

На правах рукописи



НГУЕН ЛЕ ХУНГ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ
ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Заслуженный работник высшей школы РФ
Доктор технических наук, профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Димитриенко Юрий Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Вычислительная математика
и математическая физика» ФГБОУ ВО «Московский
государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)», г. Москва;
Хроматов Василий Ефимович
кандидат технических наук, профессор ФГБОУ ВО
Национальный исследовательский университет
"Московский Энергетический институт", профессор
кафедры "Робототехника, мехатроника, динамика и
прочность машин", г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки «Институт прикладной
механики Российской академии наук», г. Москва.

Защита диссертации состоится «08» июня 2022 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», и на сайте: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=164019.

Автореферат разослан «_____» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В последние годы значительное внимание в механике сплошной среды уделяется исследованиям связи между напряженно-деформированным состоянием (НДС) при действии механических нагрузок с физическими полями другой среды - электромагнетическими, тепловыми. Одно из направлений, называемое электроупругостью, базируется на явлении пьезоэлектрического эффекта. Сущность пьезоэффекта заключается в том, что на телах, обладающих свойством поляризации под действием приложенных внешних сил возникают электрические заряды на их поверхностях, и наоборот, наличие деформаций при нахождении этих тел в электрическом поле.

В настоящее время пьезоматериалы активно применяются в различных областях техники и технологии. В авиационной и космической отрасли пьезоматериалы используются в качестве сенсоров и актюаторов в виде корпусных элементов конструкций на адаптивных системах летательных аппаратов (ЛА) с целью повышения качества аэродинамики и эффективного управления их деформациями. Кроме того, для снижения массы и повышения прочности ЛА широко используются композиционные материалы. Сочетание пьезоэлектрических и композиционных материалов позволяет улучшить свойства современных ЛА как управляемых систем. Поэтому исследование и расчёт электроупругостного состояния композиционных элементов конструкций с пьезоэлектрическими слоями является актуальной проблемой.

Основными расчетными схемами элементов конструкций ЛА являются тонкие пластинки и оболочки. Расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) корпусных элементов ЛА базируются на результатах классической теории Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера, в основу которой была положена гипотеза о сохранении нормального к срединной поверхности элемента, позволившая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Практика и опыт эксплуатации ЛА показывают, что в зонах скачкообразного изменения жесткостных характеристик, т.е. вблизи соединений, стыков конструкций из пьезоэлектрических и обычных материалов, а также при действии локальных и быстро изменяющихся нагрузок, наиболее часто происходят разрушения из-за наличия дополнительных напряжений типа "погранслои". Расчёты НДС в этих зонах его искажения по классической теории оболочек не дают удовлетворительного соответствия с практикой.

Здесь возникают также важная задача исследования НДС композиционных цилиндрических оболочек при совместном действии термомеханических нагрузок, так как при нагреве возникают дополнительные деформации, обусловленные всесторонним тепловым расширением.

Следствием нагрева и всестороннего теплового расширения в упругих

телах существует дополнительные деформации. Поэтому также возникает задача исследования влияния термомеханических и термоэлектрических нагрузок на НДС композиционных цилиндрических оболочек. Данные совместные проблемы термоэластопластики учитываются при формулировке задач диссертации.

Следовательно, для описания объемного НДС композиционных цилиндрических оболочек в совместных задачах термоэластопластики необходимо построить уточненную математическую модель, базирующуюся на законе электростатики Максвелла и уравнениях трехмерной теории упругости, а так же позволяющую повысить достоверность результатов расчета НДС тонкостенных конструкций в зонах его искажения, т.е. определить НДС типа “погранслои”.

Поэтому разработка уточненной математической модели, алгоритмов расчетов и прогнозирования НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом электротермомеханических нагрузок, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой **актуальную проблему**.

Целью диссертационной работы является построение уточненной математической модели определения электромеханического состояния (ЭМС) анизотропных и многослойных композиционных цилиндрических оболочек с различными краевыми условиями, находящихся в электрическом поле при действии механических и электрических нагрузок, с учетом влияния температурного воздействия на их НДС.

Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы дифференциальных уравнений равновесия произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта на основе трехмерных уравнений теории упругости, закона электростатики Максвелла, и применение вариационного принципа Лагранжа.

2. Проведение параметрических исследований и сравнение результатов расчета напряженного состояния с учетом пьезоэффекта, в том числе поперечных напряжений, полученных в диссертационной работе с данными классической теории типа Кирхгофа-Лява. Исследование влияния типа электромеханического нагружения, условий закрепления и изменения геометрических параметров цилиндрической оболочки с учетом пьезоэлектрического эффекта на ее НДС.

3. Построение уточненной математической модели с соответствующими граничными условиями и алгоритма для определения ЭМС многослойных композиционных цилиндрических оболочек при действии электрических потенциалов и механических сил.

4. Разработка метода расчета ЭМС многослойной композиционной цилиндрической оболочки, находящейся под действием электрических и механических нагрузок, при различных краевых условиях с помощью

тригонометрических рядов Фурье и преобразования Лапласа.

5. На основе разработанной уточненной модели электроупругости оболочек проведение исследований и расчетов НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта. Сравнение результатов расчета НДС, полученных в диссертационной работе, с данными классической теории оболочек, а также другими вариантами уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и SCOPUS.

6. Построение системы уравнений равновесия и разработка метода для определения влияния термомеханического нагружения на НДС композиционных цилиндрических оболочек.

Методы исследования. Вариационный принцип Лагранжа для полной электромеханической энергии с учетом пьезоэффекта в задачах электроупругости. Компоненты механических перемещений и электрических потенциалов представляются полиномами по нормальной к срединной поверхности оболочки координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Приведение системы трехмерных уравнений электроупругости оболочек в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью тригонометрических рядов.

Решение сформулированной краевой задачи уточненной модели электроупругости оболочек основано на преобразования Лапласа.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела в совместных задачах электроупругости, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнением результатов расчета с данными классической теории и другими вариантами уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построена уточненная математическая модель для расчета НДС произвольных оболочек из пьезоматериалов, находящихся в электрическом поле при механическом нагружении на основе применения вариационного принципа Лагранжа с помощью представления электрических потенциалов и перемещений полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява.

2. Впервые построена система дифференциальных уравнений равновесия в электрических потенциалах и механических перемещениях, а также сформулированы граничные условия для всех случаев закрепления для определения электромеханического состояния композиционных цилиндрических оболочек, основанные на трехмерных уравнениях теории упругости и законе электростатики Максвелла.

3. Разработана методика определения электромеханического состояния многослойных композиционных цилиндрических оболочек и с учетом пьезоэффекта, находящихся под действием различных видов электрических воздействий и механических нагрузок на внешней и внутренней поверхностях оболочки, что позволило существенно уточнить НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек и доказать наличие дополнительных напряжений типа «погранслоя».

4. Представлена уточненная математическая модель для исследования НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек при действии термоэлектромеханического нагружения, дан анализ НДС композиционной цилиндрической оболочки для нескольких вариантов действия электрического поля и температурного нагрева.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предлагаемые математические модели уточненной теории, алгоритм решения краевой задачи электроупругости для определения НДС оболочек из изотропных и многослойных композиционных материалов с учетом пьезоэффекта, позволяющие существенно уточнить результаты расчетов электромеханического состояния оболочек в зонах искажения НДС.

2. Разработанные математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяющие существенно уточнить НДС многослойных цилиндрических оболочек в зонах «погранслоя» при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

3. В проведении качественного и количественного анализа влияния вида нагружения, условий закрепления, геометрических параметров композиционных цилиндрических оболочек, пьезоэлектрических, диэлектрических и упругих свойств материала на их НДС.

4. В доказательстве наличия НДС типа «погранслоя» вблизи жестко заземленных краев, величины которых значительно отличаются от аналогов, соответствующих классической теории, особенно в части поперечных нормальных и касательных напряжений.

5. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Уточненные математические модели для определения ЭМС произвольных оболочек из пьезоматериалов, находящихся под действием механических нагрузок в электрическом поле, в том числе цилиндрических оболочек, позволяющие существенно уточнить НДС, особенно в зонах искажения напряженного состояния.

2. Уточненная теория и алгоритм решения задачи определения ЭМС цилиндрических оболочек, изготовленных из однослойных и многослойных

композиционных материалов с учетом пьезоэлектрического эффекта.

3. Методика расчета электромеханического состояния цилиндрической оболочки под действием различных механических и электрических нагрузок, основанная на аппарате операционного исчисления, упрощающая решение соответствующих краевых задач.

4. Методика определения НДС и параметрические исследования многослойных цилиндрических оболочек при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

5. Доказательство существования дополнительного быстро затухающего при удалении от жестко заземленного края композиционных цилиндрических оболочек напряженного состояния типа “погранслоя”, компоненты которого по величине одного порядка с величинами основного напряженного состояния, определяемого по классической теории, при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

Апробация основных результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на

- XXVI-м, XXVII-м международных симпозиумах “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Московская обл., 2020, 2021 г.г.

- 18-я, 19-я международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ. Москва, 2019, 2020 г.г.

- XLVI, XLVII международная молодежная научная конференция “Гагаринские чтения”, МАИ. Москва, 2020, 2021 г.г.

- Первая международная конференция “Композитные материалы и конструкции” КМК, МАИ. Москва, 2020 г.

- XXII Международная конференция по “Вычислительной механике и современным прикладным программным системам” (ВМСППС'2021), Алушта, Крым, 2021г.

- Научном семинаре института № 9 “Общеинженерной подготовки” Московского авиационного института, 2022 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 печатных работах, в том числе: 3 статьи в журналах из Перечня ВАК РФ; 3 статьи в журналах, цитируемых международными базами SCOPUS и 9 тезисов докладов по материалам Российских и международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка таблиц, списка рисунков и списка литературы. Работа содержит 148 страниц, 44 рисунка, 12 таблиц. Список литературы содержит 142 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи

исследования, определена научная новизна и практическая значимость полученных автором результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе представлены обзор литературы по тематике диссертации и постановка задачи исследования; построены математические модели для определения уточненного НДС произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.

В параграфе 1.1 представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и теплового нагружения.

В параграфе 1.2 дана постановка задачи определения ЭМС оболочек, находящихся в электрическом поле. Рассмотрим оболочку, обладающую пьезоэффектом, как трехмерное упругое тело толщиной $2h$, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Координатные оси α_1 и α_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось α_3 направлена по наружной нормали к этой поверхности. Оболочка находится под действием электрических потенциалов $\varphi = \varphi^\pm$ и механических нагрузок $q_{i3}^\pm (i = \overline{1,3})$ на лицевых поверхностях оболочки.

Уравнения электроупругого состояния оболочек, находящихся под действием электрического поля и механических нагрузок, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} w, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} w, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} v \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_3}, \\ \gamma_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u, \quad \gamma_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} v. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где коэффициенты Ламе $H_k (k = \overline{1,3})$ определяются равенствами

$$H_i = A_i a_i; H_3 = 1; a_i = 1 + z r_i; r_i = 1 / R_i; (i = \overline{1,2}).$$

Пренебрегая магнитными эффектами, закон Максвелла в электрическом поле можно привести к следующим уравнениям электростатики:

$$\operatorname{div}(D) = 0, \quad \operatorname{rot}(E) = 0.$$

Вектор электрической напряженности E является потенциальным $E = -\operatorname{grad}(\varphi)$ может быть выражен через скалярную функцию с помощью следующих равенств

$$E_{11} = -\frac{\partial \varphi}{H_1 \partial \alpha_1}, \quad E_{22} = -\frac{\partial \varphi}{H_2 \partial \alpha_2}, \quad E_{33} = -\frac{\partial \varphi}{H_3 \partial \alpha_3}. \quad (1.3)$$

В параграфе 1.3 на основе уточненной математической модели даны система уравнения равновесия и граничные условия для произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.

На две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява, механические перемещения оболочки представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате и определяются как:

$$\begin{aligned} u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2) + u_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + u_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!} + u_3(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^3}{3!}, \\ v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= v_0(\alpha_1, \alpha_2) + v_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + v_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!} + v_3(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^3}{3!}, \\ w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= w_0(\alpha_1, \alpha_2) + w_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + w_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Электрический потенциал по толщине оболочки можно представить в виде полинома следующего вида:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varphi_0(\alpha_1, \alpha_2) + \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!}. \quad (1.5)$$

Вариационный принцип Лагранжа для произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта представляется в виде

$$\delta \Pi = \delta U - \delta A = \iiint (\sigma \delta \varepsilon + D \delta E) dV - \sum \iint q_{i3} (\delta u + \delta v + \delta w) dS - \sum \iint Q \delta \varphi dS = 0. \quad (1.6)$$

Полагаем, что на верхней ($\alpha_3 = +h$) и нижней ($\alpha_3 = -h$) поверхностях оболочки действуют электрические потенциалы φ^+ и φ^- соответственно

$$\varphi \Big|_{\alpha_3=h} = \varphi^+, \quad \varphi \Big|_{\alpha_3=-h} = \varphi^-. \quad (1.7)$$

Подставляя уравнения (1.7) в равенство (1.5), находим

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}. \quad (1.8)$$

Подставляя выражения (1.1) с учетом (1.2)-(1.5) и (1.8) в (1.6), после преобразований получим систему уравнений равновесия теории оболочек с учетом пьезоэффекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) &= 0; \\ \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) &= 0; k = \overline{1,3}; \\ \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) &= 0; \\ \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) &= 0; k = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) &= 0; \\ \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) &= 0; k = \overline{1, 2}; \\ \left(\frac{2h^2 \partial(A_2 D_{11}^{(0)})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(A_2 D_{11}^{(2)})}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{h^2 \partial(A_2 D_{22}^{(0)})}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(A_2 D_{22}^{(1)})}{\partial \alpha_2} \right) - A_1 A_2 D_{33}^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь для внутренних и внешних силовых факторов используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (N_1, N_{12}, Q_{13}, \overline{N_1}, \overline{N_{12}}, \overline{Q_{13}}) &= \int_{-h}^{+h} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) d\alpha_3, \\ (M_1^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)}, \overline{M_1^{(k)}}, \overline{M_{12}^{(k)}}, \overline{M_{13}^{(k)}}) &= \int_{-h}^{+h} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) \frac{\alpha_3^k}{k!} d\alpha_3, \\ (N_2, N_{21}, Q_{23}, \overline{N_2}, \overline{N_{21}}, \overline{Q_{23}}) &= \int_{-h}^{+h} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) d\alpha_3, \\ (M_2^{(k)}, M_{21}^{(k)}, M_{23}^{(k)}, \overline{M_2^{(k)}}, \overline{M_{21}^{(k)}}, \overline{M_{23}^{(k)}}) &= \int_{-h}^{+h} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{\alpha_3^k}{k!} d\alpha_3, \\ (T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) &= \int_{-h}^{+h} a_1 a_2 (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} d\alpha_3, \\ (ND_{11}^{(0)}, ND_{22}^{(0)}, ND_{33}^{(0)}) &= \int D_i d\alpha_3, (MD_{11}^{(k)}, MD_{22}^{(k)}, MD_{33}^{(k)}) = \int_{-h}^{+h} D_k \frac{\alpha_3^k}{(k-1)!} d\alpha_3, (k = \overline{2, 3}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= q_{13}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{13}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, p_2^{(i)} = q_{23}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{23}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, (i = \overline{0, 3}), \\ p_3^{(i)} &= q_{33}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{33}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, \psi_1^{(i)} = Q^+ a_1 a_2 \alpha_3^i \Big|_{z=h} - Q^- a_1 a_2 \alpha_3^i \Big|_{\alpha_3=-h}, (i = \overline{0, 2}). \end{aligned}$$

Граничные условия задачи электроупругости представляются в следующем виде:

на краях $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \overline{u_0} \vee N_1 = \overline{N_1}; v_0 = \overline{v_0} \vee N_{12} = \overline{N_{12}}; w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{13} = \overline{Q_{13}}; u_k = \overline{u_k} \vee M_1^{(k)} = \overline{M_1^{(k)}}; \\ v_k &= \overline{v_k} \vee M_{12}^{(k)} = \overline{M_{12}^{(k)}}; k = \overline{1, 3}; w_k = \overline{w_k} \vee M_{13}^{(l)} = \overline{M_{13}^{(l)}}; l = \overline{1, 2}; \varphi_i^{(k)} = 0 \cup ND_{ii}^{(0)} = MD_{ii}^{(k)} = 0; \end{aligned}$$

на краях $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \overline{u_0} \vee N_{21} = \overline{N_{21}}; v_0 = \overline{v_0} \vee N_2 = \overline{N_2}; w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{23} = \overline{Q_{23}}; u_k = \overline{u_k} \vee M_{21}^{(k)} = \overline{M_{21}^{(k)}}; \\ v_k &= \overline{v_k} \vee M_2^{(k)} = \overline{M_2^{(k)}}; k = \overline{1, 3}; w_k = \overline{w_k} \vee M_{23}^{(l)} = \overline{M_{23}^{(l)}}; l = \overline{1, 2}; \varphi_i^{(k)} = 0 \cup ND_{ii}^{(0)} = MD_{ii}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

где $\overline{u_k}, \overline{v_k}, \overline{w_l}, k = 0..3, l = 0..2$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

В параграфе 1.3 разработан алгоритм определения НДС произвольных

оболочек с учетом пьезоэффекта. Решая систему уравнения равновесия (1.9) с учетом (1.10) и (1.1) - (1.5) и граничных условий, находим искомый электрический потенциал и обобщенные механические перемещения u_k, v_k, w_l, φ_0 , $k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$. С помощью уравнений теории электроупругости (1.1), геометрических соотношений (1.2) получим выражения электрических напряженностей, деформаций и тангенциальных напряжений соответственно. Поперечные компоненты напряжения оболочки находятся интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Во второй главе разработана методика определения НДС изотропной цилиндрической оболочки с учетом пьезоэффекта по уточненной теории.

В параграфе 2.1 приведены основные уравнения уточненной математической модели цилиндрической оболочки с учетом пьезоэффекта. Рассматривается цилиндрическая оболочка радиусом R , длиной L , толщиной $2h$, отнесенная к триортогональной криволинейной системе координат $\xi\theta z$. На основании уравнений (1.9) получены уравнения равновесия цилиндрической оболочки в перемещениях и потенциалах

$$\begin{aligned}
& \left(Ki_{d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{d1\xi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 \left(Ki_{d2\xi}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{u_j} \right) u_j + \\
& + \sum_{j=0}^3 Ki_{d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 Ki_{d1\xi}^{w_j} \frac{\partial}{\partial \xi} w_j + \left(Ki^{q_{13}^+} q_{13}^+ + Ki^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \quad (i=\overline{1,4}) \\
& \left(Ki_{d2\xi\theta}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + Ki_{d1\theta}^\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 Ki_{d2\xi\theta}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_j + \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{v_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{v_j} \right) v_j + \\
& + \sum_{j=0}^2 Ki_{d1\theta}^{w_j} \frac{\partial}{\partial \theta} w_j + \left(Ki^{q_{23}^+} q_{23}^+ + Ki^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \quad (i=\overline{5,8}) \\
& \left(Ki_{d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki^\varphi \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 Ki_{d1\xi}^{u_j} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=0}^2 \left(Ki_{d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{w_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{w_j} \right) w_j + \\
& + \sum_{j=0}^3 Ki_{d1\theta}^{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \left(Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ + Ki^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(Ki^{\varphi^+} \varphi^+ + Ki^{\varphi^-} \varphi^- \right) = 0, \quad (i=\overline{9,11}) \\
& \left(K_{12d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{12d2\theta}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{12}^{\varphi_0} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 K_{12d1\xi}^{u_j} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=1}^3 K_{12d1\theta}^{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{12}^{w_j} w_j + \left(K_{12}^{\varphi^+} \varphi^+ + K_{12}^{\varphi^-} \varphi^- \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь электромеханические коэффициенты K_i представляют собой постоянные, зависящие от электрических, упругих характеристик и геометрических параметров оболочки.

В параграфе 2.2 дано решение краевой задачи электроупругости с помощью тригонометрических рядов Фурье и операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

2.2.1. *Приведение краевой задачи электроупругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.* Представим внешние электромеханические нагрузки, электрический потенциал и перемещения в

виде тригонометрических рядов по окружной координате

$$\begin{aligned}
 q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(Q_{i3m}^{(1)\pm}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{i3m}^{(2)\pm}(\xi) \sin(m\theta) \right) + Q_{i30}^{\pm}(\xi), \quad i = \overline{0,3}; \\
 \varphi^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\varphi_m^{(1)\pm}(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_m^{(2)\pm}(\xi) \sin(m\theta) \right) + \varphi_0^{\pm}(\xi); \\
 u_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(u_{im}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + u_{im}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + u_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0,3}; \\
 v_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(v_{im}^{(1)}(\xi) \sin(m\theta) - v_{im}^{(2)}(\xi) \cos(m\theta) \right) + v_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0,3}; \\
 w_j(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(w_{jm}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + w_{jm}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + w_{j0}(\xi), \quad j = \overline{0,2}; \\
 \varphi_0(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\varphi_{0m}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_{0m}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + \varphi_{00}(\xi).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.2.2. *Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений операционным методом.* Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений применим операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа.

2.3. *НДС цилиндрических оболочек под действием осесимметричной радиальной нагрузки.* Рассматривается цилиндрическая оболочка, жестко заземленная на двух краях, имеющая следующие параметры: радиус $R = 1\text{ м}$, $L = 4R$, относительная полутолщина $S = h / R = 1 / 100$. На рис 2.1-2.2 показаны результаты расчета НДС в срединной поверхности оболочки по ее длине (рис.2.1) и на краях по толщине (рис.2.2) при действии осесимметричной электрической нагрузки $\varphi^+ = \varphi(\xi) = V_0 = \text{const}$.

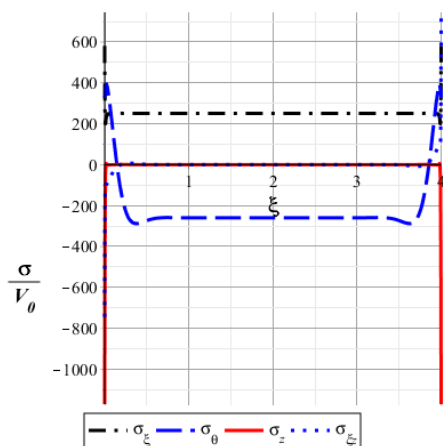


Рис. 2.1.

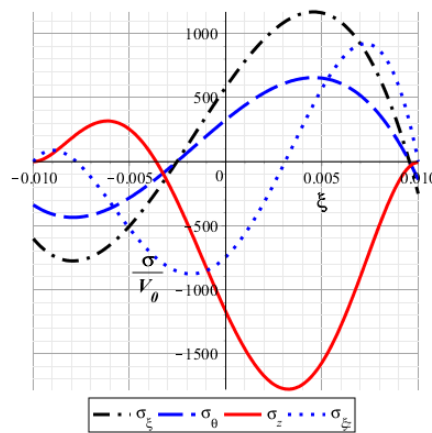


Рис. 2.2.

Результаты расчета НДС этой же оболочки при действии осесимметричной механической нагрузки $q_{33}^+ = q(\xi) = Q_0 \xi$ ($Q_0 = \text{const}$) приведены

на рис 2.3, 2.4.

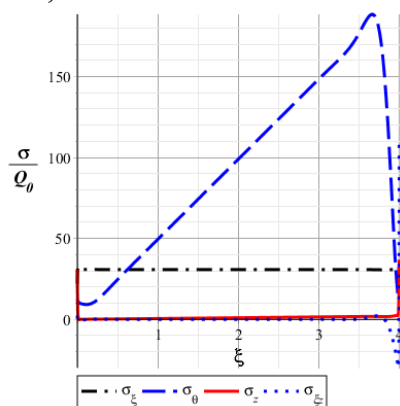


Рис. 2.3.

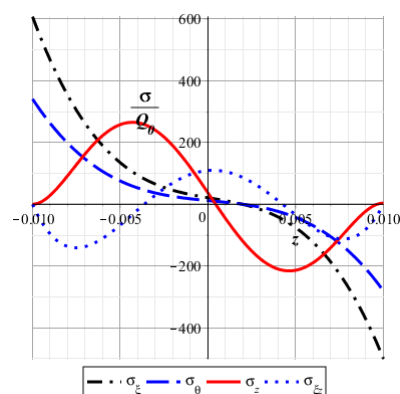


Рис. 2.4.

Из графиков на рис. 2.1 – 2.4 можно установить, что

- при незначительном удалении от ее краев, поперечные нормальные и касательные напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$, как и следовало ожидать, в соответствии с классической теорией, практически равны нулю;

- вблизи жестко заземленных краев величины поперечных напряжений σ_z и $\sigma_{\xi z}$ – значительны и составляют соответственно 43,3% (29,2%) от максимальных нормальных напряжений σ_ξ при действии механических нагрузок. С учетом пьезоэффекта максимальное значение напряжения σ_z при действии электрических потенциалов больше на 46,5% максимального нормального напряжения σ_ξ , что необходимо учитывать для повышения достоверности расчетов на прочность и долговечность пьезоконструкций, содержащих непрерывные соединения.

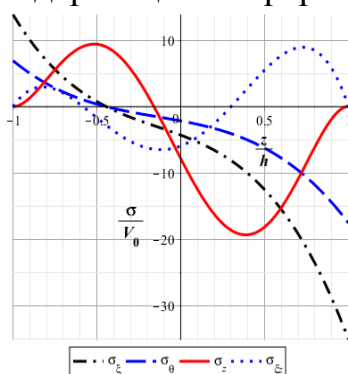


Рис. 2.5.

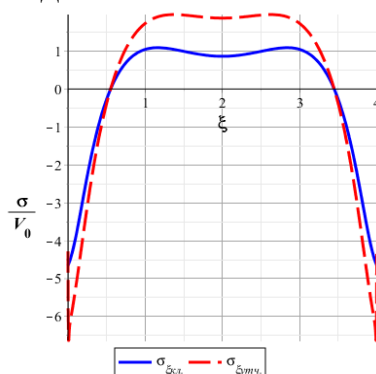


Рис. 2.6.

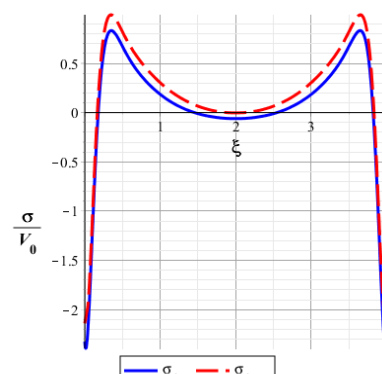


Рис. 2.7.

2.4. НДС цилиндрических оболочек под действием электрических и механических нагрузок.

На рис 2.5-2.7 показаны графики основных и поперечных напряжений в срединной поверхности оболочки по длине и по толщине на краях при действии электрических нагрузок $\Phi = \Phi(\xi)\cos(m\theta)$ и при действии механических нагрузок $Q = Q(\xi)\cos(m\theta)$ на рис 2.8-2.10. На графиках символами “уточ” и “кл” обозначены результаты, рассчитанные по предлагаемой модели данной работы

и классической теории, соответственно.

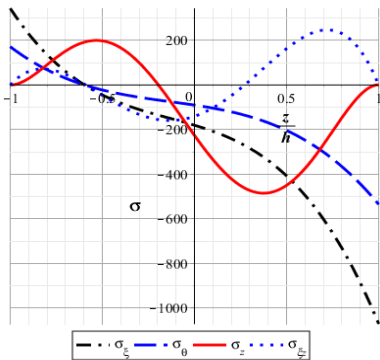


Рис. 2.8.

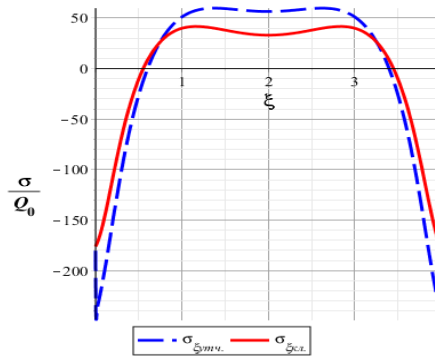


Рис. 2.9.

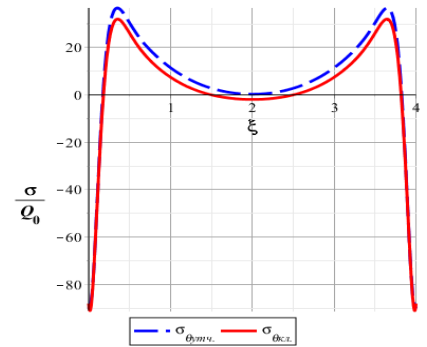


Рис. 2.10.

Анализ полученных результатов распределения напряжений по длине и по толщине в краевой зоне оболочки показывает, что поперечные касательные напряжения σ_z ($\sigma_{\xi z}$) на жестко заземленных краях оболочки, которыми в классической теории пренебрегают, составляет примерно 55% (27%) в первом случае (рис.2.5) и 45% (22%) во втором случае (рис.2.8) от максимальных нормальных напряжений σ_{ξ} , что подтверждает необходимость учета указанных напряжений в расчетах на прочность и долговечность цилиндрических оболочек из композиционных материалов, в том числе и многослойных вблизи зон искажения НДС. При удалении от краевых зон на расстояние порядка толщины, напряжения типа “погранслои” затухают и практически равны нулю.

Кроме того, распределение основных напряжений σ_{ξ} и σ_{θ} во внутренней области оболочки по обоим вариантам при сравнении с классической теорией (рис 2.6-2.7 и рис 2.9-2.10) практически совпадает, что подтверждает достоверность полученных результатов.

В третьей главе разработана методика определения ЭМС по уточненной математической модели многослойных композиционных цилиндрических оболочек, находящихся в электрическом поле при механическом нагружении.

В параграфе 3.1 приведены основные уравнения уточненной математической модели композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Рассматривается композиционная цилиндрическая оболочка, отнесенная к ортогональной системе криволинейных координат ξ, θ, z . Оболочка имеет длину L , толщину $2h$, радиус R и состоит из N слоев. Угол армирования каждого слоя k обозначим через β_k , толщина каждого слоя k изменяется от h_{k-1} до h_k . На верхних и нижних поверхностях оболочки находятся слои, обладающие пьезоэлектрическим эффектом. Исследуемая оболочка находится под действием механических нагрузок $q_{i3} = q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta)$, ($i = 1, 2, 3$) и электрических потенциалов $\varphi = \varphi^{\pm}(\xi, \theta)$ по внутренней ($z = -h$) и внешней ($z = +h$) поверхностях оболочки. Относительная толщина оболочки $S = R / 2h$.

Электрический потенциал и перемещения оболочки представляются в виде полиномов по нормальной координате следующего вида:

$$\varphi(\xi, \theta, z) = \varphi_0(\xi, \theta) + \varphi_1(\xi, \theta)z + \varphi_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2!}. \quad (3.1)$$

$$u(\xi, \theta, z) = u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2!} + u_3(\xi, \theta) \frac{z^3}{3!}; \quad (3.2)$$

$$v(\xi, \theta, z) = v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2!} + v_3(\xi, \theta) \frac{z^3}{3!}; \quad w(\xi, \theta, z) = w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2!}.$$

Деформации оболочки определяются с помощью геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1.1. Пьезоэлектрические слои. Уравнения электромеханического состояния поляризованных пьезоэлектрических слоев при напряжении записываются в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [Q]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вектор напряженности для пьезоэлектрических k -слоев оболочки может быть выражен через потенциал φ следующим образом:

$$E_\xi^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{A_1 \partial \xi}, \quad E_\theta^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{A_2 \partial \theta}, \quad E_z^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.5)$$

где $A_1 = R$, $A_2 = 1 + z/R$ - параметры Ламе цилиндрической оболочки.

3.1.2. Композиционные слои. Напряженное состояние цилиндрической оболочки при деформации k -го слоя в локальной системе координат $O123$ определяется с помощью закона Гука

$$\{\sigma_{123}^{(k)}\} = [C^{(k)}] \{\varepsilon_{123}^{(k)}\}. \quad (3.6)$$

3.1.3. Основные уравнения теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Для построения основных уравнений теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта используется вариационный принцип Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \delta U - \delta A &= \sum_{k=1}^N \iiint \sigma^{(k)} \delta \varepsilon^{(k)} dV^{(k)} + \sum_{k=1}^N \iiint D^{(k)} \delta E^{(k)} dV^{(k)} - \sum_{k=1}^N \iint Q^{(k)} \delta \varphi^{(k)} dS^{(k)} - \\ &- \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \iint q_{i3} \delta (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \iint q_{ij} \delta (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.1)-(3.6) с учетом (3.8) в (3.7), после некоторых преобразований, получим систему уравнений равновесия оболочки с учетом пьезоэффекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(0)}}{\partial \theta} - R p_{13}^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial N_{11}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(i)}}{\partial \theta} - R N_{13}^{(i-1)} - R p_{13}^{(i)} = 0; \quad (i = \overline{1, 3}); \\ \frac{\partial N_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(0)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(0)} - R p_{23}^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial N_{12}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(i)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(i)} - R N_{23}^{(i-1)} - i N_{23}^{(i)} - R p_{23}^{(i)} = 0; \quad (i = \overline{1, 3}); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(0)} + Rp_{33}^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial N_{13}^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(j)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(j)} - RN_{33}^{(j-1)} + Rp_{33}^{(j)} = 0, (j = \overline{1, 2});$$

$$\frac{\partial (h^2 ND_1^{(0)} - ND_1^{(2)})}{\partial \xi} + \frac{\partial (h^2 ND_2^{(0)} - ND_2^{(2)})}{\partial \theta} - 2ND_3^{(1)} = 0.$$

Введем для внешних механических силовых факторов следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [N_{11}^{(i)}, \overline{N_{11}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\xi}^{(k)}, q_{11}] \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz; & [N_{12}^{(i)}, \overline{N_{12}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\xi\theta}^{(k)}, q_{12}] \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz; \\ [N_{13}^{(i)}, \overline{N_{13}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\xi z}^{(k)}, q_{13}] \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz; & [N_{22}^{(i)}, \overline{N_{22}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\theta}^{(k)}, q_{22}] \frac{z^i}{i!} dz; \\ [N_{21}^{(i)}, \overline{N_{21}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\theta\xi}^{(k)}, q_{21}] \frac{z^i}{i!} dz; & [N_{23}^{(i)}, \overline{N_{23}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\theta z}^{(k)}, q_{23}] \frac{z^i}{i!} dz; \\ [N_{32}^{(i)}, \overline{N_{32}^{(i)}}] &= \sum_{k=1}^N \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} [\sigma_{\theta z}^{(k)}, q_{23}] R \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz, \quad (i = \overline{0, 3}); \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} N_{33}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N \int_{-h}^h \sigma_z^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^j}{j!} dz; \quad (j = \overline{0, 2}), \quad p_{13}^{(i)} = q_{13}^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{13}^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}; \\ p_{23}^{(i)} &= q_{23}^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{23}^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}; \quad p_{33}^{(i)} = q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}; \\ ND_1^{(i)} &= \sum_{k=1}^N \int_{-h}^h D_1 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz; \quad ND_2^{(i)} = \sum_{k=1}^N \int_{-h}^h D_2 \frac{z^i}{i!} dz; \quad ND_3^{(i)} = \sum_{k=1}^N \int_{-h}^h D_3 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} dz; \quad i = \overline{0, 2} \\ Q_z &= Q_z^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - Q_z^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}. \end{aligned}$$

Краевые условия задачи электроупругости представляются в следующем виде:

- на жестко защемленном краю:

$$u_i = v_i = 0, \quad w_j = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2}); \quad (3.9)$$

- на шарнирно закрепленном краю:

$$N_{11}^{(i)} = 0; \quad (i = \overline{0, 3}); \quad v_i = w_j = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2}); \quad (3.10)$$

- на свободном краю:

$$N_{11}^{(i)} = N_{12}^{(i)} = 0; \quad N_{13}^{(j)} = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2}). \quad (3.11)$$

В параграфе 3.2 представлены метод и схема алгоритма решения краевой задачи электроупругости для многослойных композиционных цилиндрических оболочек, обладающих пьезоэффектом, с помощью тригонометрических рядов Фурье и операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

В параграфе 3.3 даны результаты расчетов НДС по уточненной теории композитных цилиндрических оболочек без учета пьезоэффекта, а так же с учетом пьезоэффекта и при наличии пьезоэлектрических слоев на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Дано сравнение результатов расчета, полученных в данной работе, с результатами других вариантов уточненной теории, опубликованными в международных журналах WoS и Scopus.

3.3.1. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек без учета пьезоэлектрического эффекта. Рассматривается замкнутая многослойная композитная цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием на обоих торцах. Оболочка находится под действием синусоидальной нагрузки $q = Q_0 \sin(m\pi\xi/L) \cos(n\theta)$ на внутренней поверхности.

Таблица 3. 1. Сравнение прогибов \bar{w} при $[90^\circ/0/90^\circ]$

S	500	100	50	10	4
V&B	0.1027	0.4715	0.5495	1.2230	4.0090
S. B	0.1027	0.4715	0.5495	1.2230	4.0090
В данной работе	0.1101	0.4731	0.5399	1.188	3.9106

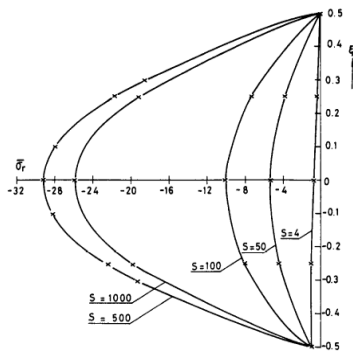


Рис.3.1а. $\bar{\sigma}_z$ по V&B

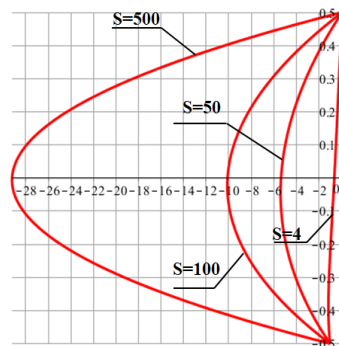


Рис.3.1б. $\bar{\sigma}_z$ в данной работе

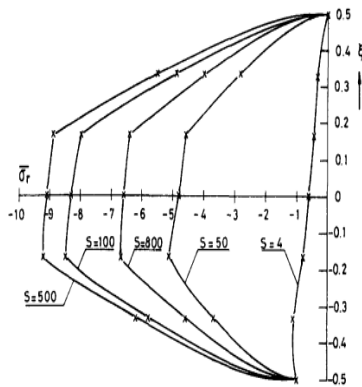


Рис.3.2а. $\bar{\sigma}_z$ по V&B

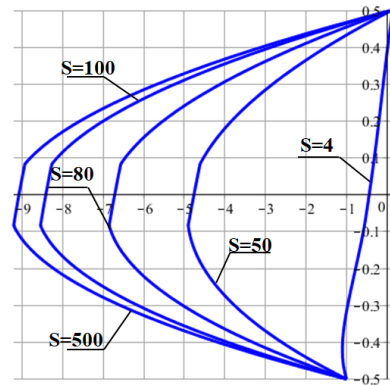


Рис.3.2б. $\bar{\sigma}_z$ в данной работе

Таблица 3. 2. Сравнение максимальных нормальных поперечных напряжений $\bar{\sigma}_z$ при $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0/90^\circ]$.

S	$[90^\circ]$		$[90^\circ/0/90^\circ]$		
	В данной работе	V&B	В данной работе	V&B	S. B
4	-0.73	-0.69	-0.68	-0.62	-0.62
10	-1.40	-1.37	-1.29	-1.27	-1.27
50	-5.39	-5.38	-4.88	-4.85	-4.85
100	-10.14	-10.13	-8.31	-8.30	-8.30
500	-29.25	-29.24	-9.12	-9.12	-9.12

Анализ данных в таблицах 3.1–3.2 и рисунков 3.1–3.2 показывает, что результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами Vardan & Bhaskar и Salvatore Brischetto. Наибольшее отклонение составляет примерно 5,8% при $S=4$. Чем больше значения S , тем меньше различие в результатах.

3.3.2. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Рассматривается жестко защемленная на двух краях замкнутая композитная трехслойная $[90^\circ/0/90^\circ]$ цилиндрическая оболочка из материала, обладающего пьезоэффектом. На рис.3.3-3.6 приведены обозначения:

- $K=2$: Результаты рассчитаны при разложении искомым перемещений оболочки по нормальной координате на одну степень выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява.

- $K=3$: Результаты рассчитаны при аппроксимации перемещений оболочки по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Кроме того, на этих графиках для сравнения результатов, полученных в данной работе, также показано распределение напряжений, рассчитанных в работе Mindlin.

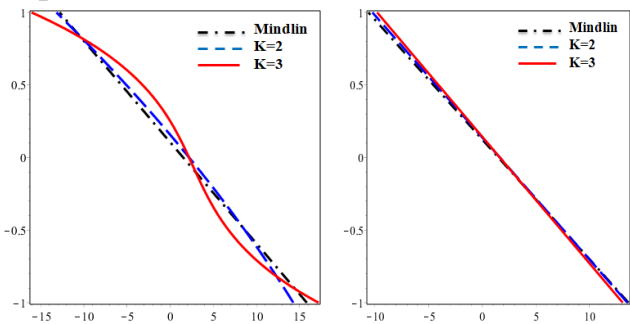


Рис.3.3. Напряжение σ_z на краю и вблизи края

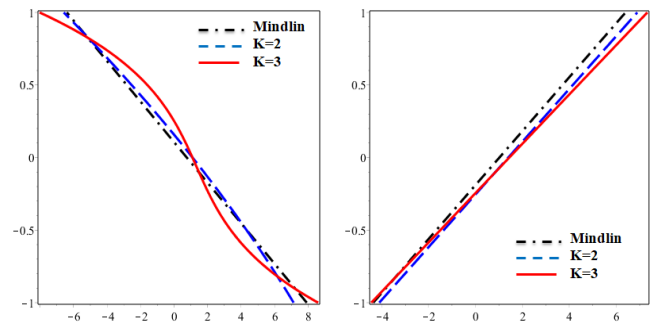


Рис.3.4. Напряжение σ_θ на краю и вблизи края

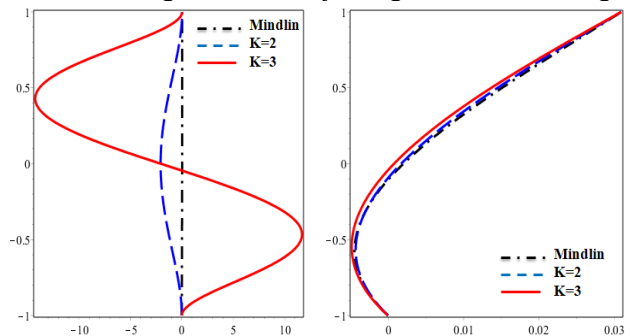


Рис.3.5. Напряжение σ_{zz} на краю и вблизи края

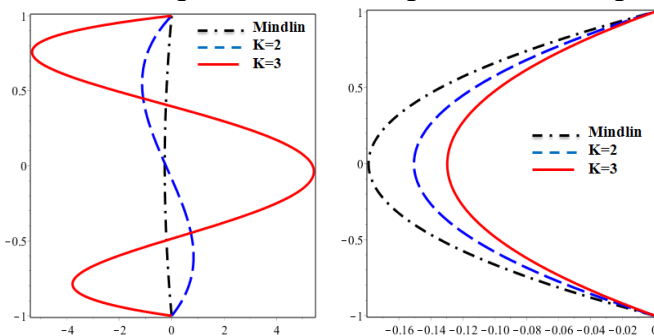


Рис.3.6. Напряжение σ_{zz} на краю и вблизи края

3.3.3. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими слоями. Рассмотрим замкнутую композитную трехслойную $[90^\circ/0/90^\circ]$ цилиндрическую оболочку из материала Graphite-Ероху (AS/3501) (без пьезоэффекта). Полагаем, что один слой из материала PVDF, который обладает пьезоэффектом, находится на внешней поверхности и другой слой на внутренней поверхности оболочки.

Рассматриваемая цилиндрическая композитная оболочка состоит из 5 слоев $[0/90^\circ/0/90^\circ/0]$, радиус, толщина и длина которой равны R , $2h$ и L соответственно. Результаты расчета НДС показаны на рис.3.7-3.8, где дано сравнение с данными работы Mindlin.

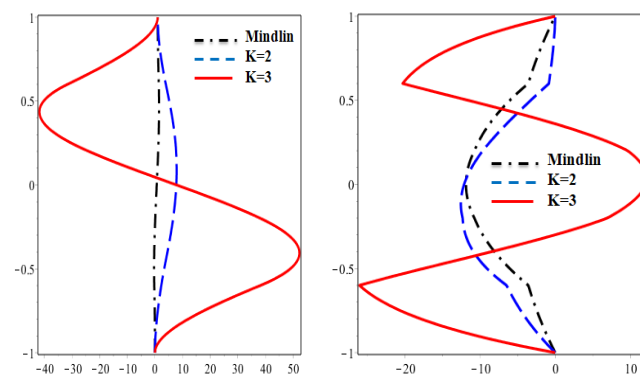
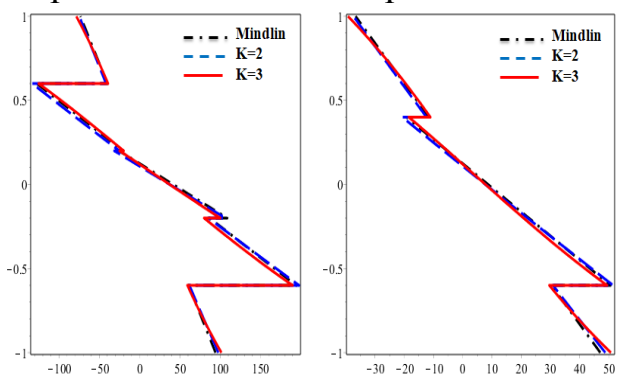


Рис.3.7. Напряжения σ_x и σ_θ на краях оболочки

Рис.3.8. Напряжения σ_z и σ_{xz} на краях оболочки

Анализируя результаты вычисления НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта для различных вариантов нагрузок можно установить следующее:

-Уточненную математическую модель, предлагаемую в данной работе, можно использовать как общую расчетную для определения НДС композиционных оболочек и пластин, изготовленных из материалов, обладающих пьезоэлектрическим эффектом и без учета пьезоэффекта.

-В различных случаях нагружения, основные напряжения σ_x и σ_θ практически совпадают с результатами, рассчитанными по $K=2$ и по Mindlin, а поперечные напряжения σ_z и σ_{xz} совпадают только при удалении от краев. В краевых зонах поперечные напряжения отличаются по величине и играют важную роль при оценке прочности конструкций.

В четвертой главе разработана уточненная математическая модель электроупругости с учетом термического нагружения для определения НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек.

В параграфе 4.1 построены основные уравнения математической модели композиционных цилиндрических оболочек при термоэлектрическом воздействии. С учетом нагрева и электрического воздействия уравнения напряженного состояния оболочки можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} - [\lambda]\Delta T, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\} + [P]\Delta T. \end{aligned} \quad (4.1)$$

На основе вариационного принципа виртуальных перемещений Лагранжа для композиционных цилиндрических оболочек получены система уравнений равновесия и граничные условия при тепловом нагружении с учетом пьезоэффекта.

В параграфе 4.2 представлено решение сформулированной краевой задачи термоэлектроупругости оболочки на основе тригонометрических рядов.

В параграфе 4.3 даны результаты расчетов НДС композиционных

цилиндрических оболочек при совместном действии термоэлектрического нагружения и анализ влияния различных вариантов нагрузок на НДС оболочки.

4.3.1. НДС композиционной цилиндрической оболочки при термоэлектрическом воздействии. Рассматривается композитная пятислойная $[0/-90^{\circ}/0/90^{\circ}/0]$ цилиндрическая оболочка, жестко заземленная на двух краях. Три слоя в центре оболочки выполнены из материала AS/3501 и два слоя на внешней и внутренней поверхностях из материала PVDF.

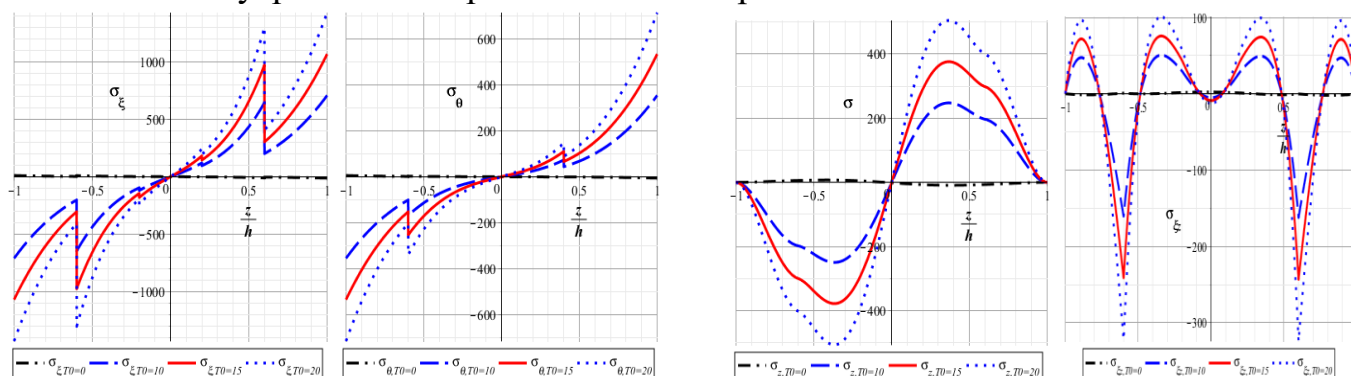


Рис.4.1. Напряжения σ_{ξ} и σ_{θ} на краях оболочки **Рис.4.2. Напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$ на краях оболочки**

Из рисунков 4.1-4.2 и таблицы 4.1 можно установить, что при $T_0=0$ (без учета температурного воздействия) напряжения на краях практически равны нулю. В случае, если композитная оболочка находится под действием различных температур, основные напряжения значительны и поперечные напряжения, которыми пренебрегают в классической теории термоэлектроупругости, составляют 20-23% (для $\sigma_{\xi z}$) и 30-36% (для σ_z).

Табл.4.1. Напряжения пятислойной оболочки $[0/90^{\circ}/0/90^{\circ}/0]$ ($L=4R$, $S=100$) при термоэлектрическом воздействии

	$T_0=0^{\circ}\text{C}$			$T_0=10^{\circ}\text{C}$		
	Mindlin	K=2	K=3	Mindlin	K=2	K=3
$\sigma_{\xi}\text{max}$	15.83	14.26	17.19	668.15	670.64	844.45
$\sigma_{\theta}\text{max}$	7.91	7.13	8.59	334.08	345.33	425.22
$\sigma_{\xi z}\text{max}$	1.12	1.12	5.58	1.35	1.35	196.67
$\sigma_z\text{max}$	2.07	2.08	14.36	2.55	2.56	499.35
$\sigma_{\xi}(\xi=\frac{L}{2},\theta=0)$	3.71	3.57	3.57	363.94	364.58	430.99
$\sigma_{\theta}(\xi=\frac{L}{2},\theta=0)$	6.19	6.20	6.20	213.14	213.13	145.80
$\sigma_{\xi z}(\xi=\frac{L}{2},\theta=0)$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_z(\xi=\frac{L}{2},\theta=0)$	0.01	0.01	0.01	0.83	0.83	0.58

4.3.2. НДС композиционной цилиндрической оболочки при термомеханическом воздействии. Рассматривается композитная трехслойная $[-90^{\circ}/0/90^{\circ}]$ цилиндрическая оболочка из PVDF, жестко заземленная на двух краях, под действием термомеханической нагрузки. НДС оболочки на краях

показано на рис.4.3-4.4.

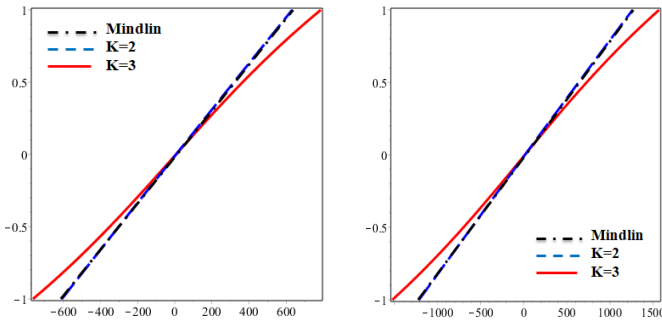


Рис.4.3. Напряжения σ_ξ и σ_θ на краях оболочки

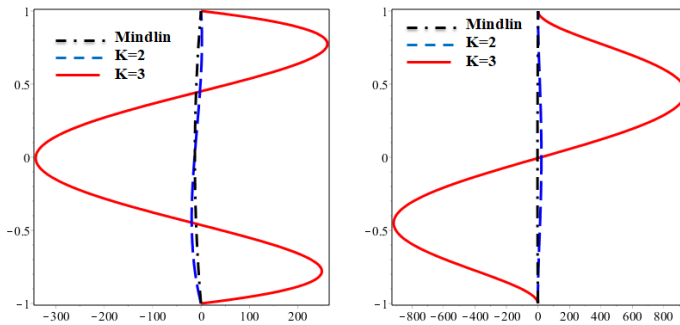


Рис.4.4. Напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$ на краях оболочки

Из рисунков 4.3-4.4 и таблицы 4.2 следует, что:

- изменение основных нормальных напряжений σ_ξ и σ_θ при действии различных температур в любых точках оболочки практически совпадают при вычислении по методике данной работы (K=3) и работы Mindlin.

- наличие напряжений типа “погранслои” σ_z и $\sigma_{\xi z}$ в краевой зоне. При удалении от краевых зон на расстояние порядка толщины, указанные напряжения затухают (практически равны нулю) и ими можно пренебречь.

Табл.4.2. Напряжения при термомеханическом воздействии в трехслойной оболочке $[90^\circ/0/90^\circ]$ ($L=4R$, $S=100$)

	T0=0°C			T0=10°C		
	Mindlin	K=2	K=3	Mindlin	K=2	K=3
$\sigma_\xi \max$	198.31	236.55	269.51	579.61	545.46	689.04
$\sigma_\theta \max$	99.15	118.28	134.75	289.80	275.23	345.56
$\sigma_{\xi z} \max$	10.56	25.36	62.12	12.32	26.88	152.68
$\sigma_z \max$	0	43.57	120.36	0	45.26	409.36
$\sigma_\xi(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	48.09	31.52	31.85	415.75	412.67	466.42
$\sigma_\theta(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	99.25	98.99	99.25	120.09	120.09	52.75
$\sigma_{\xi z}(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_z(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0.75	0.75	0.75	1.56	1.56	1.31

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. На основе закона электростатики Максвелла и уравнений трехмерной теории упругости с применением вариационного принципа Лагранжа к полной энергии оболочек с учетом пьезоэффекта, построены уточненные математические модели электроупругости и соответствующие граничные условия для оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов.

Компоненты НДС представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява

2. Сформулированная краевая задача электроупругости изотропных и многослойных композиционных цилиндрических оболочек решается на основе сведения трехмерных уравнений к двумерным. Механические перемещения, электрические потенциалы и внешние электромеханические нагрузки, действующие на оболочку, разлагаются в тригонометрические ряды по окружной координате.

3. Разработан алгоритм решения краевой задачи электроупругости в программном пакете ЭВМ. Даны расчеты и анализы НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и температурного воздействия в различных вариантах нагружения и краевых условий. Показано, что уточненная математическая модель, предлагаемая в данной работе, можно использовать как общую расчетную для определения НДС композиционных оболочек без и с учетом пьезоэффекта. Также установлено, что наличие напряженного состояния краевой плоской деформации типа «погранслой» вблизи зон искажения и уточнение результатов расчета НДС не только в части основных напряжений, но и в части поперечных нормальных и касательных напряжений, соответствующих классической теории.

4. Проведено сравнение полученных в данной работе результатов с данными классической и другими вариантами уточненной теории, опубликованными в международных журналах Scopus и WoS, подтвердившее достоверность предлагаемой математической модели НДС.

5. Предлагаемые математические модели НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и температурного воздействия позволяют определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для расчета и оценки прочности и долговечности элементов конструкций из композиционных материалов. Установлено, что НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек существенно зависит от пьезоэффекта и термомеханического нагружения. Предлагаемая уточненная математическая модель позволяет получить существенно более точные величины напряжений композиционных цилиндрических оболочек при совместном термоэлектромеханическом нагружении.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х, Чан Нгок Доан.* Исследование электроупругостного состояния цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории. Труды МАИ, 2019, № 109 (URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111376>).

2. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженное состояние цилиндрических оболочек под действием произвольных нагрузок с учетом пьезоэффекта. Проблемы прочности и пластичности, Т.82, № 4(2020).С.483-492. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-483-492>.

3. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряжено-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории. Тепловые процессы в технике, 2020.Т.12. №3 С.110-117, DOI: 10.34759/tpt-2020-12-3-110-117.

Публикации в изданиях, входящих в МБД Scopus:

4. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженное состояние композиционных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом пьезоэлектрического эффекта. Проблемы машиностроения и надежности машин, № 4, 2021 С.37-44. DOI: 10.31857/S0235711921040039// The Stress State of Composite Cylindrical Shells Based on Refined Theory with Allowance for the Piezoelectric Effect. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2021, Vol. 50, No. 4, pp. 312–318. DOI: 10.3103/S1052618821040038.

5. *Firsanov Val.V, Nguyen L.H.* Stress concentration state of piezoelectricity in cylindrical shell based on the non-classical theory. Structural integrity and life. Vol.21, No.1, 2021, pp. 53–58.

6. *Firsanov Val.V, Nguyen L.H.* Stress state analysis of laminated shells with piezoelectric layers based on the refined theory. Journal of Physics: Conference Series, 2021, Volume 1925/012022, DOI: doi:10.1088/1742-6596/1925/1/012022.

Публикации в других изданиях:

7. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории. Международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. 2019. С. 236.

8. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Электромеханическое состояние цилиндрических оболочек на основе уточненной теории. XLVI Международная молодежная научная конференция “Гагаринские Чтения”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов. 2020. С. 914-915.

9. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом электрического и температурного воздействия. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2020. Том 1 часть 2. С. 218-219.

10. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Расчет многослойных композитных цилиндрических оболочек при температурном нагружении на основе уточненной теории. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2021. Том 1. С. 222-223.

11. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженное состояние композиционных оболочек с пьезоэлектрическими слоями на основе уточненной теории. Международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов. 2020. С. 691-692.

12. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Электромеханическое состояние композиционных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Международная конференция “Композитные материалы и конструкции”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов 2020г. С. 778-779.

13. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженное состояние “погранслои” композиционных цилиндрических оболочек в задачах электроупругости. XLVII Международная молодежная научная конференция “Гагаринские Чтения”, МАИ, 2021г. Сборник тезисов докладов. С. 842-843.

14. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Погранслои и его влияние на прочность композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Материалы XXII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС2021, Алушта, Крым. Сборник тезисов докладов. С.255-256.

15. *Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х.* Напряженно-деформированное состояние многослойных композитных цилиндрических оболочек при температурном нагружении на основе уточненной теории. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2021. Том 1. С. 223-225.