

*На правах рукописи*



**Ермаков Иван Сергеевич**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ  
ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ  
ОТВЕРСТИЙ**

Специальность

1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** **Григорьев Валерий Георгиевич**, доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» «Московского авиационного института».

**Официальные оппоненты:** **Полилов Александр Николаевич** доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Безопасности и прочности композитных конструкций» ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии наук» (г. Москва);

**Сергеичев Иван Валерьевич** кандидат физико-математических наук, директор «Центра Технологий и Материалов» АНОО ВО «Сколковский институт науки и технологий» (г. Москва).

**Ведущая организация:** Акционерное общество «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения», г. Хотьково.

Защита диссертации состоится «06» ноября 2024 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=179065](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=179065)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Сердюк Д.О.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Распространёнными элементами различного рода силовых конструкций, изготавливаемых на основе композиционных материалов таких, как стекло- и углепластики, являются композитные пластины, работающие в условиях растягивающих нагрузок. Зачастую по конструктивным и технологическим соображениям в отмеченных пластинах предусматривается наличие одного или нескольких отверстий (во многих случаях круговых). Вблизи указанных отверстий напряжения, обусловленные приложенными растягивающими нагрузками, могут достигать опасно высоких значений и приводить к разрушению подобного типа пластин. Отсюда запрос, выдвигаемый практикой проектирования, на разработку расчётных моделей, способных адекватно предсказывать напряжённое состояние обозначенных (ослабленных круговыми отверстиями) композитных пластин и давать обоснованный прогноз по их прочности.

Литература по вопросам аналитического решения задач о напряжениях вокруг отверстий в тонких изотропных и анизотропных упругих пластинах к настоящему времени насчитывает огромное количество публикаций. Укажем здесь на большой вклад в решение указанного класса задач таких отечественных и зарубежных ученых, как Г.В. Колосов, Н.И. Мухелишвили, С.Г. Михлин, Д.И. Шерман, С.Г. Лехницкий, Г.Н. Савин, Д.В. Вайнберг, А.С. Космодамианский, А.Г. Угодчиков, М.П. Шереметьев, Л.А. Фильштинский, G. Kirsch, С.Е. Inglis, L.N.G. Filon, G.B. Jeffery, A.A. Griffith, H. Neuber, R.C.J. Howland, W.T. Koiter, R.D.Mindlin, M.Isida, M. Kikukawa и др.

Анализ опубликованных в литературе исследований, касающихся напряжённого состояния и прочности растягиваемых композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями, позволяет сделать вывод о том, что большинство полученных в указанном направлении результатов (в том числе по вопросам прочности) относится к случаю тонких пластин с одним круговым отверстием. Что касается вопросов, связанных с напряжённым состоянием и прочностью в важных для практики случаях растяжения тонких композитных пластин, имеющих несколько круговых отверстий, а также случаях толстых (по сравнению с диаметром отверстия) пластин, то они к настоящему времени не достаточно изучены. Эти вопросы до сих пор сохраняют свою актуальность.

**Степень разработанности темы.** На основе анализа имеющейся литературы по обсуждаемой теме можно сделать следующие выводы о степени её разработанности.

Точные решения задач о напряжённом состоянии растягиваемых пластин с отверстиями к настоящему времени удалось получить лишь применительно к ситуации бесконечно протяжённых пластин. На практике же зачастую приходится иметь дело с ситуацией, когда ширина пластины сопоставима с диаметром выполненных в ней отверстий.

Во многих разработках связанных с вопросами прочности растягиваемых композитных образцов с концентратором напряжений в виде кругового отверстия, при оценке напряжённого состояния вблизи отверстия используется приближённое аналитическое решение, учитывающее реальные размеры исследуемого образца. Такое приближённое решение строилось путём введения в точное аналитическое решение С.Г. Лехницкого для одноосно растягиваемой бесконечной ортотропной пластины с круговым отверстием корректирующего фактора, позволяющего адаптировать это решение к случаю пластины конечных размеров. Современными исследователями А. Russo и В. Zuccarello было установлено, что подобные приближённые решения могут приводить к завышенной на 50% (по сравнению с предполагаемым точным решением) оценке напряжений в опасном на разрыв сечении пластины вблизи кромки отверстия. Данная ситуация говорит о сохраняющейся актуальности проблемы получения надёжных численных решений применительно к данному классу задач прочности.

**Цель диссертационной работы:**

– разработка методики численного решения задач о растяжении ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин, которая способна обеспечить получение надёжных числовых результатов как по параметрам напряженного состояния вблизи контуров отверстий, так и по предельному (в рамках выбранного критерия разрушения) значению приложенной растягивающей нагрузки.

**Задачи диссертационной работы:**

– формулировка подхода к численному решению задач о растяжении ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин, который включает: использование соотношений плоской теории упругости применительно к случаю тонких ортотропных пластин и трёхмерных соотношений теории упругости применительно к случаю толстых ортотропных пластин; построение для каждого из указанных случаев двух (альтернативных) вычислительных моделей, одна из которых основана на методе конечных элементов (КЭ), другая – либо на вариационно-разностном (ВР) методе, либо методе численного интегрирования (ЧИ); подтверждение факта достоверности получаемого таким образом численного решения при условии совпадения решений, полученных на основе альтернативных вычислительных моделей; выбор критерия разрушения, позволяющего по рассчитанному напряжённому состоянию рассматриваемой композитной пластины определить предельное (на момент разрушения) значение приложенной растягивающей нагрузки.

– разработка и программная реализация указанных ВР и ЧИ вычислительных моделей. Построение на основе программного комплекса «*Abaqus*» вычислительных КЭ моделей для

решения обозначенного типа задач.

– проведение с использованием заявленной методики (с одновременным применением построенных альтернативных вычислительных моделей) исследований, касающихся напряженного состояния и прочности растягиваемых ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин.

#### **Научная новизна работы:**

– построены альтернативные вычислительные модели на основе различных методов для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных пластин ослабленных круговыми отверстиями.

– разработана методика получения (с подтверждённой достоверностью) численного решения задачи о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных пластин, ослабленных круговыми отверстиями. Подтверждение достоверности получаемого численного решения в рамках указанной методики осуществляется по факту совпадения расчётных результатов по напряжениям вблизи отверстий на основе альтернативных моделей.

– с применением этой методики впервые для задач об одноосном растяжении тонких и толстых композитных ортотропных пластин, ослабленных круговыми отверстиями, выполнены исследования по влиянию на уровень напряжений в зонах, близких к кромке отверстия таких факторов как: физико-механические характеристики материалов, размеры пластины, расположения отверстий в пластине, радиусы отверстий. Также были проведены исследования вышеуказанных факторов на предельные значения приложенных растягивающих нагрузок (с принятием «критерия напряжений в точке» в качестве критерия разрушения).

#### **Теоретическая и практическая значимость работы состоит:**

– в разработке альтернативных вычислительных моделей для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями, а также построение методики в целях получения (с подтверждённой достоверностью) численного решения соответствующих задач о напряжённом состоянии с выдачей прогноза по предельному значению приложенной растягивающей нагрузки. Указанные разработки и полученные результаты исследований могут быть использованы в расчётной практике организаций, связанных с проектированием обозначенного типа конструктивных элементов;

– во внедрении указанных разработок в расчетную практику Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» (получен акт внедрения).

**Методология и методы исследования.** В работе использованы:

– соотношения плоской теории упругости применительно к случаю тонких ортотропных пластин и трёхмерных соотношений теории упругости применительно к случаю толстых ортотропных пластин;

– методы численного решения поставленных задач о напряжённом состоянии, среди которых: ВР метод, метод ЧИ в варианте ортогональной прогонки и КЭ метод с использованием программного комплекса SIMULIA «*Abaqus*» (лицензия пользователя № LKO0576571);

– методика подтверждения **достоверности** получаемого численного решения по факту совпадения результатов, получаемых на основе альтернативных вычислительных моделей;

– сравнения с экспериментом и известными расчётными результатами.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

– разработанные ВР и ЧИ модели для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями;

– построенные на основе комплекса «*Abaqus*» расчётные КЭ модели для решения тех же задач об одноосном растяжении композитных пластин с отверстиями;

– методика получения решения (с подтверждённой достоверностью) поставленной задачи с использованием построенных альтернативных вычислительных моделей;

– получаемые в рамках обозначенной методики результаты численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями;

– получаемые на основе отмеченных решений с использованием «критерия напряжений в точке» расчётные прогнозы по предельным значениям растягивающих нагрузок, приложенных к рассматриваемым композитным пластинам;

– выявленные эффекты и закономерности по влиянию физико-механических характеристик, размеров пластины, размеров отверстий в ней, а также их расположения, на напряжённое состояние вблизи отверстий и на предельное значение приложенной к пластине растягивающей нагрузки.

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности.

**Апробация работы.** Основные результаты проведённых исследований докладывались на:

– 18-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика» (МАИ (НИУ), г. Москва, 18-22 ноября 2019 г.)

– XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (МАИ (НИУ), г. Москва, 27-28 марта 2020 г.)

– Международный молодёжный научный форум «Ломоносов-2020» (МГУ им. М.В. Ломоносова), г. Москва, 10-27 ноября 2020 г.)

– 20-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика» (МАИ (НИУ), г. Москва, 22-26 ноября 2021 г.)

– XLVIII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (МАИ (НИУ), г. Москва, 12-25 апреля 2022 г.)

**Публикации.** Основные результаты диссертации отражены в 7 [1-7], научных статьях, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, выводов, списка использованных источников и приложения. Работа изложена на 142 страницах, содержит 60 рисунков, 21 таблицу, приложение. Список использованных источников включает в себя 112 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, излагаются цели и задачи работы, новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Первая глава** посвящена обсуждению постановки задачи о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых толстых и тонких композитных пластин с круговыми отверстиями, а также обзору наиболее распространённых вариантов формулировок рассматриваемого типа задач, аналитических и численных подходов к их решению, критериев разрушения, применительно к обозначенному случаю одноосно растягиваемых тонких композитных пластин с концентратором напряжений в виде кругового отверстия.

Рассматриваем тонкую прямоугольную слоистую пластину длиной  $L$ , шириной  $W$  и толщиной  $h$ . Считаем, что срединная поверхность пластины лежит в плоскости  $Oxy$  прямоугольной системы координат  $Oxyz$ , при этом ось  $Ox$  ориентирована по длине пластины. Считаем также, что слои пластины являются однородными и ортотропными (в осях  $Oxy$ ) и что слоистый пакет пластины симметричен относительно её срединной поверхности. Последнее означает, что симметрично расположенные слои имеют одинаковые толщины и одинаковые физико-механические свойства.

При принятых предположениях, согласно теории тонких слоистых оболочек и пластин, задача о растяжении рассматриваемой слоистой пластины вдоль оси  $Ox$  нагрузками,

приложенными к её краям размером  $W$ , может быть сформулирована в виде набора соотношений, включающих:

- геометрические соотношения

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (1)$$

- физические соотношения

$$T_{xx} = B_{11}\varepsilon_{xx} + B_{12}\varepsilon_{yy}, \quad T_{yy} = B_{12}\varepsilon_{xx} + B_{22}\varepsilon_{yy}, \quad T_{xy} = B_{33}\gamma_{xy}. \quad (2)$$

- уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u_x, u_y$  - перемещения точек пластины вдоль соответствующих координатных осей,  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$  - деформации (относительные удлинения и сдвиг),  $T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}$  - усилия растяжения-сжатия и сдвига в пластине,  $B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{33}$  - жёсткости пластины.

К соотношениям (1)-(3) необходимо добавить граничные условия, сводящиеся к тому, что одна из кромок пластины размером  $W$  закреплена, а к другой такой же кромке приложена равномерно распределённая нагрузка с интенсивностью  $T$ . Соответствующее силовое условие для этой кромки записывается в виде:  $T_{xx} = T$ . Все остальные кромки (включая кромки отверстий) считаем свободными от нагрузок.

Введём в рассмотрение (осреднённые по толщине) напряжения в пластине, определяемые выражениями

$$\sigma_{xx} = T_{xx} / h, \quad \sigma_{yy} = T_{yy} / h, \quad \sigma_{xy} = T_{xy} / h. \quad (4)$$

С использованием связей (4) физические соотношения (2) можно представить в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{xx} + \nu_{21}\varepsilon_{yy}), \quad (1 \leftrightarrow 2), (x \leftrightarrow y), \quad \sigma_{xy} = G_{12}\gamma_{xy}, \quad (E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}), \quad (5)$$

где

$$E_1 = \frac{B_{11}B_{22} - (B_{12})^2}{B_{22}h}, \quad E_2 = \frac{B_{11}B_{22} - (B_{12})^2}{B_{11}h}, \quad \nu_{12} = \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad \nu_{21} = \frac{B_{12}}{B_{11}}, \quad G_{12} = \frac{B_{33}}{h}, \quad (6)$$

а уравнения равновесия (3) выразить в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Физические соотношения в форме (5) представляют собой соотношения упругости для тонкой однородной ортотропной пластины в условиях плоского напряжённого состояния. Значения параметров упругости такого однородного аналога исходной слоистой композитной пластины можно вычислить по формулам (6), где жёсткости  $B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{33}$



определяются на основе суммирования соответствующих жесткостей её ортотропных слоёв. Отметим, что те же «эффективные» значения параметров упругости могут быть также определены из экспериментов по одноосному растяжению образцов, вырезанных из обсуждаемой композитной пластины.

Итак, первоначально сформулированная задача о растяжении (усилием  $T$ ) рассматриваемой слоистой пластины вдоль оси  $Ox$  оказывается сведённой к задаче о напряжённо-деформированном состоянии аналогичным образом растягиваемого ортотропного аналога данной пластины. Формулировку такой задачи составляют соотношения (1), (5), (7) с условием нагружения вида  $\sigma_{xx}=\sigma$ , где  $\sigma=T/h$ . Это типичная постановка задачи для большинства из представленных в литературе исследований, связанных с прочностью растягиваемых композитных пластин с отверстиями.

Во **второй главе** даётся описание ВР вычислительной модели (реализованной на языке Fortran) для решения задачи о растяжении тонкой композитной ортотропной пластины с круговыми отверстиями. Также представлены результаты исследований напряжённого состояния вокруг отверстий в растягиваемых ортотропных композитных пластинах, полученные в рамках сформулированной методики с использованием указанных двух альтернативных (ВР и КЭ) вычислительных моделей.

Рассматриваем прямоугольную пластину (см. рис. 1), растягиваемую в направлении оси  $Ox$ , считая заданными равномерно распределённые по её торцам напряжения. Пластины считаем выполненной из ортотропного материала с параметрами упругости  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{21}, \nu_{12}$ . В формулировку соответствующей задачи о напряжённо-деформированном состоянии пластины включаем геометрические соотношения (1) и физические соотношения (5).

Случай свободного кругового отверстия радиуса  $R$  в пластине моделируем отверстием, заполненным изотропным материалом включения, значение модуля Юнга которого, приближено к нулю. Далее описаны граничные условия по пунктам соответствующим пронумерованным участкам пластины (Рис. 1).

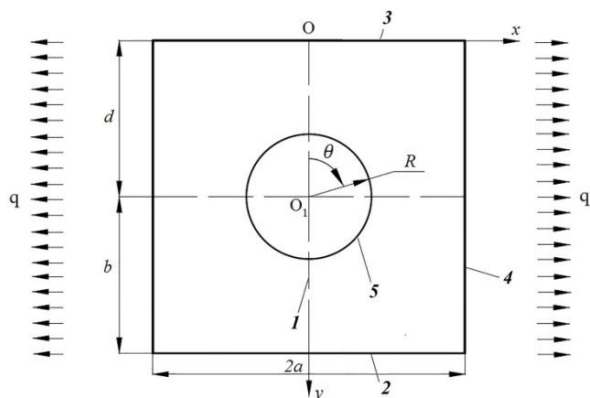


Рис. 1 – Расчётная схема тонкой растягиваемой прямоугольной пластины

соответствующим пронумерованным участкам пластины (Рис. 1).

1) На участке границы моделируемой половины, лежащем на оси  $Oy$ , формулируем условия  $u_x=0, \sigma_{xy}=0$ , соответствующие условиям симметрии.

2) Для исключения перемещений пластины как жесткого целого (в направлении оси  $Oy$ ) формулируем на участке ее границы,

параллельном оси  $Ox$ , условия  $u_y=0$ ,  $\sigma_{xy}=0$ . Расчётная модель соответствует случаю пластины с двумя одинаковыми отверстиями радиуса  $R$ . Когда отрезок  $b$  существенно больше радиуса  $R$ , указанные отверстия практически не оказывают влияния друг на друга.

3) Верхняя кромка пластины (на оси  $Ox$ ) является свободной, поэтому условия имеют вид  $\sigma_y=0$ ,  $\sigma_{xy}=0$ .

4) Условия на кромке параллельной оси  $Ox$  имеют вид  $\sigma_x=q$ ,  $\sigma_{xy}=0$ , так как к ней приложена растягивающая нагрузка.

5) Граничные условия на контуре отверстия записываем в следующем виде:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0. \quad (11)$$

где  $n_x$ ,  $n_y$  проекции на оси  $Ox$ ,  $Oy$  единичного вектора нормали к границе контура отверстия

$$n_x = -\sin \theta, \quad n_y = -\cos \theta. \quad (12)$$

Формулировку условий равновесия принятой модели пластины осуществляем на основе принципа возможных перемещений. В рассматриваемом плоском случае имеем:

$$\iint_S (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dS = \int_{\Gamma_q} q \delta u_x dy. \quad (13)$$

Интегрирование в левой части равенства (13) осуществляется по прямоугольной области  $S$ , занимаемой выделенной правой половиной пластины, а интегрирование справа осуществляется по правой стороне этой области (вдоль правого нагруженного края пластины).

Разбиваем лежащие на осях  $Ox$  и  $Oy$  стороны области  $S$  соответственно на  $M$  и  $N$  малых отрезков, и через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные соответствующим координатным осям. Тем самым осуществляем разбиение области  $S$  на  $M \times N$  прямоугольных ячеек  $S^{(i,j)} (i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N)$ . Вместо равенства (13) будем использовать его приближенный аналог вида

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} \delta \tilde{\gamma}_{xy}^{(i,j)}] l_x^{(i)} l_y^{(j)} = \sum_{j=1}^N q \delta \tilde{u}_x^{(j)} l_y^{(j)}. \quad (14)$$

Здесь «волной» отмечены величины, определяемые в серединах соответствующих элементарных участков интегрирования, а величины  $l_x^{(i)} = x_{i+1} - x_i$  и  $l_y^{(j)} = y_{j+1} - y_j$  ( $i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N$ ) представляют собой длины соответствующих элементарных отрезков разбиений вдоль координатных осей.

Далее используем обозначения  $u_x^{i,j}$ ,  $u_y^{i,j}$  для значений перемещений в узловых точках с координатами  $x_i$ ,  $y_j$  ( $i=1,2,\dots,M+1; j=1,2,\dots,N+1$ ) рассматриваемой прямоугольной сетки. Входящие в вариационное уравнение (14) деформации, относящиеся к середине ячейки  $S^{(i,j)}$ ,

определяем на основе соотношений (1), вычисляя при этом соответствующие частные производные с применением центрально-разностных схем. В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} &= 0,5(u_x^{i+1,j} + u_x^{i+1,j+1} - u_x^{i,j} - u_x^{i,j+1})/l_x^{(i)}, & \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} &= 0,5(u_y^{i,j+1} + u_y^{i+1,j+1} - u_y^{i,j} - u_y^{i+1,j})/l_y^{(j)}, \\ \tilde{\gamma}_{xy}^{(i,j)} &= 0,5(u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1} - u_x^{i,j} - u_x^{i+1,j})/l_y^{(j)} + 0,5(u_y^{i+1,j} + u_y^{i+1,j+1} - u_y^{i,j} - u_y^{i,j+1})/l_x^{(i)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисление перемещений в серединах прямоугольных ячеек проводим по схеме

$$\tilde{u}_x^{(i,j)} = 0,25(u_x^{i,j} + u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1}) \quad (x \Leftrightarrow y), \quad (16)$$

а перемещений  $\tilde{u}_x^{(j)}$  в равенстве (14) - по схеме

$$\tilde{u}_x^{(j)} = 0,5(u_x^{M+1,j} + u_x^{M+1,j+1}), \quad (17)$$

Переходя в вариационном уравнении (14) от напряжений к деформациям использованием связей (5), а затем с использованием связей (15), (17) к узловым перемещениям, окончательно приходим к формулировке вариационного уравнения (14) в терминах узловых перемещений принятой прямоугольной сетки. Осуществляем коррекцию этого уравнения, учитывая равенства

$$u_x^{1,j} = 0, \quad u_y^{i,N+1} = 0 \quad (i=1,2,\dots,M+1; \quad j=1,2,\dots,N+1) \quad (18)$$

отражающие заданные граничные условия в перемещениях. Приравнявая коэффициенты при вариациях неизвестных узловых перемещений в левой и правой части сформированного вариационного уравнения, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Решаем эту систему методом Гаусса, а затем определяем параметры напряженно-деформированного состояния в средних точках ячеек расчетной модели с использованием связей (16), (18), (15), (5).

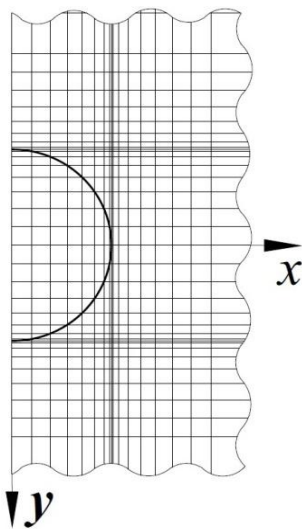


Рис. 2 – Схема построения сетки ВР модели пластины с отверстием

В фортран-программе, реализующей ВР процедуру, схема генерации расчётной прямоугольной сетки в зоне отверстия представлена на рисунке 2.

Расчётная практика показала, что при разбиении окружности на двести элементарных дуг обеспечивается хорошее согласование получаемых расчётных результатов с имеющимися аналитическими решениями.

Разбиение остальных областей проводится следующими образом: отрезок  $R \leq x \leq 10R$  на оси  $Ox$ , а также отрезки  $0 \leq y \leq 9R$  и  $11R \leq y \leq 20R$  на оси  $Oy$  разбиваем (направляясь от центра  $O_1$  к кромке пластины) на участки с размерами  $0,2R; 0,2R; 0,6R; 2R; 2R, 4R$ , далее разбиваем уже их на  $30, 20, 30, 20, 15, 20$  одинаковых отрезков соответственно. Через концы

образованных элементарных отрезков проводим прямые, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$ , тем самым закончив построение сетки.

Исследования в рамках сформулированной вычислительной методики проведены для следующих трёх расчётных случаев:

I. Отверстие расположено вдали от краёв пластины (случай плоскости с одним отверстием),  $d=b=a=mR$  (Рис.1).

II. Отверстие расположено вблизи ненагруженного края пластины (случай полуплоскости с отверстием вблизи границы),  $d=1,54R$ ,  $b=a=mR$  (Рис.1).

III. Два одинаковых близко расположенных отверстия находятся вдали от краёв пластины (случай плоскости с двумя одинаковыми близко расположенными отверстиями),  $b=1,25R$ ,  $d=a=mR$  (Рис.1).

Таб. 1 – Варианты значений параметров упругости пластины

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_2/E_1$	0,305	3,277	0,305	3,277	1,278	0,783	2,643	0,378
$G_{12}/E_1$	0,03	0,098	0,03	0,098	0,233	0,183	0,414	0,157
$\nu_{12}$	0,917	0,28	1,311	0,4	0,102	0,13	0,068	0,18
$\nu_{21}$	0,28	0,917	0,4	1,311	0,13	0,102	0,18	0,068

Таб. 2 – Коэффициенты концентраций напряжений от параметра  $G_{12}/E_1$

№	1	2	8	6	5	7
$k_{II}/k_I$	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6
$k_{III}/k_I$	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5
$G_{12}/E_1$	0,03	0,098	0,157	0,183	0,233	0,414

На рисунке 3 представлены полученные численным моделированием результаты по распределению напряжений  $\sigma\theta/q$  вдоль контура отверстия для рассматриваемых I, II, III расчётных случаев в предположении, что материал пластины ортотропный. Помеченные цифрами 1-8 кривые соответствуют приведённым в таблице 1 вариантам задаваемых значений параметров упругости пластины. Как видно, для всех выбранных вариантов результаты КЭ (сплошные кривые) и ВР (точки различной конфигурации) моделирований практически совпадают, что говорит о достоверности полученных численных решений.

Далее введем такую величину как коэффициент концентрации напряжений

$$k = \sigma_{\theta,max} / \sigma \quad (18)$$

где  $\sigma_{\theta,max}$  это значение максимальных напряжений в композите с отверстием, а  $\sigma$  значение максимальных напряжений в аналогичном композите без отверстия.

Отмечаем, что в случае симметричного расположения отверстия в пластине, максимумы  $k$  реализуются в точках с координатами  $\theta=0^\circ$ ,  $\theta=180^\circ$ , тогда как во втором расчетном случае, максимум  $k$  в точке с координатой  $\theta=0^\circ$ , а в третьем в точке  $\theta=180^\circ$ .

В таблице 2 представлена оценка совместного влияние параметра  $G_{12}/E_1$  и фактора близости отверстия по отношению к ненагруженному краю пластины или к другому отверстию.

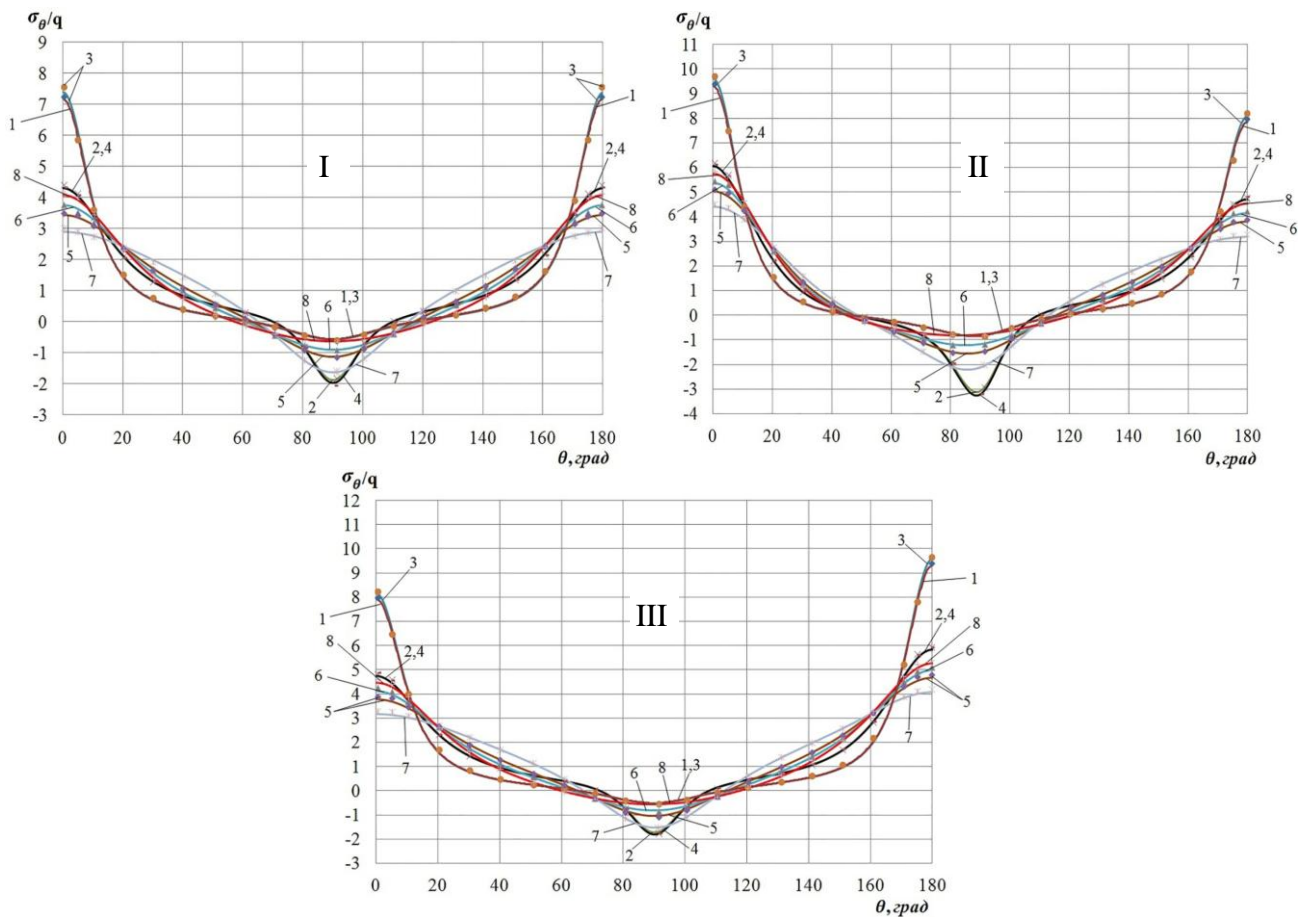


Рис. 3 – Расчётные случаи I, II, III. Графики распределения напряжений вдоль контура отверстия для принятых 8 вариантов значений параметров упругости пластины

Видно, что увеличение параметра  $G_{12}/E_1$ , приводит к увеличению  $k$ , а влияние расположения отверстия к кромке или к соседнему отверстию в целом сопоставимы.

Кривые, которые имеют различные номера, но фактически накладываются друг на друга, соответствуют, вариантам с одинаковыми модулями упругости и сдвига, но с разными значениями коэффициента Пуассона, на основе чего был сделан вывод о не влиянии этого параметра на НДС возле кромки отверстия.

Далее, в качестве объекта численного моделирования рассматривается одноосно растягиваемая композитная пластина с различным расположением выполненных в ней двух отверстий. Задаваемые характеристики композитов соответствуют либо слоистым стеклопластикам, либо углепластикам с различной схемой укладки армирующих волокон в слоистом пакете (Таб. 3).

На рисунках 4 – 6 представлены графики зависимостей коэффициента  $k$  (для шести вариантов композитов (таб. 3)) от различных геометрических факторов пластины. На рисунке 4 представлена зависимость  $k$  от параметра  $W/D$  пластины (где  $W$ - ширина пластины,  $D$  – диаметр единственного отверстия). Относительно этих результатов, стоит отметить, что отклонение аналитического решения для бесконечной пластины от результатов

Таб. 3 – Упругие характеристики композитов на основе стеклопластиков и углепластиков

	№ композита	Структура композита	$E_1$	$\tilde{E}_1$	$E_2$	$\tilde{E}_2$	$G_{12}$	$\tilde{G}_{12}$	$\nu_{12}$
Стек.	1	$[0_8]$	22120 МПа	1	4980 МПа	0,225	2500 МПа	0,113	0,285
	2	$[(0/90)_2]_s$	14050 МПа	1	14050 МПа	1	1955 МПа	0,139	0,109
	3	$[(0_2/\pm 45/0)_s]$	16200 МПа	1	6850 МПа	0,422	3150 МПа	0,194	0,469
Угле.	4	$[0_6]$	81900 МПа	1	6150 МПа	0,075	2770 МПа	0,0338	0,34
	5	$[(0/90)_2]_s$	51440 МПа	1	51440 МПа	1	2816 МПа	0,0547	0,054
	6	$[(0/\pm 45/90)_s]$	45660 МПа	1	45660 МПа	1	14356 МПа	0,314	0,329

расчетов случая  $W/D=2$ , варьируется от 28% до 43% в зависимости от шести указанных вариантов параметров упругости. На рисунке 5 представлены зависимости коэффициента  $k$  от параметра  $b/D$  (где  $b$  расстояние между центрами двух продольно расположенных отверстий) для различных случаев параметра  $W/D$ . Отмечаем, что снижение  $k$  для  $W/D=6$  и  $b/D=1,5$  по сравнению со случаем одного отверстия варьируется от 12% до 19% в зависимости от шести указанных вариантов параметров упругости (т.е. происходит некоторая разгрузка). В случае  $b/D=19/6$  снижение варьируется 5% до 15% (т.е. происходит ослабление данного эффекта). В случае уменьшения  $W/D$  данный эффект также ослабляется, но несущественно в сравнении со случаем  $W/D=6$ .

На рисунке 6 представлены зависимости коэффициента  $k$  от параметра  $c/D$  (где  $c$  расстояние между центрами двух поперечно расположенных отверстий). Отмечаем, что для всех рассматриваемых вариантов композитов при увеличении  $c/D$  в диапазоне от 1,5 до 4 значение  $k$  сначала уменьшается, а затем возрастает. Т.е. минимальное значение  $k$ , реализуется примерно при  $c/D=2,5$ , в связи с чем, этот случай можно принять за оптимальный вариант взаимного расположения отверстий.

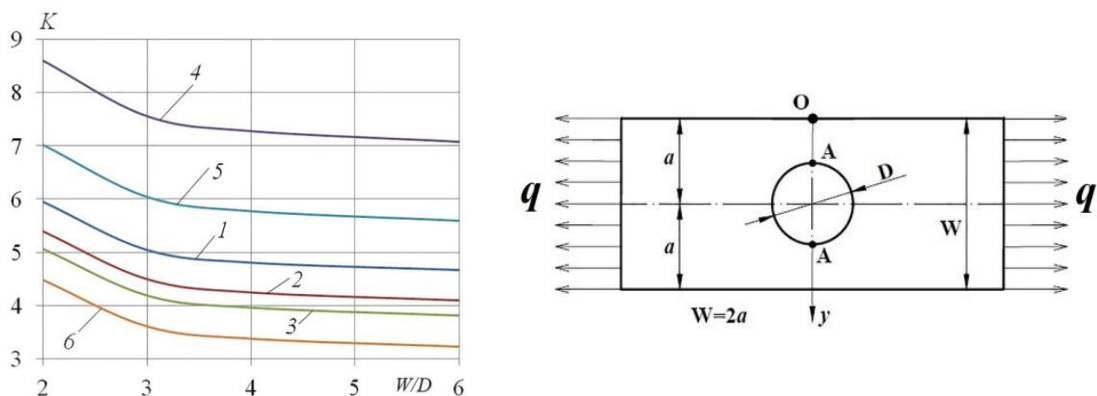


Рис. 4 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации напряжений от параметра  $W/D$ , для случая пластины с одним отверстием

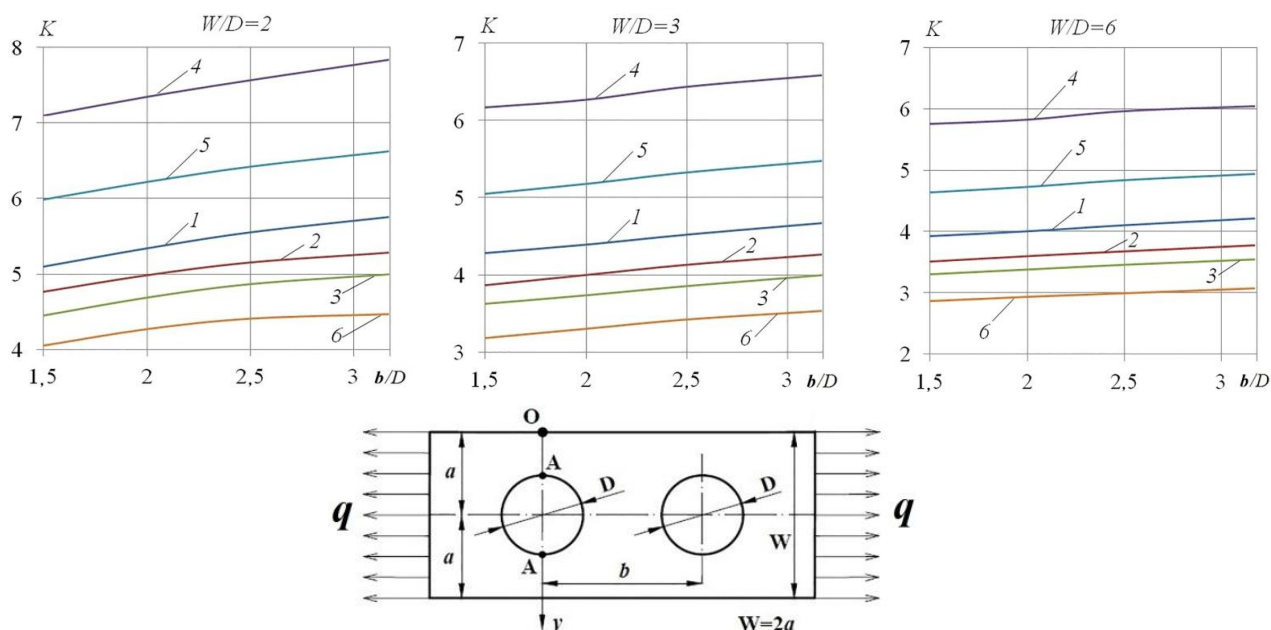


Рис. 5 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации напряжений от параметра  $b/D$  для случая пластины с двумя продольно расположенными отверстиями

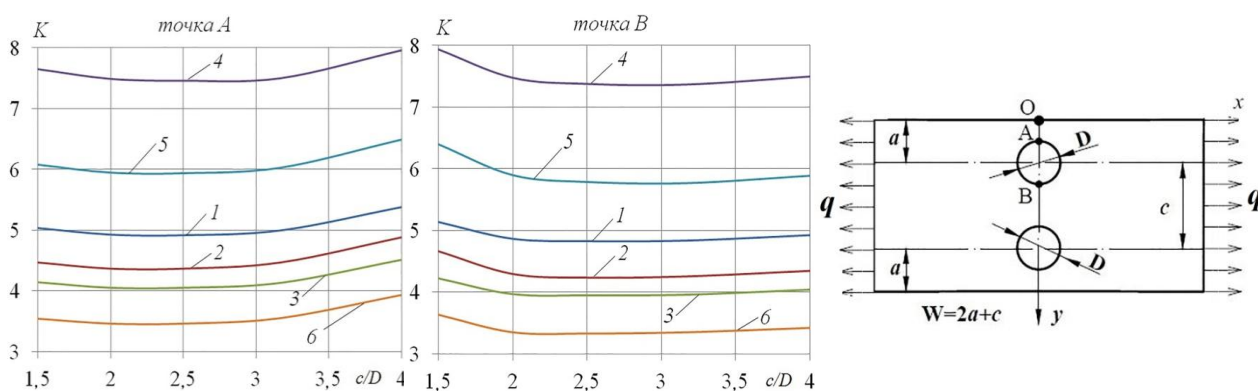


Рис.6 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации напряжений от параметра  $c/D$  для случая пластины с двумя поперечно расположенными отверстиями

В **третьей главе** даётся описание ВР модели для решения в трёхмерной постановке задачи о растяжении толстой ортотропной пластины с круговым отверстием, а также описание ЧИ модели для решения той же задачи, но в двухмерной постановке (ВР и ЧИ модели реализованы на языке Fortran). Далее представлены результаты исследований напряжённого состояния вокруг отверстия в растягиваемых ортотропных композитных пластинах.

Рассматривается толстая круглая пластина (Рис.7) (радиусом  $b$  и толщиной  $h$ ) с центральным круговым отверстием (радиусом  $a$ ), на основе которой (с выбором  $b=10a$ ) построены альтернативные вычислительные модели. Модуль вектора напряжения, приложенного к боковой поверхности пластины и направленного параллельно оси  $Ox$ ,

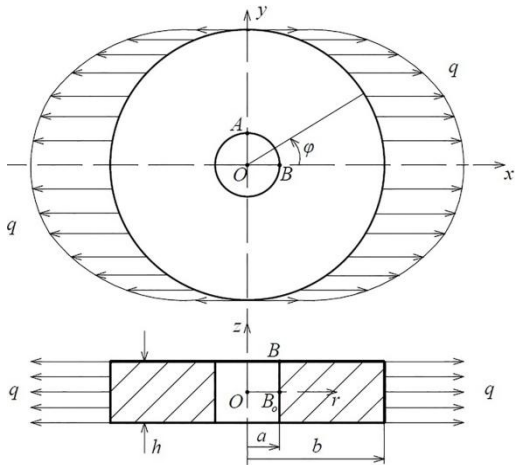


Рис. 7 – Расчётная схема толстой растягиваемой круглой пластины

обозначен здесь как  $q$ , который представляется функцией вида

$$q = q_0 \cos \varphi, \quad (19)$$

где  $q_0$  – заданная постоянная величина.

Постановка задачи теории упругости для указанной пластины рассматривается как для случая цилиндрической анизотропии в осях  $O r \varphi z$  (выражения (20)-(22)), так и для случая ортотропии в прямоугольной системе координат  $O x y z$  (выражения получаются заменой в (20)-(22) индексов  $x y z$  на  $r \varphi z$ , а также отбрасыванием

множителя  $1/r$  и некоторых параметров помноженных на него).

#### 1. Геометрические соотношения.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 2. Физические соотношения, где индексы 1,2,3 соответствуют параметрам $r, \varphi, z$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z, \quad (E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}), \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z, \quad (E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}) \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_\varphi + \frac{1}{E_3} \sigma_z, \quad (E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}), \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{r\varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{rz}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{\varphi z} \end{aligned} \quad (21)$$

#### 3. Уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

#### 4. Граничные условия.

$$\begin{aligned} \sigma_r = q_r, \quad \sigma_{r\varphi} = q_\varphi, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (\text{при } r = b); \quad \sigma_r = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0 \quad (\text{при } r = a); \\ u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (\text{при } z = 0); \quad \sigma_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (\text{при } z = 0,5h). \end{aligned} \quad (23)$$

Исходя из наличия в рассматриваемой расчётной схеме пластины плоскости симметрии ( $z=0$ ), задачу расчёта будем формулировать только для верхней половины пластины (при  $0 \leq z \leq 0,5h$ ). На цилиндрических и плоских частях поверхности моделируемой половины пластины принимаем:



Численное решение этой задач будем осуществлять, используя ВР процедуру, аналогично тому, как это было реализовано во втором разделе применительно к ситуации растягиваемой тонкой пластины, но с учетом трёхмерной формулировки постановки задачи.

Переходим теперь к рассмотрению результатов численного решения поставленной задачи применительно к ситуации ортотропной пластины. В таблице 4 представлены используемые при проведении расчётов варианты (*v.1*, *v.2*, *v.3*, *v.4*) значений параметров упругости исследуемой пластины. (Это типичные значения для стеклопластиков на тканевой основе). Здесь индексы 1,2,3 соответствуют либо осям  $r, \varphi, z$ , либо осям  $x, y, z$ . Значение модуля  $E_3$  в этих вариантах существенно меньше (как это имеет место на практике) значений модулей  $E_1$  и  $E_2$ .

Таб. 4 – Принимаемые варианты значений параметров упругости пластины

Вар. №	$E1$ (ГПа)	$E2$ (ГПа)	$E3$ (ГПа)	$G12$ (ГПа)	$G23$ (ГПа)	$G13$ (ГПа)	$\nu12$	$\nu21$	$\nu23$	$\nu32$	$\nu13$	$\nu31$
<i>v.1</i>	23	18	9	4,2	4,2	4,2	0,13	0,102	0,26	0,13	0,332	0,13
<i>v.2</i>	18	23	9	4,2	4,2	4,2	0,102	0,13	0,332	0,13	0,26	0,13
<i>v.3</i>	37	14	9	5,8	5,8	5,8	0,18	0,068	0,106	0,068	0,28	0,068
<i>v.4</i>	14	37	9	5,8	5,8	5,8	0,068	0,18	0,28	0,068	0,106	0,068

На рис. 9, 10 представлены полученные на основе объёмных (ВР и КЭ) и плоских (ЧИ и КЭ) моделей применительно к двум типам ортотропии результаты расчётов пластины с толщиной  $h=4a$ , демонстрирующие распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль отрезка  $[A_0, A]$  (рис.7) в зависимости от варианта параметров упругости. Принятые здесь цифровые обозначения соответствуют вариантам *v.1*, *v.2*, *v.3*, *v.4* (Таб. 4). Представленные на рисунках кривые соответствуют расчётам на основе объёмных моделей, а прямые (со штрихованными номерами) – расчётам на основе плоских моделей. Как видно, при переходе от ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$ , (Рис. 10) к ситуации цилиндрической ортотропии (Рис. 9) уровень напряжений в пластине заметно повышается. Для случая цилиндрически ортотропной пластины (толщиной  $h=4a$ ), эффект спада напряжений  $\sigma_\varphi$  при переходе от точки  $A_0$  к точке  $A$  применительно к вариантам *v.1*, *v.2*, *v.3*, *v.4* в процентном отношении оценивается величинами (9,3%; 11%; 4%; 7%), соответственно. Аналогичные показатели применительно к ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$  оцениваются величинами (11,7%; 10,3%; 7,2%; 5,2%).

Из полученных результатов, представленных на рисунках 9, 10 следует, что различия в результатах по коэффициенту концентрации напряжений объёмных и плоских вычислительных моделей, не превышают 3% для всех рассмотренных вариантов значений её параметров упругости. Таким образом, для подобного типа ортотропных пластин расчёт коэффициента концентрации напряжений допустимо проводить на основе плоской модели

даже при толщине пластины порядка двух диаметров отверстия

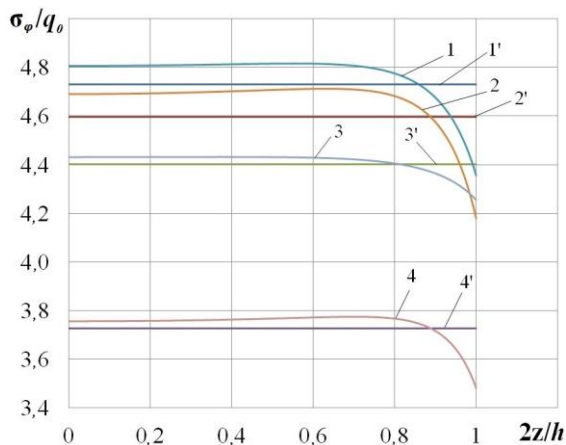


Рис. 9 – Результаты расчётов ортотропной (в осях  $r, \varphi, z$ ) пластины

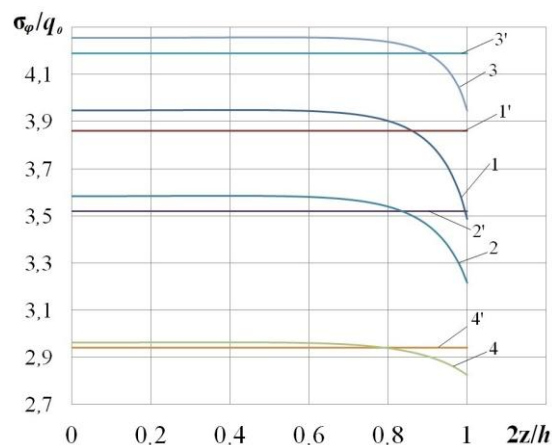


Рис. 10 – Результаты расчётов ортотропной (в осях  $x, y, z$ ) пластины

В **четвертой главе** дано описание расчётной процедуры, для решения задач прочности растягиваемых композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями. Процедура состоит из расчёта напряжённого состояния пластины с использованием альтернативных вычислительных моделей для подтверждения достоверности получаемых результатов, и прогнозирования ее предела прочности на разрыв с применением критерия напряжений в точке. Представлены результаты расчётов на прочность при одноосном растяжении композитных (с различными схемами укладки волокон) пластин, ослабленных одним или несколькими круговыми отверстиями. Также представлены экспериментальные данные, подтверждающие достоверность прочностных прогнозов, осуществляемых с применением отмеченной процедуры.

Рассматриваем (в осях  $Oxy$ ) протяжённую композитную полосу длиной  $L$  и шириной  $W=30$  мм, имеющую круговое отверстие радиуса  $r$  и растягиваемую в направлении оси  $Ox$  нагрузкой, характеризуемой напряжением  $\sigma$ . Эксперименты коллектива А. Russo, В. Zuccarello проводились с образцами композитов, имеющих существенно различающиеся физико-механические характеристики (Таб. 6). Параметр  $\sigma_0$  в указанной таблице соответствует растягивающему напряжению  $\sigma$ , при котором имеет место разрыв образца из соответствующего композита в условиях отсутствия в нём отверстия (случай разрыва образца без отверстия). Индексы 1 и 2 у параметров упругости соответствуют осям  $Ox$  и  $Oy$ . Для каждого из семи вариантов принятых к рассмотрению композитов проводились испытания на растяжение набора образцов, имеющих отверстие радиуса  $r$  (мм) = 1,5; 2,5; 3,75; 5; 6; 7,5 соответственно.

Расчётные исследования по прогнозу пределов прочности на разрыв, одноосно

Таб. 6 – Значения физико-механических характеристик принятых к рассмотрению семи вариантов слоистых композитов на основе стеклопластиков и углепластиков

	№ композита	Структура композита	$E_1$ (МПа)	$E_2$ (МПа)	$G_{12}$ (МПа)	$\nu_{12}$	$\sigma_0$ (МПа)
Стекло.	1	$[0_8]$	22120	4980	2500	0,285	503
	2	$[(0/90)_2]_s$	14050	14050	1955	0,109	300
	3	$[(0/\pm 45/0)_s]$	10190	10190	3900	0,303	216
	4	$[(0_2/\pm 45/0)_s]$	16200	6850	3150	0,469	370
Угл.	5	$[0_6]$	80660	7620	2258	0,324	1150
	6	$[(0/90)_2]_s$	51440	51440	2816	0,054	610
	7	$[(0/\pm 45/90)_s]$	45660	45660	14356	0,329	385

растягиваемых композитных пластин с отверстиями проведены с использованием вычислительных моделей, основанных на предположении о плоском напряжённом состоянии исследуемой пластины. Использована формулировка критерия напряжений в точке в виде

$$\sigma_e(d) < \sigma_0 \quad (24)$$

где  $\sigma_e(d)$  - эквивалентное напряжение в некоторой точке, удалённой от точки максимума на расстояние  $d$ , а  $\sigma_0$  - предельное напряжение, являющееся константой материала. Параметр  $d$  характеризует размер зоны предразрушения и в случае хрупкого разрушения полагается константой материала.

На рисунке 17 представлены результаты численных решений в виде распределения эквивалентных напряжений в опасном сечении на разрыв для варианта композита 1, шести случаев радиуса отверстия, на основе которых проведены расчеты на прочность.

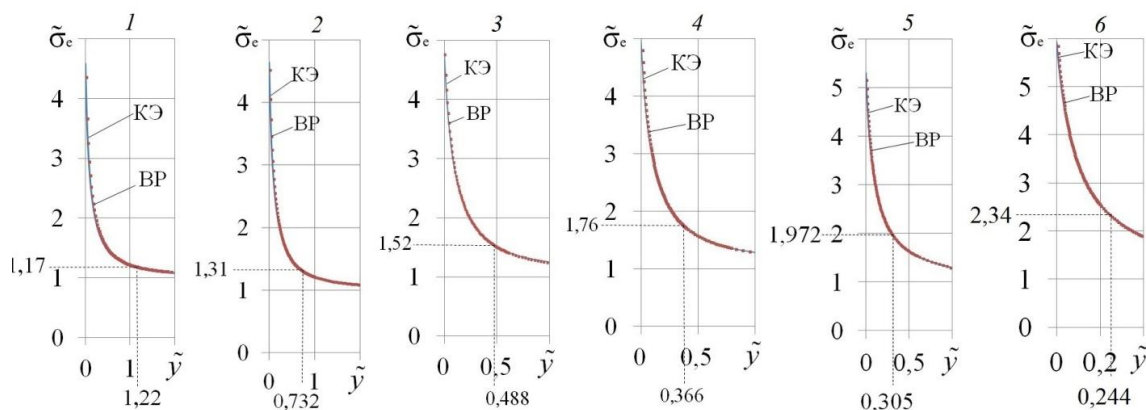


Рис. 17 – Композит №1. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие шести значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

Полученные расчётные результаты по прогнозу напряжений  $\sigma_s$  при которых имеет место разрыв образцов ослабленных круговым отверстием и выполненных из рассматриваемых семи вариантов композитов, представлены на рисунке 18 в виде графиков

зависимости величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от радиуса  $r$  отверстия. Точки на графиках соответствуют экспериментально полученным напряжениям  $\sigma_s$  в работе коллектива А. Russo и В. Zuccarello.

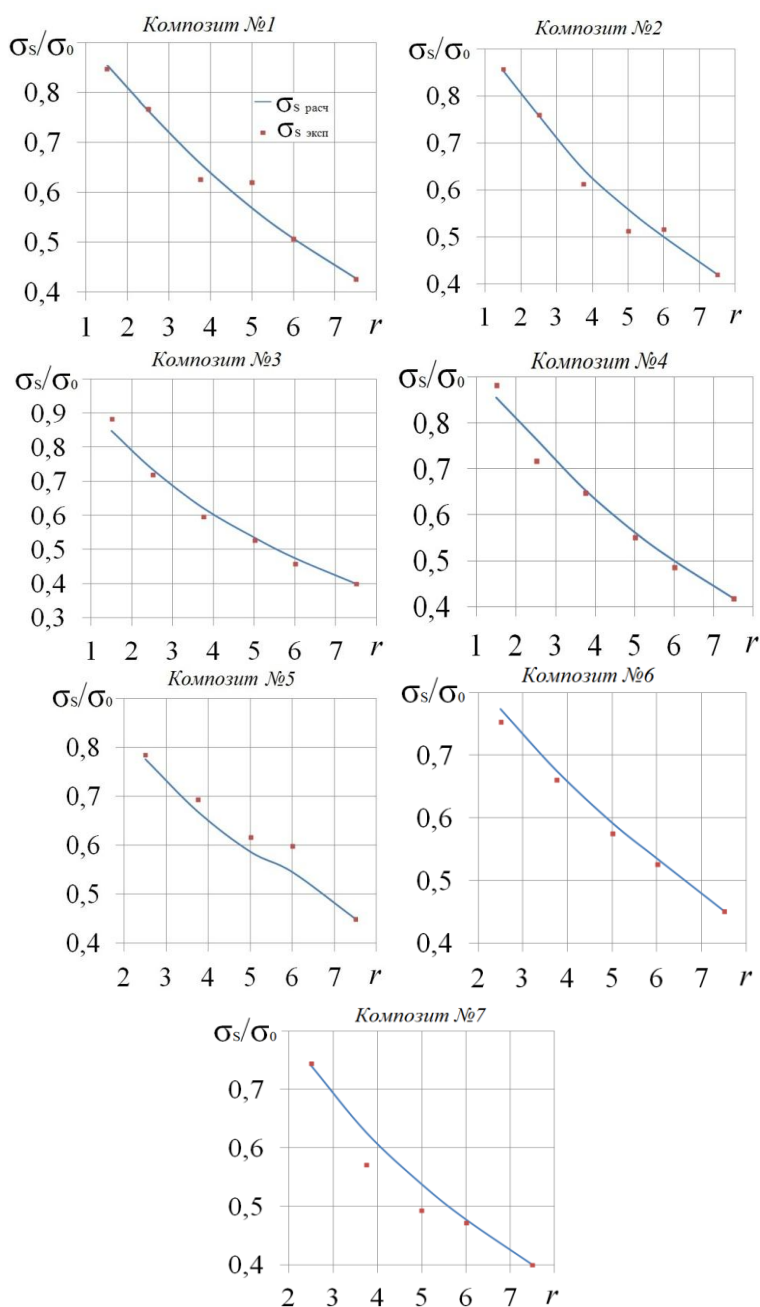


Рис. 18 – Графики зависимости величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от радиуса  $r$  (мм) отверстия

Вариант номер 5 расположения отверстий получается из варианта с номером 1, если одно из отверстий переместить вдоль полосы на расстояние 19 мм от своего исходного положения. Вариант номер 4 соответствует вариантам с номерами 1 и 5 при условии отсутствия в них одного из отверстий. Вариант номер 3 соответствует ситуации одного центрального отверстия в полосе.

Как видно, отклонения результатов расчетов, от эксперимента находятся в пределах 9 %.

Видно, что для всех рассмотренных композитов расчётный прогноз с применением описанной методики хорошо согласуется с экспериментом. Отдельные отклонения расчёта от эксперимента находятся в пределах 9%.

Аналогичные расчеты были проведены для композитных (на основе однонаправленной системы углеволокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий. Соответствующие исходные данные (взятые из работы коллектива J. Ubaid, M. Kashfuddoja, M. Ramji), приведены в таблице 7, а результаты выполненных в рамках используемой методики расчётов представлены в виде графиков на рисунке 19 и диаграммы на рисунке 20.

Варианты с номерами 1 и 2 соответствуют ситуациям двух поперечно ( $a=8,5$  мм,  $c=19$  мм, см. рис. 6) расположенных отверстий в полосе.

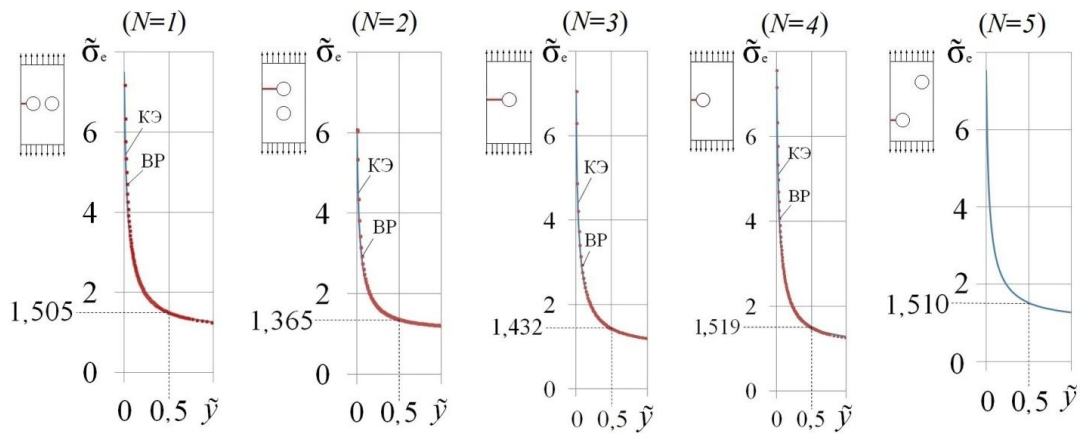


Рис. 19 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в растягиваемой композитной полосе

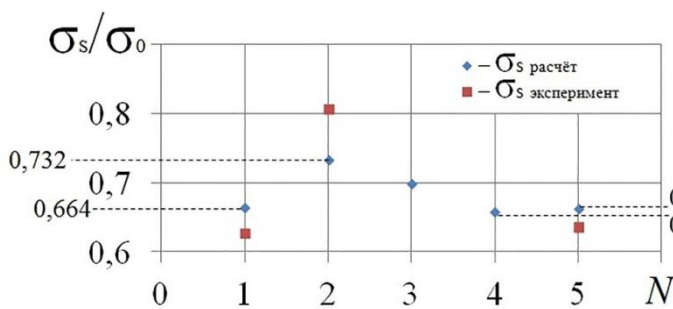


Рис. 20 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от выбора варианта (с номером  $N$ ) расположения отверстий в рассматриваемой композитной полосе

Таб. 7 – Значения физико-механических характеристик рассматриваемого композита на основе однонаправленной системы

$E_1$	81900 МПа
$E_2$	6150 МПа
$G_{12}$	2770 МПа
$\nu_{12}$	0,34
$\sigma_0$	1300 МПа

Также расчеты были проведены для композитных (на основе однонаправленной системы стекловолокон) полос толщиной  $t=2$  мм, шириной  $W=25$  мм и ослабленных набором из трёх продольно расположенных круговых отверстий (Рис. 21)

Соответствующие исходные данные (взяты из работы коллектива А. Khechai, P.M. Mohite, A. Tati, M.-O. Belarbi) приведены в таблице 8, 9 а результаты выполненных в рамках используемой методики расчётов представлены в виде диаграммы на рисунке 22.

Согласование расчетных и экспериментальных результатов лежит в пределах 3%-6%.

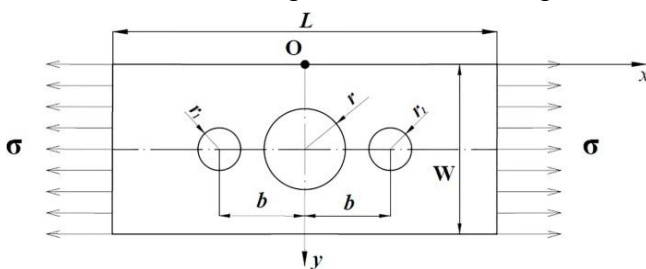


Рис. 21 – Схема растягиваемой композитной полосы с тремя продольно расположенными отверстиями

Таб. 8 – рассматриваемые варианты четырёх продольно расположенных отверстий в композитной полосе

Вариант $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)
1	2,5	2,25	6
2	2,5	2,25	7
3	2,5	2	6
4	2,5	1,25	6

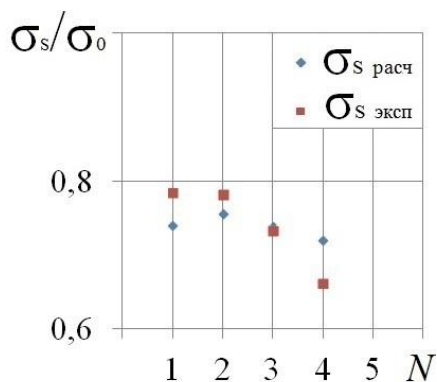


Рис. 22 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от номера  $N$  варианта набора отверстий в композитной полосе

Таб. 9 – Значения физико-механических характеристик рассматриваемого композита на основе однонаправленной системы стекло-волокон

$E_1$ (МПа)	$E_2$ (МПа)	$G_{12}$ (МПа)	$\nu_{12}$	$\sigma_0$ (МПа)
22540	10940	3540	0,3	527,04

Ниже излагаются результаты выполненных расчётных и собственных экспериментальных исследований стеклотекстолитовых образцов.

На основе предварительно выполненных испытаний определены значения параметров упругости рассматриваемого стеклотекстолита в двух направлениях (I и II), которые имеют вид:

(I):  $E_1=18000$  МПа;  $E_2=27000$  МПа;  $G_{12}=4200$  МПа;  $\nu_{12}=0,12$ ;  $\nu_{21}=0,18$ ; среднее  $\sigma_0=250$  МПа;

(II):  $E_1=27000$  МПа;  $E_2=18000$  МПа;  $G_{12}=4200$  МПа;  $\nu_{12}=0,18$ ;  $\nu_{21}=0,12$ ; среднее  $\sigma_0=400$  МПа;

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют осям  $Ox$  и  $Oy$ . Для образцов с одним отверстием значения параметра нагружения  $\sigma=\sigma_s$ , при которых имеет место разрыв:

(I): среднее  $\sigma_s=117$  МПа; (II): среднее  $\sigma_s=196$  МПа.

С помощью этих данных, вычислены необходимые константы для расчета на прочность, образцов с большим количеством отверстий. В сериях из трёх испытаний образцов типа I и II с двумя отверстиями, для напряжений  $\sigma_s$  в момент разрыва получено:

(I):  $\sigma_s=109$  МПа, 111 МПа, 114 МПа; Расчет :  $\sigma_s=111,6$  МПа

(II):  $\sigma_s=177$  МПа, 186 МПа, 199 МПа. Расчет :  $\sigma_s=184,3$  МПа

Испытания на разрыв в случае восьми малых отверстий проводились только на образцах типа II. При этом в серии из трёх испытаний зафиксированы следующие результаты по напряжениям  $\sigma_s$ : (II):

$\sigma_s=151$  МПа, 154 МПа, 160 МПа. Расчет :  $\sigma_s=134,6$  МПа.

Отклонения расчёта от эксперимента находятся в пределах 10%.

На рисунках 23 - 25 представлены полученные при испытаниях картограммы распределения деформаций  $\epsilon_x$  по поверхности некоторых из образцов на стадии предразрушения вместе с картинками разрушения этих образцов.

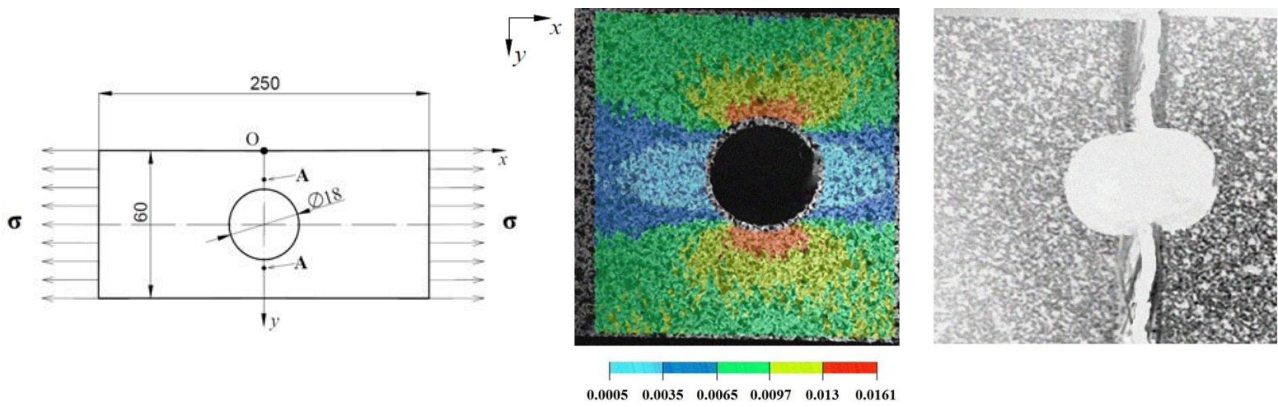


Рис. 23 – Картограмма деформаций  $\epsilon_x$  по поверхности образца типа I с одним отверстием перед разрушением и картина его разрушения

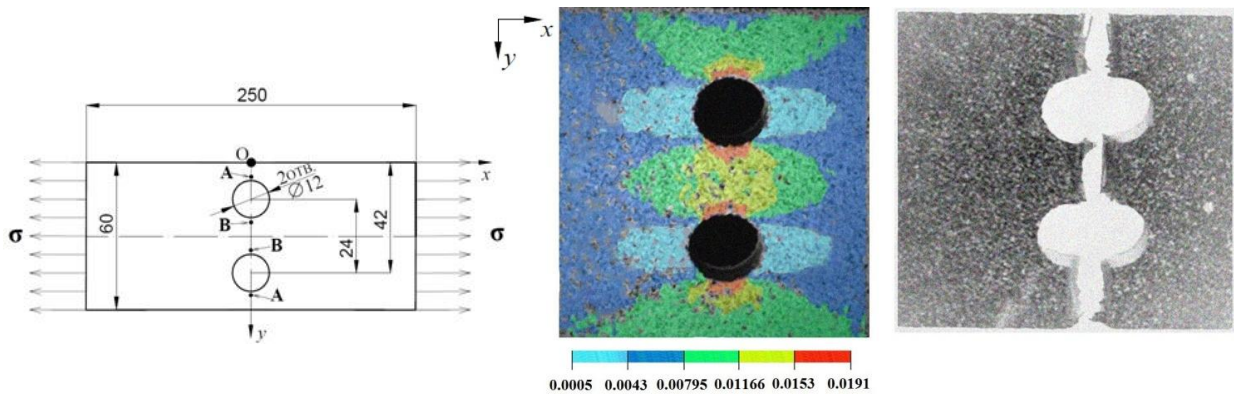


Рис. 24 – Картограмма деформаций  $\epsilon_x$  по поверхности образца типа I с двумя отверстиями перед разрушением и картина его разрушения

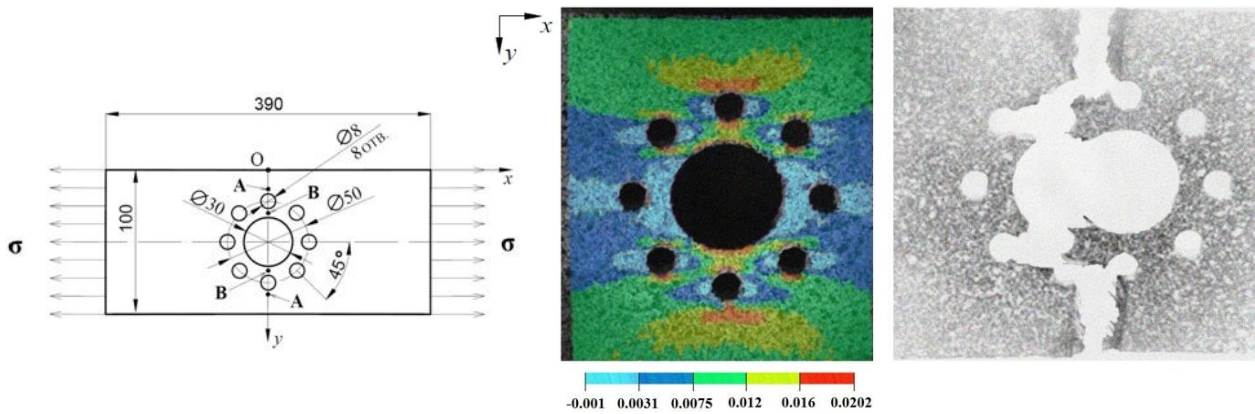


Рис. 25 – Картограмма деформаций  $\epsilon_x$  по поверхности образца типа II с восемью отверстиями перед разрушением и картина его разрушения

## ВЫВОДЫ

1. Разработаны альтернативные вычислительные модели для решения задач о НДС одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями.
2. С применением разработанных моделей проведены параметрические исследования,

на основании которых установлены следующие эффекты и закономерности:

– в случае полосы с двумя продольно расположенными одинаковыми отверстиями значение коэффициента концентрации напряжений снижается по сравнению со случаем одного отверстия на 12% - 19% в зависимости от упругих характеристик композитных материалов;

– в случае двух поперечно расположенных отверстий в композитной полосе установлен вариант взаимного их расположения, обеспечивающий минимальное значение коэффициента концентрации напряжений;

– в случае растягиваемой толстой композитной пластины на участке, проходящем по цилиндрической поверхности отверстия (участок заключен между срединной и внешней плоскостями пластины) эффект спада значения коэффициента концентрации напряжений оценивается величиной порядка 10% при толщине пластины, сравнимой с диаметром отверстия.

3. Разработана методика численного решения задач о НДС композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями, по которой достоверность полученных расчётных результатов подтверждается совпадением решений полученных на основе альтернативных моделей.

4. Выполнены исследования по определению предельных значений растягивающих нагрузок, приложенных к композитным пластинам, имеющим одно, два, три и более отверстий. Отклонения прогнозов от имеющихся экспериментальных данных, и результатов специально выполненных экспериментов оцениваются величиной порядка 6%-10%.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в рецензируемых научных изданиях и журналах из перечня ВАК РФ.**

1. Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г., Шиврин М.В. Численный анализ распределения напряжений вокруг круговых отверстий в тонких ортотропных упругих пластинах при одноосном растяжении // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. –1(112). – С. 59-68.

2. Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г., Шиврин М.В. Концентрация напряжений в толстых анизотропных упругих пластинах с круговым отверстием при одноосном растяжении // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – вып. 4(115), – С. 33-44.

3. Абашев Д.Р., Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г., Шиврин М.В. Применение критерия напряжений в точке при расчёте пределов прочности на разрыв ослабленных малыми круговыми отверстиями стеклотекстолитовых элементов конструкций // Космонавтика и ракетостроение. – 2021, – вып. 6(123), – С. 49-57.



4. Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г., Шиврин М.В. Численное моделирование растягиваемых плоских элементов композитных конструкций, ослабленных набором круговых отверстий // *Машиностроение и инженерное образование*. –2022. – вып. 1(68). – С. 3-12.
5. Ермаков И.С. Численное моделирование одноосно растягиваемой толстой ортотропной композитной пластины с круговым отверстием // *Машиностроение и инженерное образование*. –2022. – вып. 2(69). – С. 3-14.
6. Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г. Расчётный прогноз прочности растягиваемых композитных образцов с круговым отверстием в сопоставлении с результатами эксперимента // *Космонавтика и ракетостроение*. – 2023. – вып. 1(130), – С. 79-87.
7. Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г. Расчётный прогноз прочности растягиваемых композитных образцов с набором круговых отверстий в сопоставлении с результатами эксперимента // *Космонавтика и ракетостроение*. – 2023. – вып. 1(130), – С. 88-97.

#### **Материалы международных и всероссийских конференций.**

1. Ермаков И.С. Численное решение задач о концентрации напряжений в тонких, ослабленных круговыми отверстиями, стеклопластиковых пластинах при одноосном растяжении // *Международная конференция «Авиация и космонавтика»*. 18-22 ноября 2019. – М. изд-во МАИ. – С. 189.
2. Ермаков И.С. Численное решение задач о концентрации напряжений в толстых ортотропных пластинах с круговыми отверстиями при одноосном растяжении // *XLVI Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения»*. 27-28 марта 2020. – М. изд-во МАИ. – С. 873.
3. Ермаков И.С. Численное решение трёхмерной задачи теории упругости о концентрации напряжений в одноосно растягиваемой толстой анизотропной пластине с круговым отверстием // *Международный молодёжный научный форум «Ломоносов-2020»* Место проведения МГУ им. М.В. Ломоносова 10-27 ноября 2020 [https://lomonosov\\_2020\\_2/data/section\\_20\\_19369.htm](https://lomonosov_2020_2/data/section_20_19369.htm)
4. Ермаков И.С. Определение пределов прочности с использованием критерия напряжений в точке, пластин на стеклотекстолитовой основе, имеющих включения в виде малых отверстий // *Международная конференция «Авиация и космонавтика»*. 12-26 ноября 2021. – М. изд-во МАИ. – С. 424.
5. Ермаков И.С. Численное моделирование растягиваемых композитных плоских полос, ослабленных круговыми отверстиями // *XLVIII Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения»*. 12-25 апреля 2022. – М. изд-во МАИ. – С. 440.