

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 519.62

На правах рукописи



Цапко Екатерина Дмитриевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
МОДЕЛИРУЮЩИХ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

Специальность 1.2.2. — «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Кузнецов Евгений Борисович

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Традиционные методы решения начальных и краевых задач	16
1.1 Начальные задачи	16
1.1.1 Явный метод Эйлера	17
1.1.2 Явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка	17
1.1.3 Переменный шаг интегрирования. Правило Рунге	18
1.1.4 Неявный метод Эйлера	19
1.2 Наилучшая параметризация	21
1.3 Краевые задачи	22
1.3.1 Метод стрельбы	24
Глава 2. Некоторые начальные и краевые задачи, моделирующие физические процессы	27
2.1 Степенной тест	27
2.1.1 Традиционный подход	29
2.1.2 Наилучшая параметризация	33
2.2 Экспоненциальный тест	37
2.2.1 Наилучшая параметризация	38
2.2.2 Численные результаты	39
2.3 Краевая задача сверхзвукового течения	41
2.3.1 Постановка задачи	41
2.3.2 Случай канала постоянного сечения	42
2.3.3 Случай канала переменного сечения	46

Глава 3. Экспоненциальная модификация наилучшей параметризации	50
3.1 Модифицированный наилучший аргумент. Общий подход	50
3.2 Экспоненциальный наилучший аргумент	52
3.3 Степенной тест	53
3.3.1 Экспоненциальный наилучший аргумент	53
3.3.2 Численные результаты	54
3.4 Экспоненциальный тест	55
3.4.1 Экспоненциальный наилучший аргумент	56
3.4.2 Численные результаты	56
3.5 Краевая задача сверхзвукового течения	58
3.5.1 Случай постоянного сечения	58
3.5.2 Случай переменного сечения	60
Глава 4. Абсолютная устойчивость численных схем	64
4.1 Устойчивость явной схемы метода Эйлера	64
4.1.1 Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу	66
4.1.2 Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу	71
4.2 Экспоненциальный тест	79
Заключение	82
Список сокращений и условных обозначений	84
Список использованных источников	85
Список рисунков	96

Список таблиц	97
Приложение А. Комплекс программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра»	99

Введение

Актуальность темы. До сегодняшнего дня создание новых и совершенствование старых методов численного решения задачи Коши (начальной задачи) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений остается актуальным и востребованным. Это связано с тем, что начальными задачами для систем обыкновенных дифференциальных уравнений описывается множество процессов практически во всех областях науки и человеческой деятельности, таких как биология, химическая кинетика, экономика, физика, прикладная механика, машиностроение и авиационно-космическая отрасль. Решать прикладные задачи аналитически удается только в исключительных случаях, поэтому, начиная с середины XIX века, развитие получили численные методы, которым посвящены многие монографии. Среди общих работ по численному интегрированию задачи Коши упомянем книги В. Э. Милна [41], Дж. Холла и Дж. Уайта [60], Дж. Ортеги и У. Пула [45], О. Б. Арушаняна и С. Ф. Залеткина [1], Дж. Бутчера [75], в которых излагаются основы теории и, ставшие классическими, схемы интегрирования.

Несмотря на возрастающее количество статей и книг по численным методам интегрирования дифференциальных уравнений, до сих пор не существует общего эффективного подхода к решению широкого класса начальных задач. Дело в том, что, в отличие от нежестких задач, которые могут быть эффективно решены явными схемами [63], все возрастает количество задач, для которых явные схемы дают высокую погрешность или неприменимы совсем. К подобным относятся жесткие, плохо обусловленные и осциллирующие задачи. Одной из первых крупных работ по методам решения жестких задач является монография Ю. В. Ракитского, С. М. Устинова и И. Г. Черноруцкого [46]. Более полно методы решения жестких задач описаны в книге Э. Хайрера и Г. Ваннера [62]. Одним из основных классов методов для решения жестких задач является класс неявных схем. По сравнению с явными

схемами неявные обладают большей устойчивостью [21], но сводятся к решению систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений. Если для систем дифференциальных уравнений малой размерности неявные схемы незначительно превосходят явные по вычислительной сложности, то для систем уравнений большей размерности сложность использования неявных схем значительно возрастает. Это связано как с затруднением выбора начального приближения и сходимостью методов численного решения нелинейных систем уравнений, так и возрастающей сложностью обращения матрицы Якоби. Поэтому продолжаются исследования, связанные как с разработкой эффективных неявных схем, так и созданием явных схем, применимых для решения жестких задач.

В теории жестких уравнений отдельно выделяют класс уравнений с малым параметром при старшей производной. Впервые они были рассмотрены в работах А. Н. Тихонова [57–59] и получили название сингулярно возмущенных уравнений. В работах А. Н. Тихонова было дано определение области влияния решения вырожденного уравнения и вырожденной системы, а также доказаны первые общие утверждения о близости решения вырожденного уравнения или системы уравнений к решению исходной задачи. Полученные А. Н. Тихоновым результаты были развиты в работах его ученицы А. Б. Васильевой. Совместно с В. Ф. Бутузовым и другими ее учениками [8, 10–12] и коллегами были получены фундаментальные результаты по представлению решений сингулярно возмущенных задач асимптотическими рядами специальных видов. В конце 80-х – начале 90-х гг. XX в., помимо задач с пограничными слоями, в работах А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова рассмотрены задачи с контрастными структурами (внутренними слоями) [9, 13]. Стоит также отметить вклад в теорию сингулярных возмущений С. А. Ломова и И. С. Ломова, в монографии которых дана математическая теория пограничного слоя для линейных дифференциальных уравнений в одномерном и многомерном случаях для операторов с различными свойствами [40].

В монографии С. А. Ломова [39] также рассмотрены некоторые классы нелинейных уравнений.

Отметим основные и новые работы, связанные с численным решением жестких задач. Одним из первых применил формулы дифференцирования назад к решению жестких систем американский исследователь Гир [78], что привело к развитию целого ряда неявных схем. Созданию эффективных неявных схем посвящены циклы работ Н. Н. Калиткина с соавторами [3, 24], Г. Ю. Куликова с соавторами [33, 79, 80] и Л. М. Скворцова [53–56]. В статьях Н. Н. Калиткина исследуются особенности численного интегрирования нелинейных обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений и предложен класс обратных (диагонально-неявных) схем Рунге-Кутты, а также неявные схемы для задач химической кинетики. В работах Г. Ю. Куликова разработан новый класс неявных (диагональных и симметричных) гнездовых схем численного решения жестких задач. Показана эффективность гнездовых методов на ряде тестовых задач. Предложенные Л. М. Скворцовым эффективные реализации неявных схем и модификации диагонально-неявных схем показали применимость к решению жестких начальных задач как для дифференциальных, так и для дифференциально-алгебраических уравнений. Указанные работы показывают, что неявные схемы дают высокую точность и устойчивость при решении жестких задач, но по быстродействию они намного уступают явным схемам.

Применению явных методов к решению жестких задач посвящена монография Е. А. Новикова [43]. К этой же тематике относятся статьи этого же автора [42, 44, 88] и Л. М. Скворцова [50–52]. В статьях Е. А. Новикова приводятся результаты сразу по нескольким областям исследования: настройка (адаптация) численной схемы на основе критерия L-устойчивости по схеме Ческино, конструирование явных схем с расширенными областями устойчивости, решение жестких задач явными схемами с малой и умеренной точностью. Явным адаптивным (настраиваемых на конкретную задачу) схемам семей-

ства Рунге-Кутты посвящены также указанные работы Л. М. Скворцова. В работах В. И. Лебедева [34] рассматривается применение многочленов Чебышева к решению жестких задач явными методами. Отмеченные статьи ярко указывают на недостатки применения явных схем к решению жестких задач. Большинство явных схем дают только малую или умеренную точность. При расширении области устойчивости в большинстве случаев явная схема усложняется, сокращается ее быстродействие. То же самое относится и к адаптивным явным методам, в которых возникают также трудности подбора структуры численной схемы. Тем не менее явные схемы предпочтительнее неявных, тем более для задач большой размерности. Одним из немногих подходов к решению жестких и плохо обусловленных задач, сочетающих и быстродействие явных схем, и приемлемую точность, является метод продолжения решения по наилучшему аргументу (параметру) [73], называемый также методом наилучшей параметризации и метод длины дуги (arc-length method).

Использование метода продолжения решения по параметру в численном анализе восходит к работам бельгийского М. Лаэя [84, 85] и советского Д. Ф. Давиденко [19, 20] математиков. В их работах впервые была использована идея замены параметра продолжения решения при численном решении систем алгебраических и трансцендентных уравнений. В качестве параметров продолжения решения в работах М. Лаэя и Д. Ф. Давиденко применялись как переменные рассматриваемой системы, так и вводимые параметры, для которых выполняется условие сохранения ранга системы в окрестности предельных особых точек. Впервые в работе И. И. Воровича и В. Ф. Зипаловой [14] сформулирована гипотеза о том, что наилучшим будет параметр продолжения решения, отсчитываемый вдоль кривой множества решения рассматриваемой задачи. Доказательство данной гипотезы было намечено в статье Э. Рикса [47], полное же доказательство дано лишь в работах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [73]. Начиная с конца 70-х годов прошлого века, при использовании наилучшего параметра были исследованы устойчивость и закритиче-

ское поведение прощелкивающих систем и выпучивающихся конструкций [17] и прохождение точек бифуркации различной коразмерности [17, 28, 74]. Начиная с 90-х годов прошлого века, в работах В. И. Шалашилина, Е. Б. Кузнецова и их учеников метод продолжения решения по параметру был обобщен на решение задачи Коши и краевых задач для систем дифференциальных уравнений, дифференциально-алгебраических, интегро-дифференциальных уравнений, а также уравнений с запаздывающим аргументом [73]. Для всех указанных задач наилучший аргумент показывает значительные преимущества, позволяя получить наилучшую обусловленность задачи и уменьшить показатель жесткости рассматриваемой системы уравнений. Также в работах Е. Б. Кузнецова получено развитие метода наилучшей параметризации на многопараметрический случай [27].

Помимо указанных работ, Н. Н. Калиткиным с соавторами был опубликован ряд статей, в которых исследуется применение метода длины дуги как к тестовым сверхжестким и жестким начальным задачам, и задачам с контрастными структурами, так и прикладным задачам химической кинетики [4–6, 25]. Помимо этого, наилучшая параметризация успешно использовалась А. А. Семеновым для исследования устойчивости геометрически нелинейных конических оболочек из ортотропных материалов при упругом деформировании [90], а также С. Мэй при решении гиперболических систем с предельными особыми точками [87] и К. Вангом при решении физически нелинейных задач математической физики [91].

В работах [29, 30] метод наилучшей параметризации получил дальнейшее развитие. Предложено вместо наилучшего аргумента применять геометрически близкие ему модифицированные наилучшие аргументы, которые отсчитываются по касательной вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи в направлении близком к касательному. Получена мера близости модифицированных аргументов к наилучшему, которая позволяет оценивать обусловленность преобразованных к ним задач. На примере решения началь-

ных задач с несколькими предельными особыми точками показана эффективность применения модифицированных аргументов по сравнению с наилучшим. В этом контексте интересны монографии Э. И. Григолюка, Е. А. Лопаницына [18] и С. С. Гаврюшина с соавторами [15], в которых для задач машиностроения и механики деформируемого твердого тела также применяются параметры продолжения решения, отличные от наилучшего.

Таким образом, краткий обзор литературы показывает актуальность разработки новых эффективных методов решения жестких задач.

Целью исследования является разработка эффективных подходов к численному решению сингулярно возмущенных задач и задач с контрастными структурами для систем дифференциальных уравнений. Сингулярно возмущенными уравнениями описываются задачи из таких прикладных областей науки и техники, как аэродинамика, гидродинамика, теория горения, теория каталитических реакций, проектирование ядерных реакторов и т.д. В зависимости от задачи определяющие уравнения могут дополняться начальными или краевыми условиями, а сами они могут быть нелинейными или квазилинейными. Поэтому получить точное аналитическое решение затруднительно. Традиционные численные методы оказываются малоэффективными для таких задач. Явные схемы редко позволяют получить решение приемлемой точности, а применение неявных схем сопряжено с вычислительными трудностями. Метод продолжения решения по наилучшему аргументу позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении сингулярно возмущенных задач. Этот метод заключается в том, что аргумент системы уравнений заменяется на новый, отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой исходной задачи. Размерность новой задачи повышается на единицу, однако она является наилучшим образом обусловленной, что имеет ряд вычислительных преимуществ. Однако в случае, когда интегральные кривые исходной задачи имеют экспоненциальную скорость роста, такой переход не позволяет существенно понизить жесткость преобразованной за-

дачи. На базе метода продолжения решения будет разработан новый подход. Предлагается модифицировать наилучший аргумент таким образом, чтобы понизить показатель жесткости решаемой задачи.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Разработать подход на основе метода продолжения решения для того, чтобы повысить эффективность явных численных схем при решении жестких начальных и краевых задач.
2. Разработать программный комплекс для применения разработанного подхода к решению жестких начальных и краевых задач.
3. Апробировать разработанный подход на ряде тестовых и прикладных задач. Для тестирования будут решены две начальные задачи: степенной и экспоненциальный тест из работы А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4], а также будет рассмотрена математическая модель возникновения одномерного стационарного потока в трубе с постоянной или увеличивающейся площадью переменного сечения [72].
4. Доказать абсолютную устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера для задач, преобразованных с применением разработанного подхода.

Для реализации поставленной цели используются следующие **методы исследования**: **1)** при численном решении задачи Коши для систем ОДУ используются явные и неявные методы семейства Рунге-Кутты с постоянным и переменным шагом интегрирования [1], **2)** при численном решении краевой задачи для систем ОДУ используется метод стрельбы (пристрелки) с применением итерационной процедуры Ньютона [61], **3)** при исследовании абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера используется тест Далквиста [77], хорошо проявившего себя для понимания характера поведения разностных схем при решении жестких систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана модификация наилучшего аргумента, заключающаяся в добавлении экспоненциальной составляющей, что позволяет повысить эффективность явных численных схем при решении жестких начальных и краевых задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых.
2. Получено более общее доказательство абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера при решении задач, преобразованных к наилучшему аргументу.
3. Доказана абсолютная устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера при решении задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Разработана модификация метода продолжения решения по наилучшему аргументу, позволяющая повысить эффективность явных численных методов при решении жестких начальных и краевых систем ОДУ с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых. Новый аргумент получил название экспоненциального наилучшего аргумента.
2. Получено более общее доказательство расширения области устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу.
3. Получено условие, при котором разностная схема явного метода Эйлера является абсолютно устойчивой для задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Предложенная модификация наилучшего аргумента позволяет повысить точность и сократить время счета сингулярно возмущенных задач и задач с контрастными структурами с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых, а также получить численное решение тогда, когда другие методы не позволяют этого сделать.
2. Модифицированный наилучший аргумент включает в себя дополнительный регуляризуемый параметр, варьируя значения которого можно добиться более точного прохождения через пограничные и внутренние слои задачи при применении явных численных методов.
3. По результатам проводимых исследований разработан комплекс программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641), который может быть использован для решения практических задач.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается: **1)** строгим использованием адекватного математического аппарата, **2)** удовлетворительным согласованием полученных расчетных данных с точными аналитическими решениями рассматриваемых задач, а также опубликованными расчетными и экспериментальными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, симпозиумах и конкурсах: **1)** XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения – 2018» (Москва, 2018); **2)** XII и XIII Международные конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018 и 2020); **3)** 17-й Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018» (Москва, 2018); **4)** III Международная научная конференция «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Москва, 2018); **5)** XXI и XXII Международные конференции по вы-

числительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019 и 2021); **б)** X Международная научная молодежная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Воскресенского (Саранск, 2022). Из них доклады на XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018), XXI и XXII Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019 и 2021) были отмечены дипломами за «Лучший доклад».

Личный вклад. Автором реализованы используемые численные методы решения начальных и краевых задач в программной среде Matlab, проведены численные эксперименты и выполнен анализ полученных расчетов. Выбор круга рассматриваемых задач и разработка модифицированного наилучшего аргумента проводились под руководством Е. Б. Кузнецова и С. С. Леонова. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов.

Публикации. Основные результаты по теме работы изложены в 15 печатных и электронных изданиях, среди которых 5 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК, 4 из которых входят в международные системы цитирования [31, 71, 81–83], 10 опубликованы в тезисах докладов конференций [35–37, 64–70]. Принята к печати 1 статья в Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики.

В соавторстве с Е. Б. Кузнецовым и С. С. Леоновым создан и зарегистрирован программный комплекс «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641 от 13.01.2022).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации

составляет 112 страниц с 9 рисунками и 13 таблицами. Список литературы содержит 91 наименование.

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-08-00718 А: «Разработка методов и вычислительных программ решения краевых задач, моделирующих нелинейное деформирование материалов со сложной реологией» (2018-2021) и аспирантским грантом РФФИ № 20-31-90054-20: «Численные методы решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач, моделирующих механические и физические явления» (2020-2022).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Кузнецову Евгению Борисовичу за неоценимую помощь на всех этапах выполнения диссертации, а также Леонову Сергею Сергеевичу за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформлении диссертации.

Глава 1. Традиционные методы решения начальных и краевых задач

Как было отмечено во введении, применимость сингулярно возмущенных уравнений широка, поэтому важность разработки эффективных численных методов не может быть переоценена. Однако, перед тем, как говорить о новом подходе, в этой главе предлагается рассмотреть основные традиционные численные методы для решения задач для систем ОДУ, которые будут применяться в следующих главах диссертации, и метод наилучшей параметризации, на основе которого построен новый подход для решения некоторого класса сингулярно возмущенных задач.

1.1 Начальные задачи

Так как любое обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка можно свести к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, то для удобства сразу рассмотрим систему ОДУ вида

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ — заданные функции.

Приведем основные численные методы решения таких задач.

1.1.1 Явный метод Эйлера

Явный метод Эйлера безусловно является одним из наиболее популярных численных методов решения начальных задач. Это объясняется его чрезвычайной простотой. Схема метода Эйлера на k -ом шаге имеет вид [63]:

$$\begin{aligned}y_{i,k+1} &= y_{i,k} + h \cdot f_i(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{n,k}), \\t_{k+1} &= t_k + h, \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где h — шаг интегрирования по аргументу t .

1.1.2 Явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Несмотря на свою простоту, метод Эйлера обладает всего лишь вторым порядком точности, поэтому даже для простых нежестких задач может потребоваться значительное уменьшение шага интегрирования. Для устранения этого недостатка часто применяется метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности, схема которого записывается в виде [63]:

$$\begin{aligned}y_{i,k+1} &= y_{i,k} + \frac{1}{6}h \cdot \left(K_{i,k}^{(1)} + 2K_{i,k}^{(2)} + 2K_{i,k}^{(3)} + K_{i,k}^{(4)} \right), \\t_{k+1} &= t_k + h, \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}K_{i,k}^{(1)} &= f_i(t_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}), \\K_{i,k}^{(2)} &= f_i\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot K_{1,k}^{(1)}, \dots, y_{n,k} + \frac{h}{2} \cdot K_{n,k}^{(1)}\right), \\K_{i,k}^{(3)} &= f_i\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot K_{1,k}^{(2)}, \dots, y_{n,k} + \frac{h}{2} \cdot K_{n,k}^{(2)}\right), \\K_{i,k}^{(4)} &= f_i\left(t_k + h, y_{1,k} + h \cdot K_{1,k}^{(3)}, \dots, y_{n,k} + h \cdot K_{n,k}^{(3)}\right),\end{aligned}$$

1.1.3 Переменный шаг интегрирования. Правило Рунге

На практике показано, что постоянный шаг интегрирования целесообразно использовать только для нежестких задач. В случае, когда задача (1.1)-(1.2) является плохо обусловленной или жесткой, более эффективным становится применение переменного шага интегрирования. Существует множество методов построения неравномерных сеток, некоторые из которых приведены в работах Н. Н. Калиткина и соавторов [22], О. Б. Арушаняна и С. Ф. Залеткина [1]. Традиционно для смены шага используется правило Рунге, известное также как метод Рунге-Ромберга-Ричардсона.

Согласно ему, локальную погрешность численного решения задачи (1.1)-(1.2) на k -ом шаге, вычисленного с шагом h , можно записать в виде:

$$\Delta_t = \rho_k^h + O(h^{p+2}),$$

где ρ_k^h — главная часть локальной погрешности, вычисляемая по формуле

$$\rho_k^h = \frac{\|y_k^{2h} - y_k^h\|_2}{2^p - 1}. \quad (1.5)$$

Здесь $y_k = (y_{1,k}, \dots, y_{n,k})^T$, $\|\cdot\|_2$ — квадратичная (евклидова) норма вектора, p — порядок точности численного метода, верхними индексами h и $2h$ обозначены используемые шаги интегрирования.

Используя значение (1.5) как оценку локальной погрешности, можно реализовать процедуру смены шага. Задавая точность численного решения θ , при $\rho_k^h > \theta$ шаг следует уменьшить вдвое. Процедура уменьшения шага продолжается до момента, когда $\rho_k^h < \theta$. Если значение $\rho_k^h < \theta/2^p$, то шаг увеличивается вдвое.

1.1.4 Неявный метод Эйлера

Одно из ранних определений жестких уравнений, данных Кертиссом и Хиршфельдером [76], гласит, что жесткие уравнения — это уравнения, для которых неявные методы работают несравненно лучше, чем явные методы. Поэтому, как уже упоминалось во введении, большинство специализированных численных методов решения жестких задач построены на основе неявных схем. Одним из наиболее простых методов данного класса, который при этом обладает значительной устойчивостью [21], является неявный метод Эйлера [62].

$$\begin{aligned}y_{i,k+1} &= y_{i,k} + h \cdot f_i(t_{k+1}, y_{1,k+1}, y_{2,k+1}, \dots, y_{n,k+1}), \\t_{k+1} &= t_k + h, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Видно, что неявная схема метода Эйлера отличается от явной схемы (1.3) необходимостью решать алгебраическую систему уравнений на каждом шаге. Ее можно решить, например, методом простых итераций или методом Ньютона [23].

Структура системы (1.6) делает удобным в использовании метод простых итераций, который сводится на каждом шаге к итерационному процессу

$$y_{i,k+1}^{(j+1)} = y_{i,k}^{(j)} + h \cdot f_i(t_{k+1}, y_{1,k+1}^{(j)}, \dots, y_{n,k+1}^{(j)}) = \phi_i(y_{1,k+1}^{(j)}, \dots, y_{n,k+1}^{(j)}),$$

где $j = 0, \dots, j_k$; j_k — количество итераций на k -ом шаге.

Несмотря на кажущуюся простоту, известно, что условие сходимости метода простых итераций накладывает значительные ограничения на шаг интегрирования, а также его скорость сходимости — линейная. Эти недостатки можно устранить, применяя метод Ньютона.

Записывая систему (1.6) в виде

$$\Phi_i(y_{1,k+1}, \dots, y_{n,k+1}) = y_{i,k+1} - y_{i,k} - h \cdot f_i(t_{k+1}, y_{1,k+1}, y_{2,k+1}, \dots, y_{n,k+1}) = 0 \quad (1.7)$$

и вводя обозначение

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)^T,$$

запишем итерационный процесс метода Ньютона:

$$y_k^{(j+1)} = y_k^{(j)} - J^{-1}|_{y=y_k^{(j)}} \cdot \Phi|_{y=y_k^{(j)}},$$

где $y_k^{(j)}$ — решение задачи (1.1)-(1.2) на k -ом шаге и j -ой итерации; J — матрица Якоби системы (1.7).

Замечание 1.1. Важной задачей при использовании итерационных методов решения нелинейных уравнений и систем является выбор начального приближения. Для задачи (1.1)-(1.2) начальное приближение приходится выбирать на каждом шаге численного метода. Если на k -ом шаге получено решение $y_k^{(j_k)}$, и оно не обращает уравнения системы в бесконечность, то можно рекомендовать выбор начального приближения для $k + 1$ -го шага в форме

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k^{(j_k)}.$$

В противном случае, начальное приближение можно выбирать в виде

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k^{(j_k)} + \delta,$$

где δ — вектор, компоненты которого выбираются из условий сходимости метода.

Замечание 1.2. Для задачи (1.1)-(1.2) сходимость итерационного процесса зависит от величины шага интегрирования h . Условия сходимости методов простых итераций и Ньютона накладывают ограничение на выбор h . При этом использование правила Рунге в большинстве случаев позволяет получить значение шага интегрирования, удовлетворяющее условиям сходимости. Лишь в окрестностях предельных особых точек и внутренних слоев необходимо дополнительно уменьшать шаг интегрирования.

1.2 Наилучшая параметризация

Неявные методы позволяют найти решения жестких и плохо обусловленных задач Коши, но не могут сравниться по быстродействию с явными методами, так как на каждом шаге неявного метода приходится решать систему нелинейных уравнений. Этот недостаток удается устранить при помощи метода продолжения решения [73], который заключается в замене исходного аргумента задачи Коши на новый. Можно выбирать различные аргументы продолжения решения, но наиболее часто используют наилучший аргумент. Данный аргумент отсчитывается по касательной к интегральной кривой и обладает рядом исключительных свойств. Для задачи (1.1)-(1.2) наилучший аргумент λ записывается в скалярной форме:

$$d\lambda^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2 + dt^2. \quad (1.8)$$

Будем полагать, что все переменные y_1, y_2, \dots, y_n и аргумент t зависят от λ . Дополняя систему (1.1) соотношением (1.8) и разрешая полученную

систему относительно производных по λ , получим преобразованную систему

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{d\lambda} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\sqrt{Q(t, y_1, \dots, y_n)}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Q(t, y_1, \dots, y_n)}}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

где

$$Q(t, y_1, \dots, y_n) = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y_1, \dots, y_n).$$

Начальные условия (1.2) для системы (1.9) перепишутся в виде

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad t(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Задача (1.9)-(1.10) обладает рядом важных для численного решения свойств [73]:

1. Квадратичная норма правой части системы (1.9) равна единице, т. е. устраняются вычислительные трудности, связанные с неограниченным возрастанием правых частей системы (1.1).
2. Обусловленность системы (1.9) является наилучшей.
3. Показатель жесткости преобразованной системы (1.9) меньше, чем у исходной.

Все отмеченные свойства дают возможность решать преобразованную задачу (1.9)-(1.10) любыми численными методами, в том числе и явными.

1.3 Краевые задачи

Рассмотрим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [61]

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b \quad (1.11)$$

с краевыми (граничными) условиями первого рода

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (1.12)$$

Отметим, что, помимо граничных условий первого рода, бывают граничные условия второго рода:

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b,$$

и граничные условия третьего рода:

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a, \quad y'(b) + \beta y(b) = y_b.$$

А также, зачастую можно встретить задачи со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются условия различных родов.

Существует множество различных численных методов, позволяющих решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее популярными являются метод конечных разностей, ряд проекционных методов, которые, в свою очередь, могут формировать основу метода конечных элементов, а также метод стрельбы. При этом конечно-разностный метод приводит к необходимости решения системы алгебраических уравнений, зачастую, нелинейной, что приводит к возрастанию времени счета задачи, а также к сложностям доказательства сходимости приближенного решения. Метод конечных элементов используется, как правило, для решения дифференциальных уравнений в частных производных, так как позволяет работать с более сложными областями. Метод пристрелки сводит решение краевой задачи к решению множества задач Коши с целью подбора такого угла стрельбы, который бы позволил выполнить краевое условие на правой границе исходной задачи.

Стоит также отметить симбиоз компактных схем высшего порядка и явного способа задания специальных адаптивных сеток, эффективность которого при решении задач с пограничными и внутренними слоями показана в работе В. Д. Лисейкина и В. И. Паасонена [38]. Однако в данной диссертации для решения краевых задач применяется метод стрельбы, поскольку он позволяет применить метод наилучшей параметризации для решения полученных начальных задач.

1.3.1 Метод стрельбы

Рассмотрим задачу (1.11)-(1.12) в следующем виде:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1.13)$$

Согласно методу стрельбы, вместо краевой задачи (1.13) решается следующая задача Коши [61]:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, \quad y'(a) = \tan \alpha, \quad \alpha : y(b, \alpha) = y_b. \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь интегральная кривая $y(x, \alpha)$ зависит также от параметра α , называемого углом пристрелки. Он выбирается из условия

$$|y(b, \alpha) - y_b| \leq \varepsilon, \quad (1.15)$$

где ε — заданная точность.

Начальным углом пристрелки можно, например, выбрать следующий:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_b - y_a}{b - a}.$$

Одним из подходов подбора угла пристрелки является метод дихотомии, или метод половинного деления [23], [61]:

1. Решается задача Коши (1.14) со значением угла пристрелки α_0 . Если выполняется условие (1.15), то полученное решение будет решением краевой задачи (1.13) с точностью ε .

2. Если $y(b, \alpha_0) > y_b$, то угол пристрелки уменьшается и решается задача Коши (1.14) с α_1 до тех пор, пока не выполнится условие $y(b, \alpha_1) < y_b$.

Если $y(b, \alpha_0) < y_b$, то угол пристрелки увеличивается и решается задача Коши (1.14) с α_1 до тех пор, пока не выполнится условие $y(b, \alpha_1) > y_b$.

3. В результате будет получен интервал (α_0, α_1) , внутри которого лежит истинное значение угла пристрелки α^* . Для его определения интервал последовательно делится пополам по формуле

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_{k-1} + \alpha_k}{2}$$

до тех пор, пока не будет выполнено условие $|y(b, \alpha_{k+1}) - y_b| \leq \varepsilon$.

В этом случае найден истинный угол пристрелки α^* и $y(x, \alpha^*)$ — истинная интегральная кривая.

Однако метод половинного деления очень медленно сходится и требует решения большого числа задач Коши для различных значений углов пристрелки. При решении жестких задач, которые и без того, как правило, имеют значительно более длительное время счета, это особенно критический недо-

статок. Итерационная процедура Ньютона позволяет ускорить скорость сходимости итерационного процесса [61].

Согласно ей, угол пристрелки α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{y_b - y(b, \alpha_0)}{y(b, \alpha_0 + \delta) - y(b, \alpha_0)} \delta,$$

где δ — малое приращение. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия (1.15), при этом на каждой итерации угол пристрелки определяется по формуле

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{y_b - y(b, \alpha_k)}{y(b, \alpha_k) - y(b, \alpha_{k-1})} (\alpha_k - \alpha_{k-1}).$$

Данная процедура сходится быстро вблизи корня, а сходимость вдали от корня зависит от подбора начального значения α_0 [23].

Глава 2. Некоторые начальные и краевые задачи, моделирующие физические процессы

В главе 1 были рассмотрены основные методы решения начальных и краевых задач, а также метод продолжения решения по наилучшему аргументу λ . Цель этой главы заключается в том, чтобы показать на примере тестовых начальных задач [31, 81, 82] и одной краевой задачи, моделирующей одномерный стационарный поток в трубе с постоянным или переменным сечением [71, 83], что данный подход позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении жестких задач, но только в случаях, когда скорость изменения интегральных кривых является степенной.

2.1 Степенной тест

В статье А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4] для проверки эффективности численных методов при решении задач с контрастными структурами предложен ряд тестовых задач. Одна из них имеет название степенного теста.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения следующего вида [4]:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\xi(t) (u^2 - a^2)^2}{(u^2 + a^2)}, t \in [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$u(0) = 0. \quad (2.2)$$

При $\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(t)$ решение задачи (2.1)-(2.2) имеет вид:

$$u(t) = -\frac{2\Xi(t)a^2}{1 + \sqrt{1 + 4a^2\Xi^2(t)}}, \quad (2.3)$$

где $\Xi(t) = \xi_0 \cdot \sin(t)$.

В дальнейших расчетах $a = \pi$. Жесткость задачи характеризуется множителем ξ_0 при периодической функции. Условно, по значению параметра ξ_0 , можно разбить задачи вида (2.1)-(2.2) на следующие классы [4]: при малых значениях ξ_0 (порядка нескольких единиц) задача является нежесткой, при $\xi_0 \geq 10$ – жесткой и при $\xi_0 \geq 1000$ – сверхжесткой. Это определяется видом правой части: при приближении значения косинуса к нулю скорость изменения решения, даже при большом параметре ξ_0 , стремится к нулю, а при стремлении значения косинуса к единице значение правой части принимает наибольшее значение. Таким образом, происходит смена плавно меняющихся компонент решения с быстро меняющимися переходными зонами, которые тем короче, чем больше значение ξ_0 . Данные особенности видны на рис. 2.1.

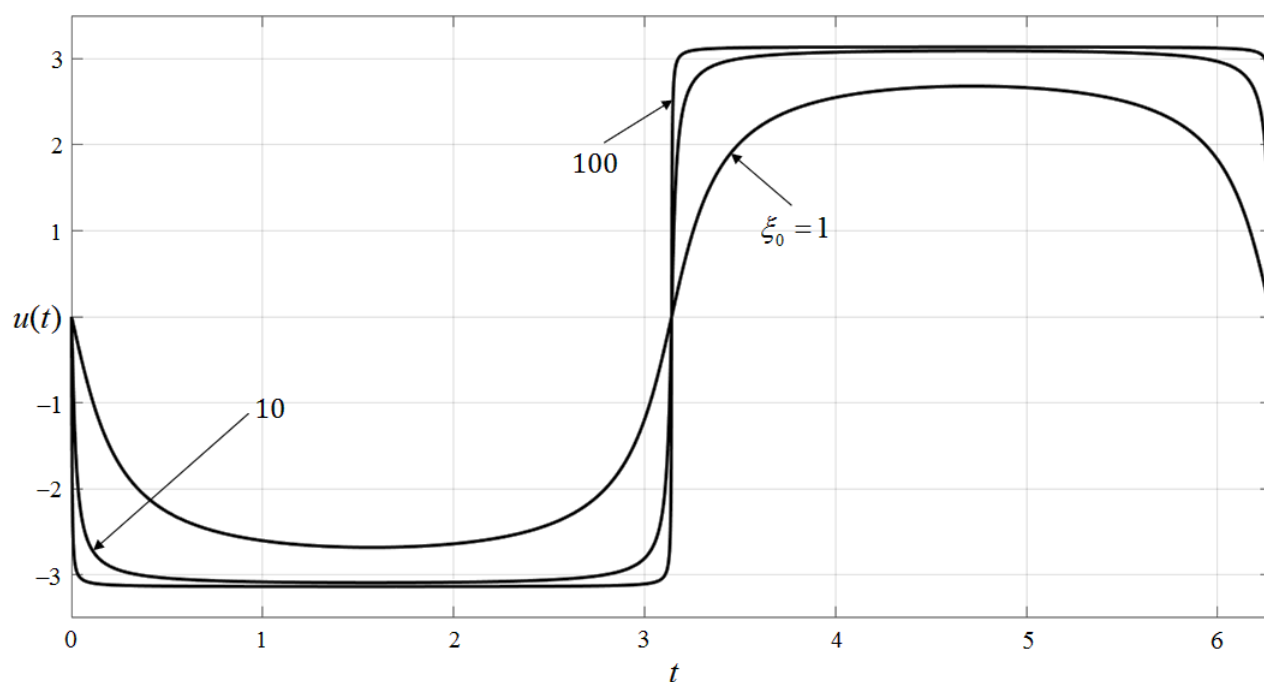


Рис. 2.1. Численное решение задачи (2.1)-(2.2) при $\xi_0 = 1; 10; 100$, метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом $h = 10^{-3}$.

2.1.1 Традиционный подход

Рассмотрим применение традиционных численных методов к данной задаче. А именно, покажем основные недостатки явных и неявных численных методов при решении жестких задач Коши.

Явные методы решения

Результаты решения задачи явным методом Эйлера и явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом, схемы которых даны выше, представлены на рис. 2.1 и в табл. 1.

На рис. 2.1 изображены кривые, соответствующие решениям задачи (2.1)-(2.2) для значений $\xi_0 = 1; 10; 100$, полученные методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом $h = 0.001$. Полученные численные решения визуально совпадают с аналитическим. Для явного метода Эйлера кривые аналогичны изображенным на рис. 2.1.

В табл. 1 приведены данные о средней ошибке ε и времени счета t_c решений задачи (2.1)-(2.2), полученными явными методами с постоянным шагом интегрирования. Из нее видно, что метод Рунге-Кутты 4-го порядка сильно выигрывает у явного метода Эйлера по точности, хотя и требует большего времени счета. Стоит также отметить, что при повышении значения параметра ξ_0 невозможно получить решение при малых шагах интегрирования. Так, для $\xi_0 = 10$ невозможно получить решение при $h = 0.1$, а при $\xi_0 = 1000$ нельзя получить решение при $h > 10^{-3}$.

Здесь и далее под средней ошибкой ε_{avg} подразумевается среднее арифметическое модулей разности приближенного решения и точного решения на каждом шаге.

Таблица 1. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c для задачи (2.1)-(2.2), явные методы с постоянным шагом.

Параметры		Явный метод Эйлера		Метод Рунге-Кутты	
ξ_0	h	ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c
1	0.1	0.4548	0.009	$2.1332 \cdot 10^{-4}$	0.0081
	0.01	0.0361	0.0095	$2.2776 \cdot 10^{-8}$	0.0656
	0.001	0.0035	0.0255	$2.1461 \cdot 10^{-12}$	0.1732
10	0.1	—	—	—	—
	0.01	0.0826	0.0109	$2.3893 \cdot 10^{-5}$	0.0168
	0.001	0.008	0.0301	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.0759
100	0.1	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—
	0.001	0.0127	0.0381	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.1011
1000	0.1	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—
	0.001	—	—	—	—

Замечание 2.1. В рассматриваемом диапазоне шагов интегрирования не удалось получить решение задачи (2.1)-(2.2) для $\xi_0 \geq 1000$.

Анализируя полученные результаты, отметим, что для решения задачи с фиксированным ξ_0 шаг интегрирования h не может превышать $1/\xi_0$. Это говорит о малоэффективности применения явных методов для решения сверхжестких задач при больших значениях ξ_0 .

Неявный метод Эйлера

Явные методы с постоянным шагом интегрирования позволяют получить решение задачи (2.1)-(2.2) только при умеренных значениях ξ_0 . Уже при $\xi_0 = 10^3$ в рассматриваемом диапазоне шагов интегрирования не удастся найти решение. Можно ожидать, что неявные методы, за счет расширения области устойчивости, позволят получить решение при более малых шагах интегрирования.

Используем неявный метод Эйлера. На каждом шаге решение задачи (2.1)-(2.2) неявным методом Эйлера находится как решение нелинейного уравнения вида

$$u_{k+1} = u_k - h \cdot \frac{\xi_0 \cos(t_{k+1}) \left((u_{k+1})^2 - a^2 \right)^2}{(u_{k+1})^2 + a^2}, \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) решается методом простых итераций (МПИ) и методом Ньютона (МН). Итерационный процесс по МПИ задается соотношением

$$u_{k+1}^{(j+1)} = u_k^{(j)} - h \cdot \frac{\xi_0 \cos(t_{k+1}) \left(\left(u_{k+1}^{(j)} \right)^2 - a^2 \right)^2}{\left(u_{k+1}^{(j)} \right)^2 + a^2},$$

а для МН –

$$u_{k+1}^{(j+1)} = u_k^{(j)} - \frac{F \left(t_{k+1}, u_{k+1}^{(j)} \right)}{F'_u \left(t_{k+1}, u_{k+1}^{(j)} \right)}. \quad (2.5)$$

В формуле (2.5)

$$F(t, u) = u - u_k + h \cdot \frac{\xi_0 \cos t (u^2 - a^2)^2}{u^2 + a^2},$$

$$F'_u(t, u) = 1 - h \cdot \frac{2\xi_0 \cos t (u^2 - a^2) u (u^2 + 3a^2)}{(u^2 + a^2)^2},$$

где $F'_u(t, u) = \frac{dF(t, u)}{du}$.

Кривые, полученные при решении задачи (2.1)-(2.2) неявным методом Эйлера, имеют вид аналогичный представленному на рис. 2.1. В табл. 2 даны значения средней погрешности ε и времени счета t_c решений задачи (2.1)-(2.2), полученными неявным методом Эйлера с постоянным шагом интегрирования при использовании МПИ и МН.

Расчеты показывают, что по сравнению с явным методом Эйлера неявный метод Эйлера позволяет получить результаты с меньшей погрешностью.

Таблица 2. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c для задачи (2.1)-(2.2), неявный метод Эйлера с постоянным шагом.

Параметры		Неявный метод Эйлера			
		МПИ		МН	
ξ_0	h	ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c
1	0.1	0.3137	0.0662	0.3138	0.0255
	0.01	0.034	0.1774	0.0345	0.1457
	0.001	$8.6629 \cdot 10^{-4}$	1.188	0.0035	0.6134
10	0.1	—	—	—	—
	0.01	0.074	0.1864	0.0787	0.0878
	0.001	0.0029	1.1653	0.008	0.7302
100	0.1	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—
	0.001	0.0078	0.9977	0.0126	1.5954
1000	0.1	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—
	0.001	—	—	—	—

Однако, время счета в связи с усложнением вычислительного процесса как для МПИ, так и МН, может увеличиваться на порядок и более. При малой жесткости метод Ньютона позволяет быстрее получить решение задачи по сравнению с методом простых итераций, но с повышением жесткости уступает ему как в точности, так и в быстродействии. Это можно связать и с особенностями реализации МН (в частности, с выбором начального приближения на каждом шаге) и с затруднением при переходе через внутренний слой для неявного метода Эйлера. Таким образом, используемый неявный метод Эйлера не позволяет значительно улучшить результаты явных методов, затрачивая при этом большее время счета.

2.1.2 Наилучшая параметризация

Из приведенных выше расчетных данных видно, что ни явные методы, ни неявный метод Эйлера не позволяют получить решение задачи (2.1)-(2.2) без значительных вычислительных затруднений. Применим к этой задаче метод продолжения решения по наилучшему аргументу [73], описанный в главе 1.

Наилучший аргумент λ для рассматриваемой задачи запишется в скалярном виде:

$$d\lambda^2 = du^2 + dt^2. \quad (2.6)$$

Преобразуя к аргументу (2.6) уравнение (2.1), получим:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\lambda} = \frac{-\xi(t) (u^2 - a^2)^2}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(u^2 + a^2)}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4}}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Начальные условия (2.2) для системы (2.7) примут вид:

$$u(0) = 0, \quad t(0) = 0. \quad (2.8)$$

Как отмечалось выше в главе 1, преобразованная задача (2.7)-(2.8) обладает рядом преимуществ при численном решении. В табл. 3 приведены результаты расчёта преобразованной задачи (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом (качественно для метода Эйлера результаты аналогичны), где l — шаг по аргументу λ . Кривые, полученные при численном решении, аналогичны приведенным на рис. 2.1. Для сравнения в табл. 3 приведены результаты решения исходной задачи

(2.7)-(2.8) с шагом, подбираемым из условия равенства порядков средней ошибки решения исходной и преобразованной задач.

Видно, что для непреобразованной задачи (2.1)-(2.2) для достижения того же порядка ошибки приходится брать шаг до нескольких порядков меньше по сравнению с преобразованной. При этом, несмотря на то, что интервал изменения значений аргумента λ больше, чем у аргумента t , для задачи (2.7)-(2.8) удается сократить время счета от 0.4 (при $\xi_0 = 1$) 10 раз (при $\xi_0 = 1000$).

Таблица 3. Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c исходной задачи (2.1)-(2.2) и преобразованной к наилучшему аргументу задачи (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом.

ξ_0	Наилучший аргумент			Исходная задача		
	h	ε_{avg}	t_c, c	h	ε_{avg}	t_c, c
1	0.1	$5.4369 \cdot 10^{-7}$	0.0213	0.02	$3.6307 \cdot 10^{-7}$	0.0418
	0.01	$2.9799 \cdot 10^{-11}$	0.183	0.002	$3.6427 \cdot 10^{-11}$	0.2405
	0.001	$5.0522 \cdot 10^{-14}$	0.5505	0.0002	$6.4592 \cdot 10^{-13}$	2.0987
10	0.1	$2.4647 \cdot 10^{-4}$	0.0236	0.02	$3.0375 \cdot 10^{-4}$	0.0422
	0.01	$3.2723 \cdot 10^{-9}$	0.0969	0.001	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.4414
	0.001	$3.7533 \cdot 10^{-12}$	0.5886	0.0002	$3.662 \cdot 10^{-12}$	2.2979
100	0.1	0.3525	0.0289	0.004	0.0012	0.1303
	0.01	$4.834 \cdot 10^{-6}$	0.1178	0.001	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.4484
	0.001	$5.0063 \cdot 10^{-11}$	0.5289	0.00005	$1.7076 \cdot 10^{-11}$	8.2501
1000	0.1	—	—	—	—	—
	0.01	0.0047	0.2086	0.00047	0.0012	0.9134
	0.001	$4.0885 \cdot 10^{-8}$	0.5288	0.00007	$5.9638 \cdot 10^{-8}$	5.9466

В табл. 4 приведены результаты расчета задач (2.1)-(2.2) и (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом. Процедура изменения шага реализована по правилу Рунге и описана выше в главе 1. Для преобразованной задачи (2.7)-(2.8) параметр точности для правила Рунге $\theta = 10^{-12}$. Для исходной задачи (2.1)-(2.2) параметр θ выбирался из условия равенства порядков средней погрешности для обеих задач.

Результаты показывают, что и при переменном шаге интегрирования использование наилучшего аргумента λ позволяет получить вычислительные

Таблица 4. Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c исходной задачи (2.1)-(2.2) и преобразованной к наилучшему аргументу задачи (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом по правилу Рунге с точностью θ .

Параметры		Наилучший аргумент			Исходная задача		
ξ_0	h	θ	ε_{avg}	t_c, c	θ	ε_{avg}	t_c, c
1	0.1	10^{-12}	$1.1561 \cdot 10^{-10}$	0.2388	10^{-10}	$2.1774 \cdot 10^{-10}$	0.4892
	0.01	10^{-12}	$1.6079 \cdot 10^{-10}$	0.2592	$3 \cdot 10^{-10}$	$1.1338 \cdot 10^{-10}$	0.571
	0.001	10^{-12}	$1.7008 \cdot 10^{-10}$	0.1889	10^{-10}	$2.1458 \cdot 10^{-12}$	1.3038
10	0.1	10^{-12}	$2.365 \cdot 10^{-9}$	0.2065	10^{-7}	$1.5164 \cdot 10^{-9}$	1.6533
	0.01	10^{-12}	$2.2218 \cdot 10^{-9}$	0.2812	$4 \cdot 10^{-8}$	$1.1642 \cdot 10^{-9}$	2.025
	0.001	10^{-12}	$1.6625 \cdot 10^{-9}$	0.2691	10^{-7}	$2.5134 \cdot 10^{-9}$	1.3089
100	0.1	10^{-12}	$3.497 \cdot 10^{-8}$	0.2982	10^{-4}	$5.8346 \cdot 10^{-8}$	3.2128
	0.01	10^{-12}	$3.1933 \cdot 10^{-8}$	0.3346	10^{-5}	$2.3953 \cdot 10^{-8}$	4.0536
	0.001	10^{-12}	$3.0792 \cdot 10^{-8}$	0.3015	$3 \cdot 10^{-5}$	$2.3106 \cdot 10^{-8}$	4.7691
1000	0.1	10^{-12}	$4.2953 \cdot 10^{-7}$	0.2729	—	—	—
	0.01	10^{-12}	$3.2001 \cdot 10^{-7}$	0.2318	10^{-3}	$9.1802 \cdot 10^{-8}$	15.794
	0.001	10^{-12}	$8.7845 \cdot 10^{-7}$	0.1772	10^{-2}	$6.4254 \cdot 10^{-7}$	9.8967

преимущества: удастся сократить время счета минимум в два раза. Для сверхжестких задач уменьшение времени счета может достигать нескольких порядков. Отметим также, что, в отличие от преобразованной задачи, решение исходной задачи зависит от начального шага; в особенности это характерно для больших значений ξ_0 .

Однако стоит указать и на ряд недостатков наилучшей параметризации. Преобразованная задача (2.7)-(2.8) имеет более сложный вид и большую размерность по сравнению с исходной задачей (2.1)-(2.2). Для рассматриваемой задачи данный недостаток несущественен, но при решении задач большей размерности преимущества, даваемые наилучшей параметризацией, могут перекрываться сложностью преобразованных задач.

Еще одним недостатком является заниженная оценка погрешности по правилу Рунге для преобразованной задачи. Уже при $\xi_0 = 1$ оценка погрешности на два порядка ниже, чем реальная средняя погрешность. Для сверхжестких задач разница возрастает до пяти порядков. Диаметрально проти-

воположная ситуация характерна для исходной задачи. Здесь правило Рунге дает завышенную оценку погрешности, начиная с $\xi_0 = 10$. Если посмотреть на характер изменения шага интегрирования, изображенный на рис. 2.2 в полулогарифмических координатах, то видно, что уже при значении $\xi_0 = 30$ значение шага интегрирования не поднимается выше 10^{-5} , снижаясь до 10^{-12} в окрестности пограничных и внутреннего слоев. При этом значение шага изменяется плавно, т. е. после прохождения внутреннего слоя шаг начинает плавно возрастать до максимального значения, а при подходе к внутреннему слою – плавно убывать до минимума (при этом ширина переходного слоя уменьшается при увеличении ξ_0). Данный механизм изменения шага интегрирования и приводит к уменьшению погрешности решения на горизонтальных участках до значений меньших, чем задаваемая точность θ .

Для преобразованной задачи кривая решения в зависимости от аргумента λ изменяется более плавно, как это отмечено в статьях А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4, 5]. По этой причине такого же падения погрешности не происходит; наоборот, в узловых точках, соответствующих внутренним слоям, концентрируется максимальная погрешность. В заключение отметим, что, исходя из характера изменения шага интегрирования, можно объяснить и увеличение времени счета для исходной задачи. Помимо усложнения процесса решения, связанного со сменой шага, уже при относительно малом значении $\xi_0 = 30$ шаг интегрирования не поднимается выше 10^{-5} , при повышении же значения ξ_0 шаг интегрирования будет уменьшаться еще сильнее, а вместе с этим будет возрастать время счета.

Замечание 2.2. В отличие от непреобразованной задачи (2.1)-(2.2), переход к наилучшему аргументу позволяет получить хорошие результаты при параметре жесткости ξ_0 большем, чем рассмотренные в табл. 3 и табл. 4. При задаваемой точности $\theta = 10^{-12}$ и начальном шаге $h = 0.001$ удастся построить решение вплоть до $\xi_0 = 10^6$.

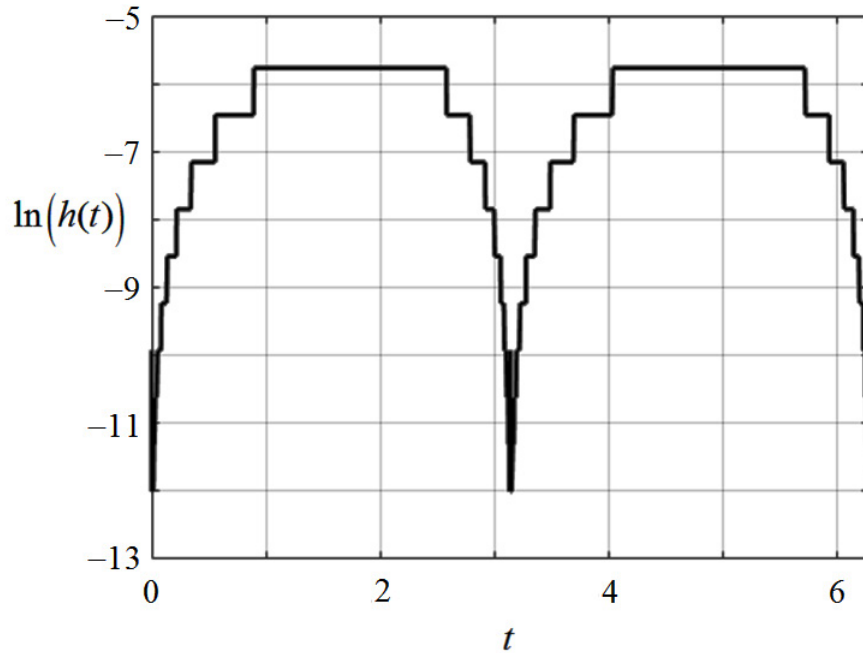


Рис. 2.2. Шаг интегрирования в полулогарифмических координатах для задачи (2.1)-(2.2) при $\xi_0 = 30$, метод Рунге-Кутты четвертого порядка, $\theta = 10^{-4}$.

Замечание 2.3. Использование неявного метода Эйлера с переменным шагом не позволило получить результаты значительно лучшие, чем приведенные в табл. 2. Получить решение со средней погрешностью ε порядка 10^{-2} удастся, но время счета по сравнению с результатами табл. 2 возрастает до 10 раз при $\xi_0 \leq 100$. При большей точности ($\varepsilon \leq 10^{-3}$) или большей жесткости ($\xi_0 \geq 1000$) результаты либо не удавалось получить, либо время счета составляло до 1000 с.

2.2 Экспоненциальный тест

В работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4] также рассмотрена следующая задача

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2), \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.9)$$

с начальным условием

$$u(0) = u_0. \quad (2.10)$$

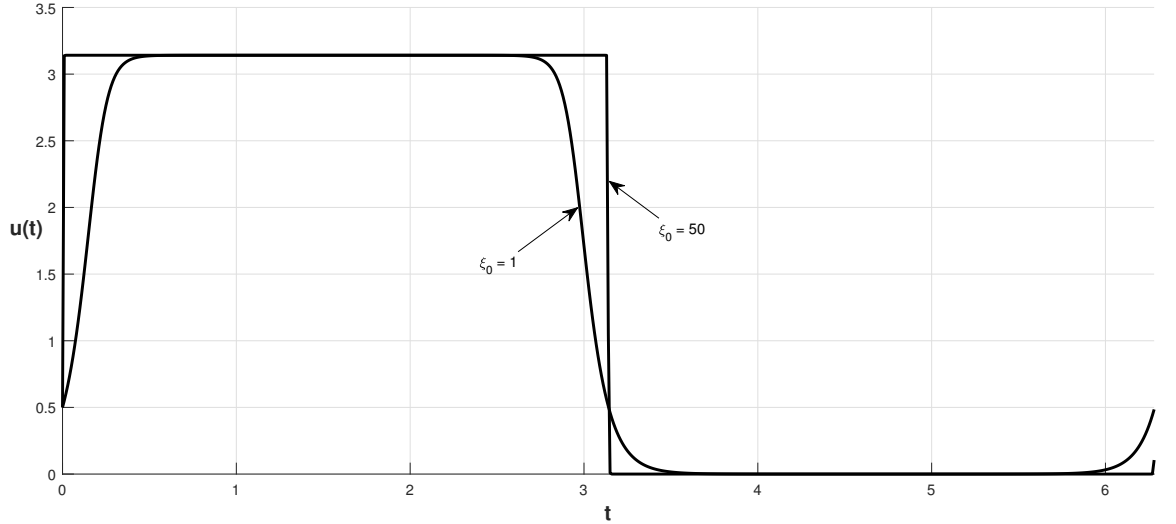


Рис. 2.3. Точное решение (2.11) экспоненциального теста (2.9)-(2.10) для $\xi_0 = 1$, $\xi_0 = 50$.

Точное решение задачи (2.9)-(2.10) имеет вид (рис. 2.3)

$$u(t) = \frac{au_0}{\sqrt{u_0^2 + (a^2 - u_0^2) \cdot \exp(-2a^2 \Xi(t))}}, \quad (2.11)$$

где $\xi(t) = \xi_0 \cos(t)$, $\Xi(t) = \xi_0 \sin(t)$. В дальнейших расчетах $a = \pi$, $u_0 = 0.5$.

Эта задача получила название [4] экспоненциального теста. Это связано с тем, что в отличие от задачи (2.1)-(2.2), где скорость изменения решения степенная, в задаче (2.9)-(2.10) она является экспоненциальной.

2.2.1 Наилучшая параметризация

Для задачи (2.9)-(2.10) наилучший аргумент λ , описанный в главе 1, имеет вид

$$d\lambda^2 = du^2 + dt^2. \quad (2.12)$$

Тогда преобразование задачи (2.9)-(2.10) к наилучшему аргументу (2.12) приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{du}{d\lambda} = \frac{-\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2)}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2}} \end{cases} \quad (2.13)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad t(0) = 0. \quad (2.14)$$

2.2.2 Численные результаты

В табл. 5 представлены средняя ошибка численного вычисления ε_{avg} и время счета t_c для задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14). Вычисления были проведены явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге (глава 1, раздел 1.1) с заданной точностью θ и начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$.

Таким образом, уже для $\xi_0 = 10,50$ получить численное решение не удалось ни для одной из задач. При этом результаты решения задачи (2.13)-(2.14), преобразованной к наилучшему аргументу, хуже решения исходной задачи (2.9)-(2.10) по обоим показателям: средняя ошибка и время счета.

При решении задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14) явным методом Эйлера с постоянным шагом (табл. 6) результаты удалось получить и для более жесткого случая, когда $\xi_0 = 10$, однако для значений $\xi_0 = 50$ и более, оба подхода имеют затруднения при переходе через внутренний слой.

Таблица 5. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью θ и начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$.

ξ_0	θ	Исходная задача		Наилучший аргумент	
		ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c
1	10^{-4}	0.0072	0.01	0.02	0.02
	10^{-5}	0.02	0.05	0.02	0.03
	10^{-6}	0.006	0.11	0.01	0.18
	10^{-7}	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.3	0.002	0.4
	10^{-8}	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.8	$2.3 \cdot 10^{-4}$	1.25

Таблица 6. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с постоянным шагом h .

ξ_0	h	Исходная задача		Наилучший аргумент	
		ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c
1	10^{-3}	$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.11	$4.28 \cdot 10^{-4}$	0.17
	10^{-4}	$8.99 \cdot 10^{-6}$	0.84	$1.35 \cdot 10^{-5}$	1.55
	10^{-5}	$2.84 \cdot 10^{-7}$	8.14	$4.25 \cdot 10^{-7}$	15.78
10	10^{-3}	—	—	—	—
	10^{-4}	—	—	—	—
	10^{-5}	$2.44 \cdot 10^{-4}$	8.11	$8.2 \cdot 10^{-4}$	19.83

Таким образом, в задаче с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых метод наилучшей параметризации оказывается не таким эффективным, как для задач, где кривые решения растут со степенной скоростью. Этот недостаток показал важность поиска нового подхода для решения таких задач.

2.3 Краевая задача сверхзвукового течения

Прежде, чем переходить к разработке нового подхода, покажем, как метод наилучшей параметризации работает с краевыми задачами. Для этого будем использовать метод стрельбы (глава 1, раздел 1.3), требующий решения некоторого множества задач Коши, которые, в свою очередь, будут пре-

образованы к наилучшему аргументу и решены одним из численных методов решения начальных задач.

2.3.1 Постановка задачи

В этом разделе рассматривается [72] прикладная задача возникновения одномерного стационарного потока при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью в канал с постоянной или с увеличивающейся площадью переменного сечения при наличии противодавления. Предполагается, что газ идеальный и политропный. Влиянием эффектов вязких напряжений на стенки канала пренебрегается.

Данная задача описывается системой уравнений Навье-Стокса в виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (\rho\gamma A) = 0, \\ y \frac{dy}{dx} + (\gamma\rho)^{-1} \frac{d}{dx} (\rho T) = \mu\rho^{-1} \frac{d^2 y}{dx^2}, \\ y \frac{dT}{dx} + (\gamma - 1) T \left[\frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} (\ln A) \right] - \gamma(\gamma - 1) \rho^{-1} \mu \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \\ = \mu\gamma\rho^{-1} \text{Pr}^{-1} \frac{d^2 T}{dx^2}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где x — безразмерное расстояние, измеряемое от входа в канал, y — безразмерная скорость газа относительно скорости звука, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты со значением между 1 и 5/3, T — безразмерная температура, μ — коэффициент вязкости, $\text{Pr} = 3/4$ — число Прандтля, $A = A(x)$ — безразмерная площадь поперечного сечения канала, отнесенная к площади входного отверстия, так что $A(0) = 1$.

В результате некоторых пренебрежений и переобозначений [72] задачу (2.15) можно представить в виде следующей сингулярно возмущенной квази-

линейной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\varepsilon A y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} y - y^{-1} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\ln A \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} y^2 \right) \right], \quad 0 < x < 1 \quad (2.16)$$

с краевыми условиями

$$y(0, \varepsilon) = y_-, \quad y(1, \varepsilon) = y_+, \quad (2.17)$$

где $y_- > y_+ > 0$, $\varepsilon = \mu\gamma(\rho_0 c_0)^{-1}$ — малый параметр, ρ_0 — плотность, c_0 — скорость звука на входе в канал.

Таким образом [72], при известной сверхзвуковой скорости y_- на входе в канал требуется определить, как происходит сверхзвуковой-дозвуковой переход внутри канала при заданной дозвуковой скорости y_+ на выходе из канала.

2.3.2 Случай канала постоянного сечения

Рассмотрим случай постоянного сечения $A(x) = 1$. Тогда задача (2.16)-(2.17) сводится к более простому уравнению

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} - y^{-2} \right] \frac{dy}{dx}, \quad 0 < x < 1 \quad (2.18)$$

с теми же краевыми условиями (2.17)

$$y(0, \varepsilon) = y_-, \quad y(1, \varepsilon) = y_+.$$

Для дальнейшего применения численного подхода к решению данной задачи, перепишем ОДУ второго порядка (2.18) к системе двух ОДУ первого

порядка и получим, в итоге, задачу вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\gamma + 1}{2} - y_1^{-2} \right] y_2, & y_2(1) = y_+. \end{cases} \quad (2.19)$$

На рис. 2.4 представлены численные решения задачи (2.19) для $\varepsilon = 0.1, 1$ явным методом Эйлера. Видно, что при стремлении ε к нулю в решении рассматриваемой задачи образуется пограничный слой.

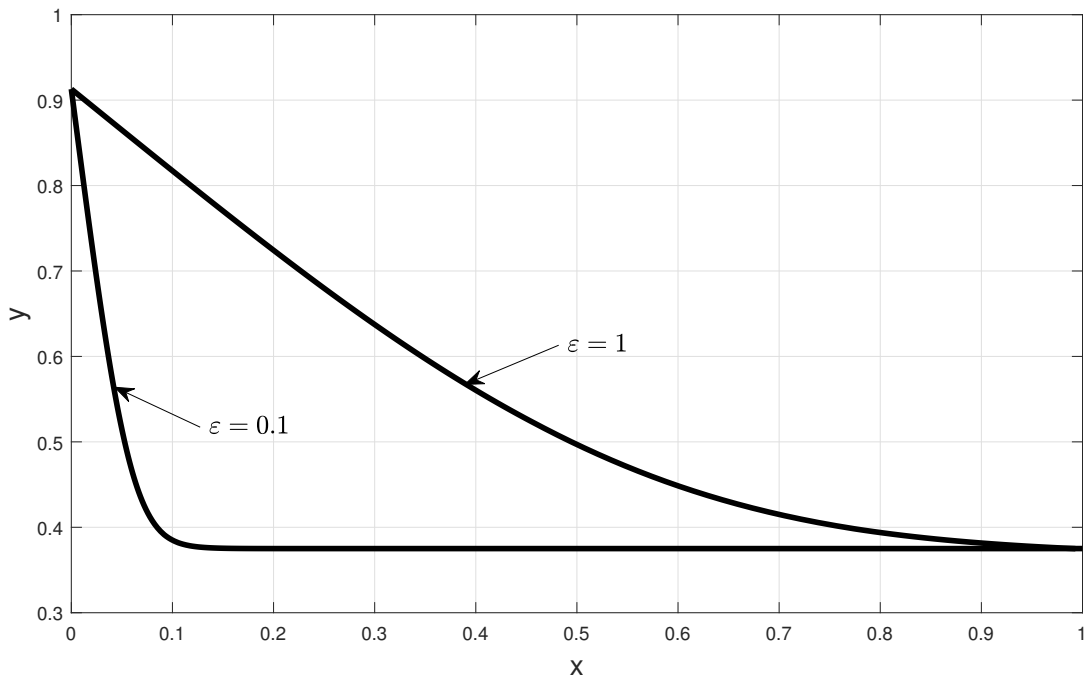


Рис. 2.4. Численное решение задачи (2.19) для $\varepsilon = 0.1, 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

Наилучшая параметризация

Преобразуя задачу (2.19) к наилучшему аргументу λ , получим систему из трех ОДУ первого порядка вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon y_2}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{(\gamma + 1 - 2y_1^{-2}) y_2}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_2(1) = y_+, \\ \frac{dy_3}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_3(0) = 0, \\ \lambda \in [0, \lambda^*], \quad \lambda^* : y_3(\lambda^*, \varepsilon) = 1, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

где $R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 y_2^2 + ((\gamma + 1) - 2y_1^{-2})^2 y_2^2$. Отметим, что в системе (2.21) аргумент задачи (2.19) x был переобозначен как y_3 .

Численные результаты

В табл. 7 представлены время счета t_c , s исходной задачи (2.19) и задачи, преобразованной к наилучшему аргументу λ (2.20) методом стрельбы с точностью $\delta = 10^{-3}$. Задачи Коши были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, начиная с $h_0 = 10^{-4}$, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$. Получить численное решение исходной задачи (2.19) удалось только для значений $\varepsilon \geq 0.1$, тогда как преобразование к наилучшему аргументу λ позволило сделать это для некоторых значений $\varepsilon < 0.1$.

При этом, результаты в табл. 7 показывают, что для нежестких случаев наилучшая параметризация увеличивает время счета примерно в 2 раза, что делает использование этого подхода неоправданным. Однако преобразование

к наилучшему аргументу λ позволяет получить решение для более жестких случаев.

Таблица 7. Время счета t_c, c задач (2.19) и (2.20) методом стрельбы с точностью $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

ε	Исходная задача	Наилучший аргумент
	t_c, c	t_c, c
1.0	0.036	0.061
0.9	0.033	0.09
0.8	0.035	0.089
0.7	0.035	0.085
0.6	0.038	0.103
0.5	0.034	0.072
0.4	0.037	0.063
0.3	0.096	0.131
0.2	0.195	1.497
0.1	352.08	1.035
0.09	—	5.437
0.08	—	733.2
0.07	—	—

Таким образом, при значениях ε между 0.1 и 1 задача (2.19) не является жесткой, что позволяет использовать явный метод Эйлера без серьезных вычислительных затруднений, что подтверждают численные результаты, представленные в табл. 7. Однако, начиная со значений $\varepsilon = 0.1$ и меньше применение явного метода Эйлера напрямую проблематично: время счета кардинально увеличивается или же получить решение в принципе не удастся из-за потери методом Эйлера устойчивости.

2.3.3 Случай канала переменного сечения

Для случая с переменным сечением возьмем $A(x) = 1 + x^2$. Тогда задача (2.16)-(2.17) имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon (1 + x^2) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} y - y^{-1} + \ln(1 + x^2) (\gamma - 1) y \right] \frac{dy}{dx} - \\ - \frac{2x}{1 + x^2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} y^2 \right), y(0) = y_-, \quad y(1) = y_+, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Преобразуем задачу (2.21) к системе двух ОДУ первого порядка. Тогда

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1, & y_1(0) = y_-, \quad y_2(1) = y_+, \quad 0 < x < 1, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\varepsilon (1 + x^2)^2 y_1^2} \left(\left[\frac{\gamma + 1}{2} y_1^2 - 1 + \ln(1 + x^2) (\gamma - 1) y_1^2 \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot (1 + x^2) y_2 - 2x y_1 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} y_1^2 \right) \right). \end{cases} \quad (2.22)$$

Решение рассматриваемой задачи для $\varepsilon = 0.05, 1$ представлено на рис. 2.5. Видно, что при устремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ в задаче (2.22) образуется внутренний слой.

Наилучшая параметризация

Преобразование задачи (2.22) к наилучшему аргументу λ приводит к системе вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2 y_2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{P(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \frac{dy_3}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_3(0) = 0, \\ \lambda \in [0, \lambda^*], \quad \lambda^* : y_3(\lambda^*, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

где

$$Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 (1 + y_3^2)^4 y_1^4 (1 + y_2^2) + P^2(y_1, y_2, y_3),$$

и

$$P(y_1, y_2, y_3) = ((\gamma + 1) y_1^2 - 2 + 2 \ln(1 + y_3^2) (\gamma - 1) y_1^2) y_2 (1 + y_3^2) - 2y_3 y_1 (2 - (\gamma - 1) y_1^2).$$

Отметим, что в связи со сменой аргумента в задаче (2.23) x был переобозначен как y_3 .

Численные результаты

В табл. 8 представлено время счета t_c численного решения задач (2.22) и (2.23) методом стрельбы с применением явного метода Эйлера с переменным шагом. Для $0.1 < \varepsilon \leq 1$, когда задачу (2.22) еще можно считать нежесткой,

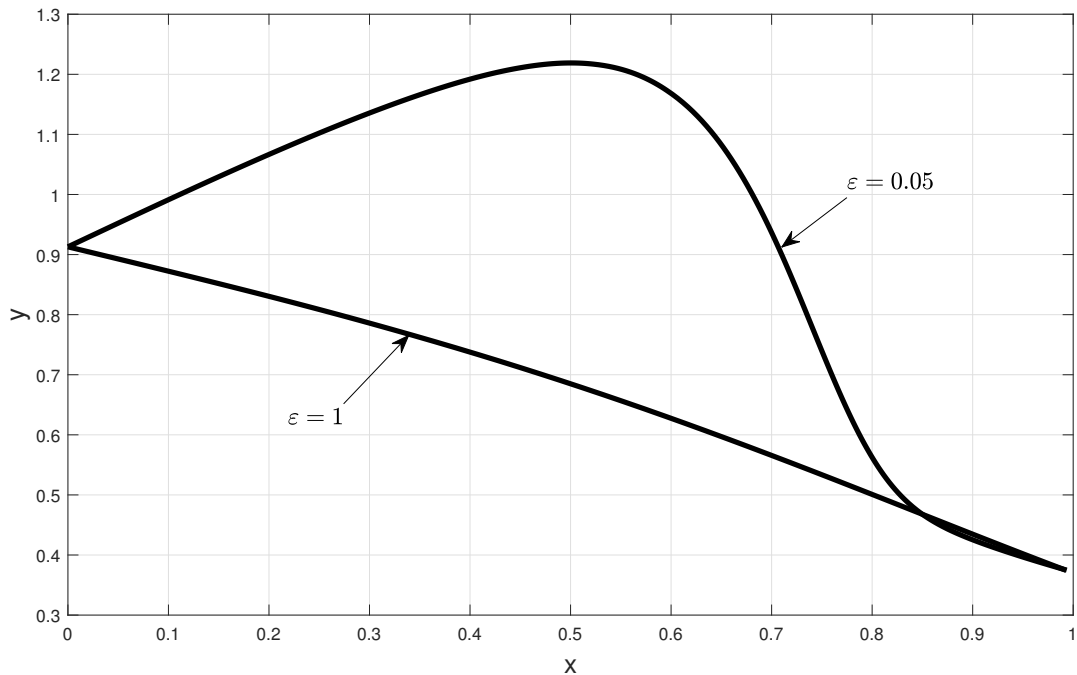


Рис. 2.5. Численное решение задачи (2.22) для $\varepsilon = 0.05, 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

её численное решение удастся получить гораздо быстрее, чем решение задачи (2.23). Однако для меньших значений ε ситуация кардинально меняется. Решение задачи (2.22) может занимать сотни секунд, а начиная с $\varepsilon = 0.07$ и далее, получить численное решение исходной задачи не удастся, тогда как параметризованная задача (2.23) позволяет это сделать за несколько секунд.

Таблица 8. Время счета t_c, c задач (2.22) и (2.23) методом стрельбы с углом пристрелки $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

ε	Исходная задача	Наилучший аргумент
	t_c, c	t_c, c
1.0	0.04	0.08
0.5	0.05	0.09
0.2	0.08	0.36
0.15	0.11	0.42
0.11	0.43	1.76
0.1	2.65	0.59
0.09	336.36	9.2
0.08	119.45	9.18
0.07	—	22.18
0.06	—	—

Анализируя задачи, рассмотренные в главе 2, можно отметить основное преимущество метода наилучшей параметризации: возможность применения явных численных методов к решению даже жестких начальных задач и повышение их эффективности. Однако, видны и недостатки:

1. Увеличение размерности задачи на одну. Так, например, для задач (2.1)-(2.2) и (2.9)-(2.10) применение метода наилучшей параметризации требует реализации численных методов для решения систем ОДУ с начальными условиями вместо более тривиального случая.
2. Преобразованная система имеет более сложную форму, что в некоторых ситуациях перебивает преимущества наилучшей параметризации. В особенности это заметно при решении задач из главы 2, жест-

кость которых несущественна, и применение явного метода Эйлера напрямую к исходной задаче давало лучшие численные результаты.

3. На примере экспоненциального теста (2.9)-(2.10) и краевой задачи (2.16)-(2.17) видно, что при экспоненциальной скорости роста интегральных кривых метод наилучшей параметризации малоэффективен.
4. Стоит также отметить, что получить точное решение преобразованной к наилучшему аргументу λ задачи удастся в исключительных случаях. Как правило, сделать этого не удастся.

Глава 3. Экспоненциальная модификация наилучшей параметризации

Таким образом, глава 2 показала необходимость в разработке новых подходов, позволяющих устранить некоторые недостатки метода наилучшей параметризации. В процессе работы над диссертацией была разработана модификация метода наилучшей параметризации, цель которого была повысить эффективность применения явных численных методов при решении жестких задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых.

3.1 Модифицированный наилучший аргумент. Общий подход

Напомним, что рассматривается система n ОДУ первого порядка вида

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

где $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ — заданные функции.

Рассмотрим аргумент в виде

$$d\kappa^2 = \left(\frac{dy_1}{g_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dy_n}{g_n}\right)^2 + \left(\frac{dt}{g_{n+1}}\right)^2, \quad (3.3)$$

где $g_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, g_{n+1}(t, y_1, \dots, y_n)$ — некоторые неотрицательные функции. Тогда система (3.1), преобразованная к аргументу κ примет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{d\kappa} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{1}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, & \kappa \in [0, \kappa^*], \end{cases} \quad (3.4)$$

где $Q'(t, y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{f_1(t, y_1, \dots, y_n)}{g_1(t, y_1, \dots, y_n)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{f_n(t, y_1, \dots, y_n)}{g_n(t, y_1, \dots, y_n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{g_{n+1}(t, y_1, \dots, y_n)}\right)^2$.

Начальные условия (3.2) переписутся по аналогии, как для системы, преобразованной к наилучшему аргументу λ :

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad t(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

В отличие от λ -преобразования, квадратичная норма правой части системы (3.4) равна не единице, а некоторому переменному значению, зависящему от выбора функций $g_i(t, y_1, \dots, y_n), i = 1, \dots, n$. От выбора данных функций зависит, получится ли система (3.4) хорошо обусловленной или плохо обусловленной. В работе [29] был предложен метод оценки обусловленности систем, преобразованных к аргументу κ . Применение некоторых видов модифицированного аргумента κ к решению задач ползучести было рассмотрено, например, в работе [30].

3.2 Экспоненциальный наилучший аргумент

Пусть $g_1 = g_n = 1$, $g_{n+1} = e^{\alpha t}$, где α — некоторый заданный параметр. Тогда аргумент κ (3.3) принимает вид

$$d\kappa^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2 + e^{-2\alpha t} dt^2. \quad (3.6)$$

Тогда система (3.4) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{d\kappa} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_n) \cdot \exp(\alpha t)}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp(\alpha t)}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $Q'(t, y_1, \dots, y_n) = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y_1, \dots, y_n) \cdot \exp(2\alpha t)$.

Если λ -преобразование позволяет понизить жесткость исходной задачи, то идея выбора экспоненты с некоторым регуляризуемым параметром α в качестве функции g_{n+1} в κ -преобразовании нацелена на то же самое в условиях экспоненциальной скорости роста интегральных кривых решаемой задачи. Таким образом, изначально предполагается, что выбор аргумента (3.6) будет наиболее эффективным при решении именно таких задач, в то время как его применение к задачам, где интегральные кривые растут, например, со степенной скоростью, будет неоправданным и приведет к увеличению времени счета.

Одним из недостатков предлагаемого аргумента (3.6), который можно сразу отметить, это наличие неизвестного параметра α , выбор которого ничем на данный момент не обусловлен. Критерий выбора данного параметра α будет предложен в главе 4 как следствие абсолютной устойчивости явного метода Эйлера при решении задачи, преобразованной к аргументу κ (3.6).

Рассмотрим применение предложенного модифицированного экспоненциального наилучшего аргумента на задачах, исследованных ранее в главе 2.

3.3 Степенной тест

Степенной тест, предложенный в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4], рассмотренный в разделе 2.1 главы 2, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\xi(t) (u^2 - a^2)^2}{(u^2 + a^2)}, \quad u(0) = 0 \quad (3.8)$$

где $\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(t)$.

Преобразование к наилучшему аргументу λ приводит к задаче

$$\begin{cases} \frac{du}{d\lambda} = \frac{-\xi(t) (u^2 - a^2)^2}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4}}, & u(0) = 0, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(u^2 + a^2)}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4}}, & t(0) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3.1 Экспоненциальный наилучший аргумент

Применим теперь к задаче (3.8) κ -преобразование. Тогда, согласно (3.7), получим

$$\begin{cases} \frac{du}{d\kappa} = \frac{-\xi(t) (u^2 - a^2)^2 \cdot \exp(\alpha t)}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4 \cdot \exp(2\alpha t)}}, & u(0) = 0, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{(u^2 + a^2) \cdot \exp(\alpha t)}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi^2(t) (u^2 - a^2)^4 \cdot \exp(2\alpha t)}}, & t(0) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

3.3.2 Численные результаты

В главе 2 были проанализированы численные результаты решения задач (3.8) и (3.9), в результате чего был сделан вывод, что для рассматриваемой задачи метод продолжения решения по наилучшему аргументу λ позволяет существенно повысить эффективность явных численных методов по обоим показателям: точность и время счета. По этой причине в табл. 9 результаты решения исходной задачи (3.8) опускаются, а сравниваются лишь средняя ошибка и время счета численного решения задач (3.9) и (3.10).

Таблица 9. Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c задач (3.9) и (3.10) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом h и параметром α для модифицированного наилучшего аргумента κ .

ξ_0	Наилучший аргумент			Экспоненциальный наилучший аргумент			
	h	ε_{avg}	t_c, c	h	α	ε_{avg}	t_c, c
1	0.1	$5.44 \cdot 10^{-7}$	0.02	0.1	10^{-4}	$5.8 \cdot 10^{-7}$	0.02
	0.01	$2.99 \cdot 10^{-11}$	0.18	0.01	10^{-5}	$9.82 \cdot 10^{-11}$	0.22
	0.001	$5.05 \cdot 10^{-14}$	0.55	0.001	10^{-3}	$5.67 \cdot 10^{-14}$	1.13
10	0.1	$2.46 \cdot 10^{-4}$	0.02	0.1	10^{-3}	$3.25 \cdot 10^{-4}$	0.03
	0.01	$3.27 \cdot 10^{-9}$	0.1	0.015	10^{-3}	$1.51 \cdot 10^{-9}$	0.1
	0.001	$3.75 \cdot 10^{-12}$	0.59	0.001	10^{-3}	$6.01 \cdot 10^{-12}$	1.18
100	0.1	0.35	0.03	0.1	10^{-3}	0.35	0.03
	0.01	$4.83 \cdot 10^{-6}$	0.12	0.011	10^{-3}	$2.68 \cdot 10^{-6}$	0.15
	0.001	$5.01 \cdot 10^{-11}$	0.53	0.001	10^{-3}	$1.54 \cdot 10^{-11}$	1.15
1000	0.1	—	—	—	—	—	—
	0.01	0.005	0.21	0.01	10^{-3}	0.006	0.17
	0.001	$4.09 \cdot 10^{-8}$	0.53	0.001	10^{-3}	$5.39 \cdot 10^{-8}$	1.27

Анализируя представленные в табл. 9 результаты, видно, что модифицированный наилучший аргумент κ оказывается малоэффективным для рассматриваемой задачи: в основном средняя ошибка для обоих подходов совпадают, а время счета отличается лишь на сотые, а в некоторых случаях, счет задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу κ занимает в два раза больше времени.

Однако, как было отмечено ранее, экспоненциальная модификация наилучшего аргумента нацелена на повышение эффективности применения явных численных методов к решению задач с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых. Поэтому, в случае степенной скорости, что доказывают результаты решения степенного теста, предложенный подход будет скорее занимать больше времени на счет задачи, так как значительно усложняет её вид.

3.4 Экспоненциальный тест

Напомним, что экспоненциальный тест из работы А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [4], рассмотренный в разделе 2.2 главы 2 имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u(0) = 0.5, \quad (3.11)$$

где $\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(t)$.

Соответствующая задача, преобразованная к наилучшему аргументу λ :

$$\begin{cases} \frac{du}{d\lambda} = \frac{-\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2)}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2}}, & u(0) = 0.5, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2}}, & t(0) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Напомним, что сравнение численных результатов решения задач (3.11) и (3.12) в главе 2 показало, что метод наилучшей параметризации не справляется с ситуациями, когда скорость роста интегральных кривых экспоненциальная. В этом случае время счета и средняя ошибка решения задачи (3.12) были больше или схожими с результатами, полученными при решении исходной задачи (3.11) явным методом Эйлера.

3.4.1 Экспоненциальный наилучший аргумент

Преобразуя задачу (3.11) к экспоненциальному наилучшему аргументу κ , получим

$$\begin{cases} \frac{du}{d\kappa} = \frac{-\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2) \cdot \exp(\alpha t)}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2 \cdot \exp(2\alpha t)}}, & u(0) = 0.5, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp(\alpha t)}{\sqrt{1 + \xi^2(t) \cdot u^2 \cdot (u^2 - a^2)^2 \cdot \exp(2\alpha t)}}, & t(0) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.4.2 Численные результаты

Табл. 10 представляет собой табл. 5, в которую добавлены также средняя ошибка и время численного счета задачи (3.13) с параметром $\alpha = -100$ явным методом Эйлера с переменным шагом. Таким образом, во-первых, показано, что преобразование к экспоненциальному наилучшему аргументу позволило получить численное решение задачи для больших значений ξ_0 . Напомним, что этот параметр отвечает за жесткость задачи: чем он больше, тем жестче задача. Во-вторых, отметим, что для случая $\xi_0 = 1$ κ -преобразованная система (3.13) лучше всего соблюдает заданную точность θ по правилу Рунге.

В табл. 11 приведены результаты из табл. 6 с добавлением в них средней ошибки, времени счета задачи (3.13) с соответствующим параметром α явным методом Эйлера с постоянным шагом. Отметим, что, в отличие от результатов, полученных явным методом Эйлера с переменным шагом, где $\alpha = -100$, здесь были выбраны значения $0 < \alpha \ll 1$, так как для других значений α получить решение не удалось. Однако, хотя при использовании переменного шага значения $0 < \alpha \ll 1$ привели к достаточно точным реше-

Таблица 10. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (3.11), (3.12) и (3.13) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью θ , начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$ и параметром $\alpha = -100$ для экспоненциального наилучшего аргумента.

ξ_0	θ	Исходная задача		Наилучший аргумент		Экспоненциальный наилучший аргумент	
		ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c
1	10^{-4}	0.0072	0.01	0.02	0.02	$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.33
	10^{-5}	0.02	0.05	0.02	0.03	$2 \cdot 10^{-5}$	0.8
	10^{-6}	0.006	0.11	0.01	0.18	$3.6 \cdot 10^{-6}$	2.5
	10^{-7}	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.3	0.002	0.4	$6.3 \cdot 10^{-7}$	8.2
	10^{-8}	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.8	$2.3 \cdot 10^{-4}$	1.25	$1.1 \cdot 10^{-7}$	25
10	10^{-6}	—	—	—	—	$7.9 \cdot 10^{-4}$	2.3
	10^{-7}	—	—	—	—	$8.5 \cdot 10^{-4}$	7.2
	10^{-8}	—	—	—	—	$2.1 \cdot 10^{-4}$	22
50	10^{-6}	—	—	—	—	0.006	2
	10^{-7}	—	—	—	—	0.003	6.6
	10^{-8}	—	—	—	—	$1.6 \cdot 10^{-4}$	22

ниям, это заняло значительно большие временные затраты, поэтому они не были приведены в табл. 10.

Таблица 11. Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (3.11), (3.12) и (3.13) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с постоянным шагом h и параметром α для экспоненциального наилучшего аргумента.

ξ_0	h	Исходная задача		Наилучший аргумент		Экспоненциальный наилучший аргумент		
		ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c	ε_{avg}	t_c, c	α
1	10^{-3}	$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.11	$4.28 \cdot 10^{-4}$	0.17	$5.67 \cdot 10^{-4}$	0.14	10^{-1}
	10^{-4}	$8.99 \cdot 10^{-6}$	0.84	$1.35 \cdot 10^{-5}$	1.55	$1.78 \cdot 10^{-5}$	1.32	10^{-1}
	10^{-5}	$2.84 \cdot 10^{-7}$	8.14	$4.25 \cdot 10^{-7}$	15.78	$5.62 \cdot 10^{-7}$	13.14	10^{-1}
10	10^{-3}	—	—	—	—	0.01	0.15	10^{-1}
	10^{-4}	—	—	—	—	$6.83 \cdot 10^{-4}$	1.58	$1.3 \cdot 10^{-2}$
	10^{-5}	$2.44 \cdot 10^{-4}$	8.11	$8.2 \cdot 10^{-4}$	19.83	$8.83 \cdot 10^{-4}$	15.54	10^{-2}
50	10^{-3}	—	—	—	—	—	—	—
	10^{-4}	—	—	—	—	0.0032	1.38	10^{-1}
	10^{-5}	—	—	—	—	$9.19 \cdot 10^{-4}$	15.34	10^{-2}

3.5 Краевая задача сверхзвукового течения

Рассмотрим последнюю задачу из главы 2 о сверхзвуковом потоке газа в трубе с постоянным и увеличивающимся сечением.

3.5.1 Случай постоянного сечения

В случае постоянного сечения $A = 1$ задача имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} - y^{-2} \right] \frac{dy}{dx}, & 0 < x < 1, \\ y(0, \varepsilon) = y_-, & y(1, \varepsilon) = y_+. \end{cases} \quad (3.14)$$

Наилучший аргумент

Преобразованная к наилучшему аргументу λ задача (3.14) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon y_2}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{(\gamma + 1 - 2y_1^{-2}) y_2}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}} & \frac{dy_3}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \\ y_1(0) = y_-, & y_2(1) = y_+, & y_3(0) = 0, & \lambda \in [0, \lambda^*], & \lambda^* : y_3(\lambda^*, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

где $R(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 (1 + y_2^2) + [(\gamma + 1) - 2y_1^{-2}]^2 y_2^2$.

Экспоненциальный наилучший аргумент

Преобразованная к модифицированному наилучшему аргументу κ задача (3.14) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon y_2 \cdot \exp(\alpha y_3)}{\sqrt{R'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\kappa} = \frac{(\gamma + 1 - 2y_1^{-2}) y_2 \cdot \exp(\alpha y_3)}{\sqrt{R'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_2(1) = y_+, \\ \frac{dy_3}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon \cdot \exp(\alpha y_3)}{\sqrt{R'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, \quad y_3(0) = 0, \\ \kappa \in [0, \kappa^*], \quad \kappa^* : y_3(\kappa^*, \varepsilon) = 1, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

где $R'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 (1 + y_2^2 \cdot \exp(2\alpha y_3)) + [(\gamma + 1) - 2y_1^{-2}]^2 y_2^2 \cdot \exp(2\alpha y_3)$.

Численные результаты

Напомним, что для численного счета были взяты следующие значения параметров: $y_- = 0.9129$, $y_+ = 0.375$, $\gamma = 7/5$.

В табл. 12 к данным из табл. 7 добавлены результаты счета задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу (3.16). При уменьшении значений ε новый подход оказывается значительно эффективнее других рассматриваемых методов. А именно, удастся быстро получить решение задачи (3.16) тогда, когда не удастся это сделать для задач (3.14) и (3.15).

Таблица 12. Время счета t_c задач (3.14), (3.15) и (3.16) методом стрельбы с точностью $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

ε	Исходная задача	Наилучший аргумент	Экспоненциальный наилучший аргумент	
	t_c, c	t_c, c	t_c, c	α
1.0	0.036	0.061	0.039	10^{-3}
0.9	0.033	0.09	0.047	10^{-3}
0.8	0.035	0.089	0.048	10^{-3}
0.7	0.035	0.085	0.064	10^{-3}
0.6	0.038	0.103	0.054	10^{-3}
0.5	0.034	0.072	0.053	10^{-3}
0.4	0.037	0.063	0.036	10^{-3}
0.3	0.096	0.131	0.105	10^{-3}
0.2	0.195	1.497	0.228	10^{-3}
0.1	352.08	1.035	1.095	10^{-4}
0.09	—	5.437	1.259	10^{-1}
0.08	—	733.2	1.338	10^{-4}
0.07	—	—	9.363	10^{-1}
0.06	—	—	19.911	10^{-3}
0.05	—	—	1.31	$0.5 \cdot 10^{-5}$

3.5.2 Случай переменного сечения

В случае сечения $A(x) = 1 + x^2$ задача имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon (1 + x^2) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} y - y^{-1} + \ln(1 + x^2) (\gamma - 1) y \right] \frac{dy}{dx} - \\ - \frac{2x}{1 + x^2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} y^2 \right), \quad y(0) = y_-, \quad y(1) = y_+, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Наилучший аргумент

Преобразованная к наилучшему аргументу λ задача (3.17) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2 y_2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{P(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \frac{dy_3}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_3(0) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $Q(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 (1 + y_3^2)^4 y_1^4 (1 + y_2^2) + P^2(y_1, y_2, y_3)$ и $P(y_1, y_2, y_3) = ((\gamma + 1) y_1^2 - 2 + 2 \ln(1 + y_3^2) (\gamma - 1) y_1^2) y_2 (1 + y_3^2) - 2y_3 y_1 (2 - (\gamma - 1) y_1^2)$.

Экспоненциальный наилучший аргумент

Преобразованная к модифицированному наилучшему аргументу κ задача (3.17) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2 y_2 \cdot \exp(\alpha y_3)}{\sqrt{Q'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\kappa} = \frac{P'(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{Q'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \frac{dy_3}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon (1 + y_3^2)^2 y_1^2 \cdot \exp(\alpha y_3)}{\sqrt{Q'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)}}, & y_3(0) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

где

$$Q'(y_1, y_2, y_3, \varepsilon) = 4\varepsilon^2 (1 + y_3^2)^4 y_1^4 (1 + y_2^2 \cdot \exp(2\alpha y_3)) + P'^2(y_1, y_2, y_3)$$

и

$$P'(y_1, y_2, y_3) = [((\gamma + 1) y_1^2 - 2 + 2 \ln(1 + y_3^2) (\gamma - 1) y_1^2) y_2 (1 + y_3^2) - 2y_3 y_1 (2 - (\gamma - 1) y_1^2)] \cdot \exp(\alpha y_3).$$

Численные результаты

В табл. 13 приведено время численного решения задач (3.17), (3.18) и (3.19). Для расчета были выбраны те же значения, что в книге [72]: $y_- = 0.9129$, $y_+ = 0.375$ и $\gamma = 7/5$. Задачи были решены методом стрельбы с применением процедуры Ньютона с малым приращением $\delta = 10^{-3}$. Начальные задачи были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, выбранным согласно правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$. За начальный шаг было взято значение $h_0 = 10^{-4}$.

Численные результаты

В табл. 13 представлены данные из табл. 8, куда также добавлены результаты времени счета задачи (3.19). Отметим, что модификация наилучшего аргумента позволила значительно сократить время счета рассматриваемой задачи, а также получить решение тогда, когда другим методам это не удалось.

Таким образом, апробация нового подхода показала, что экспоненциальный наилучший аргумент позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении задач с пограничными слоями и контрастными структурами, когда скорость роста интегральных кривых является экспонен-

Таблица 13. Время счета t_c задач (3.17), (3.18) и (3.19) методом стрельбы с углом пристрелки $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.

ε	Исходная задача	Наилучший аргумент	Экспоненциальный наилучший аргумент	
	t_c, c	t_c, c	t_c, c	α
1.0	0.04	0.08	0.06	10^{-3}
0.5	0.05	0.09	0.07	10^{-3}
0.2	0.08	0.36	0.18	10^{-3}
0.15	0.11	0.42	0.2	10^{-3}
0.11	0.43	0.54	0.3	10^{-3}
0.1	2.65	0.59	0.26	10^{-3}
0.09	336.36	9.2	0.7	10^{-4}
0.08	119.45	9.18	1.79	10^{-4}
0.07	—	22.18	5.41	10^{-3}
0.06	—	—	9.95	10^{-5}
0.05	—	—	81.75	$0.5 \cdot 10^{-6}$

циальной. При этом, варьируя значения параметра α можно значительно сократить время счета задачи. Однако, что и следовало ожидать, экспоненциальный наилучший аргумент привязан к данному классу задач, и для менее жестких задач оказывается не эффективнее, чем наилучший аргумент λ .

Глава 4. Абсолютная устойчивость численных схем

Проблема применимости явных схем к решению жестких задач связана с требованием чрезмерного уменьшения шага интегрирования для того, чтобы сохранить абсолютную или относительную устойчивость метода и получить решение с высокой точностью [86]. В книге В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [73] авторами было доказано, что метод наилучшей параметризации позволяет расширить область абсолютной устойчивости явной и неявной схемы метода Эйлера.

В этой главе приводится обобщение данного доказательства, а также формулируется и доказывается теорема о том, что экспоненциальный наилучший аргумент позволяет еще больше расширить область абсолютной устойчивости. Затем приводятся некоторые следствия и замечания касательно связи наилучшего и экспоненциального наилучшего аргументов и выбора параметра α .

В последнем разделе главы проводится апробация доказанных теорем на примере уже рассмотренном ранее в главах 2 и 3 экспоненциальном тесте.

4.1 Устойчивость явной схемы метода Эйлера

Исследование области устойчивости и спектральных характеристик, как было предложено в [77], рассматривают на примере задачи, получившей название задачи Далквиста, вида

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y(0) = y_0, \quad (4.1)$$

где a — некоторая константа. Задача (4.1) моделирует локальное поведение решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

в том смысле, что в окрестности любой точки (t_0, y_0) решение этого уравнения ведет себя так, как решение линеаризованного уравнения

$$\frac{dY}{dt} = f_y(t_0, y_0)Y$$

в окрестности нуля. Тогда, если a — собственное значение линеаризованной задачи, то по поведению решений разностного метода на уравнении (4.1) можно предсказать их поведение на произвольном дифференциальном уравнении.

Теорема 4.1. Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (4.1) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_t| \leq \frac{2}{|a|}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Применяя явную схему метода Эйлера к задаче (4.1) в окрестности точки $M(t_m, y_m)$, получим разностное уравнение вида

$$y_{m+1} = y_m + ah_t y_m = (1 + ah_t)y_m, \quad (4.3)$$

где h_t — шаг интегрирования.

По определению разностный метод абсолютно устойчив, если все корни характеристического уравнения не превосходят по модулю единицу [48]. Для схемы (4.3) собственное значение $\xi = 1 + ah_t$.

В тривиальных случаях, при $h_t = 0$ или $a = 0$ абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_t = 0$ исключается.

При положительных значениях h_t неравенство $|1 + ah_t| \leq 1$ может быть справедливо только при $a < 0$. В этом случае условие устойчивости схемы (4.3) примет вид

$$0 < h_t \leq \frac{2}{|a|}.$$

В случае отрицательных значений h_t неравенство $|1 + ah_t| \leq 1$ может быть справедливо только при $a > 0$. В этом случае условие устойчивости схемы (4.3) переписется в виде

$$-\frac{2}{|a|} \leq h_t < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (4.2).

4.1.1 Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу

Задачу (4.1) можно преобразовать к наилучшему аргументу λ вида $d\lambda^2 = dy^2 + dt^2$. Преобразованная задача примет вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay}{\sqrt{1 + a^2y^2}}, & \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2y^2}}, \\ y(0) = y^{(0)}, & t(0) = t_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Условие абсолютной устойчивости для нее получены в статье Е. Б. Кузнецова и В. И. Шалашилина [32]. Это условие дает

Теорема 4.2. Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к наилучшему аргументу λ задачи (4.4) является абсолютно устойчи-

вой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_\lambda| \leq \frac{2(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|a|}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Обозначим правые части уравнений задачи (4.4) как

$$f_1(y) = \frac{ay}{\sqrt{1 + a^2 y^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 y^2}}.$$

В общем случае, правые части системы (4.4) могут зависеть от аргумента исходной задачи t , но в данном случае такой зависимости нет, поэтому представим функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$, используя разложение по формуле Тейлора до первой степени включительно в окрестности $y = y_m$. Рассмотрим сначала первое уравнение задачи (4.4), разложив его правую часть

$$f_1(y) = \frac{ay_m}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2}} + \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} (y - y_m) + O\left((y - y_m)^2\right).$$

Рассмотрим линеаризованное первое уравнение вида:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay_m}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2}} + \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} (y - y_m). \quad (4.6)$$

Введем замену

$$y = \bar{y} + y_*, \quad (4.7)$$

где y_* – координата точки покоя линеаризованной системы, получаемая из решения уравнения

$$\frac{ay_m}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2}} + \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} (y - y_m) = 0$$

и равная

$$y_* = -a^2 y_m^3.$$

Используя замену (4.7), преобразуем уравнение (4.6) к виду

$$\frac{d\bar{y}}{d\lambda} = \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \cdot \bar{y}.$$

Линеаризуем второе уравнение задачи (4.4):

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 y^2}} = \frac{1}{ay} \cdot \frac{ay}{\sqrt{1 + a^2 y^2}} = \frac{1}{ay} \cdot \left(\frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \cdot \bar{y} + O(\bar{y}^2) \right).$$

Разложим первый множитель по формуле Тейлора до членов первого порядка в окрестности точки y_* :

$$\frac{1}{ay} = \frac{1}{ay_*} - \frac{1}{ay_*^2} (y - y_*).$$

Подставляя это разложение в выражение для $f_2(y)$, получим

$$f_2(y) = -\frac{1}{a^2 y_m^3 (1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \cdot \bar{y} + O(\bar{y}^2).$$

Используя полученное разложение, мы перейдем к линеаризованной системе для задачи (4.4), преобразованной к переменной $\bar{y} = y - a^2 y_m^3$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{d\lambda} = \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \bar{y}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{1}{a^2 y_m^3 (1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \cdot \bar{y}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Явная схема метода Эйлера для задачи (4.8) имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h_\lambda \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \bar{y}_m, \\ t_{m+1} = t_m - h_\lambda \frac{1}{a^2 y_m^3 (1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \cdot \bar{y}_m. \end{cases} \quad (4.9)$$

Поскольку линеаризованная система (4.8) получена использованием линейной замены, то условие абсолютной устойчивости разностной схемы (4.9) будет эквивалентно условию абсолютной устойчивости для линеаризованной системы исходной задачи (4.4). А поскольку правая часть системы уравнений задачи (4.4) ограничена, то условие абсолютной устойчивости будет справедливо и для нее. Получим это условие.

Найдем собственные значения ξ , рассмотрев характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} |A - \xi E| &= \begin{vmatrix} 1 + h_\lambda \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} - \xi & 0 \\ -h_\lambda \frac{1}{a^2 y_m^3 (1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} & 1 - \xi \end{vmatrix} = \\ &= (\xi - 1) \left(\xi - \left(1 + h_\lambda \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Получим собственные значения

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1 + h_\lambda \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}. \quad (4.10)$$

Поскольку $\xi_1 = 1$, разностная схема (4.9) будет абсолютно устойчивой, если второе собственное значение ξ_2 не превосходит по модулю единицу, т. е.

$$\left| 1 + h_\lambda \frac{a}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}} \right| \leq 1. \quad (4.11)$$

В тривиальных случаях, при $h_\lambda = 0$ или $a = 0$ абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = \xi_1 = \xi_2 = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_\lambda = 0$ исключается.

При значениях шага $h_\lambda > 0$ абсолютная устойчивость схемы (4.9) возможна только при значениях параметра $a \leq 0$. Разрешая неравенство (4.11)

относительно шага h_λ , полагая $a = -|a|$, получим

$$0 < h_\lambda \leq \frac{2(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|a|}.$$

При отрицательных значениях шага h_λ абсолютная устойчивость схемы (4.9) возможна только при значениях параметра $a \geq 0$. Разрешая неравенство (4.11) относительно шага h_λ , полагая $a = |a|$, получим

$$-\frac{2(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|a|} \leq h_\lambda < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (4.5).

В тривиальных случаях, при $h_\lambda = 0$ или $a = 0$ абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = \xi_1 = \xi_2 = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_\lambda = 0$ исключается.

Замечание 4.1. Приводимое выше доказательство теоремы, сформулированной в работе Е. Б. Кузнецова и В. И. Шалашилина [32], является новым, обобщая доказательство, приводимое в статье [32]. Е. Б. Кузнецовым и В. И. Шалашилиным принималось, что второе уравнение системы задачи (4.4) вносит пренебрежимо малый вклад в характер устойчивости приближенного решения, что является верным только в окрестности предельной особой точки. В следствие чего, второе уравнение исключалось из рассмотрения. В приведенном здесь доказательстве этот малый недостаток устранен.

Замечание 4.2. Известно, что областью устойчивости явного метода Эйлера для исходной задачи (4.1) является круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, 0)$. В статье [32] доказано, что для преобразованной задачи (4.4) областью устойчивости будет круг радиуса $\rho^{3/2}$ с центром в точке $(\rho^{3/2}, 0)$, где $\rho = |1 + a^2 y_m^2|$. При комплексных значениях a выражение для ρ

можно переписать в форме

$$\rho = \sqrt{(1 + (\alpha^2\beta^2)y_m^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2y_m^4},$$

где α и β – действительная и мнимая часть параметра a .

Замечание 4.3. Само доказательство теоремы 4.2 дает множество интересных следствий. Одно из них заключается в том, что одно из собственных значений $\xi_1 = 1$. Это означает, что даже при выборе значения шага из условия (4.5) максимальное значение $\xi_{\max} = 1$, т. е. разностная схема находится в пограничном состоянии между абсолютной устойчивостью и ее потерей. Даже для линеаризованной системы абсолютная устойчивость может быть потеряна при наложении ошибок округления. При линеаризации системы уравнений задачи (4.4) отбрасываются нелинейные члены, учет которых также может привести к потере абсолютной устойчивости. Это наблюдение позволяет объяснить тот факт, что для ряда жестких начальных задач для автономных систем дифференциальных уравнений преобразование к наилучшему аргументу либо не дает вычислительных преимуществ, либо эти преимущества минимальны.

4.1.2 Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу

Применение экспоненциального наилучшего аргумента вида $dk^2 = dy^2 + \exp(2\alpha t) \cdot dt^2$ призвано с одной стороны упростить вид преобразованной системы и уменьшить трудозатраты, возникающие при решении преобразованных начальных задач. С другой стороны, экспоненциальный наилучший аргумент может позволить расширить область абсолютной устойчивости и снять ограничения, присущие наилучшему аргументу, отмеченные в замечании 4.3.

Рассмотрим задачу (4.4), преобразованную к экспоненциальному наилучшему аргументу κ , которая имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\kappa} = \frac{ay \exp \alpha t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\alpha t}}, & y(0) = y_0 \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp \alpha t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\alpha t}}, & t(0) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Теорема 4.3. Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (4.12), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу κ , является абсолютной устойчивой для значений параметра α , удовлетворяющих условию

$$a \cdot \alpha \leq 0, \quad (4.13)$$

если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_\kappa| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\alpha t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \alpha t_m}, \quad (4.14)$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \alpha \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp (2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp (\alpha t_m)}, \\ D_2, & a + \alpha < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp (2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp (\alpha t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a + \alpha + \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp (2\alpha t_m)},$$

$$D_2 = a + \alpha - \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp (2\alpha t_m)}.$$

Доказательство. Линеаризуем правые части уравнений задачи (4.12), используя разложение по формуле Тэйлора в окрестности точки с координатами $y = y_m$ и $t = t_m$ до членов первой степени:

$$\begin{aligned}
f_1(y, t) &= \frac{ay \exp \alpha t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\alpha t}} = \frac{ay_m \exp(\alpha t_m)}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m)}} + \\
&+ \frac{a \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} (y - y_m) + \\
&+ \frac{ay_m \alpha \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} (t - t_m) + O((y - y_m)^2 + (t - t_m)^2), \\
f_2(y, t) &= \frac{\exp \alpha t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\alpha t}} = \frac{\exp(\alpha t_m)}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m)}} - \\
&- \frac{y_m a^2 \exp(3\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} (y - y_m) + \\
&+ \frac{\alpha \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} (t - t_m) + O((y - y_m)^2 + (t - t_m)^2).
\end{aligned}$$

Запишем линеаризованную систему уравнений для задачи (4.12):

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dy}{d\kappa} &= \frac{1}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} [a \exp(\alpha t_m) y + \\
&+ ay_m \alpha \exp(\alpha t_m) t + a^3 y_m^3 \exp(3\alpha t_m) - a^2 y_m t_m \alpha \exp(\alpha t_m)], \\
\frac{dt}{d\kappa} &= \frac{1}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} [-y_m a^2 \exp(3\alpha t_m) y + \\
&+ \alpha \exp(\alpha t_m) t + \exp(\alpha t_m) + 2a^2 y_m^2 \exp(3\alpha t_m) - \alpha t_m \exp(\alpha t_m)]
\end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

В линеаризованной системе проведем замену

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= y - y^* = y - y_m, \\
\bar{t} &= t - t^* = t - t_m - \frac{a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m) + 1}{\alpha},
\end{aligned}$$

где (t^*, y^*) — точка покоя линеаризованной системы, координаты которой имеют значения

$$y^* = y_m, \quad t^* = \frac{\alpha t_m - a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m) - 1}{\alpha}.$$

Получим новую линеаризованную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{d\kappa} = \frac{a \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} \bar{y} + \frac{a \alpha y_m \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} \bar{t}, \\ \frac{d\bar{t}}{d\kappa} = \frac{-a^2 y_m \exp(3\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} \bar{y} + \frac{\alpha \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} \bar{t}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Поскольку линеаризованная система (4.16) получена использованием линейной замены, то условие абсолютной устойчивости разностной схемы (4.15) будет эквивалентно условию абсолютной устойчивости для линеаризованной системы исходной задачи (4.12). А поскольку правая часть системы уравнений задачи (4.12) ограничена, то условие абсолютной устойчивости будет справедливо и для нее. Получим это условие.

Введем обозначения

$$\alpha_1 = \frac{a \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}, \quad \alpha_2 = \frac{a \alpha y_m \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}},$$

$$\beta_1 = \frac{-a^2 y_m \exp(3\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha \exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}.$$

Тогда явная схема метода Эйлера для преобразованной системы (4.16) имеет вид

$$\begin{cases} \bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h_\kappa (\alpha_1 \bar{y}_m + \alpha_2 \bar{t}_m), \\ \bar{t}_{m+1} = \bar{t}_m + h_\kappa (\beta_1 \bar{y}_m + \beta_2 \bar{t}_m). \end{cases} \quad (4.17)$$

Найдем собственные значения схемы (4.17), рассмотрев характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1 h_\kappa - \xi & \alpha_2 h_\kappa \\ \beta_1 h_\kappa & 1 + \beta_2 h_\kappa - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем следующие собственные значения

$$\xi_{1,2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} h_\kappa \left(a + \alpha \pm \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)} \right).$$

Выражение для собственных значений зависит от значений двух параметров a и α . Проведение анализа на большее собственное значение может оказаться трудоемким, поскольку он зависит от знаков входящих параметров.

Ограничимся случаем, когда параметры a и γ удовлетворяют условию (4.13), гарантирующему неотрицательность подкоренных выражений в $\xi_{1,2}$. Тогда наибольшее собственное значение целиком зависит от последнего множителя. Тогда обозначим

$$\begin{aligned} D_1 &= a + \alpha + \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3\alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)}, \\ D_2 &= a + \alpha - \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3\alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Вычислим максимальное значение

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \alpha \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp(\alpha t_m)}, \\ D_2, & a + \alpha < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp(\alpha t_m)}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Таким образом, получаем, что абсолютная устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера для преобразованной модифицированным наилучшим аргументом κ системы (4.12) возможна только при выполнении неравенства

$$\left| 1 + \frac{1}{2} \frac{\exp(\alpha t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}} h_\kappa D_{\max} \right| \leq 1. \quad (4.20)$$

В стоящем под модулем выражении знак может менять только D_{\max} . При значениях шага $h_\kappa > 0$ абсолютная устойчивость схемы (4.17) возможна только при значениях параметра $D_{\max} < 0$. Разрешая неравенство (4.20) относительно шага h_κ , полагая $D_{\max} = -|D_{\max}|$, получим

$$0 < h_\kappa \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\alpha t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \alpha t_m}.$$

При отрицательных значениях шага h_κ абсолютная устойчивость схемы (4.17) возможна только при значениях параметра $D_{\max} > 0$. Разрешая неравенство (4.20) относительно шага h_κ , полагая $D_{\max} = |D_{\max}|$, получим

$$-\frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\alpha t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \alpha t_m} \leq h_\kappa < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (4.14).

В тривиальных случаях, при $h_\kappa = 0$ или $D_{\max} = 0$ (т. е. $a = \alpha = 0$) абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_\kappa = 0$ исключается.

Получим некоторые следствия из теоремы 4.3.

Следствие 4.1. При значении параметра $\alpha = 0$ экспоненциальный аргумент продолжения решения κ становится наилучшим аргументом λ . А условия устойчивости разностных схем явного метода Эйлера для задач (4.12) и (4.4) будут совпадать.

Доказательство. Очевидно, что при $\alpha = 0$ задачи (4.12) и (4.4) совпадают. Значит должны совпадать и условия абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для этих задач. Докажем это.

При $\alpha = 0$ условие (4.14) примет вид

$$|h_\kappa| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|D_{\max}|}.$$

Принимая во внимание выражения для D_{\max} (4.19) и D_1, D_2 (4.18), при $\alpha = 0$ получим

$$|D_{\max}| = 2|a|,$$

что доказывает утверждение.

Замечание 4.5. Следствие 4.1 устанавливает связь между наилучшим аргументом и его модификацией. Экспоненциальный наилучший аргумент κ является обобщением наилучшего аргумента λ . Экспоненциальный наилучший аргумент нацелен на повышение эффективности численного решения жестких начальных задач. Варьируя значение параметра α можно добиться увеличения области абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для преобразованной задачи.

Следствие 4.2. При значении параметра $\alpha = -a$ условие устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи (4.12) принимает вид

$$|h_\kappa| \leq \frac{2 [\exp(at_m) + a^2 y_m^2 \exp(-at_m)]}{|a|}. \quad (4.21)$$

Доказательство. При $\alpha = -a$ условие (4.14) примет вид

$$|h_\kappa| \leq \frac{4 (1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m))^{3/2}}{|D_{\max}| \exp(-at_m)}. \quad (4.22)$$

Вычислим значение $|D_{\max}|$. При $\alpha = -a$ оно примет вид

$$|D_{\max}| = D_1 = \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)} = 2|a| \sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m)}.$$

Подставляя найденное выражение для $|D_{\max}|$ в неравенство (4.22), перепишем его в виде

$$|h_\kappa| \leq \frac{4 (1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m))^{3/2}}{2|a| \sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m)} \exp(-at_m)},$$

упростив правую часть неравенства, получим условие (4.21).

Замечание 4.6. Условие абсолютной устойчивости (4.21) зависит от значения параметра a . Рассмотрим функцию

$$F(a) = \frac{[\exp(at_m) + a^2 y_m^2 \exp(-at_m)]}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}},$$

которая получена как частное правых частей неравенств (4.21) и (4.5). Функция $F(a)$ ограничена снизу, положительная и удовлетворяет условию

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} F(a) = +\infty.$$

Это означает, что существует такое значение a_* , для которого справедливо неравенство

$$F(a) > 1, \quad \forall a \in (-\infty, -a_*] \cup [a_*, +\infty),$$

т. е. условие абсолютной устойчивости (4.21) при значениях $|a| \geq a_*$ определяет большую область абсолютной устойчивости, чем при условии (4.5). Проанализируем это факт.

При значениях a_-^* и a_+^* равных нулю, согласно следствию 1, $F(a) = 0$. Однако в окрестности нуля функция $F(a)$ может вести себя следующим образом: сначала возрастать до некоторого большего единицы значения, затем убывать до меньшего единицы значения, после чего монотонно возрастать. Поэтому, как правило значения a_-^* и a_+^* полагаются отличными от нуля. В зависимости от рассматриваемой точки $M(t_m, y_m)$ значения a_-^* и a_+^* могут быть как умеренными, так и большими по модулю.

Все вышесказанное говорит о том, что выбор $\alpha = -a$ хорошо подходит для решения жестких и сверхжестких начальных задач и менее пригоден для начальных задач с малыми значениями параметра a . Однако при больших значениях параметра a возникают вычислительные трудности с проведением расчетов, поскольку значения $\exp(at_m)$ могут достигать очень больших значений.

4.2 Экспоненциальный тест

В главе 3 экспоненциальный наилучший аргумент показал свои основные преимущества на примере экспоненциального теста (3.11) [4]. В табл. 10 были приведены численные расчеты исходной задачи (3.11), задачи, преобразованной к наилучшему аргументу λ (3.12) и задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу κ (3.13) явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге. В этом разделе проводится апробация полученных теоретических результатов.

На верхнем графике рис. 4.1 представлены точное решение (2.11) задачи (2.9) (отмечено маркерами в виде крестика), численные решения исходной задачи (2.9) (штриховая линия), задачи, полученной в результате преобразования к наилучшему аргументу λ (3.12) (пунктирная линия), а также его модификации κ (3.13) (сплошная линия).

На нижнем графике рис. 4.1 изображен график значений шага интегрирования в каждой точке решения задач (3.11), (3.12) и (3.13). Для исходной задачи (3.11) и задачи, преобразованной к наилучшему аргументу (3.12), наблюдается уменьшение шага интегрирования при прохождении пограничных и внутренних слоев. При решении задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу (3.13), шаг практически не уменьшается на протяжении всего процесса вычисления, только приостанавливая свое увеличение при прохождении участков быстрого изменения интегральной кривой. Отметим, что параметр модифицированного наилучшего аргумента здесь имеет значение $\alpha = -10$, в отличие от расчетов, приведенных в табл. 10. Это сделано с целью более наглядного представления полученных результатов. Согласно им, при $\alpha = -100$ шаг интегрирования увеличивается каждый раз еще значительно, что делает графики изменения шага интегрирования для задач (3.11), (3.12) менее информативными.

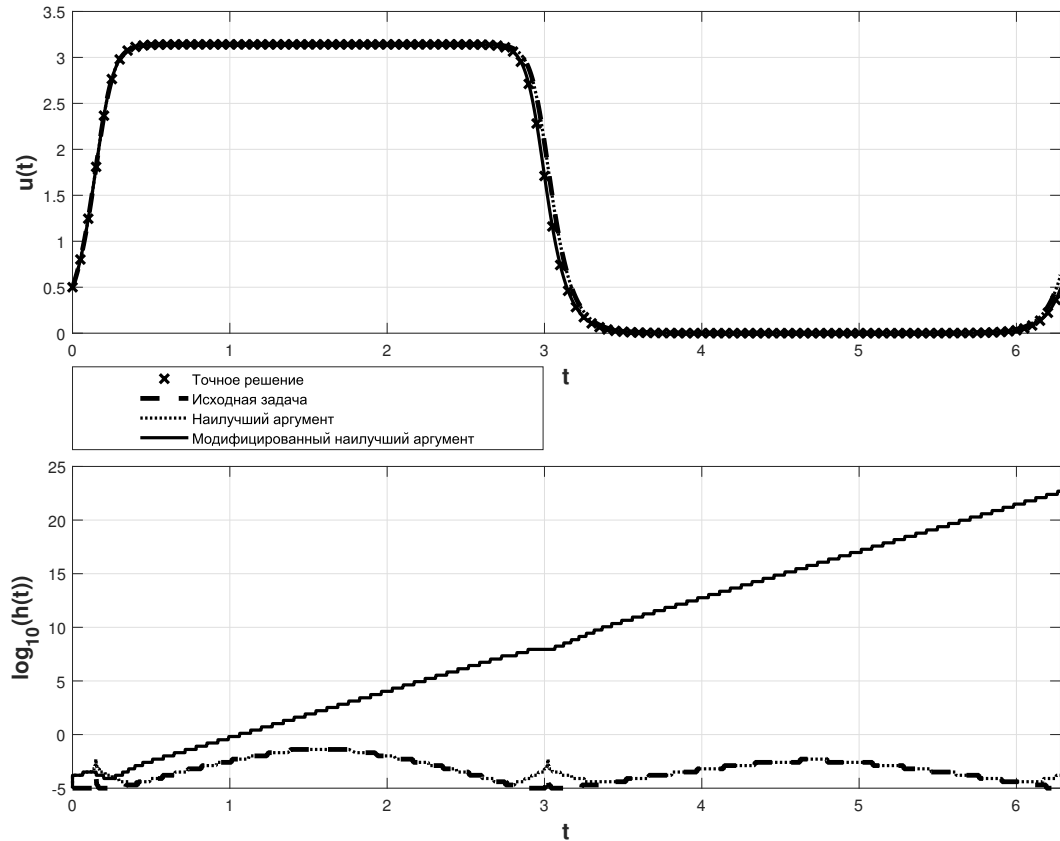


Рис. 4.1. Сверху: точное и численное решение задач (3.11), (3.12) и (3.13) для $\xi_0 = 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью $\theta = 10^{-8}$, начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$ и параметром модифицированного наилучшего аргумента $\alpha = -10$.

Снизу: соответствующие значения шага интегрирования на каждом участке решения задач (3.11), (3.12) и (3.13).

Также стоит обратить внимание: на верхнем графике рис. 4.1 видно, что решение задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу, наиболее близко к точному решению (2.11). И хотя численное решение заняло больше времени – 22 секунды, чем при решении задач (3.11) – 6 секунд и (3.12) – 4 секунды, его точность на несколько порядков выше. Увеличение времени счета для задачи (3.13) связано с необходимостью вычисления экспоненты с большими значениями аргументов.

Таким образом, преобразование исходной задачи к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам позволяет увеличить шаг интегрирования при применении явного метода Эйлера, что соответствует полученным теоретическим результатам. При этом применение модифицированного наилучшего аргумента в некоторых случаях практически освобождает от необходимости подбора начального шага при использовании явного метода Эйлера с переменным шагом.

Заключение

В диссертационной работе исследовалось применение ряда подходов к решению сингулярно возмущенных задач и задач с контрастными структурами, которые описывают множество различных физических процессов и возникают во многих областях науки и техники. При решении жестких задач было показано, что

1. использование явных численных методов требует чрезмерного увеличения шага интегрирования, что негативно сказывается на времени счета задачи, а традиционные неявные численные методы оказываются малоэффективными,
2. с увеличением показателя жесткости задачи традиционные явные и неявные методы не позволяют получить численное решение рассматриваемой задачи.

Для преодоления указанных трудностей был применен метод продолжения решения по наилучшему аргументу λ , отсчитываемому по касательной вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи. Норма правой части преобразованной к аргументу λ задачи равна единице, что дает возможность применять к ее решению явные численные методы.

В случае степенного теста, где интегральная кривая растет со степенной скоростью, данный подход оказался существенно эффективнее традиционных методов. Однако, уже при рассмотрении задачи с экспоненциальной скоростью роста интегральной кривой метод продолжения решения по наилучшему аргументу λ оказался неэффективен. Для устранения этого недостатка был разработан новый подход — модификация метода наилучшей параметризации с добавлением в вид наилучшего аргумента экспоненциальной составляющей с варьируемым параметром α в ее аргументе. Было показано, что варьируя параметр α в задаче, преобразованной к модифицированному наи-

лучшему аргументу κ , можно добиться значительного увеличения точности и сократить время счета. Кроме того, в работе показано, что разработанный подход позволяет получить решение сингулярно возмущенных задач тогда, когда другие методы не работают.

Практические результаты, показывающие эффективность разработанного подхода были также подтверждены теоретически. В диссертационной работе доказано, что метод продолжения решения по модифицированному наилучшему аргументу κ позволяет расширить область устойчивости разностной схемы метода Эйлера.

Тем не менее, данный подход также имеет ряд недостатков:

1. разработанный подход эффективен только для определенного класса задач — это жесткие задачи с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых. При решении степенного теста новый подход не более эффективен, чем метод продолжения решения по наилучшему аргументу λ .
2. на практике параметр α приходится подбирать эмпирическим путем. Несмотря на то, что теоретически выбор параметра α может быть обусловлен, такой критерий малоприменим при решении прикладных задач.

Это оставляет поле для дальнейшего исследования метода наилучшей параметризации и его применимости к рассматриваемым задачам.

Все используемые в работе численные методы, а также преобразование к наилучшему аргументу λ и модифицированному наилучшему аргументу κ были реализованы в форме программного комплекса.

Список сокращений и условных обозначений

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение.

МПИ – метод простых итераций для решения нелинейных алгебраических уравнений.

МН – метод Ньютона для решения нелинейных алгебраических уравнений.

Список литературы

- [1] *Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
- [2] *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2015. 636 с.
- [3] *Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Проблема нелинейности при численном решении сверхжестких задач Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 4. С. 16-32.
- [4] *Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С.97-109.
- [5] *Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 5. С.529-538.
- [6] *Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Эффективные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С.907-918.
- [7] *Булатов М. В., Тыглиян А. В., Филиппов С. С.* Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 7. С. 1251-1265.
- [8] *Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2014. 140 с.

- [9] *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4-32.
- [10] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- [11] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
- [12] *Васильева А. Б., Плотников А. А.* Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М.: Физический факультет МГУ, 2008. 398 с.
- [13] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 799-851.
- [14] *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 894-901.
- [15] *Гаврюшин С. С., Барышникова О. О., Борискин О. Ф.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014.
- [16] *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
- [17] *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988.
- [18] *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Конечные прогибы, устойчивость иза-критическое поведение тонких пологих оболочек. М.: Изд-во МАМИ, 2004.

- [19] *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 601-602.
- [20] *Давиденко Д. Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Украинский математический журнал. 1953. Т. 5. № 2. С. 196-206.
- [21] *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
- [22] *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 224 с.
- [23] *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
- [24] *Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П.* Вычисления с использованием обратных схем Рунге-Кутты // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 10. С. 79-96.
- [25] *Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П.* Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 7. С. 3-18.
- [26] *Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
- [27] *Кузнецов Е. Б.* Некоторые приложения метода продолжения по наилучшему параметру. М.: Изд-во МАИ, 2013. 160 с.
- [28] *Кузнецов Е. Б.* Параметризация краевых задач и прохождение точек бифуркации. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
- [29] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 6. С. 934-957.

- [30] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 6. С. 914-933.
- [31] *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Параметризация задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28. № 4. С. 486-510.
- [32] *Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И.* Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792-1805.
- [33] *Куликов Г. Ю.* Вложенные симметричные неявные гнездовые методы Рунге–Кутты типов Гаусса и Лобатто для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений и гамильтоновых систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 6. С. 986-1007.
- [34] *Лебедев В. И.* Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 12. С. 1801-1812.
- [35] *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Численное решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с контрастными структурами: Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), 24-31 мая 2018 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2018. 768 с.
- [36] *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений с контрастными структурами: Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современ-

ным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), 24-31 мая 2019 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2019. 816 с.

- [37] *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* О способах понижения жесткости при численном решении задач с контрастными структурами: Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), 6-13 сентября 2020 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2020. 784 с.
- [38] *Лисейкин В. Д., Паасонен В. И.* Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отделение. 2019. Т. 22. № 1. С. 41–56.
- [39] *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
- [40] *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Москов. ун-та, 2011. 456 с.
- [41] *Милн В. Э.* Численное решение дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955.
- [42] *Новиков А. Е., Новиков Е. А.* Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 1. С. 46-56.
- [43] *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1997. 195 с.
- [44] *Новиков Е. А.* Аппроксимация матрицы Якоби в $(M,2)$ -методах решения жестких задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2194-2208.

- [45] *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
- [46] *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
- [47] *Рикс Э.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. 1972. №. 5. С. 204-210.
- [48] *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1980.
- [49] *Сигунов Ю. А., Диденко И. Р.* Комплексная реализация неявных одностадийных методов до 4-го порядка точности при численном интегрировании систем ОДУ // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 1. С. 87-99.
- [50] *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге-Кутты // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 7. С. 73-87.
- [51] *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге-Кутты для жестких и колебательных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1434-1448.
- [52] *Скворцов Л. М.* Явные стабилизированные методы Рунге-Кутты // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 7. С. 1236-1250.
- [53] *Скворцов Л. М.* Эффективная реализация неявных методов Рунге-Кутты второго порядка // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 5. С. 15-28.
- [54] *Скворцов Л. М.* Однократно неявные диагонально расширенные методы Рунге-Кутты четвертого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 5. С. 755-765.

- [55] *Скворцов Л. М.* О неявных методах Рунге–Кутты, полученных в результате обращения явных методов // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 1. С. 3-19.
- [56] *Скворцов Л. М., Козлов О. С.* Эффективная реализация диагонально-неявных методов Рунге–Кутты // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 1. С. 96-108.
- [57] *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22(64). № 2. С. 193–204.
- [58] *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. 1950. Т. 27(69). № 1. С. 147-156.
- [59] *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575-583.
- [60] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. / Ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. М.: Мир, 1979. 312 с.
- [61] *Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
- [62] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
- [63] *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

- [64] *Цапко Е. Д., Леонов С. С.* Методы решения дифференциальных уравнений с контрастными структурами: материалы XLIV междунар. молодежной науч. конф. «Гагаринские чтения - 2018», Москва, 2018 г. / М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет). 2018. 417 с.
- [65] *Цапко Е. Д., Леонов С. С.* Численное моделирование задач с контрастными структурами: 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018». 19-23 ноября 2018 г., Москва. Тезисы. / Типография «Люксор». 2018. 740 с.
- [66] *Цапко Е. Д., Кузнецов Е. Б.* Численное решение начальных задач с контрастными структурами переходом к специальным аргументам продолжения решения: «Гагаринские чтения - 2020»: Сборник тезисов докладов. / М.: МАИ. 2020. 1731 с.
- [67] *Цапко Е. Д., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Численное решение задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых: 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018». 23-27 ноября 2020 г., Москва. Тезисы. / М.: Изд-во «Перо». 2020. 980 с.
- [68] *Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения для краевой задачи сверхзвукового течения в случае экспоненциальной скорости роста интегральных кривых: Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 мая 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2021. 696 с.
- [69] *Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Оценка области абсолютной устойчивости метода продолжения решения по аргументам специального вида при интегрировании жестких начальных задач: Материалы

XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 мая 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2021. 696 с.

- [70] *Цанко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Абсолютная устойчивость явной схемы метода Эйлера для задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу: Аннотации докладов X Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Вознесенского, 14-18 июля 2022 г., Саранск. Саранск: Средне-Волжское математическое общество. 2022. с. 17-18.
- [71] *Цанко Е. Д.* Численное решение сингулярно возмущенной краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24. № 3. С. 304-316.
- [72] *Чанг К., Хауэс Ф.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.
- [73] *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
- [74] *Allgower E. L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
- [75] *Butcher J. C.* Numerical Methods for ordinary differential equations. Chichester: John Willey and Sons, 2003.
- [76] *Curtiss C. F., Hirschfelder J. O.* Integration of stiff equations // Proc. Nat. Acad. Sci. 1952. Vol. 38. Pp. 235-243.

- [77] *Dahlquist G. A.* A special stability problem for linear multistep methods // BIT. 1963. No. 3. Pp. 27-43.
- [78] *Gear C. W.* Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1971.
- [79] *Kulikov G. Yu., Weiner R.* A singly diagonally implicit two-step peer triple with global error control for stiff ordinary differential equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2015. Vol. 37. No. 3. Pp. A1593-A1613.
- [80] *Kulikov G. Yu., Shindin S. K.* Adaptive nested implicit Runge-Kutta formulas of Gauss type // Applied Numerical Mathematics. 2009. Vol. 59. No. 3/4. Pp. 707-722.
- [81] *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Tsapko E. D., Babintseva A. A.* Arc Length and Multilayer Methods for Solving Initial Value Problems for Differential Equations with Contrast Structures // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham. 2020. Vol. 1201. Pp. 335-351.
- [82] *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D.* A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. No. 1.
- [83] *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D.* Applying the Best Parameterization Method and Its Modifications for Numerical Solving of Some Classes of Singularly Perturbed Problems // Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore. 2022. Vol. 274. Pp. 311-330.
- [84] *Lahaye M. E.* Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Comptes Rendus hebdomadaires des seances de L'Academie des sciences. 1934. Vol. 198. No. 21. Pp. 1840-1842.

- [85] *Lahaye M. E.* Solution of system of transcendental equations // Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 1948. Vol. 5. Pp. 805-822.
- [86] *Lambert J. D.* Computational methods in ordinary differential equations. – N. Y.: Wiley, 1973.
- [87] *May S., Vignollet J., de Borst R.* A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy // Engineering Computations. 2016. Vol. 33. No 1. Pp. 100-115.
- [88] *Novikov E. A., Rybkov M. V.* Application of explicit methods with extended stability regions for solving stiff problems // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016. Vol. 9. No. 2. Pp. 209-219.
- [89] *Rosenbrock H. H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // The Computer Journal. 1963. Vol. 5. No. 4. Pp. 329-330.
- [90] *Semenov A. A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 106. Pp. 428-436.
- [91] *Wang X., Ma T.-B., Ren H.-L., Ning J.-G.* A local pseudo arc-length method for hyperbolic conservation laws // Acta Mechanica Sinica. 2015. Vol. 30. No. 6. Pp.956-965.

Список рисунков

2.1	Численное решение задачи (2.1)-(2.2) при $\xi_0 = 1; 10; 100$, метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом $h = 10^{-3}$.	28
2.2	Шаг интегрирования в полулогарифмических координатах для задачи (2.1)-(2.2) при $\xi_0 = 30$, метод Рунге-Кутты четвертого порядка, $\theta = 10^{-4}$.	37
2.3	Точное решение (2.11) экспоненциального теста (2.9)-(2.10) для $\xi_0 = 1, \xi_0 = 50$.	38
2.4	Численное решение задачи (2.19) для $\varepsilon = 0.1, 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.	43
2.5	Численное решение задачи (2.22) для $\varepsilon = 0.05, 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.	47
4.1	Сверху: точное и численное решение задач (3.11), (3.12) и (3.13) для $\xi_0 = 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью $\theta = 10^{-8}$, начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$ и параметром модифицированного наилучшего аргумента $\alpha = -10$. Снизу: соответствующие значения шага интегрирования на каждом участке решения задач (3.11), (3.12) и (3.13).	80
A.1	Общая блок-схема программного комплекса	99
A.2	Экран для численного решения задачи Коши	110
A.3	Экран для численного решения краевой задачи	111

Список таблиц

1	Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c для задачи (2.1)-(2.2), явные методы с постоянным шагом.	30
2	Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c для задачи (2.1)-(2.2), неявный метод Эйлера с постоянным шагом.	32
3	Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c исходной задачи (2.1)-(2.2) и преобразованной к наилучшему аргументу задачи (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом.	34
4	Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c исходной задачи (2.1)-(2.2) и преобразованной к наилучшему аргументу задачи (2.7)-(2.8) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом по правилу Рунге с точностью θ	35
5	Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью θ и начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$	40
6	Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (2.9)-(2.10) и (2.13)-(2.14) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с постоянным шагом h	40
7	Время счета t_c, c задач (2.19) и (2.20) методом стрельбы с точностью $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$	45

8	<p>Время счета t_c, с задач (2.22) и (2.23) методом стрельбы с углом пристрелки $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.</p>	48
9	<p>Средняя ошибка ε_{avg} и время счёта t_c задач (3.9) и (3.10) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом h и параметром α для модифицированного наилучшего аргумента κ.</p>	54
10	<p>Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (3.11), (3.12) и (3.13) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью θ, начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$ и параметром $\alpha = -100$ для экспоненциального наилучшего аргумента.</p>	57
11	<p>Средняя ошибка ε_{avg} и время счета t_c численного решения задач (3.11), (3.12) и (3.13) со значением ξ_0 явным методом Эйлера с постоянным шагом h и параметром α для экспоненциального наилучшего аргумента.</p>	57
12	<p>Время счета t_c задач (3.14), (3.15) и (3.16) методом стрельбы с точностью $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.</p>	60
13	<p>Время счета t_c задач (3.17), (3.18) и (3.19) методом стрельбы с углом пристрелки $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$.</p>	63

Приложение А

Комплекс программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра»

В данном приложении дается описание комплекса программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641). Программный комплекс использовался для решения начальных и краевых задач, рассмотренных в диссертации. Общая блок-схема данного программного комплекса изображена на рис. А.1.

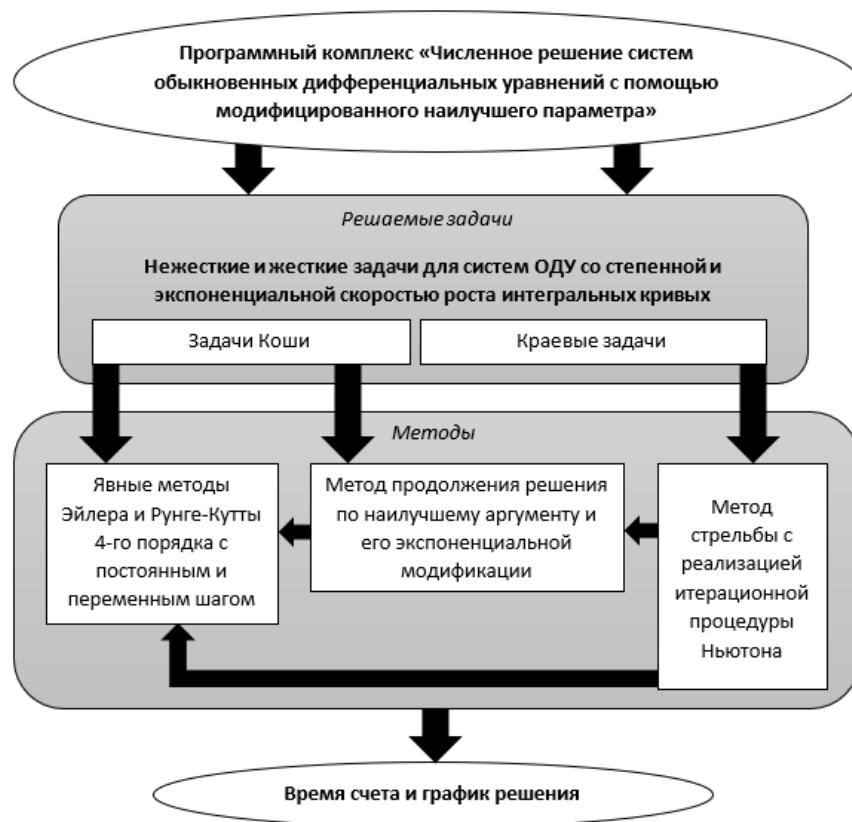


Рис. А.1. Общая блок-схема программного комплекса

Краткое описание программного комплекса

Авторы: Цапко Екатерина Дмитриевна, Леонов Сергей Сергеевич, Кузнецов Евгений Борисович.

Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Программа: «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра».

Аннотация: Программа предназначена для научных работников, студентов и пользователей, чья работа требует численного и графического решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральные кривые которых достигают экспоненциальной скорости роста.

Входными данными являются область интегрирования; начальные или краевые условия; функции правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме; шаг интегрирования и допустимая погрешность вычисления; метод интегрирования начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений; задаваемая точность для выбора переменного шага по правилу Рунге в случае выбора метода интегрирования с переменным шагом; параметр для модифицированного наилучшего аргумента, регулирующий жесткость решаемой задачи; максимальное время счета каждой выбранной задачи; название файла для сохранения полученных данных.

Программа позволяет рассчитывать численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме с начальными или краевыми условиями с помощью преобразования исходной задачи к задаче от наилучшего аргумента и к задаче от модифицированного наилучшего

аргумента с возможностью визуального сравнения полученных решений. Программа предоставляет время, затраченное на вычисление каждой из задач, а также сообщение об ошибке, в случае возникновения таковой (например, время счета превысило заданное пользователем максимально допустимое время).

Тип ЭВМ: IBM PC – совместимый ПК.

Язык: Matlab.

Операционная система: Microsoft Windows, MacOS, Linux.

Объем программы: 337 Кб.

Используемые численные методы

В рамках программного комплекса для решения начальных задач были реализованы следующие явные численные методы: метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Оба метода поддерживают постоянный и переменный шаг интегрирования.

Ниже приводится исходной код реализации

1. метода Эйлера с постоянным шагом

```
% Явный метод Эйлера с постоянным шагом для систем ОДУ
function [ yr, error_message ] = Euler_syst_const(t0, y0, h,
    fun, eps, timer_max)
% Ввод:
5 % t0 - вектор временных границ, y0 - начальное значение,
% h - шаг интегрирования начальной задачи, fun - правая часть,
% eps - заданная точность численного решения (только для метод
    а с переменным шагом с процедурой Рунге-Ромберга-Ричардсона
    ),
% timer_max - максимально допустимое время счета.
%
10 % Вывод:
```

```

% yr - массив численного решения размера (l, m), где l - разме
% рность решаемой системы, m - количество шагов, сделанных ме
% тодом решения начальной задачи,
% error_message - сообщение об ошибке (превышение времени счет
% а).

    yr(:, 1) = [y0, t0(1)]; % Начальные значения

15
    i = 1;
    error_message = '';
    start_timer = tic;
    while yr(end, end) < t0(2)
20
        % Реализация ограничения по времени счета
        timer = toc(start_timer);
        if timer > timer_max
            yr(:, end) = [];
            error_message = 'Timeout Error at Euler Constant
                Step Method';
25
            break
        end

        % Выполнение шага явного метода Эйлера с постоянным ша
        % гом
        yr(:, i + 1) = yr(:, i) + h * cellfun(@(f) f(yr(:, i))
30
            , fun).';
        i = i + 1;
    end
    yr(:, end) = [];
end

```

2. метода Эйлера с переменным шагом

```

% Явный метод Эйлера с переменным шагом для систем ОДУ
function [ yr, error_message ] = Euler_syst_var(t0, y0, h, fun
    , eps, timer_max)
% Ввод:

```

```

5 % t0 - вектор временных границ, y0 - начальное значение,
% h - шаг интегрирования начальной задачи, fun - правая часть,
% eps - заданная точность численного решения (только для метод
% а с переменным шагом с процедурой Рунге-Ромберга-Ричардсона
%),
% timer_max - максимально допустимое время счета.
%
10 % Вывод:
% yr - массив численного решения размера (l, m), где l - разме
% рность решаемой системы, m - количество шагов, сделанных ме
% тодом решения начальной задачи,
% error_message - сообщение об ошибке (превышение времени счет
% а).

    yr(:, 1) = [y0, t0(1)]; % Начальные значения

15
    i = 1;
    error_message = '';
    start_timer = tic;
    while yr(end, end) < t0(2)
20
        % Реализация ограничения по времени счета
        timer = toc(start_timer);
        if timer > timer_max
            yr(:, end) = [];
            error_message = 'Timeout Error at the Euler
                Variable Step Method';
25
            break
        end

        % Выполнение двух последовательных шагов явного метода Эйл
        ера с шагом h
        yr(:, i + 1) = yr(:, i) + h * cellfun(@(f) f(yr(:, i))
            , fun).';
30
        yr1 = yr(:, i + 1) + h * cellfun(@(f) f(yr(:, i + 1)),
            fun).';

```

```

        % Выполнение шага явного метода Эйлера с шагом 2h
        Y = yr(:, i) + 2 * h * cellfun(@(f) f(yr(:, i)), fun)
            .';

35     % Вычисление нормы разности двух решений с шагом h и 2h
        err = sqrt(sum((yr1 - Y).^2));

        % Процедура Рунге-Ромберга-Ричардсона контроля точности
        if err > eps
            h = h / 2;
40         else
            if err < eps / 2
                h = 2 * h;
            end
            i = i + 1;
45         end
        end
        yr(:, end) = [];
end

```

3. метода Рунге-Кутты 4 порядка точности с постоянным шагом

```

% Явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом
function [ yr, error_message ] = Runge_Kutt_syst_const(t0, y0,
    h, fun, eps, timer_max)
% Ввод:
5 % t0 - вектор временных границ, y0 - начальное значение,
% h - шаг интегрирования начальной задачи, fun - правая часть,
% eps - заданная точность численного решения (только для метод
    а с переменным шагом с процедурой Рунге-Ромберга-Ричардсона
    ),
% timer_max - максимально допустимое время счета.
%
10 % Вывод:

```



```

% yr - массив численного решения размера (l, m), где l - разме
% рность решаемой системы, m - количество шагов, сделанных ме
% тодом решения начальной задачи,
% error_message - сообщение об ошибке (превышение времени счет
% а).

yr(:, 1) = [y0, t0(1)]; % Начальные значения

15
i = 1;
error_message = '';
start_timer = tic;
while (yr(end, end) < t0(2))
20
    % Реализация ограничения по времени счета
    timer = toc(start_timer);
    if timer > timer_max
        yr(:, end) = [];
        error_message = 'Timeout Error at Runge Kutt
        Constant Step Method';
25
        break
    end

    % Выполнение шага явного метода Рунге-Кутты с постоянн
    ым шагом
    K1 = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i)), fun).';
30
    K2 = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K1 / 2), fun).';
    K3 = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K2 / 2), fun).';
    K4 = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K3), fun).';
    yr(:, i + 1) = yr(:, i) + 1 / 6 * (K1 + 2 * K2 + 2 *
        K3 + K4);
    i = i + 1;
35
end
yr(:, end) = [];
end

```

4. метода Рунге-Кутты 4 порядка точности с переменным шагом

```

% Явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом
function [ yr, error_message ] = Runge_Kutt_syst_var(t0, y0, h
    , fun, eps, timer_max)
% Ввод:
5 % t0 - вектор временных границ, y0 - начальное значение,
% h - шаг интегрирования начальной задачи, fun - правая часть,
% eps - заданная точность численного решения (только для метод
    а с переменным шагом с процедурой Рунге-Ромберга-Ричардсона
    ),
% timer_max - максимально допустимое время счета.
%
10 % Вывод:
% yr - массив численного решения размера (l, m), где l - разме
    рность решаемой системы, m - количество шагов, сделанных ме
    тодом решения начальной задачи,
% error_message - сообщение об ошибке (превышение времени счет
    а).

    yr(:, 1) = [y0, t0(1)]; % Начальные значения
15
    i = 1;
    error_message = '';
    start_timer = tic;
    while (yr(end, end) < t0(2))
20 % Реализация ограничения по времени счета
        timer = toc(start_timer);
        if timer > timer_max
            yr(:, end) = [];
            error_message = 'Timeout Error at Runge Kutt
                Variable Step Method';
25         break
        end

        % Выполнение двух последовательных шагов явного метода
            Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом h

```

```

30      K1(:, 1) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i)), fun).';
      K2(:, 1) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K1(:, 1) / 2)
          , fun).';
      K3(:, 1) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K2(:, 1) / 2)
          , fun).';
      K4(:, 1) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i) + K3(:, 1)),
          fun).';
      yr(:, i + 1) = yr(:, i) + 1 / 6 * (K1(:, 1) + 2 * K2
          (:, 1) + 2 * K3(:, 1) + K4(:, 1));

35      K1(:, 2) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i + 1)), fun).';
      K2(:, 2) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i + 1) + K1(:, 2)
          / 2), fun).';
      K3(:, 2) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i + 1) + K2(:, 2)
          / 2), fun).';
      K4(:, 2) = h * cellfun(@(f) f(yr(:, i + 1) + K3(:, 2))
          , fun).';
      yr1 = yr(:, i + 1) + 1 / 6 * (K1(:, 2) + 2 * K2(:, 2)
          + 2 * K3(:, 2) + K4(:, 2));

40      % Выполнение шага явного метода Рунге-Кутты 4-го поряд
          ка с шагом 2h
      Y = yr(:, i) + 2 / 6 * (K1(:, 1) + 2 * K2(:, 1) + 2 *
          K3(:, 1) + K4(:, 1));

      % Вычисление нормы разности двух решений с шагом h и 2
          h
45      err = sqrt(sum((yr1 - Y).^2)) / 15;

      % Процедура Рунге-Ромберга-Ричардсона контроля точности
      if err > eps
          h = h / 2;
50      else
          if err < eps / 16
              h = 2 * h;

```

```

                    end
                    i = i + 1;
55                end
            end
            yr(:, end) = [];
        end
    end
end

```

Изменение шага интегрирования производится при помощи процедуры оценки локальной погрешности решения в каждой точке по методу Рунге-Ромберга-Ричардсона, рассмотренного в главе 1.

Для решения краевой задачи в программном комплексе реализован метод стрельбы, где пристрелка проводится согласно итерационной процедуре Ньютона.

```

% Метод стрельбы решения краевой задачи
function [ yr, error_message ] = shooting_syst(method, x0, y0,
        h, fun, eps, delta, epsvar, timer_max)
% Ввод:
5 % method - метод решения начальной задачи, x0 - вектор границ,
        y0 - вектор краевых условий,
% h - шаг интегрирования начальной задачи, fun - правая часть,
% eps - заданная точность метода стрельбы, delta - малое приращение
        угла пристрелки для итерационной процедуры Ньютона,
% epsvar - точность численного решения начальной задачи в случае,
        если method - метод с переменным шагом
% timer_max - максимально допустимое время счета.
10 %
% Вывод:
% yr - вектор размера k массивов численного решения размера (l,
        t), где k - количество итераций процедуры Ньютона, l - размерность
        решаемой системы, t - количество шагов, сделанных методом
        method решения начальной задачи,
% error_message - сообщение об ошибке (превышение времени счета).

```

```

15 alpha(1) = atan((y0(2) - y0(1)) / (x0(2) - x0(1))); % Начальн
    ый угол пристрелки

% Первая итерация процедуры Ньютона
[ yr{1}, error_message ] = method(x0, [y0(1), tan(alpha(1))],
    h, fun, epsvar, timer_max);

20 k = 1;
tic;
    while abs(yr{k}(1, end) - y0(2)) > eps
        % Реализация ограничения по времени счета
        timer = toc;
        if timer > timer_max
25             yr(end) = [];
            if isempty(error_message)
                error_message = 'Timeout Error at the Shooting
                    Method';
            end
            break
30         end

% Итерационная процедура Ньютона
    if (k == 1)
35         [ zr, error_message ] = method(x0, [y0(1), tan(
            alpha(k) + delta)], h, fun, epsvar, timer_max);

        alpha(2) = alpha(k) + (y0(2) - yr{k}(1, end)) / (
            zr(1, end) - yr{k}(1, end)) * delta;
    else
        alpha(k + 1) = alpha(k) + (y0(2) - yr{k}(1, end))
            / (yr{k}(1, end) - yr{k - 1}(1, end)) * (alpha(
40         k) - alpha(k - 1));
    end

```

```

[ yr{k + 1}, error_message ] = method(x0, [y0(1), tan(
    alpha(k + 1))], h, fun, epsvar, timer_max);
k = k + 1;
end
45 end

```

Для решения задачи Коши, к которой приводит метод стрельбы, пользователь выбирает один из ранее описанных методов решения начальных задач.

Интерфейс программного комплекса

При запуске комплекса открывается экран для численного решения задачи Коши, изображенный на рис. А.2.

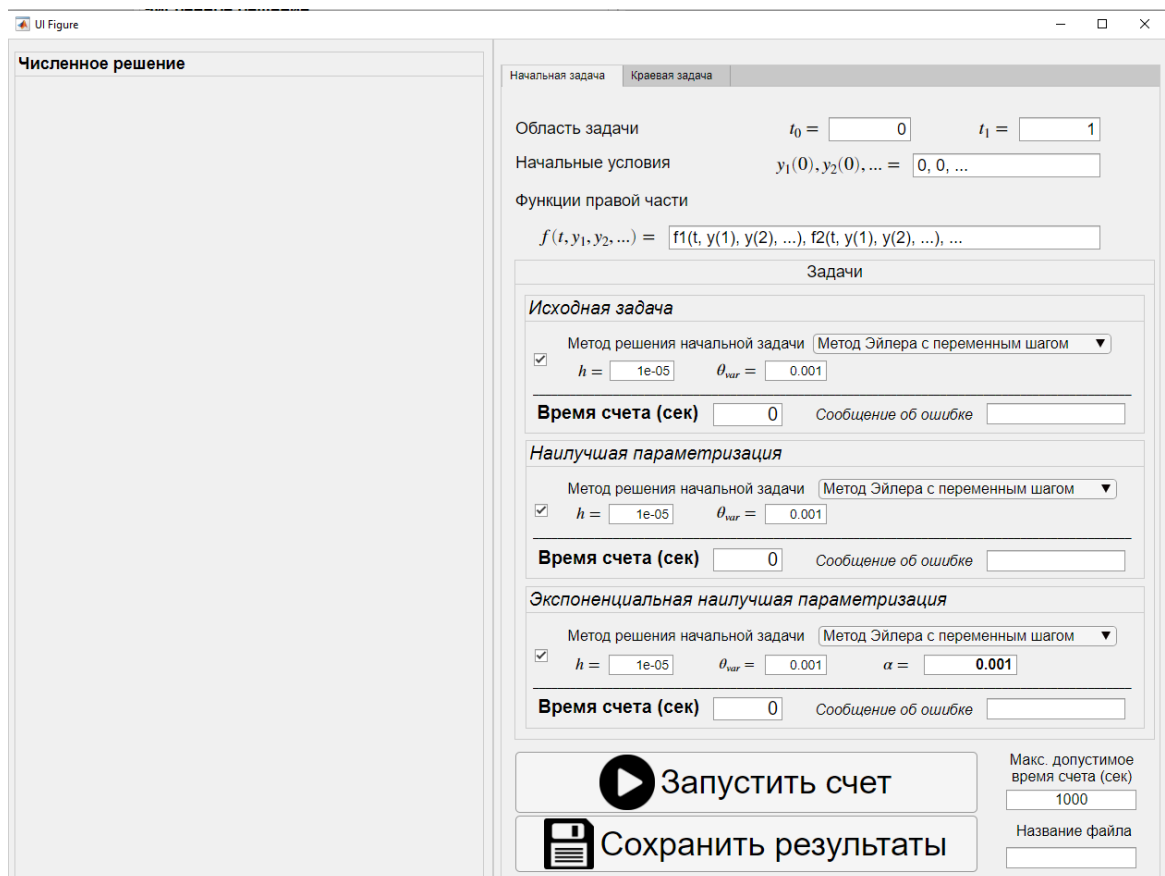


Рис. А.2. Экран для численного решения задачи Коши

Переключением вкладки в верхней части приложения можно перейти к экрану для решения краевой задачи, как на рис. А.3.

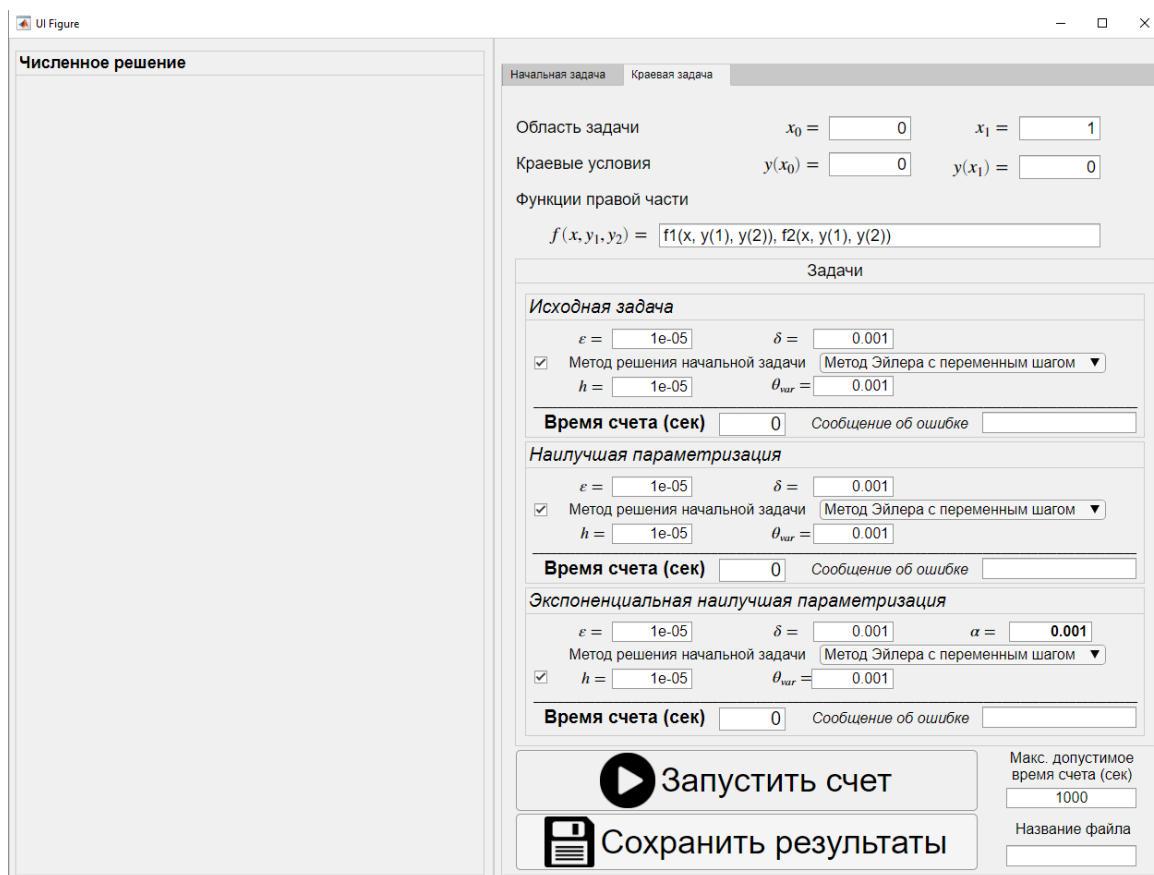


Рис. А.3. Экран для численного решения краевой задачи

По умолчанию, как временные границы t_0 , t_1 для начальной задачи, так и метрические границы x_1 , x_2 для краевой задачи ограничены отрезком $[0, 1]$, а краевые условия имеют значения $y(x_1) = 0$, $y(x_2) = 0$. Также для решения начальных задач по умолчанию выбран явный метод Эйлера с переменным шагом с точностью $\theta_{var} = 10^{-3}$ и начальным шагом $h = 10^{-5}$. При решении краевой задачи для метода стрельбы установлены следующие значения по умолчанию: допустимая погрешность $\varepsilon = 10^{-5}$, малое приращение угла пристрелки $\delta = 10^{-3}$. Для решения начальной задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу, рассмотренному в главе 3, параметр по умолчанию имеет значение $\alpha = 10^{-3}$. Пользователь может скорректировать любые указанные здесь значения под требования своей задачи.

Для расчета численного решения пользователю необходимо ввести правые части системы ОДУ, приведенной к нормальной форме, и ввести или скорректировать начальные или краевые условия, а также параметры решения начальных задач. По умолчанию численное решение будет рассчитано для исходной задачи и задач, преобразованных к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам, однако пользователь может исключить любую из задач, убрав галочку на соответствующей этой задачи панели.

Численный расчет начинается при нажатии кнопки «Запустить счет». При успешной отработке программы в левой части приложения появится график решения для каждой выбранной задачи, а в их блоках соответствующее время счета. В случае превышения максимального времени счета, которое можно указать в поле справа от кнопки «Запустить счет», для решаемой задачи появится сообщение об ошибке типа TimeOut.

Пользователь может сохранить файл с численными результатами в файл, название которого необходимо указать в соответствующем поле. Если всё в порядке, то появится диалоговое окно, подтверждающее успешное сохранение файла. В противном случае, появится диалоговое окно с сообщением об ошибке. Предусмотрены такие ошибки как отсутствие данных для сохранения и отсутствие указанного названия файла.