп симметрии. Ортопроекторы и базисные вектора, отвечающие неприводимым представлениям указанных групп для пакета с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями
4. Методика приведения форм собственных колебаний пакета стержней, соответствующих кратным частотам, к плоскостям пространственной симметрии
5. Результаты численного расчета собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, для случая четырех боковых стержней
6. Способ разложения вектора внешних нагрузок на слагаемые, относящиеся к различным неприводимым представлениям группы симметрии пакета стержней

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих, апробированных моделей и математических методов для решения и исследования задач теории колебаний и математической физики. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. 4-ая международная научная конференция «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы», 2013, Москва, Россия
2. Международная конференция «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2015), 2015, Симферополь, Россия

3. Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения – XXVII», 2016, Воронеж, Россия
4. Всероссийская конференция, посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, 2016, Москва, Россия
5. «International graduate summer school in aeronautics & astronautics» IGSS 2016, 2016, Beijing, China
6. Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 2017, Москва, Россия
7. Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция, 2017, Москва, Россия

Личный вклад. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем. Из совместных публикаций в диссертацию включен материал, принадлежащий непосредственно соискателю.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 125 страниц с 28 рисунками и 9 таблицами. Список литературы содержит 113 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** проводится обзор работ, посвященных собственным колебаниям стержней, стержневых систем и их приложениям. Проводится сравнение решения указанной задачи для отдельных стержней с различными условиями закрепления и для стержневых систем. Анализ публикаций и монографий (Балакирев Ю.Г., Докучаев Л.В., Баничук Н.В., Тарлаковский Д.В., Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н., Loewy R., Storey R., Morino Y.) по данной теме показал, что задача о собственных колебаниях стержневой системы типа "пакет" обладает существенно большей размерностью, разнообразим

решений, сложностью анализа и дальнейшего использования полученных результатов по сравнению со случаем отдельного стержня, совершающего пространственные колебания.

Вторая часть первой главы посвящена обзору приложений теории групп к решению задач статики, динамики и устойчивости конструкций, обладающих симметрией, проведенному с целью выявления возможностей использования теоретико-группового подхода при исследовании динамики пакета упруго-соединенных стержней.

Вторая глава посвящена исследованию задачи о собственных колебаниях пакета упруго-соединенных стержней, совершающих продольные колебания. Проведено сравнение результатов, полученных как с помощью формального подхода к нахождению симметрий системы дифференциальных уравнений, так и с помощью интуитивного, когда группа симметрии определяется из пространственной структуры механической системы. Приведено аналитическое решение задачи для случая стержней с постоянными характеристиками, как с использованием группового анализа, так и без. Записано решение задачи Коши для исследуемой механической системы и его групповой анализ.

Рассматривается стержневая система, состоящая из N идентичных стержней длиной l («боковых» стержней), одним концом соединенных с помощью линейно-упругих связей со стержнем, имеющим отличные от них инерционно-жесткостные характеристики («центральный»). Боковые стержни обозначены индексами $1...N$, центральный – нулевым индексом. Продольная жесткость стержней $p_j(x) \in C^1[0,l], j = 0...N$, погонная масса $m_j(x) \in C^0[0,l], j = 0...N$ являются положительными ограниченными функциями координаты x . Боковые стержни соединены с центральным в сечении с координатой l . Расчетная схема представлена на рисунке 1.

Рассмотрены продольные колебания стержней:

$$m_j(x) \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (1)$$

Граничные условия для стержней в сечениях с координатами $x = 0$ и $x = l$ имеют вид:

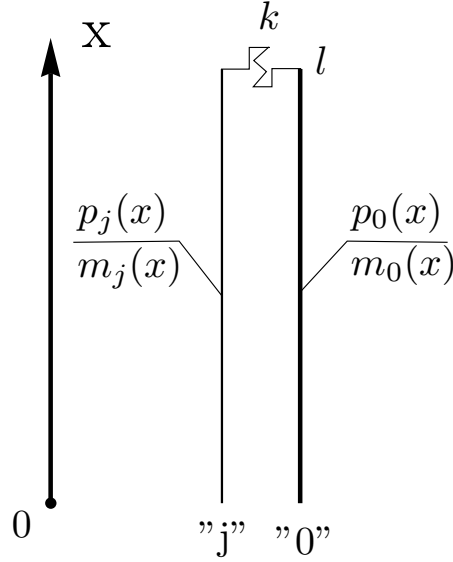


Рис. 1 — Пакет стержней, совершающих продольные колебания

$$\begin{aligned}
 u'_j(0,t) &= 0, \quad j = 0 \dots N \\
 p_j(l) u'_j(l,t) + k(u_j(l,t) - u_0(l,t)) &= 0, \quad j = 1 \dots N \\
 p_0(l) u'_0(l,t) + k \left(N \cdot u_0(l,t) - \sum_{j=1}^N u_j(l,t) \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Переход к задаче о собственных колебаниях, был осуществлен с использованием метода разделения переменных. Было принято, что $u_j(x,t) = u_j(x) \cdot e^{i\omega t}$. В результате, уравнения (1) приняли следующий вид:

$$\frac{1}{m_j(x)} \frac{d}{dx} \left(p_j(x) \frac{du_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot u_j(x) = 0, \quad j = 0 \dots N \tag{3}$$

где $\lambda = \omega^2$.

Для дальнейшего исследования свойств решений рассматриваемой задачи о собственных колебаниях, был проведен симметричный анализ системы уравнений (3).

Была получена алгебра Ли инфинитезимальных симметрий системы (3), которая порождается $N^2 + 1$ векторными полями

$$\begin{aligned}
 v_0 &= u_0 \frac{\partial}{\partial u_0}; \\
 v_{ij} &= u_i \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad i = 1 \dots N, j = 1 \dots N;
 \end{aligned} \tag{4}$$

и $N + 1$ бесконечными подалгебрами

$$v_{\alpha_j} = \alpha_j(x) \frac{\partial}{\partial u_j}, j = 0 \dots N \quad (5)$$

Действия однопараметрических групп, соответствующих найденным инфинитезимальным операторам, были найдены с помощью экспоненцирования выражений (4), (5):

$$\begin{aligned} G_j &: (x, \dots, e^\varepsilon u_j, \dots), j = 0 \dots N \\ G_{ij} &: (x, \dots, u_i + \varepsilon u_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\ G_{\alpha_j} &: (x, \dots, u_j + \alpha_j(x), \dots), j = 0 \dots N \end{aligned} \quad (6)$$

Найденные группы симметрии демонстрируют линейность уравнений (3), при этом, группы G_{ij} указывают на возможность перестановки функций перемещений боковых стержней.

Исследование множества частот собственных колебаний было проведено с использованием операторных методов математической физики, для чего был осуществлен переход к операторной постановке сформулированных выше задач.

Построено гильбертово пространство $H = \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}([0, l], m_j(x)) \right) \ominus \{1\}$ и введены вектор-функции $U = \{u_j\}^T$, где $u_j \in C^{2,2}(L_{2j}([0, l], m_j(x)), [0, \infty))$, $\{1\}$ – единичный вектор.

Скалярное произведение в пространстве H имеет следующий вид:

$$(U^r, U^s) = \sum_{j=0}^N (u_j^r, u_j^s) = \sum_{j=0}^N \int_0^l m_j(x) u_j^r u_j^s dx$$

Уравнениям (1) сопоставлен матричный оператор $A = \text{diag} \left(-\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)$ действующий на множестве $H \supset D(A)$: $\Omega U(t) = 0$, где Ω – оператор граничных условий, определяемый соотношениями (2). С учетом $U(t) = U \cdot e^{i\omega t}$, из уравнений (1), дополненных граничными условиями (2) получена спектральная задача для оператора A

$$AU = \lambda U \quad (7)$$

где $\lambda = \omega^2$.

Лемма 1. *Оператор A – неограниченный, самосопряженный, положительно определенный в H оператор. Квадрат нормы в энергетическом пространстве оператора A имеет вид*

$$\|U\|_A^2 = \sum_{j=0}^N \int_0^l p_j(x) \left(\frac{du_j}{dx} \right)^2 dx + k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_j(l))^2 = 2\Pi > 0 \quad (8)$$

Для оператора A доказана следующая теорема о спектре:

Теорема 1. *Оператор A имеет положительный дискретный спектр собственных значений*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots, \lambda_m \rightarrow \infty$$

и систему собственных функций $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ полную и ортогональную в пространствах H и H_A , при этом справедливы следующие соотношения ортогональности

$$\begin{aligned} (U_m, U_s) &= \sum_{j=0}^N \int_0^l m_j(x) u_{mj} u_{sj} dx = \delta_{ms} \\ (U_m, U_s)_A &= \sum_{j=0}^N \int_0^l p_j(x) \left(\frac{du_{mj}}{dx} \right) \left(\frac{du_{sj}}{dx} \right) dx + \\ &+ k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_{mj}(l)) (u_0(l) - u_{sj}(l)) = \lambda \delta_{ms} \end{aligned} \quad (9)$$

Редукция полученных симметрий системы уравнений (3) на $D(A)$ и дополнительные ограничения связанные с нормировкой собственных функций позволили найти группу симметрии оператора A :

Теорема 2. *Оператор A коммутирует с операторами представления симметрической группы $T(S_n)$ и имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} T(S_n)AU_m &= AT(S_n)U_m = \lambda_m T(S_n)U_m \\ T(S_n)U_m &\in \Lambda \end{aligned}$$

где Λ – множество собственных функций оператора A . Собственные функции оператора A являются базисными функциями неприводимых представлений группы S_n .

Данный вывод, в свою очередь, позволил, используя элементы теории представлений конечных групп, сделать ряд выводов о спектре и собственных элементах оператора A , которые содержит

Теорема 3. *Спектр оператора A распадается на два подспектра $\sigma(A) = \sigma^{(e)}(A) \cup \sigma^{(s)}(A)$. Для собственных элементов оператора A , отвечающих $\lambda_m \in \sigma^{(e)}(A)$ справедливы соотношения*

$$u_1 = u_2 = \dots = u_N$$

а u_0 – функция удовлетворяющая исходной спектральной задаче. Для элементов, отвечающих $\lambda_m \in \sigma^{(s)}(A)$:

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv 0 \\ u_1 &= a_2 \cdot u_2 = \dots = a_N \cdot u_N \end{aligned}$$

причем $\sum_{i=2}^N a_i = -1$

Исходя из структуры и свойств ортопроекторов, соответствующих неприводимым представлениям конечных групп симметрии была доказана

Теорема 4. *Собственные элементы оператора A , отвечающие различным неприводимым представлениям (различным строкам многомерных неприводимых представлений) соответствующей группы S_n являются ортогональны в пространстве \mathbb{R}^n .*

Преимущества теоретико-группового подхода при решении спектральной задачи были продемонстрированы на примере частного случая, соответствующего $N = 2$.

Проектирование множества собственных функций на подпространства неприводимых представлений группы S_2 позволило получить вид базисных векторов этих подпространств: собственные элементы оператора A , принадлежащие подпространству неприводимого представления E имеют компоненты $\{u_0, u_s, u_s\}^T$, элементы принадлежащие подпространству неприводимого представления R_β имеют компоненты $\{0, u_s, -u_s\}^T$.

Собственные функции подпространства $H^{(E)}$ имеют вид

$$u_0(x) = -\frac{\left(\mathbf{ca}\tilde{\lambda}\sin\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right) - \cos\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right)\right)}{\cos\left(\tilde{\lambda}l\right)} \cos\left(\tilde{\lambda}x\right) \quad (10)$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \cos\left(a\tilde{\lambda}x\right)$$

Для подпространства $H^{(R_\beta)}$:

$$u_0(x) = 0 \quad (11)$$

$$u_1(x) = -u_2(x) = \cos\left(a\tilde{\lambda}l\right)$$

Собственные функции спектральной задачи (7) в исходном пространстве H имеют вид:

$$u_0(x) = -\frac{\left(\mathbf{ca}\tilde{\lambda}\sin\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right) - \cos\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right)\right)}{\cos\left(\tilde{\lambda}l\right)} \cos\left(\tilde{\lambda}x\right)$$

$$u_1(x) = \frac{\left(b\tilde{\lambda}\sin\left(\tilde{\lambda}l\right) - \cos\left(\tilde{\lambda}l\right)\right)\left(\mathbf{ca}\tilde{\lambda}\sin\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right) - \cos\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right)\right) - \cos\left(\tilde{\lambda}l\right)\left(\mathbf{ca}\tilde{\lambda}\sin\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right)\right)}{\cos\left(\tilde{\lambda}l\right)\cos\left(\mathbf{a}\tilde{\lambda}l\right)} \cos\left(a\tilde{\lambda}x\right) \quad (12)$$

$$u_2(x) = \cos\left(a\tilde{\lambda}x\right)$$

При расчете, в качестве примера, было принято $a = 1,3$, $b = 2,5$, $c = 0,7$, $l = 1$. На рисунке 2 изображен общий график для определителей частотных матриц $\det(L^{(E)})$, $\det(L^{(R_\beta)})$ и $\det(L)$.

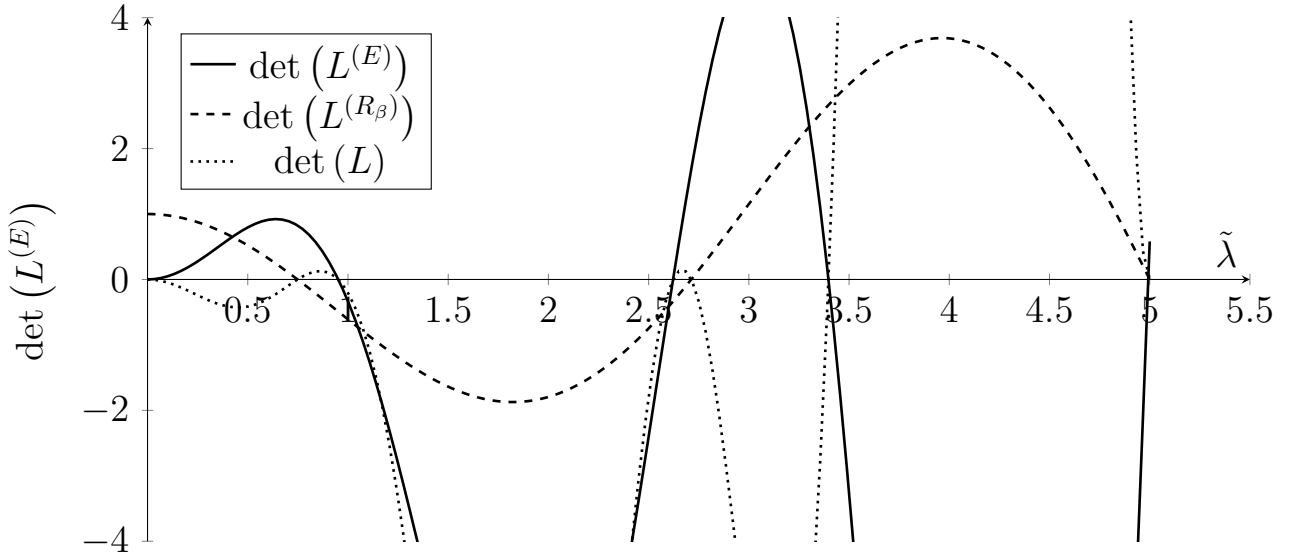


Рис. 2 — Совместный график $\det(L^{(E)})$, $\det(L^{(R_\beta)})$, $\det(L)$

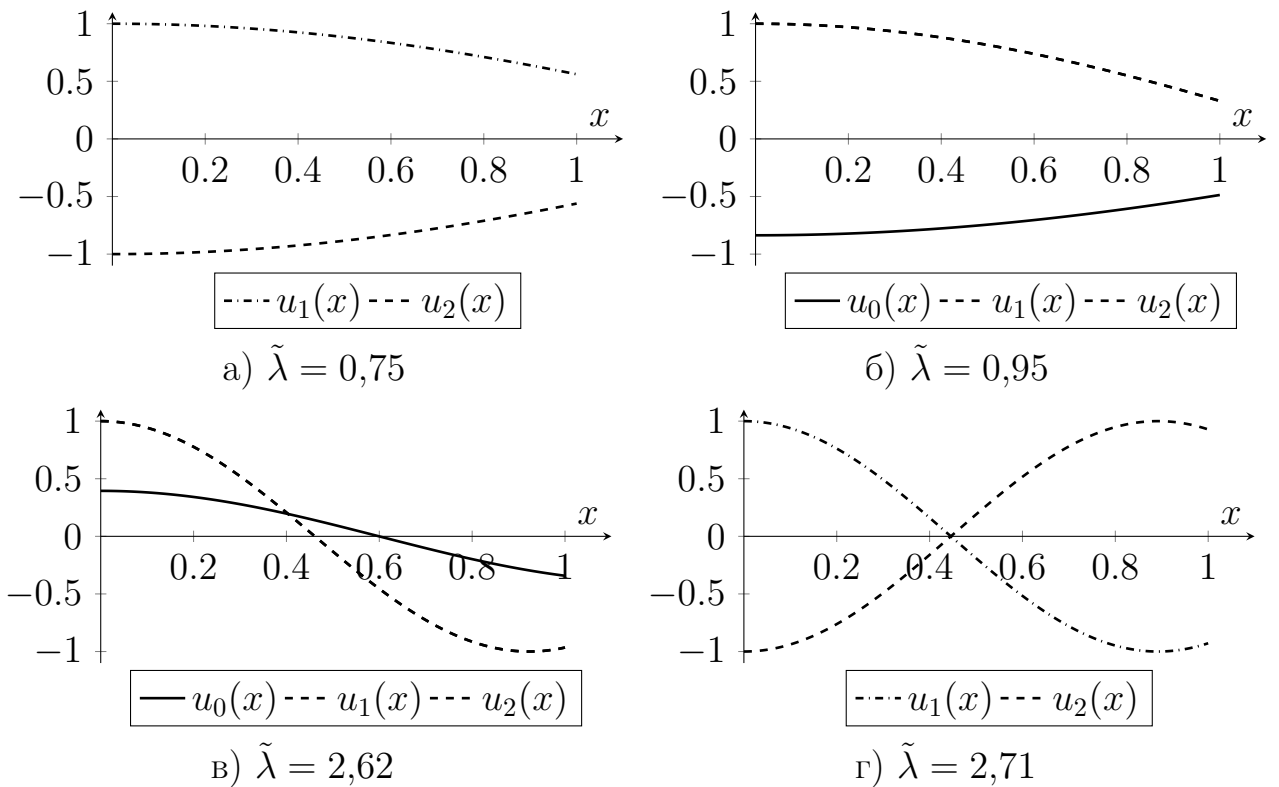


Рис. 3 — Графики форм колебаний, соответствующих первым четырем собственным числам оператора A

Слабое решение задачи Коши для оператора A , полученной дополнением уравнений (1) правой частью и начальными условиями, в метрике пространства $H_{+1} = H \oplus \{1\}$ в виде разложение решения $U(t)$ по собственным элементам оператора A было записано следующим образом:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(t) U_k, \quad (13)$$

$$\phi_k(t) = (U(t), U_k)$$

где коэффициенты $\phi_k(t)$ являются решениями задачи

$$\frac{d^2 \phi_k(t)}{dt^2} + \lambda_k \phi_k(t) = f_k(t), k = 0 \dots \infty \quad (14)$$

$$\phi_k(0) = (\Psi^0, U_k), \dot{\phi}_k(0) = (\Psi^1, U_k), f_k(t) = (F(t), U_k)$$

С учетом (13) и (14) слабое решение задачи Коши имеет вид:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((\Psi^0, U_k) \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{(\Psi^1, U_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s)) (F(s), U_k) ds \right) U_k + \\ + \left(\int_0^t \int_0^s (F(s), U_0) ds ds + (\Psi^1, U_0) t + (\Psi^0, U_0) \right) U_0 \quad (15)$$

В свою очередь, разложение $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 по базису неприводимых представлений группы S_n имеет вид:

$$F(t) = \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} F(t) = \sum_{\varphi} F^{(\varphi)}(t) \\ \Psi^0 = \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} \Psi^0 = \sum_{\varphi} \Psi^{0(\varphi)}(t) \quad (16) \\ \Psi^1 = \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} \Psi^1 = \sum_{\varphi} \Psi^{1(\varphi)}(t)$$

Если в разложении (16), проекции на какое либо из подпространств окажутся одновременно равны нулю для каждого из векторов $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 , то в выражении (15) в скалярных произведениях останутся лишь ненулевые слагаемые разложения (16).

Так как подпространства $H^{(\varphi)}$ попарно ортогональны, то, скалярные произведения, в которых ненулевые проекции векторов $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 с одной

стороны и собственный элемент U_k с другой, принадлежат разным подпространствам, обнулятся.

В **третьей главе**, аналогичным образом проведено исследование спектральной задачи, порожденной собственными колебаниями механической системы, представляющей собой пакет стержней, совершающих пространственные колебания, приведена классификация собственных форм колебаний по группам пространственной симметрии для случаев пакета с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями.

На рисунке 4 изображена расчетная схема пакета стержней, совершающих пространственные колебания. Рассматриваемая механическая система состоит из центрального стержня и идентичных боковых стержней соединенных с ним с помощью линейно-упругих связей. Центральный стержень расположен вдоль оси X_0 глобальной системы координат $X_0Y_0Z_0$, и конец стержня, отвечающий нижней части ракеты, совпадает с ее началом. Боковые стержни расположены параллельно центральному на равном расстоянии от него, через угловые промежутки равные $\frac{2\pi}{N}$, где N – число боковых стержней. Боковым стержням соответствуют индексы j , причем стержень с индексом 1 лежит в плоскости X_0Y_0 , а возрастание нумерации стержней ведется против часовой стрелки вокруг оси X_0 . Нижние концы боковых стержней расположены в одной плоскости, параллельной Y_0Z_0 . В дальнейшем считается, что эта плоскость совпадает с Y_0Z_0 .

Каждому боковому стержню сопоставляется локальная система координат $X_jY_jZ_j$. Начало локальной системы координат совпадает с нижним концом бокового стержня, ось Y_j направлена под углом $\frac{2\pi}{N}(j-1)$ к оси Y_0 , ось X_j параллельна оси X_0 , ось Z_j дополняет систему координат до правой.

Перемещения сечений стержней вдоль осей $X_jY_jZ_j$, обозначены как $u_j(x,t)$, $v_j(x,t)$, $w_j(x,t)$ соответственно, где $j = 0 \dots N$. Так как начала координат ЛСК лежат в плоскости Y_cZ_c , то можно не делать различий между СК стержней в аргументе функций перемещений. Углы поворота сечений обозначены как $\psi_j(x,t)$, $\vartheta_j(x,t)$, $\zeta_j(x,t)$, $j = 0 \dots N$ соответственно.

Было принято, что инерционно-жесткостные характеристики стержней не меняются при повороте вокруг оси X_j . Значение погонной массы в направлении осей X_j , Y_j и Z_j принято равным $m_j(x)$. Осевой момент инерции стержней вокруг осей X_j обозначен как $\mu J_j(x)$.

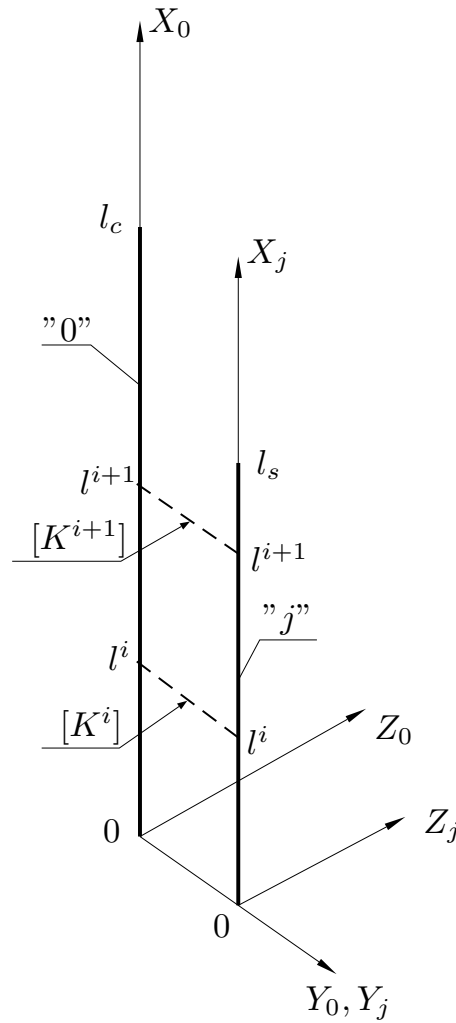


Рис. 4 — Пакет стержней, совершающих пространственные колебания

Продольная, поперечная и крутильная жесткость стержней обозначена как $EF_j(x)$, $EI_j(x)$, $GJ_j(x)$ соответственно.

Перемещения сечений стержней описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, соответствующих модели балки Эйлера-Бернулли. Граничные условия для свободных концов стержней (в случае, если на конце стержня нет упругих связей) выражаются в равенстве внутренних силовых факторов нулю. Для записи граничных условий и условий стыковки в точках $x = l^i$ соединения стержней, были сформулированы условия равновесия обобщенного упругого элемента $[K^i]$, моделирующего жесткость различных конструктивных элементов, встречающихся на практике, приведенную к двум точкам, одна из которых принадлежит центральному, а другая соответствующему боковому стержню. В записи $[K^i]$ индекс i обозначает принадлежность упругого к i -ому поясу крепления боковых стержней. В пределах одного пояса все упругие элементы считаются идентичными.

При разделении переменных было принято, что функции перемещений $u_j(x,t)$, $v_j(x,t)$, $w_j(x,t)$, $\psi_j(x,t)$, зависят от времени по закону $e^{i\omega t}$. Тогда уравнения описывающие собственные колебания исследуемой механической системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_j(x)} \frac{d}{dx} \left(EF_j(x) \frac{du_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot u_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& - \frac{1}{m_j(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_j(x) \frac{d^2v_j(x)}{dx^2} \right) + \lambda \cdot v_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& - \frac{1}{m_j(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_j(x) \frac{d^2w_j(x)}{dx^2} \right) + \lambda \cdot w_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& \frac{1}{\mu J_j(x)} \frac{d}{dx} \left(GJ_j(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot \psi_j(x) = 0, j = 0 \dots N
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\lambda = \omega^2$.

Групповая классификация форм собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, с различным числом боковых стержней, основанная на пространственной симметрии механической системы, позволила выявить типы движений, возникающих при решении спектральной задачи. Для случаев двух, четырех и шести боковых блоков приводятся ортопроекторы на неприводимые представления соответствующих групп симметрии, базисные вектора, соответствующие пространствам данных неприводимых представлений и их графическая интерпретация.

На рисунке 5 приведена иллюстрация классификация для случая четырех боковых блоков: точками и косыми крестами обозначены продольные перемещения стержней (с учетом знака), прямыми стрелками — поперечные колебания, круглыми стрелками — крутильные колебания. Приведенный ниже результат находится в соответствии с классификацией, предложенной Докучаевым Л.В. и полученной другим способом.

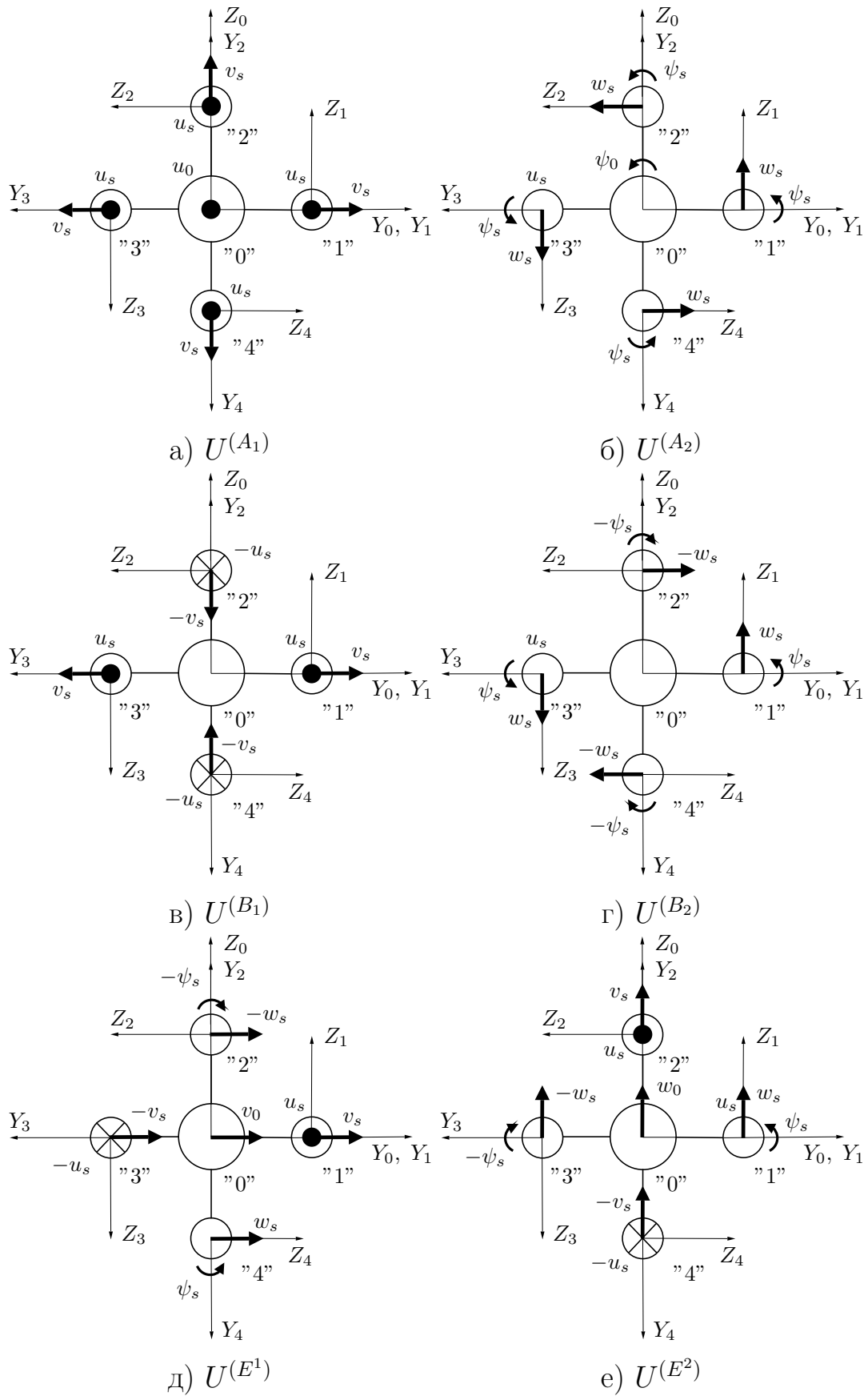


Рис. 5 — Схематическое изображение форм колебаний, соответствующих различным неприводимым представлениям группы C_{4v}

Базисные векторы в данном случае выражаются равенствами (18)

$$\begin{aligned}
 U^{(A_1)} &= \{u_0, u_s, u_s, u_s, u_s, 0, v_s, v_s, v_s, v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
 U^{(A_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w_s, w_s, w_s, w_s, \psi_0, \psi_s, \psi_s, \psi_s, \psi_s\}^T \\
 U^{(B_1)} &= \{0, u_s, -u_s, u_s, -u_s, 0, v_s, -v_s, v_s, -v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
 U^{(B_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w_s, -w_s, w_s, -w_s, 0, \psi_s, -\psi_s, \psi_s, -\psi_s\}^T \\
 U^{(E^1)} &= \{0, u_s, 0, -u_s, 0, v_0, v_s, 0, -v_s, 0, 0, 0, -w_s, 0, w_s, 0, 0, -\psi_s, 0, \psi_s\}^T \\
 U^{(E^2)} &= \{0, 0, u_s, 0, -u_s, 0, 0, v_s, 0, -v_s, w_0, w_s, 0, -w_s, 0, 0, \psi_s, 0, -\psi_s, 0\}^T
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

В **четвертой главе** проводится численный расчет частот и форм собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, с четырьмя боковыми стержнями (группа пространственной симметрии C_{4v}). Полученные результаты находятся в соответствии с исследованием приведенным в главе 3. Первые десять частот собственных колебаний без учета кратности и нулевых корней приведены в таблице 1.

№	Частота, Гц	Неприводимое представление	Кратность
1	0,762	E	2
2	1,069	B_2	1
3	1,219	E	2
4	1,469	B_1	1
5	1,562	A_1	1
6	1,708	E	2
7	2,219	E	2
8	2,494	A_2	1
9	2,522	B_1	1
10	2,766	A_2	1

Таблица 1 — Первые десять собственных частот колебаний пакета с четырьмя боковыми стержнями

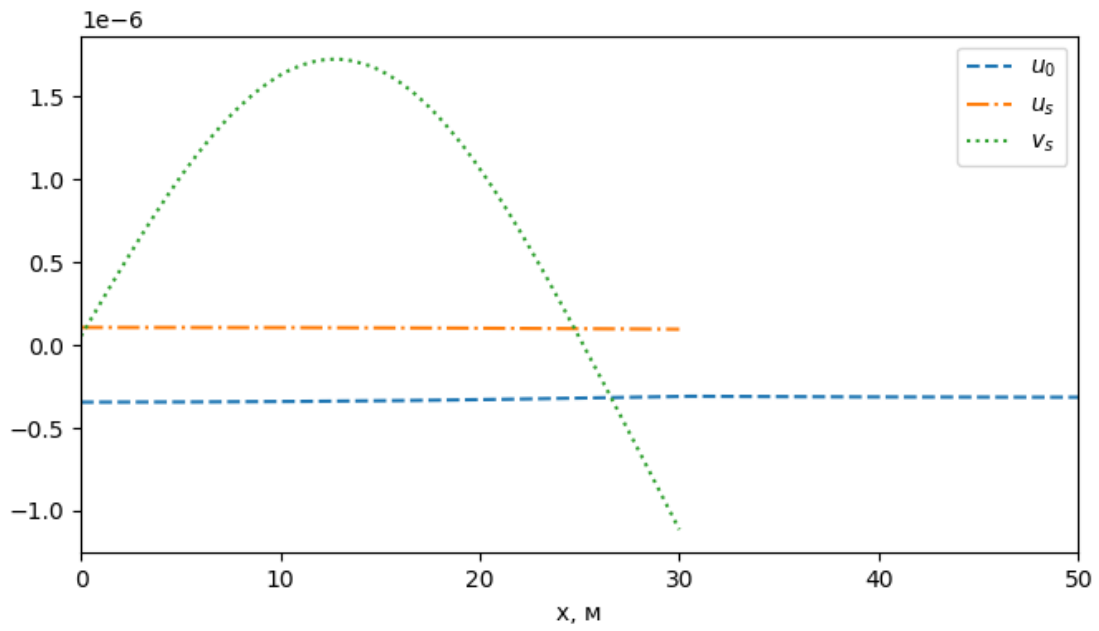


Рис. 6 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,562 Гц, неприводимому представлению A_1

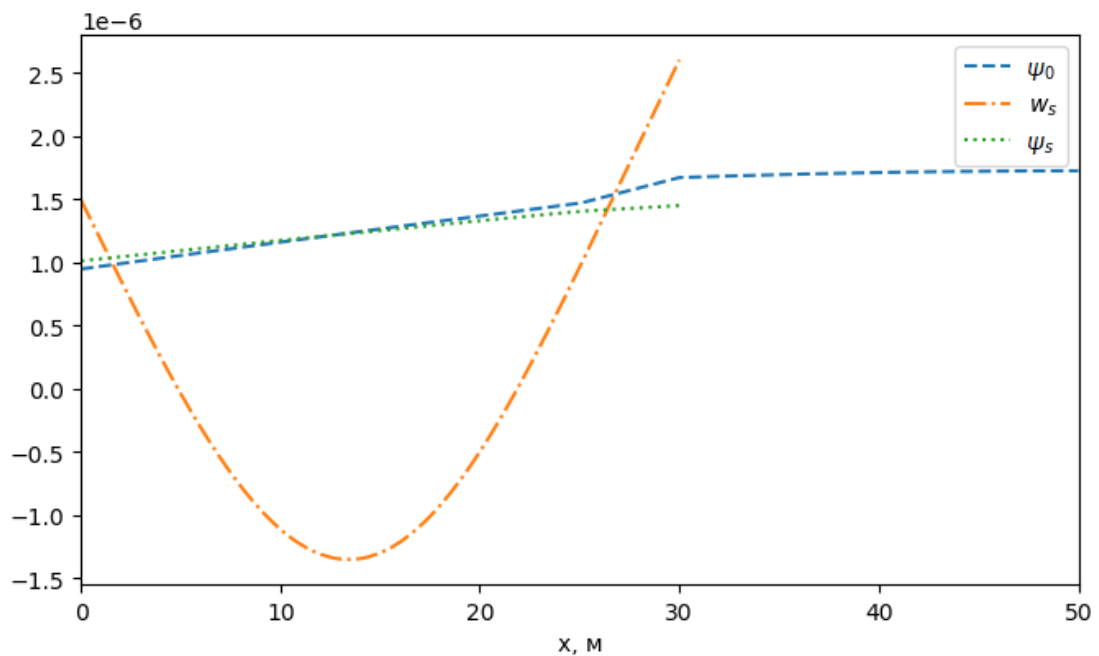


Рис. 7 — Форма колебаний, соответствующая частоте 2,494 Гц, неприводимому представлению A_2

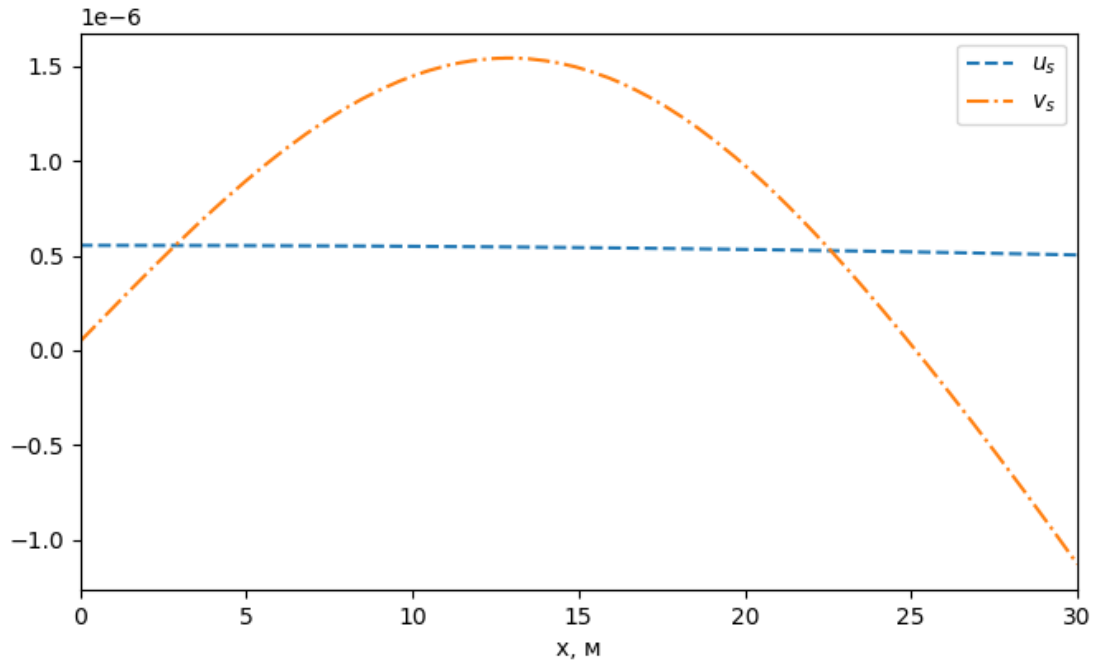


Рис. 8 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,469 Гц, неприводимому представлению B_1

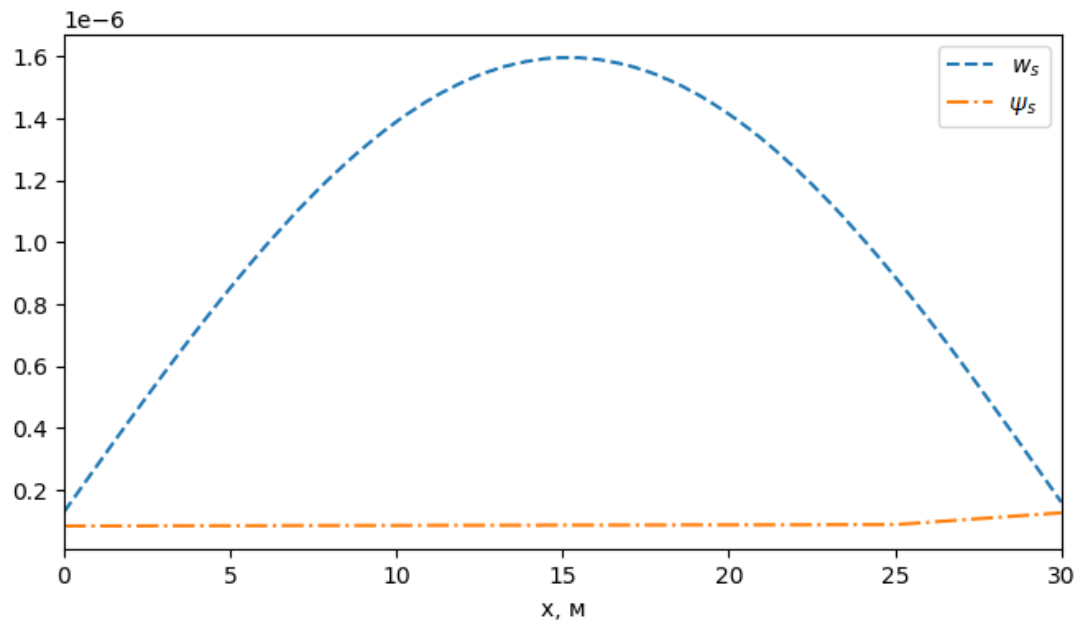


Рис. 9 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,069 Гц, неприводимому представлению B_2

На рисунках 6 — 9 приведены графики форм уолебаний, соответствующие одномерным представлениям группы C_{4v} . Для первой частоты, равной 0,762 Гц, которой соответствуют формы, являющиеся базисными функциями

неприводимого представления E приведем график, соответствующий первой строке неприводимого представления, т.е. $U^{(E^1)}$.

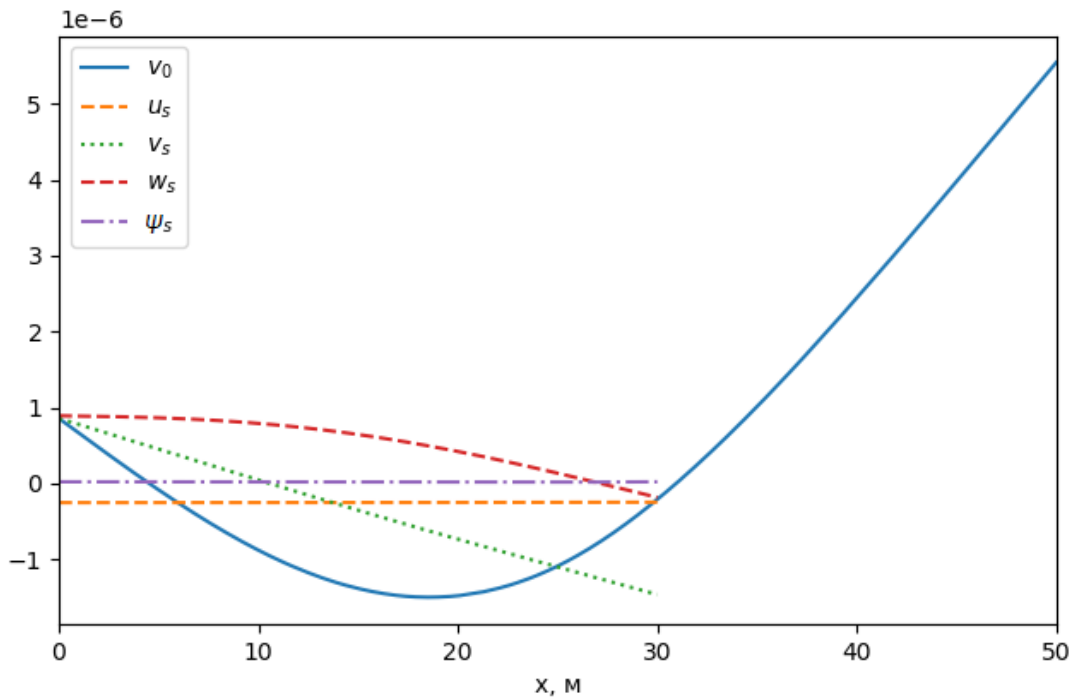


Рис. 10 — Форма колебаний, соответствующая частоте 0,762 Гц, неприводимому представлению E

Для устранения сложностей, возникающих при интерпретации форм колебаний, полученных в результате численного расчета, предложен метод приведения форм колебаний, соответствующих кратным частотам к плоскостям пространственной симметрии механической системы, с использованием теоретико-группового подхода. На практике плоскостями пространственной симметрии являются, например, плоскости стабилизации РН пакетной компоновки.

Без ограничения общности, для определенности, был рассмотрен пакет с четырьмя боковыми стержнями. Поперечным колебаниям всего пакета в данном случае отвечает неприводимое представление E . Векторы, получаемые при численном расчете, обозначены как $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$. Их выражение через векторы, принадлежащие строкам неприводимого представления E имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(E^1)} \\ U^{(E^2)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Для построения собственных векторов, соответствующих плоскостям стабилизации и строкам неприводимого представления E достаточно одного из векторов, полученных при численном расчете. Для определенности был рассмотрен вектор $U^{(1)}$:

$$U^{(1)} = \alpha_{11}U^{(E^1)} + \alpha_{12}U^{(E^2)}$$

Поочередное действие на вектор $U^{(1)}$ ортопроекторами $P^{(E^1)}$ и $P^{(E^2)}$ позволяет восстановить, с точностью до константы базисные вектора неприводимого представления E , которые, в свою очередь, отвечают плоскостям пространственной симметрии пакета:

$$\begin{aligned} U^{(E^1)} &= \frac{1}{\alpha_{11}} \left(P^{(E^1)} U^{(1)} \right) \\ U^{(E^2)} &= \frac{1}{\alpha_{12}} \left(P^{(E^2)} U^{(1)} \right) \end{aligned}$$

Разрешающей системой для коэффициентов α_{11} и α_{12} являются уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1 \\ \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{v_0^{(1)}}{w_0^{(1)}} \end{cases} \quad (20)$$

где $v_0^{(1)}$ и $w_0^{(1)}$ соответствующие компоненты вектора $U^{(1)}$.

На примере пакета с четырьмя боковыми стержнями было проведено проецирование вектора внешних нагрузок на пространства неприводимых представлений группы C_{4v} . Был рассмотрен случай продольного возмущения стержня с индексом $j = 1$. Вектор внешних нагрузок $F(t)$ в данном случае содержит одну компоненту:

$$F(t) = \begin{Bmatrix} F_u(t) \\ F_{vw}(t) \\ F_\psi(t) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$F_u(t) = \{0, f(t), 0, 0, 0\}^T; \quad F_{vw}(t) = \{0\}; \quad F_\psi(t) = \{0\}$$

Для разложения вектора $F(t)$ по неприводимым представлениям группы C_{4v} были использованы полученные ранее выражения для ортопроекторов $P^{(R_\varphi)}$ на неприводимые представления группы C_{4v} . Далее рассмотрены только блоки $F_u(t)$, так как только они содержат ненулевые компоненты. С учетом обозначения $f(t)$ как f , в результате проецирования было получено:

$$\begin{aligned}
 F_u^{(A_1)}(t) = P^{(A_1)}F_u(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f/4 \\ f/4 \\ f/4 \end{pmatrix}; & F_u^{(A_2)}(t) = P^{(A_2)}F_u(t) &= \{0\} \\
 F_u^{(B_1)}(t) = P^{(B_1)}F_u(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f/4 \\ -f/4 \\ f/4 \\ -f/4 \end{pmatrix}; & F_u^{(B_2)}(t) = P^{(B_2)}F_u(t) &= \{0\} & (22) \\
 F_u^{(E^1)}(t) = P^{(E^1)}F_u(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f/2 \\ 0 \\ -f/2 \\ 0 \end{pmatrix}; & F_u^{(E^2)}(t) = P^{(E^2)}F_u(t) &= \{0\}
 \end{aligned}$$

Сумма всех найденных проекций дает исходный вектор $F(t)$. Из выражений (22) делается вывод о том, что рассмотренное силовое воздействие возбуждает три типа движений: «продольные» колебания пакета (неприводимое представление A_1), продольно-поперечные колебания боковых стержней (неприводимое представление B_1) и «поперечные» колебания пакета в плоскости X_0Y_0 (1-ая строка неприводимого представления E).

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Получено решение задачи о собственных колебаниях механической системы, состоящей из упруго-соединенных стержней, совершающих продольные колебания, как с применением теории представлений, так и обычным способом. Выявлено, что использование теоретико-группового подхода при решении данной задачи позволило

сократить вычислительные затраты, упростить решение задачи и классифицировать спектр и формы собственных колебаний.

2. Для пакета с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями получены ортопроекторы на подпространства неприводимых представлений соответствующих групп симметрии и структура базисных векторов этих подпространств. Анализ базисных векторов подпространств неприводимых представлений выявил существенное сокращение размерности задачи.
3. Для пакета с 4-мя боковыми стержнями проведен численный расчет собственных колебаний. Полученные формы классифицированы по неприводимым представлениям. Приведено графическое изображение форм колебаний, с учетом вида полученных ранее базисных векторов.
4. Разработан метод приведения форм колебаний, соответствующих кратным частотам к плоскостям симметрии механической системы.
5. Предложен способ разложения вектора внешних нагрузок на слагаемые, относящиеся к различным спектрам, определяемым неприводимыми представлениями группы симметрии пакета стержней.

Список литературы

1. Павлов А. М., Темнов А. Н. Продольные колебания пакета стержней // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2014. — № 6. — С. 53–66.
2. Дьяченко М. И., Павлов А. М., Темнов А. Н. Продольные упругие колебания корпуса многоступенчатой жидкостной ракеты пакетной схемы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — 2015. — № 5. — С. 53–66.
3. Pavlov A. M., Temnov A. N. Symmetry Exploitation in the Natural Vibrations of Rod Systems // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinostr. [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.] — 2017. — No. 4. — Pp. 28–41.

4. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Продольные колебания жидкостной многоступенчатой ракеты пакетной схемы // 4-ая международная научная конференция РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА: фундаментальные и прикладные проблемы: Сборник трудов. — 2013.
5. *Темнов А. Н., Павлов А. М.* Колебания симметричного «пакета» упругих стержней // Международная конференция XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015): сборник тезисов. — 2015.
6. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Теоретико-групповой подход к решению уравнений движения механических систем, обладающих симметрией // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XXVII». — 2016.
7. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Проблемы динамики ракет-носителей пакетной схемы // Механика и математическое моделирование в технике. Сборник трудов Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. — 2016.
8. *Pavlov A.* The analysis of the clustered rocket natural modes and frequencies // International graduate summer school in aeronautics & astronautics IGSS 2016. Collection of abstracts. — 2016.
9. *Павлов А. М.* Групповой анализ спектральной задачи, порождённой колебаниями стержневой системы // Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». — 2017.
10. *Павлов А. М.* Особенности расчета форм собственных упругих колебаний корпуса ракет-носителей пакетной компоновки // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. — 2017.