

На правах рукописи



Шрамко Константин Константинович

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ
СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Лурье Сергей Альбертович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (НИУ)»

Официальные оппоненты: **Думанский Александр Митрофанович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией «Механика композиционных материалов» ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук»

Шоркин Владимир Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Кафедра технической физики и математики», ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»**

Защита диссертации состоится 22 декабря 2021 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=161114

Автореферат разослан « ____ » _____ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.125.05



Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Известно широкое применение градиентных теорий для моделирования масштабных эффектов широкого класса проблем процессов деформирования, механики, теплопроводности и диффузии, термодинамики, гидродинамики, связанных термодинамических проблем деформирования и пр. Значительные достижения связаны с моделированием эффектов масштаба в наноструктурированных средах, композитных керамиках, электро- и магнитоупругих материалах.

В значительной степени успехи в многомасштабном моделировании на основе теорий высокого порядка связаны с успехами математического обоснования таких теорий в том числе на основе развития вариационных моделей, начиная с работ Миндлина, Тупина (1964 г.) вплоть до работы Гао и Парка (2007г.). Исследования, направленные на формулировку условий корректности краевых задач градиентных теорий повышенного порядка, которые исключили бы ошибки при численном моделировании в прикладных задачах, являются актуальными.

В связи с этим исследование, проводимое в диссертации и посвящённое изучению условий симметрии, которые характерны только для градиентных теорий и условий корректности, вытекающих из них, является актуальным.

Структура уравнений равновесия и общего решения градиентной упругости такова, что разрешающий оператор, записанный в перемещениях, имеет вид произведения классического оператора Ламе и обобщенного оператора Гельмгольца, содержащего масштабный параметр. Соответственно общее решение также зависит от параметра масштаба. Особенность градиентных решений состоит в том, что частное решение может быть построено с той же сингулярностью в особой точке, которое имеет место в классической упругости. Этот факт позволяет исключить сингулярность в градиентном решении, которая

была в соответствующем классическом решении. Такая особенность позволяет провести редукцию механики трещин, переводя эти задачи из класса сингулярных задач в класс обычных задач о концентрации напряжений для градиентной упругости. Это открывает новые возможности в механике разрушения, чрезвычайно важные для приложений, когда для анализа поведения трещин можно использовать известные критерии прочности. В связи с этим исследования таких задач, проводимых в диссертации, в приложениях к механике разрушения, несомненно, является актуальными.

Целью работы является:

-исследование корректности градиентных теорий упругости вследствие учета дополнительных свойств симметрии, свойственных только градиентным теориям, а также формулировка критерия корректности для краевых условий, учитывающего дополнительные условия симметрии при постановке краевых задач градиентной упругости.

-исследование свойств локальной регуляризации сингулярных задач теории упругости и развитие на его основе концепции концентрации напряжений применительно к задаче определения предельных нагрузок пластин, ослабленных трещинами смешанного типа.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Установлено, что учет дополнительного по отношению к классическим теориям упругости признака симметрии по порядку дифференцирования в краевых условиях является существенным и определяет класс корректных моделей градиентной упругости. Установлена необходимость проверки на корректность известных прикладных задач градиентных моделей теории упругости.

- Сформулирован критерий корректности, позволяющий внести необходимые поправки в краевых задачах градиентной упругости, установлен класс моделей градиентной упругости, в которых условие дополнительное условие симметрии должно обязательно учитываться. К нему относятся

градиентные модели, в которых краевые условия формулируются на тензор обобщенных напряжений, входящих в уравнение равновесия (так называемые векторные модели) т.е. вектор напряжений не изменяется за счет моментных напряжений.

- Впервые предложена методика прогноза прочности пластин, ослабленных трещинами смешанной моды на основе градиентной упругости (не сингулярных трещин), процедуры численного моделирования, обеспечивающего выполнение граничных условий на берегах трещин и концепции концентрации напряжений, предложенной В.В. Васильевым и С.А. Лурье.

Доказано, на основе сравнений, полученных численных решений для не сингулярных трещин с результатами экспериментов, что параметр масштаба является постоянной материала для пластин, поврежденных трещинами, и концепция концентрации напряжений может быть применена к трещинам смешанной моды и угловым вырезам для прогноза разрушения и направления развития трещины.

- новыми представляются результаты, связанные определением областей применимости различных критериев прочности (критерия максимальных главных напряжений, критерия треска, критерия Мизеса, триаксиального критерия Коши) в случае смешанной моды. Решение этих задачи играют большую роль в механике разрушений.

Практическое значение работы.

Полученные результаты являются практически значимыми, так как они дают существенные уточнения для постановок краевых задач и решений широкого класса прикладных задач градиентной теории упругости. Численная реализация задач механики разрушения в рамках градиентной упругости совместно с использованием концепции концентрации напряжения, обеспечивающее высокую точность прогноза разрушающих нагрузок, представляет большую практическую значимость.

Реализация результатов работы.

Результаты, полученные в диссертации, используются в Институте Прикладной механики (ИПРИМ) РАН, Вычислительном центре РАН, МАИ (Государственном техническом университете).

Достоверность результатов обосновывается использованием строгих математических методов механики деформируемых сред, вариационных подходов, а также совпадением результатов численного моделирования задач механики трещин в рамках градиентных теорий, полученных авторами и экспериментальных данных, приведенными в литературе.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Формулировка градиентных теорий упругости, учитывающей масштабные эффекты и анализ условий симметрии градиентных модулей упругости шестого ранга, вывод условий корректности, как дополнительных необходимых условий симметрии.

2. Формулировка требований к виду краевых условий при математической постановке краевых задач градиентной упругости, связанных с учетом дополнительных свойств симметрии градиентной упругости.

3. Анализ структуры разрешающих уравнений и решений градиентных моделей упругости, связанных с возможностью регуляризации сингулярных решений теории упругости.

4. Построение регулярных решений градиентной упругости в механике трещин, развитие концепции концентрации напряжений для оценки направления развития трещины и области возможного зарождения макротрещины по известным критериям прочности и масштабному параметру, найденному из данных экспериментов.

Апробация работы и публикации.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в трех научных печатных работах, одна из которых опубликована в рецензируемом международном журнале и две в изданиях, рекомендуемом Перечнем ВАК.

Объём и структура работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка используемой литературы. Она содержит 112 страниц, из них 9 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 90 наименований (из них 84 на иностранном языке).

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

Обзор работ по проблеме посвящен обзору современных градиентных вариантов теории упругости, связанные с фундаментальными работами и получившими развитие применительно к описанию свойств неоднородных структур. Описаны размерные эффекты и нелокальное поведение применимое к различным материалам при разработке методов усреднения, учитывающих масштабные эффекты. Дается общее описание градиентной упругости. Отмечены исследования, иллюстрирующие историю развития математических основ градиентных теорий упругости, в том числе и особенностей свойств симметрии тензора градиентных модулей упругости и особенности применения градиентных теорий упругости к классическим сингулярным проблемам упругости.

В первой главе приведено построение градиентных теорий упругости с учетом симметрии. В первую очередь, для проведения качественных сравнений классической теории градиентной упругости рассматривается симметричная изотропная модель. Рассматривается упругое тело и определяется упругая энергия. Используется условие симметрии по требованию потенциальности $C_{ijkl} = C_{klij}$ и записывается вариация Лагранжиана:

$$\delta \Pi = \int C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_{i,j} dV - \int f_i \delta u_i dV - \oint t_i \delta u_i dS$$

которая используется для формулировки вариационного принципа Лагранжа, и

которая дает полную математическую формулировку проблемы, включая определяющие уравнения и краевую задачу в целом.

В классической упругости, зависимость потенциальной энергии от симметричного тензора деформаций требует симметрии тензора упругих свойств относительно перестановки индексов в первой и второй паре индексов $C_{ijkl} = C_{ijlk}$.

В результате плотность потенциальной энергии может быть записана в эквивалентных формах или в терминах тензора дисторсии $u_{k,l}$, или в терминах тензора деформации ε_{kl} .

Вариационный принцип Лагранжа позволяет найти систему альтернативных граничных условий (статических или кинематических) и систему уравнений равновесий изотропного твердого тела, записанную в перемещениях

$$L_{ij}u_j + f_i = (\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + f_i = 0 \quad (1)$$

где $L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \mu\Delta\delta_{ij}$ - являются операторами Ламе в классической изотропной упругости и $\Delta u_i = u_{i,jj}$ - вектор Лапласиана.

Далее рассматривается градиентная теория, где в общем случае имеется 15 модулей упругости. Используя свойства потенциальности и симметрии по первым индексам в каждой тройке для теории деформаций (используется симметрия тензора деформаций), число модулей упругости может быть уменьшено до 5. (форма Миндлина II). С другой стороны, можно использовать иную симметрию вместо симметрии тензора деформаций, симметрию, связанную с независимостью порядка дифференцирования вторых производных от перемещений $u_{i,jk} = u_{i,kj}$, которая является требованием непрерывности первых производных и обеспечивает кинематическое требование отсутствия полей дефектов. Такой симметрии нет в классической упругости для модулей C_{ijkl} . Учет этого специального вида симметрии приводит вместе со свойством симметрии – потенциальностью также к модели среды Миндлина форма I, с пятью

постоянными (но иными чем в модели Миндлина форма II).

В работе принимается, что этот тип симметрии по порядку дифференцирования, требующий симметрии тензора модулей шестого ранга по последним индексам в каждой тройке, является основным для определения корректности моделей градиентной упругости сплошных бездефектных сред. Для градиентной упругости определяющие соотношения для тензора напряжений и тензора моментов даются формулами Грина после определения плотности потенциальной энергии. В результате тензор моментных напряжений записывается как:

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{2}(\mu_{ijk} + \mu_{ikj}) + \frac{1}{2}(\mu_{ijk} - \mu_{ikj}) = \hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk}$$

где $\hat{\mu}_{ijk}$ и $\tilde{\mu}_{ijk}$ являются симметричными и кососимметричными частями соответственно.

Вводится определение физически несущественных компонент для тензора модулей упругости и тензора моментов, которые не изменяют вида плотности потенциальной энергии. К ним относятся антисимметричные компоненты тензора модулей упругости шестого ранга по индексам дифференцирования (последние индексы в каждой тройке) и соответственно кососимметричная часть $\tilde{\mu}_{ijk}$ в силу симметрии $u_{i,jk} = u_{i,kj}$. Далее (в главе 2) доказывається с помощью множителей Лагранжа утверждение о том, что чтобы избежать ложных решений связанных с присутствием $\tilde{\mu}_{ijk}$, только $\hat{\mu}_{ijk}$ следует оставить в математической модели, в то время как $\tilde{\mu}_{ijk}$ должен быть принудительно опущен.

Рассматриваются свойства симметрии тензора шестого ранга упругих свойств модели градиентной дисторсии изотропных тел в общем случае, который можно записать как линейную комбинацию всех различных троек тензоров Кронекера. Учитывая условие потенциальности $C_{ijklmn} = C_{lmnij k}$ и условие порядка дифференцирования $C_{ijklmn} = C_{ijk ln m}$, получаем модель с пятью независимыми коэффициентами – модулей упругости, которая путем использования принципа

Лагранжа дает физическую модель изотропной дисторсии градиента деформации с краевыми задачами, уравнениями равновесия и граничными условиями, определенными в терминах симметричного моментного напряжения, удовлетворяющего условию $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$ (и, таким образом, $\mu_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk}$ и $\tilde{\mu}_{ijk} = 0$).

В результате получаем модель соответствующую первой форме Миндлина

$$\tilde{w}(u_{i,jk}) = \frac{1}{2} C_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} = \tilde{c}_1 \theta_{,i} \Delta u_i + \tilde{c}_2 \theta_{,i} \theta_{,i} + \tilde{c}_3 \Delta u_i \Delta u_i + \tilde{c}_4 u_{i,jk} u_{i,jk} + \tilde{c}_5 u_{i,jk} u_{i,jk}$$

Записывая выражение для тензора напряжений, используя тождества

$$\Delta \theta_{,i} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \partial_i \partial_j L_{jk} u_k \quad \text{и} \quad \Delta \Delta u_{,i} = \frac{1}{\mu} (\Delta \delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial_i \partial_j) L_{jk} u_k, \quad \text{факторизовав его,}$$

получим
$$\mu_{ijk,jk} = (l_1^2 \Delta \delta_{ij} + l_2^2 \partial_i \partial_j) L_{jk} u_k, \quad \text{где} \quad l_1 = \sqrt{\frac{C_7 + 2C_8}{\mu}} \quad \text{и}$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(C_1 + C_2 + C_{11}) - (\lambda + \mu)(C_7 + 2C_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad \text{некоторые характерные параметры}$$

масштаба длины, определяющие размерные эффекты.

Путем подстановки напряжений Коши и тензора напряжений в уравнение равновесия можно получить факторизованные уравнения равновесия градиентной упругости деформации изотропных твердых тел в форме дисторсии (см. (1))

$$H_{ij} L_{jk} u_k + f_i = 0, \quad \text{с} \quad H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2 \Delta \delta_{ij} - l_1^2 \partial_i \partial_j, \quad (2)$$

H_{ij} - оператор Гельмгольца.

Поскольку операторы H_{ij} и L_{jk} коммутируют, общий интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка всегда может быть представлен как сумма общих интегралов этих двух операторов второго порядка.

Аналогичный вид разрешающих уравнений с двумя масштабными параметрами можно получить и для модели Миндлин II. При этом параметры зависят от иных пяти модулей упругости, так как это другая модель. Обе модели являются двухпараметрическими с точки зрения разрешающих уравнений и структуры фундаментальных решений. Тем не менее, все пять модулей упругости

должны быть использованы при формулировке краевых условий в перемещениях.

Показано, что среди градиентных моделей теории упругости существует единственная полностью симметричная модель (и по деформациям и по порядку дифференцирования) которая зависит только от двух дополнительных модулей (вместо пяти) в тензоре модулей шестого ранга A_{ijklmn} :

$$\begin{aligned}
 A_{ijklmn} = a_1 & \left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} \right. \\
 & \left. + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} \right) \\
 & + a_8 \left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mu_{ijk} = a_1 \left[(2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i})\delta_{jk} + (2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j})\delta_{ki} + (2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k})\delta_{ij} \right] + 2a_8 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}),$$

где $\theta = \varepsilon_{ll}$ - дилатация, а тензор двойных напряжений $\mu_{ijk} = A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n}$

$$H_{ij}L_{jk}u_k + f_i = 0, \text{ где } L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \mu\delta_{ij}\Delta \text{ и } H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2\delta_{ij}\Delta - l_2^2\partial_i\partial_j,$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{a_1 + 2a_8}{\mu}} \text{ и } l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(2a_1 + a_8) - (\lambda + \mu)(a_1 + 2a_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}}.$$

где $\theta = \varepsilon_{ll}$ - дилатация, а тензор двойных напряжений $\mu_{ijk} = A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n}$

В общем случае решение краевых задач для градиентной упругости записывается в виде разложения по системе фундаментальных решений классической упругости (оператор L_{jk} , см. (1)), например, с помощью представления Папковича-Нейбера и фундаментальных решений обобщенного оператора Гельмгольца H_{ij} , имеющих экспоненциальную изменчивость по координатам.

Именно это свойство общего представления решений в градиентной упругости используется в дальнейшем для локальной регуляризации сингулярных проблем упругости.

Во второй главе ведется обсуждение корректности математической постановки краевых задач в градиентной упругости.

Сначала рассматривается одно из базовых, фундаментальных свойств

симметрии для тензоров модулей упругости в механике сред- потенциальность. Определяется плотность энергии деформации $U(\epsilon)$ однородного линейно-упругого материала. Записываются условие симметрии деформаций

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad B_{ijklm} = B_{jiklm} = B_{ijlkm}, \quad A_{ijklmn} = A_{ijknlm}$$

Указывается еще одно свойство симметрии, которое имеет место только лишь для градиентной теории упругости. Очевидно, что тензор третьего ранга $u_{l,mn}$ является симметричным в отношении перестановки индексов дифференцирования m, n , $u_{l,mn} = u_{l,nm}$. Более того, указанная симметрия является необходимым и достаточным условием существования непрерывных первых производных вектора перемещений, которые по определению являются аргументами плотности потенциальной энергии в вариационной формулировке градиентных моделей. В противном случае имеет место не интегрируемость $u_{i,jk}$, что соответствует кинематике сред с полями дефектов.

В силу указанной симметрии, которую в работе называем симметрией по порядку дифференцирования, в определяющем уравнении для тензора третьего ранга μ_{ijk} могут присутствовать только симметричные компоненты тензора модулей упругости шестого ранга по последней паре индексов в первой и второй тройке индексов $A_{ijklmn}^S : A_{ijklmn}^S = A_{ijklmn}^S$. $A_{ijklmn}^S = A_{ijknlm}^S$

Следовательно, только симметричные по порядку дифференцирования компоненты тензора A_{ijklmn} являются физически существенными.

С другой стороны для не симметричных тензоров

$$A_{ijklmn}^a : A_{ijklmn}^a = -A_{ikjlmn}^a \cdot A_{ijklmn}^a = -A_{ikjlmn}^a$$

Выражение $\mu_{ijk} = A_{ijklmn}^a u_{l,mn} = 0$ всегда равно нулю для произвольных A_{ijklmn}^a в силу свертки с учетом симметрии тензора $u_{i,jk}$

Очевидно, что и для градиентной составляющей плотности потенциальной энергии $w_g(u_{i,jk})$, записанной в перемещениях, существенными (энергетически

существенными) являются лишь компоненты тензора модулей упругости шестого ранга A_{ijklmn}^s , а компоненты A_{ijklmn}^a являются энергетически несущественными:

$$2w_g(u_{i,jk}) = \mu_{ijk}u_{i,jk} = A_{ijklmn}u_{i,jk}u_{l,mn} = A_{ijklmn}^s u_{i,jk}u_{l,mn}.$$

При этом для любых A_{ijklmn}^a и любых $u_{i,jk}$ имеет место тождество $A_{ijklmn}^a u_{i,jk}u_{l,mn} \equiv 0$.

Для потенциальной энергии, записанной для интегрируемых дисторсий, только симметричные по порядку дифференцирования компоненты тензора шестого ранга являются существенными для любых тензоров третьего ранга $u_{i,jh}$.

Сравниваются свойства симметрии по условиям градиентной деформации и по порядку дифференцирования. Из сравнения тензора моментных напряжений формы Миндлина I и Миндлина II следует, что модели, построенные с использованием свойств симметрии по порядку дифференцирования и свойств симметрии, связанных с симметрией по первым двум индексам, являются различными. Для модели Миндлина I тензор моментов является симметричным по двум последним индексам, в то время как для модели Миндлина II тензор моментов обладает симметрией «парности» - симметрией по первым двум индексам.

Исследуемые два типа симметрии являются принципиально различными, так как симметрия по порядку дифференцирования является фундаментальной и связана с существованием градиентной бездефектной среды, когда условия симметрии у тензора вторых производных перемещений являются необходимыми и достаточными условиями непрерывности дисторсий. Нарушение этой симметрии приводит к появлению энергетически несущественных «лишних» модулей в тензоре шестого ранга, которые, тем не менее, никак не влияют на вид потенциальной энергии.

При этом имеет место вариационная модель, для полностью симметричной модели (3), которая является идентичной и модели Миндлина I и модели Миндлина II. Для этой всегда корректной модели тензор моментов третьего ранга симметричен по первой и второй парам индексов в тройках индексов.

Далее рассматривается проблема важности соблюдения условий симметрии по порядку дифференцирования, как необходимых условий отсутствия полей дефектов в градиентной теории упругости.

Рассматривая вариацию градиентной части потенциальной энергии строится условие корректности для вариационной формы плотности потенциальной энергии градиентных моделей. Принимается, что градиентная модель является корректной, если в краевых условиях не входят физически и энергетически несущественные компоненты модулей упругости A_{ijklmn}^a и, соответственно, несимметричные по последним индексам тензор моментов $\tilde{\mu}_{ijk}$.

Устанавливается структура возможных паразитных составляющих - невязок в статических граничных условиях (при вариации перемещений) и статических условиях на контурах ребер для реберных сил, которые могут появиться если не требовать дополнительно симметрии по порядку дифференцирования от компонент тензора шестого ранга. Показывается, что постановка краевой задачи без учета симметрии тензора модулей упругости по индексам дифференцирования может приводить к погрешностям за счет возможного появления в краевых условиях физически и энергетически несущественных составляющих модулей упругости, которые могут принимать любые значения.

Доказано, что для исключения паразитных внутренних сил в граничных условиях следует требовать выполнения следующего условия корректности

$$B = \delta w_g^{full} - \delta w_g^s = - \int_F [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mnk} n_j + (C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF - \oint [C_{ijklmn}^{-+} u_{l,mn} n_k v_j] \delta u_i ds = 0 \quad (4)$$

здесь, в (4) использовано следующее разложение тензора шестого ранга:

$$C_{ijkml} = C_{ijkml}^{++} + C_{ijkml}^{+-} + C_{ijkml}^{-+} + C_{ijkml}^{--}$$

где верхние индексы обозначают симметрию по порядку дифференцирования в первой и во второй тройках индексов.

Модули, входящие в состав тензоров C_{ijkl}^{+-} , C_{ijkl}^{-+} , C_{ijkl}^{--} , не ограничены никакими связями, в том числе потенциальностью.

Проблема возможной некорректности устраняется если все компоненты тензора модулей упругости шестого ранга прежде всего удовлетворяют условию потенциальности. Однако в силу физической «невидимости» указанных составляющих невозможно проконтролировать свойство потенциальности этих компонент. Можно лишь в конце при построении решения проконтролировать симметрию, например, тензоров моментов или использовать условие (4).

Показано, что паразитные напряжения связаны с величиной C_{ijkl}^{-+} и могут формально появляться лишь в краевых условиях для напряжений на поверхности тела и ребрах. Указан также следующий конструктивный критерий корректности: если краевые статические условия формулируются в усилиях и моментах, то они и для вектора сил на поверхности и для вектора менисковых сил на контурах должны быть записаны только через симметричную составляющую тензора моментов относительно последних индексов $\hat{\mu}_{ij}$.

В третьей главе приведены примеры сингулярных задач упругости для изотропной круглой мембраны, задачи Фламанта и Буссенеско, штампа, трещин.

Отмечается, что сингулярность решений для напряжений в линейной теории упругости в вершине трещины исключает применение традиционных критериев прочности тел с концентрацией напряжений. Более того, полученные формально сингулярные решения не только противоречат физическому смыслу, но и постулатам теории упругости. Градиентная упругость позволяет описывать размерные эффекты и дает регуляризацию сингулярных решений дифференциальных уравнений теории упругости. Приведены регулярные решения и описана регуляризация.

Особенность представления напряжений в уравнениях равновесия $(\tau_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} = 0$ модели а также в статических граничных условиях, записанных через тензор «классических» напряжений, позволяет ввести следующую

процедуру: сначала предлагается решать задачу классической упругости для обобщенных напряжений σ_{ij} , а затем находить локальные поля, решая соответствующие уравнения Гельмгольца $\tau_{ij} - s^2 \Delta \tau_{ij} = \sigma_{ij}$

Рассматривается процедура формальной регуляризации, основанная на теореме о радиальных множителях. Пусть рассматривается решение уравнения $\phi - s^2 \nabla^2 \phi = \phi_0$, где функция ϕ_0 имеет сингулярность заданного специального вида.

Для регуляризации, т.е. построения регулярного решения записанного уравнения, используется утверждение о компенсации сингулярности функции. Требуется скомпенсировать сингулярности за счет разложения искомого решения по фундаментальным решениям уравнения Гельмгольца. Утверждается, что можно определить такие фундаментальные системы функций, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца и имеют особенность в начале координат порядка $w^{-k/2}$, $w = x + iy$ или $w = r e^{i\theta}$.

Такие функции, со свойством затухающих решений на бесконечности можно построить с помощью радиальных множителей. Соответствующая фундаментальная система функций уравнения Гельмгольца будет иметь вид $\chi_n(w, \bar{w}) = \hat{h}_n(r) w^{-n-1/2}$.

Запишем несколько первых функций:

$$\hat{h}_0(r) = e^{-r/s}, \quad \hat{h}_1(r) = -\frac{1}{2}(r/s + 1)e^{-r/s}, \quad \hat{h}_2(r) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{r}{s} + 1\right)\right)e^{-r/s}.$$

Так как рассматривается однородное уравнение Гельмгольца то частные решения уравнения Гельмгольца, позволяющие компенсировать сингулярности $w^{-1/2}$, $w^{-3/2}$, $w^{-5/2}$ имеют соответственно вид:

$$\chi_0 = e^{-r/s} w^{-1/2}, \quad \chi_1 = (r/s + 1)e^{-r/s} w^{-3/2}, \quad \chi_2 = \left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{r}{s} + 1\right)\right)e^{-r/s} w^{-5/2}.$$

Таким образом, если функция, стоящая в правой части, имеет сингулярность $\sim w^{-1/2}$, то компенсирующее разложение решения однородного уравнения имеет вид $\chi^\pm = e^{-r/s} (w^\pm)^{-1/2}$. Общее решение уравнения записывается в виде суммы частного решения и общего решения, представленного в виде разложения по

системе фундаментальных решений, амплитуда которых выбирается так, чтобы скомпенсировать сингулярность. В рассматриваемом случае, если $\phi_0 = w^{-1/2}$ регулярное решение имеет вид $\phi = (1 - e^{-r/s})(w)^{-1/2}$. Эта идея реализуется в частных задачах классической упругости, рассмотренных ранее.

Далее в работе описываются некоторые регулярные обобщенные решения сингулярных задач классической упругости и градиентное решение. В этой части работы впервые приведено точное решение задачи о конечной трещине первой моды, с использованием комплекснозначных представлений, и техники радиальных множителей, получено асимптотическое регулярное решение.

Возможность регуляризации сингулярных задач упругости и перевода их в класс регулярных задач теории упругости позволяет для оценки прочности пластин с трещинами использовать концепцию концентрации напряжений, которая была впервые реализована в работах Васильева и Лурье. Отсутствие сингулярностей позволяет использовать критерии прочности, чтобы выяснить при каких нагрузках будет иметь место разрушение.

Однако использование градиентных теорий приводит к тому, что решение зависит от дополнительного масштабного параметра модели. Возникает проблема связанная с определением этого параметра. Проведенные к настоящему времени исследования и экспериментальные работы показали, что масштабный параметр вместе с предельными прочностными характеристиками является постоянной материала и позволяет с высокой точностью решать проблему оценки прочности в рамках концепции концентрации напряжений.

Для реализации концепции сначала строится теоретическая зависимость максимальных нормированных напряжений максимальных напряжений от масштабного параметра, при этом максимальные напряжения нормируются на напряжения заданные формально на бесконечности, то есть это и есть коэффициент концентрации напряжений. Затем проводится эксперимент, из которого находится реальное значение коэффициента концентрации напряжения

(т.е. находится нагрузка, при которой происходит разрушение). Он откладывается на этом графике теоретической кривой концентрации напряжения (максимальных напряжений) и по нему находится параметр масштаба. Пример зависимости коэффициента концентрации напряжений от приведенного масштабного параметра $\lambda = c/s$, ($2c$ - длина трещины, s - параметр масштаба) приведена на рисунке 1.

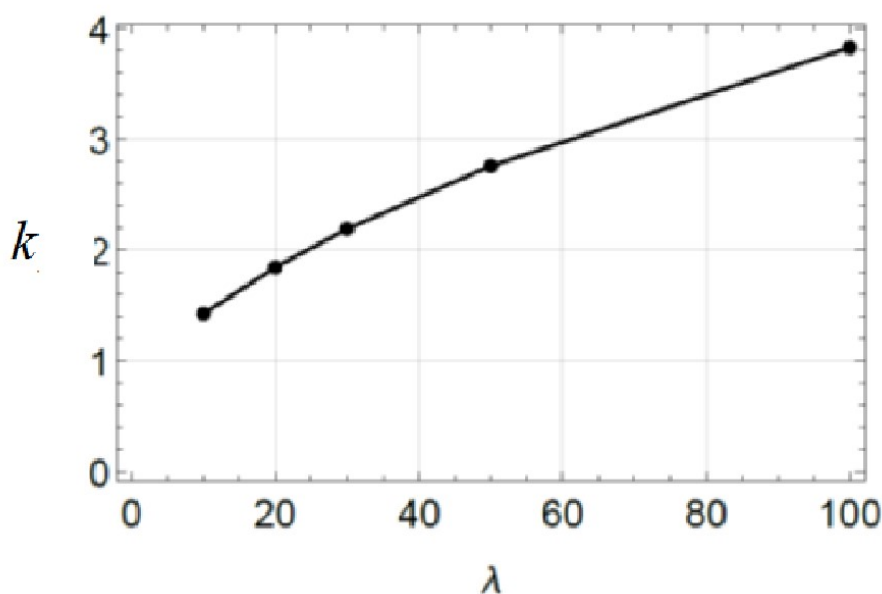


Рисунок 1– Теоретическая зависимость коэффициента концентрации напряжений

Сформулированная концепция позволяет осуществлять прогноз прочности в случае численной реализации решения для трещин в рамках градиентной модели. В данной работе это впервые делается для трещин смешанной моды с использованием численного моделирования деформации пластин с трещинами в рамках градиентной теории упругости. В этом случае численное решение позволяет также построить теоретическую кривую для коэффициента концентрации и используя ее найти параметр масштаба по данным экспериментам для одного из образцов. Иначе говоря, параметр масштаба подбирается так для данного образца, чтобы предельная нагрузка теоретического расчета совпала бы с экспериментальной. Далее параметр масштаба для данного материала считается известным, и методика позволяет прогнозировать прочность для иных размеров трещин.

В четвертой главе приведено численное моделирование для определения расположения точек зарождения трещин и углов их распространения. Для этого проводилось численное моделирование двух видов образцов. В этих случаях исследовалось влияние масштабного параметра на расположение концентратора напряжений (точку зарождения трещины), зависимость данного масштабного параметра от длины и угла поворота относительно приложенной нагрузки первоначально нанесенной трещины. Подбирается критерий прочности для описания зависимости коэффициента концентрации напряжений.

Численное моделирование производится на основе экспериментальных данных работы (A. R. Torabi, B. Bahrami, M. R. Ayatollahi Mixed mode I/II brittle fracture in V notched Brazilian disk specimens under negative mode I conditions, *Physical Mesomechanics*, volume 19, pages 332–348 (2016)) и на программном обеспечении Comsol Multiphysics. Численное моделирование реализовано в Comsol с использованием подхода, изложенного в работах Васильева, Лурье. Использован интерфейс WeakFormPDE для задания соотношений градиентной теории упругости в слабой формулировке. Решение строится с использованием смешанного метода конечных элементов, основанного на введении промежуточных переменных, определяющих компоненты тензора деформаций, для которых вводится отдельная аппроксимация. Таким образом, в Comsol задается пользовательская модель упругой среды, отвечающая структуре энергии деформаций градиентной теории упругости. Решения строятся в линейной формулировке для задачи плоского деформированного состояния. В расчетах используются треугольные элементы с аппроксимацией третьего порядка для всех переменных модели (перемещения и промежуточные переменные для деформаций).

Рассмотрены примеры экспериментальных данных, для которых проведено моделирование, и на основе известных разрушающих нагрузок и заданной геометрии образцов оценивается уровень концентрации напряжений. Дается оценка значений масштабных параметров для рассматриваемых материалов, подобранных так, что теоретические предельные характеристики совпали бы с

экспериментальными. Показывается, что эти параметры действительно можно считать постоянными для данного материала для любых трещин (и вырезов). Сопоставление расчетов и эксперимента проводится для разрушающих нагрузок и направления роста трещины.

В первой модели исследование проводилось на хрупком «бразильском» диске с V-образным вырезом, изготовленным из полиметилметакрилата. Общий вид диска приведен на рисунке 2.

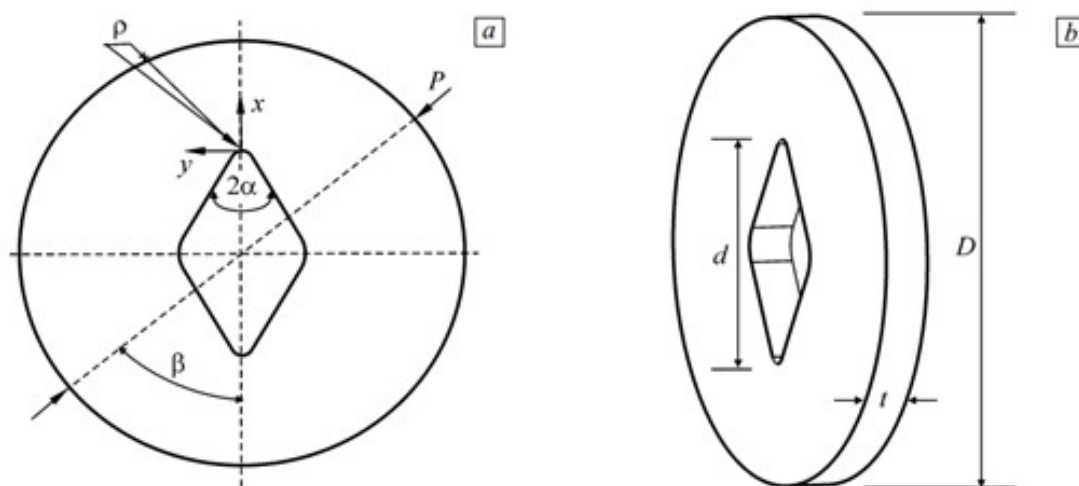


Рисунок 2 – «Бразильский» диск с V-образным вырезом: а – фронтальный вид, б – изометрия

Конечно-элементная модель с местным измельчением конечно-элементной сетки в радиусе закругления представлено на рисунке 3 является важным уточнением сетчатой модели в месте предполагаемого начала разрушения.

В процессе моделирования меняются такие характеристики как угол выреза, радиус скругления, а также сам поворот данного выреза относительно оси приложения нагрузки.

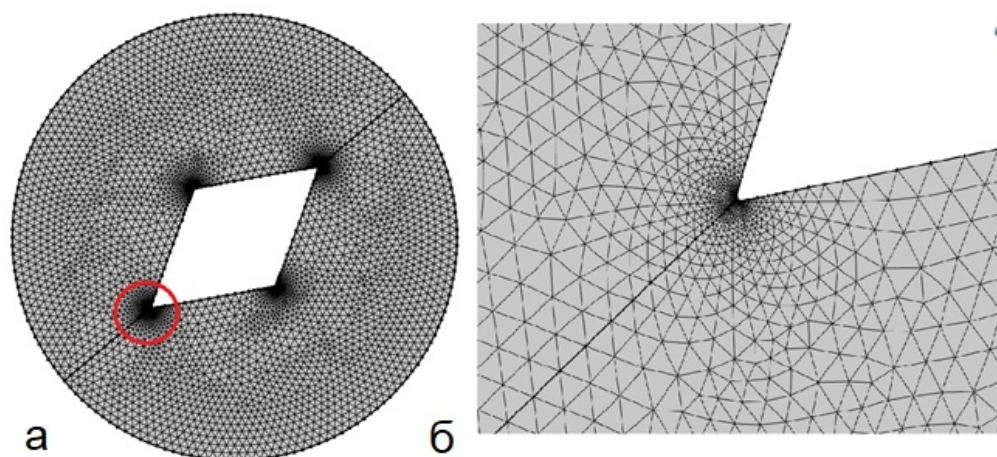


Рисунок 3 – Конечно элементная сетка; а – глобальная, б – местная

Лучшую сходимость (соответствие концепции концентрации напряжений) для малых углов наклона выреза β (варьируемый параметр модели) по результатам для различных параметров исследуемого образца показал критерий по максимальным главным напряжениям (рисунок 4). Дополнительным критерием для оценки смешанной моды нагружения может так же являться критерий по максимальным касательным напряжениям, но только при переходе на большие углы поворота β диска что соответствует большому отклонению трещины от направления приложения нагрузки.

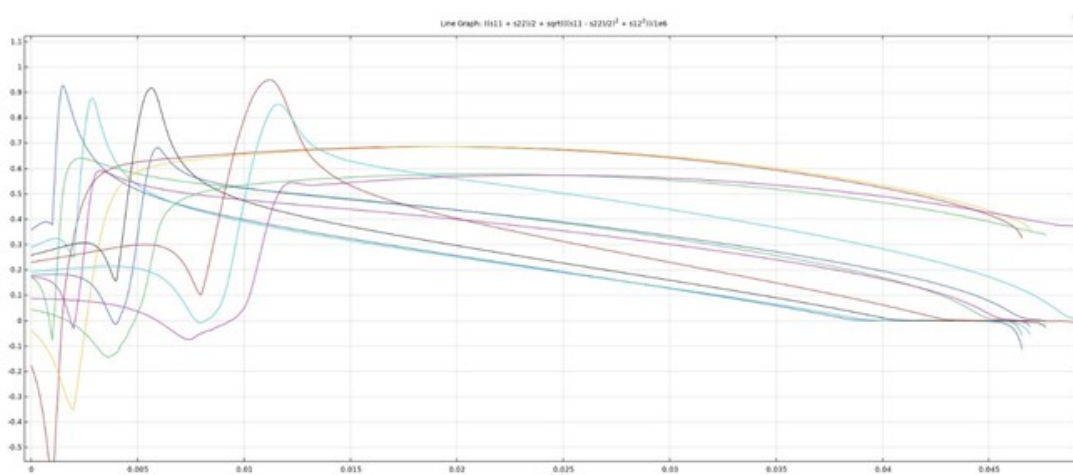


Рисунок 4 – Критерий по максимальным главным напряжениям примененный к разным точкам контура закругления; цветами показаны распределения значений максимальных главных напряжений в зависимости от поворота диска относительно оси приложения нагрузки

Для определения угла роста трещины использовались другие экспериментальные данные [S.S.Mousavi, M.R.M.Aliha, D.M.Imani, On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II, Polymer Testing Volume 81, January 2020, 106199]. В данной работе испытывалась пластина из того же материала подверженная трехточечному изгибу. Общий вид образца и схема нагружения приведена на рисунке 5. Конечно-элементная модель создана в том же программном обеспечении, с использованием тех же подходов, что и для задачи расчета концентратора напряжения «бразильского» диска.

Моделирование проводилось с углом отклонения первоначальной трещины равным 0, 15, 26, 33 и 39 градусам. Геометрические характеристики, обозначенные на рисунке 18 не варьировались и соответственно равны.

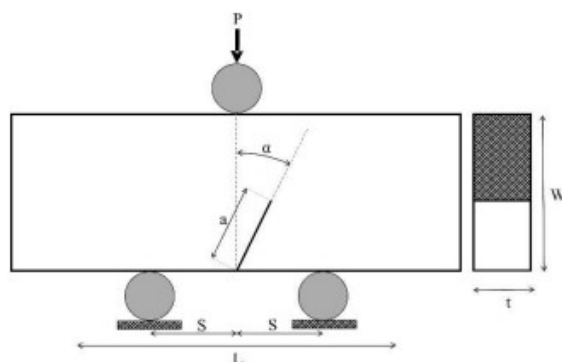


Рисунок 5 – Схема нагружения и тип образца

Конечно-элементная модель с местным измельчением конечно-элементной сетки в вершине трещины представлено на рисунке 6.

Для данного образца так же дополнительно анализируется влияние масштабного параметра и выбор критерия по напряжениям в зависимости от угла наклона первоначальной трещины и ее длины для определения направления развития трещины в соответствии с концепцией концентрации напряжений.

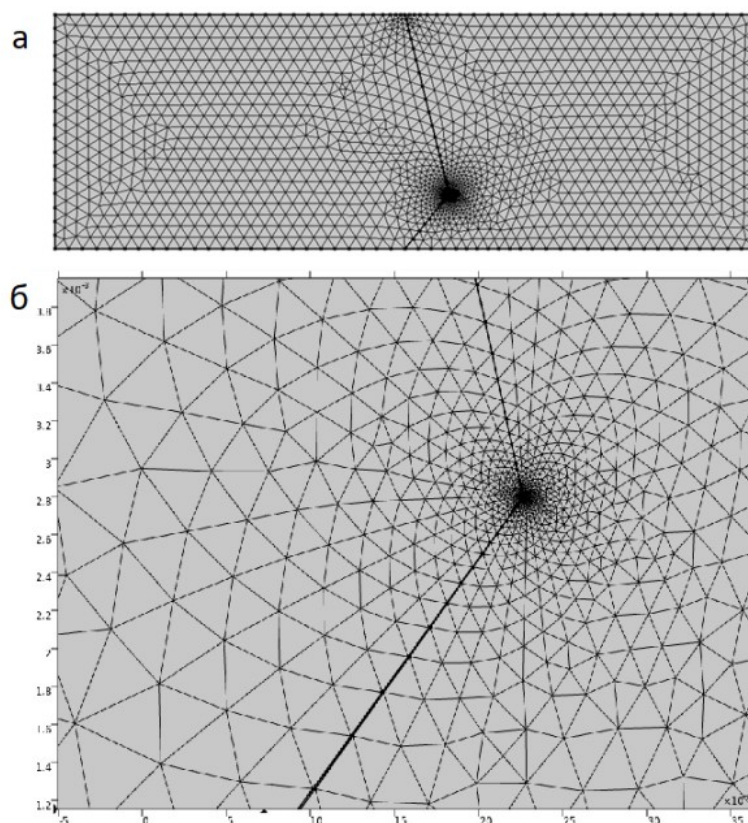


Рисунок 6 – Конечно-элементная сетка; а – по всему образцу; б – в вершине трещины

Оказалось, в этом случае снова (как и для предыдущей задачи), что масштабный параметр не зависит как от длины трещины, так и от его угла поворота. Так же было выяснено что, концепция концентрации напряжений показывает хорошее соответствие данным эксперимента, как для угла $\alpha_1=0^\circ$ соответствующему критерию по максимальным нормальным напряжениям σ_B (рисунок 7), так и для угла $\alpha_1=39^\circ$ по критерию по максимальных касательных напряжений τ_B (что соответствует чистому сдвигу (рисунок 8)).

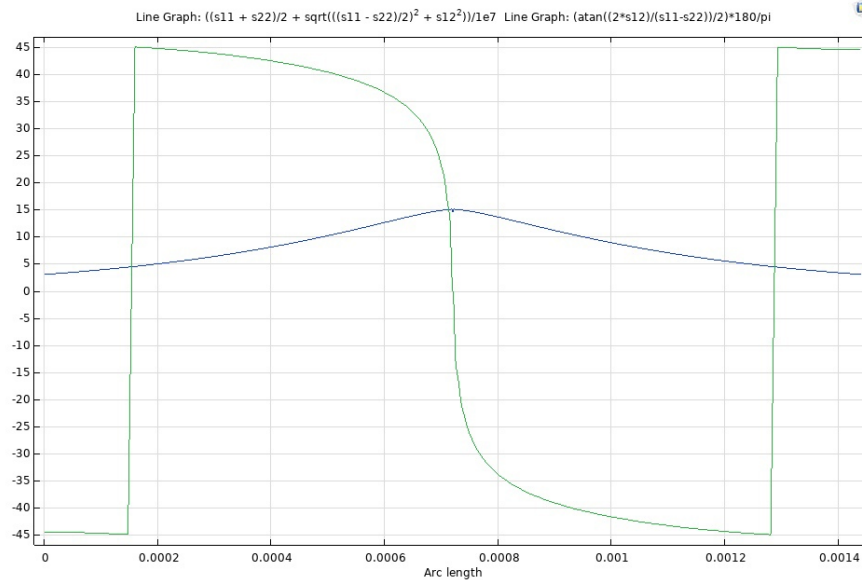


Рисунок 7 – Критерий по максимальным нормальным напряжениям примененный к разным точкам контура разреза; синим цветом по оси ординат откладывается распределение напряжений $\sigma_{max}/10e6$, зеленым – угол наиболее вероятного распространения трещины применительно к точке максимума нормальных напряжений

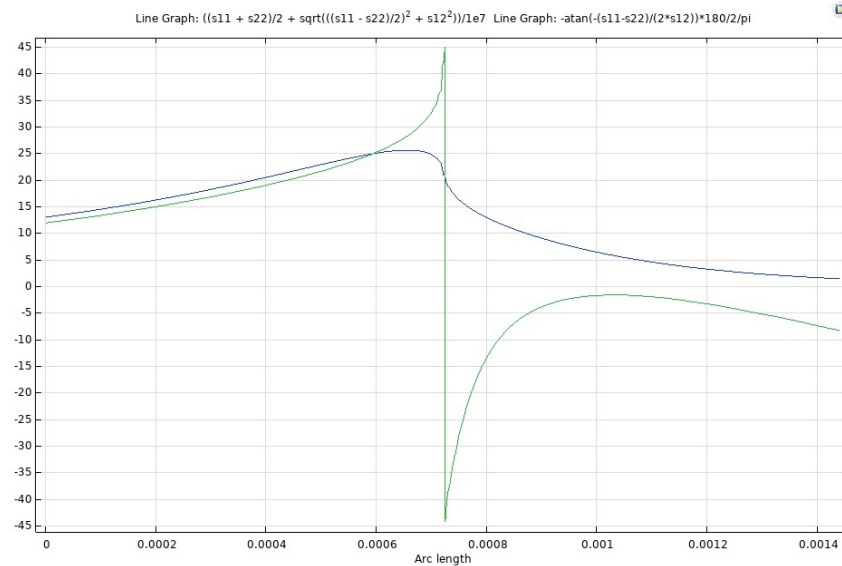


Рисунок 8 – Критерий по максимальным касательным напряжениям примененный к разным точкам контура разреза; синим цветом по оси ординат откладывается распределение напряжений $\tau_{max}/10e6$, зеленым – угол наиболее вероятного распространения трещины применительно к точке максимума касательных напряжений

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Установлено, что учет дополнительного признака симметрии по отношению к классическим теориям упругости в краевых условиях является существенным и определяет класс корректных моделей градиентной упругости. Установлена необходимость проверки корректности прикладных градиентных моделей упругости (за исключением модели Миндлина формы I).

2. Указан класс прикладных градиентных моделей, в которых для устранения ошибок условие симметрии по порядку дифференцирования должно всегда учитываться путем введения дополнительного требования симметрии к моментным напряжениям-это модели, где статические краевые условия ставятся на обобщенные напряжения (total stresses), входящие в уравнения равновесия не модифицируются моментными составляющими (векторные модели).

3. Рассмотрены особенности регуляризации сингулярностей в градиентной упругости и представлены численные модели трещин и вырезов, построенных в рамках градиентных моделей упругости. Предложен метод прогноза разрушающих нагрузок для пластин, ослабленных трещинами, основанный на концепции концентрации напряжений и техники определения масштабных параметров по результатам экспериментов.

4. Концепция концентрации напряжений развита на случай трещин смешанной моды и на случай вырезов с закруглениями в вершине. Предложен способ прогноза разрушающей нагрузки, прогноза направления развития трещин смешанной моды, и прогноза области возникновения макротрещины. Показано, что развиваемый метод, основанный на сопоставлений результатов численного моделирования и данных экспериментов, позволяет прогнозировать углы роста трещины в условиях состояний, близких к моде I или моде II, по критериям максимальных главных и максимальных касательных напряжений, соответственно. Для нагружения по смешанной моде необходимо формулировать комбинированные критерии, что является задачей для будущей работы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Лурье С.А., Белов П.А., Шрамко К.К., Кривень Г.И. О корректности математической постановки краевых задач в градиентной упругости // Механика композиционных материалов и конструкций, 2021, Т.27, №4, С.457-468.
2. Лурье С.А., Шрамко К.К., Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости, Труды МАИ, 2021, Выпуск № 120

Статьи в журналах, индексируемых Scopus:

3. Sergey Lurie, Yury Solyaev, Konstantin Shramko, Comparison between the Mori-Tanaka and generalized self-consistent methods in the framework of anti-plane strain inclusion problem in strain gradient elasticity. April 2018, Mechanics of Materials 122.