

УДК 531.11

Исследование хаотических режимов движения КА с тросом, совершающим малые колебания около местной вертикали

А.С. Ледков, Д.И. Дюков

Аннотация

В статье исследуется движение механической системы, состоящей из космического аппарата (КА), невесомого упругого троса и груза. Космический аппарат рассматривается как твердое тело, а груз – как материальная точка. Сравнивается хаотическое движение КА в случае вертикального троса и при наличии малых колебаний троса в окрестности устойчивого радиального положения. Показано, что наличие малых колебаний вызывает увеличение толщины хаотического слоя и размывание регулярных траекторий на сечениях Пуанкаре, но не приводит к качественному изменению картины, полученной для случая вертикального троса. Исследовано движение КА в случае схода троса со связи. Показано, что наличие участков свободного движения троса и груза приводит к хаотизации вращательного движения КА.

Ключевые слова:

космическая тросовая система; круговая орбита; хаос; бифуркация; сечения Пуанкаре

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №12-01-31114 мол_а).

Постановка задачи

Динамика космических тросовых систем (КТС) – перспективное направление современной механики космического полета. В научной литературе обсуждается большое количество проектов, включающих в себя космические тросы. В монографии [1] отмечается, что наиболее близкими к практической реализации являются КТС предполагающие нахождение системы в радиальном положении. Например, с помощью радиально

ориентированной КТС можно осуществлять зондирование атмосферы Земли на высотах порядка 100-120 км. Для метеорологических зондов и самолетов эта высота слишком велика, а спутники из-за влияния аэродинамических сил могут находиться на ней слишком короткое время [2, 3]. Радиальные КТС составляют основу космических эскалаторов – транспортных систем, предназначенных для подъема и спуска грузов с орбиты. Выводимый на орбиту или спускаемый груз стыкуется с одним из концов эскалатора и с помощью подъемника, который может двигаться вдоль троса, перетягивается на другой конец. Там он отсоединяется и продолжает свободное движение [4]. Радиальные КТС предлагается использовать в качестве основного несущего элемента для различных солнечных космических электростанций [5]. Проводящие электрический ток радиальные КТС могут быть использованы для создания работающей на сверхнизких частотах системы радиооповещения [6].

В научной литературе хорошо проработан вопрос исследования динамики радиально-ориентированной КТС, состоящей из двух материальных точек связанных упругим тросом [2]. В случае если соединенные тросом объекты рассматриваются как твердые тела, поведение системы существенно усложняется. Например, в [7] показано, что упругие колебания вертикально удерживаемого троса могут стать причиной возникновения хаотического движения КА, что в свою очередь может привести к наматыванию троса на КА, поломке антенн, разрыву троса и другим нежелательным последствиям. Полученные в [7] результаты справедливы при допущении, что трос все время остается ориентированным вдоль местной вертикали. На практике, вследствие действия на систему различных возмущений и колебаний КА, трос совершает колебания около устойчивого радиального положения равновесия [8]. Поэтому актуальной является задача проверки полученных в работе [7] результатов для колеблющегося около радиального положения троса.

Целью работы является исследование хаотических режимов движения КА с прикрепленной тросовой системой, которая совершает колебания в окрестности устойчивого радиального положения.

Математическая модель

Рассмотрим механическую систему, состоящую из КА, невесомого упругого троса и груза (рисунок 1). КА представляет собой твердое тело массой m_1 с центром масс в точке D_1 , а груз – материальную точку D_2 массой m_2 . A, B, C – главные моменты инерции КА.

Будем считать, что центр масс КА движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu r^{-3}}$, где μ – гравитационный параметр, r – геоцентрическое расстояние. В

процессе движения на КА действуют гравитационный момент и момент от силы натяжения троса. Демпфирующими свойствами троса будем пренебрегать.

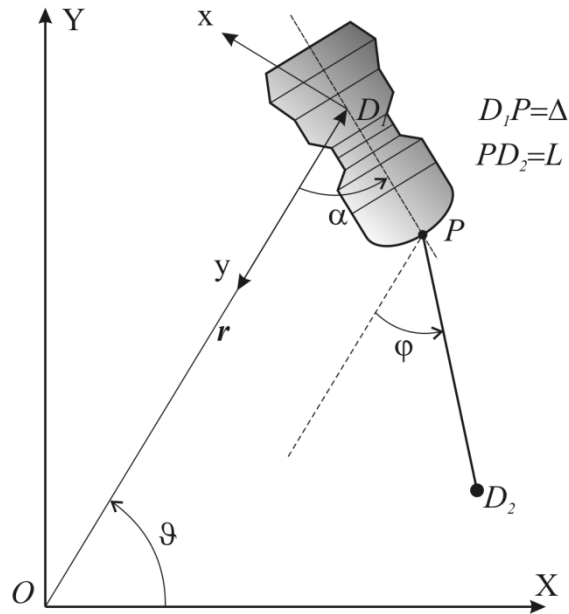


Рисунок 1 – Космическая тросовая система

В качестве обобщенных координат выберем угол отклонения оси КА от местной вертикали α , угол отклонения троса от местной вертикали КА φ , длину троса l . В [9] для описанной механической системы записана функция Лагранжа

$$L = \frac{m_1 r^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2} C (\dot{\alpha} + \omega)^2 + \frac{m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} + \omega^2 r^2 m_1 + \frac{m_2 \omega^2 r^3}{r_2} - \frac{3}{2} \omega^2 (A - B) \cos^2 \alpha - \frac{c}{2} (l - l_0)^2, \quad (1)$$

где x_2, y_2 – координаты груза в инерциальной системе координат OXY :

$$x_2 = r \cos \vartheta - \Delta \cos(\alpha + \vartheta) - l \cos(\varphi + \vartheta),$$

$$y_2 = r \sin \vartheta - \Delta \sin(\alpha + \vartheta) - l \sin(\varphi + \vartheta),$$

$\vartheta = \omega t$ – угол истинной аномалии, Δ – расстояние от центра масс КА до точки крепления троса, $c = ES/l_0$ – жесткость троса, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения троса, l_0 – длина недеформированного троса.

Функции (1) соответствуют уравнения Лагранжа второго рода [9]:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{2} \omega^2 \frac{(A - B)}{C} \sin 2\alpha - \frac{\Delta c}{C} (l - l_0) \sin(\alpha - \varphi),$$

$$\ddot{l} = -\frac{c(l - l_0)}{2C} \left(\Delta^2 + 2 \frac{C}{m_2} - \Delta^2 \cos(2\alpha - 2\varphi) \right) + 3\omega^2 \cos \varphi (l \cos \varphi + \Delta \cos \alpha) + 2l\omega\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\Delta(\dot{\alpha} + 2\omega) - \cos(\alpha - \varphi) + \dot{\varphi}^2 l + \frac{3\Delta\omega^2 \sin 2\alpha \sin(\alpha - \varphi)}{2C}, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\Delta^2 c}{2lC} (l - l_0) \sin(2\alpha - 2\varphi) + \frac{\dot{\alpha}\Delta(\dot{\alpha} + 2\omega) \sin(\alpha - \varphi)}{l} - \frac{3\omega^2 \sin \varphi (l \cos \varphi + \Delta \cos \alpha)}{l} - \frac{2\dot{l}(\omega + \dot{\varphi})}{l} - \frac{3\Delta\omega^2(A - B) \sin 2\alpha}{2lC}.$$

Для вертикального троса ($\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$) в случае, когда $\Delta \ll l_0 \ll r$ уравнения (2) принимают вид [9]:

$$\ddot{\alpha} = -a \sin \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha \sin \Omega t, \quad \ddot{l} + \Omega^2 l = \frac{ES}{m_2} \quad (3)$$

где $a = \frac{\Delta}{c} \frac{3\omega^2 ES}{\Omega^2}$, $b = 3\omega^2 \frac{B-A}{c}$, $\varepsilon = \frac{\Delta V_0 ES}{c \Omega l_0}$, $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m_2} - 3\omega^2}$. Динамику системы определяет соотношение коэффициентов a, b, ε , которые в свою очередь зависят от характеристик КТС. Вид фазового портрета невозмущенной ($\varepsilon = 0$) системы зависит от параметра:

$$\gamma = \frac{B - A}{\Delta} \left(\frac{1}{m_2 l_0} - \frac{3\omega^2}{ES} \right). \quad (4)$$

На рисунке 2 приведена бифуркационная диаграмма уравнений (3), на которой выделены три характерные зоны $\gamma \in (-\infty; -1)$, $\gamma \in [-1; 1]$, $\gamma \in (1; +\infty)$ и показаны соответствующие им фазовые портреты. Сплошными линиями на диаграмме показаны положения особых точек типа центр, пунктирными линиями – типа седло. Белыми кругами показаны точки бифуркации. При $\gamma < -1$ фазовый портрет имеет два центра и три седловые точки, $-1 \leq \gamma \leq 1$ – один центр и две седловые точки, $\gamma > 1$ – два седла и три центра.

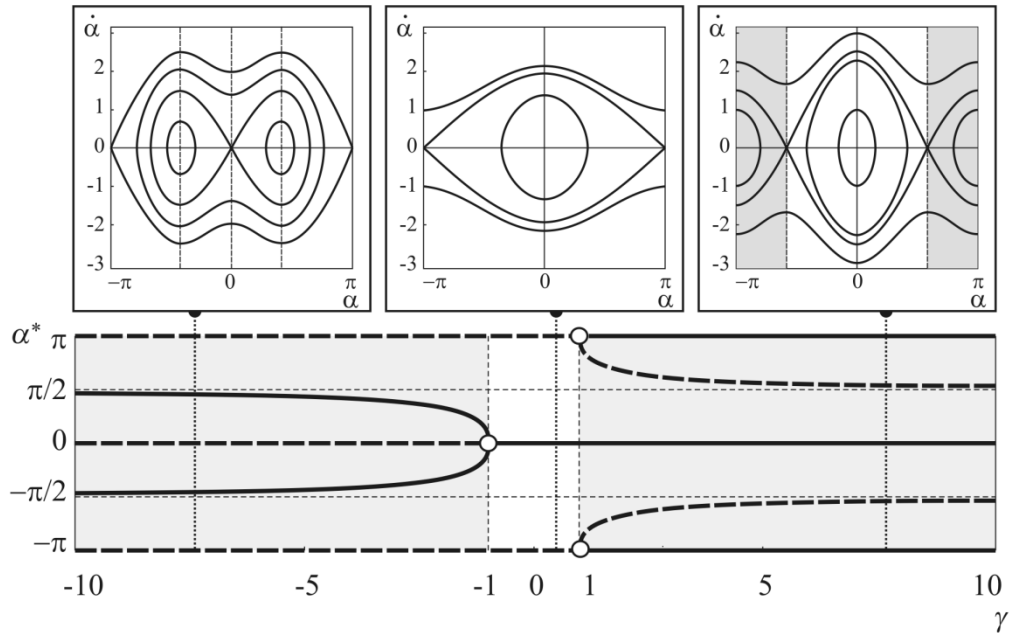


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма и вид фазовых портретов для невозмущенной системы (6) [7]

Исследуем движение КА в случае, когда трос совершает малые колебания в окрестности устойчивого радиального положения. Для этого проведем линеаризацию системы (5) в окрестности точки $\varphi = 0$. Учитывая, что $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, перепишем (2) в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= -\frac{b}{2} \sin 2\alpha - \frac{\Delta c}{C} (l - l_0) (\sin \alpha - \varphi \cos \alpha), \\ \ddot{l} &= -\frac{c(l - l_0)}{2C} \left(\Delta^2 + 2\frac{C}{m_2} - \Delta^2 (\cos 2\alpha + 2\varphi \sin 2\alpha) \right) + 3\omega^2 (l + \Delta \cos \alpha) + 2l\omega\dot{\varphi} + \\ &\quad + \dot{\alpha}\Delta(\dot{\alpha} + 2\omega)(\cos \alpha + \varphi \sin \alpha) + \dot{\varphi}^2 l + \frac{3\Delta\omega^2 \sin 2\alpha (\sin \alpha - \varphi \cos \alpha)}{2C}, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\Delta^2 c}{2lC} (l - l_0) (\sin 2\alpha - 2\varphi \cos 2\alpha) + \frac{\dot{\alpha}\Delta(\dot{\alpha} + 2\omega)(\sin \alpha - \varphi \cos \alpha)}{l} - \frac{2\dot{l}(\omega + \dot{\varphi})}{l} + \\ &\quad + \frac{\Delta b \sin 2\alpha}{2l} - \frac{3\omega^2 \varphi (l + \Delta \cos \alpha)}{l}. \end{aligned} \quad (5)$$

Моделирование

Для анализа движения нелинейных механических систем в хаотической динамике широко используется метод сечений Пуанкаре, позволяющий качественно оценить наличие хаоса в системе. Технически построение сечений выглядит следующим образом: берется ограниченный набор начальных точек на фазовой плоскости. Затем для каждой из точек производится численное интегрирование системы (5). На фазовую плоскость наносятся только точки траектории, в которых она пересекает секущую плоскость. В рассматриваемом примере упругие колебания троса носят периодический характер, поэтому в качестве условия построения секущих плоскостей можно принять условие прохождения системой точек максимума продольных колебаний троса: $\dot{l} = 0, l > l_0$. Увеличивая конечное время расчета можно увеличить число точек на полученном в результате сечении. Аналогичного результата можно добиться, увеличивая число начальных точек. Полученное таким образом сечение позволяет сделать вывод о наличии хаоса в системе. Если точки на сечении Пуанкаре образуют четкие линии, можно сказать, что хаоса в системе нет. Если точки образуют равномерное облако, то в системе присутствует хаос.

В ходе исследования была проведена серия численных расчетов для систем с различными параметрами, которые показали, что учет малых колебаний троса в окрестности устойчивого радиального положения равновесия приводит к увеличению толщины хаотического слоя. Наблюдаемые в системах с вертикальным тросом регулярные траектории

при наличии малых колебаний размываются, но не переходят в хаотический слой в окрестности сепаратрис. Чем больше амплитуда колебаний троса, тем более размытой получается картина и тем больше толщина хаотического слоя в окрестности сепаратрис.

В качестве примера построим сечения Пуанкаре для системы с параметрами, соответствующими примеру, приведенному в [7]: $m_2 = 100$ кг, $A = 2500$ кг · м², $B = C = 10000$ кг · м², $\Delta = 2$ м, $l_0 = 30$ км, $ES = 5000$ Н.

Угловая скорость КА $\omega = 1,172 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $r = 6628$ км – геоцентрическое расстояние. Указанным начальным условиям соответствуют коэффициенты $a = 2,473 \cdot 10^{-4}$, $b = 2,884 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon = 1,826 \cdot 10^{-6}$. Построим сечения Пуанкаре (рисунки 3-5) для γ , соответствующие различным областям на бифуркационной диаграмме (рисунок 2). Параметры для γ показаны в таблице 1. Каждый из рисунков содержит три сечения Пуанкаре. Сечения a получены с помощью системы (3) для вертикально удерживаемого троса; b – с помощью системы (5) для случая, когда в начальный момент времени КТС ориентирована вдоль местной вертикали $\varphi_0 = 0$; v – с помощью системы (5), когда в начальный момент времени трос был отклонен на угол $\varphi_0 = 0,05$.

Параметры расчетов

Табл.1

	$A,$ кг · м ²	$B,$ кг · м ²	$\Delta,$ м	$m_2,$ кг	$V_0,$ м/с	a	b	ε
$\gamma = -2,7597$	500000	3000	0,3	20	0	$7,42 \cdot 10^{-5}$	$-2,048 \cdot 10^{-4}$	0
$\gamma = 0,0125$	2500	10000	2	10	0	$2,47 \cdot 10^{-6}$	$3,091 \cdot 10^{-6}$	0
$\gamma = 2,7597$	3000	500000	0,3	20	0	$7,42 \cdot 10^{-5}$	$2,048 \cdot 10^{-4}$	0

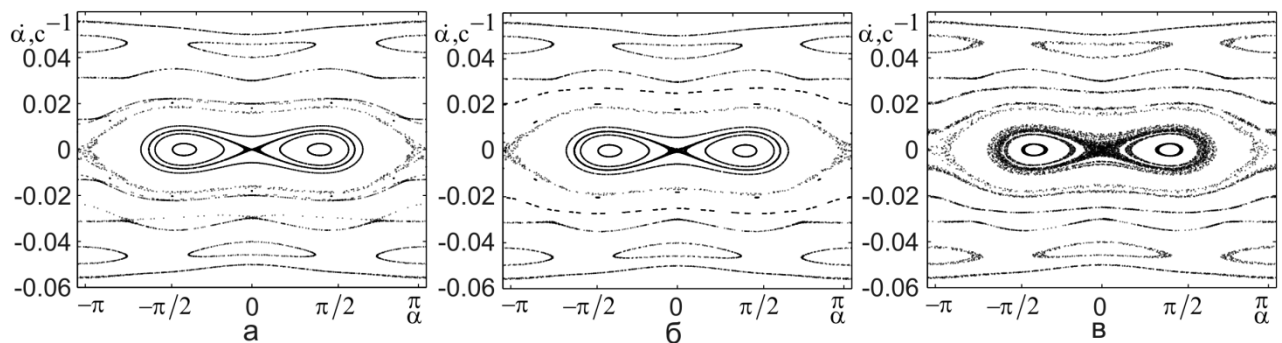


Рисунок 3 – Сечения Пуанкаре для $\gamma = -2,7597$

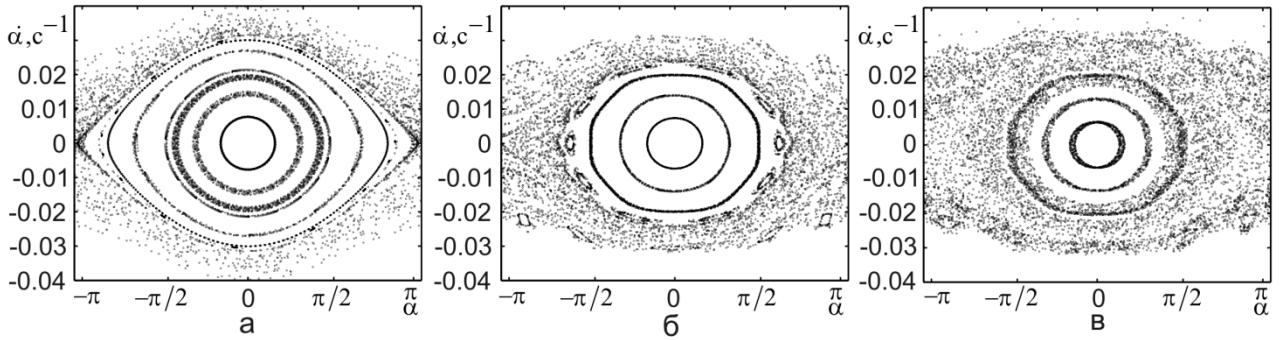


Рисунок 4 – Сечения Пуанкаре для $\gamma = 0,0125$

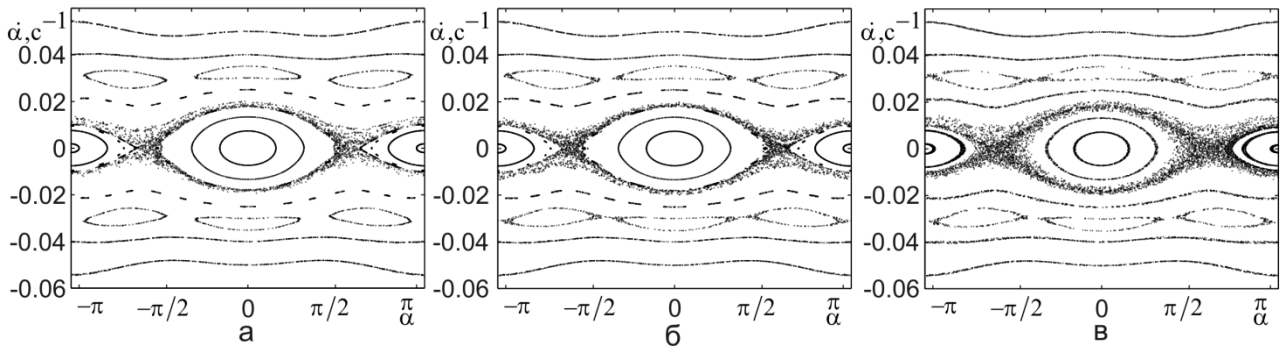


Рисунок 5 – Сечения Пуанкаре для $\gamma = 0,7597$

На всех сечениях виден ярко выраженный хаотический слой в окрестности сепаратрис и регулярные траектории в отдалении от них. Из рисунков видно, что учет малых колебаний троса приводит к размыванию сечений и увеличению толщины хаотического слоя, но не приводит к качественному изменению картины полученной для случая вертикального троса.

Движение КА в случае схода со связи

Выше были рассмотрены случаи, в которых трос в процессе движения все время оставался натянут. В случае, когда в системе присутствуют области свободного движения, наблюдается картина принципиально иного характера (рисунок 6). На рисунке 7 показан график изменения угла α , соответствующий такому случаю. После схода со связи, когда $l < l_0$, груз и КА начинают двигаться независимо друг от друга. В моделях (4), (5) это обстоятельство можно учесть, если задать жесткость, как кусочно-заданную функцию:

$$c = \begin{cases} ES/l_0, & \text{при } l > l_0, \\ 0, & \text{при } l \leq l_0. \end{cases}$$

Сход со связи приводит к хаотизации движения КА. Рассмотрим механизм этого явления. Пусть в начальный момент времени ось КА отклонена от радиального положения (рисунок 8а) и трос натянут. Сила натяжения T создает момент, который стремится вернуть КА в вертикальное положение и КА начинает поворачиваться в сторону местной вертикали. Если трос все время остается натянутым, то после прохождения КА местной вертикали

момент от силы натяжения троса сменит знак, и будет препятствовать дальнейшему увеличению угла α (рисунок 8б). Через некоторое время вращение остановится и начнется поворот в обратную сторону (рисунок 8в). В случае, если под действием момента от силы натяжения КА начнет вращение в направлении местной вертикали, а потом произойдет сход со связи, то КА продолжит двигаться по инерции (рисунок 8г). Поскольку помимо гравитационного момента нет других факторов, способных погасить его угловую скорость, КА может перейти во вращение (рисунок 8д), которое будет продолжаться до тех пор, пока трос снова не натянется и не возникнет момент силы натяжения.

На показанном на рисунке 6 сечении выделяются две области концентрации точек. Их наличие объясняется способом выбора секущих плоскостей при построении сечений Пуанкаре. Сечения соответствуют моментам, когда расстояние между точкой крепления троса и грузом максимально. Допустим КА и груз двигались свободно, затем трос начал натягиваться, увлекая за собой КА. Трос достигает максимальной длины, когда КА уже прошел вертикальное положение и потянул трос за собой, то есть угол α близок к нулю. При этом, в окрестности вертикального положения КА имеет ненулевую скорость, поэтому концентрированные облака точек смещены с оси абсцисс ближе к краям хаотической области движения.

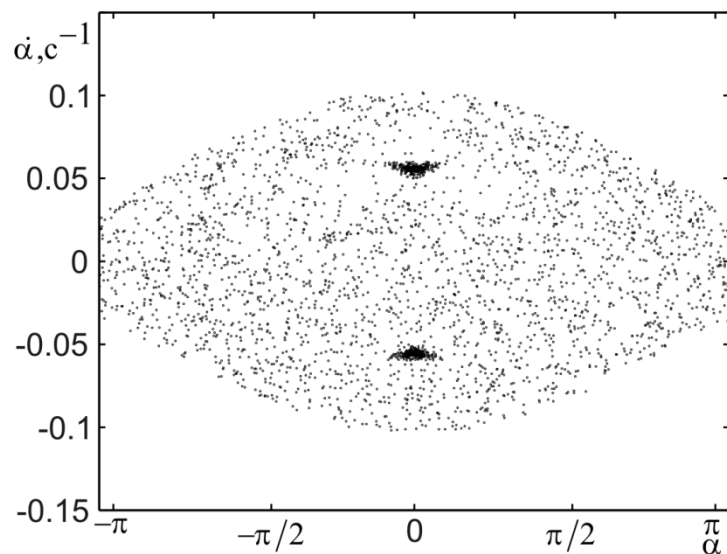


Рисунок 6 – Сечение Пуанкаре в случае полного хаоса

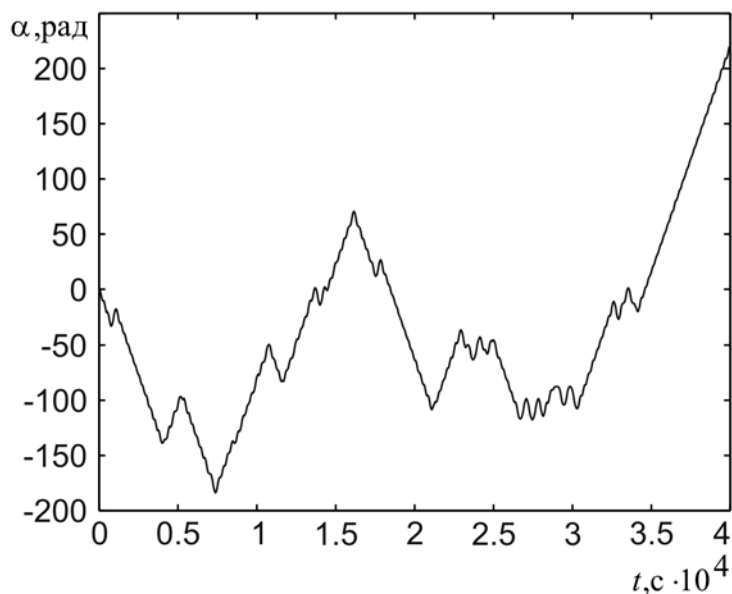


Рисунок 7 – Зависимость угла α от времени

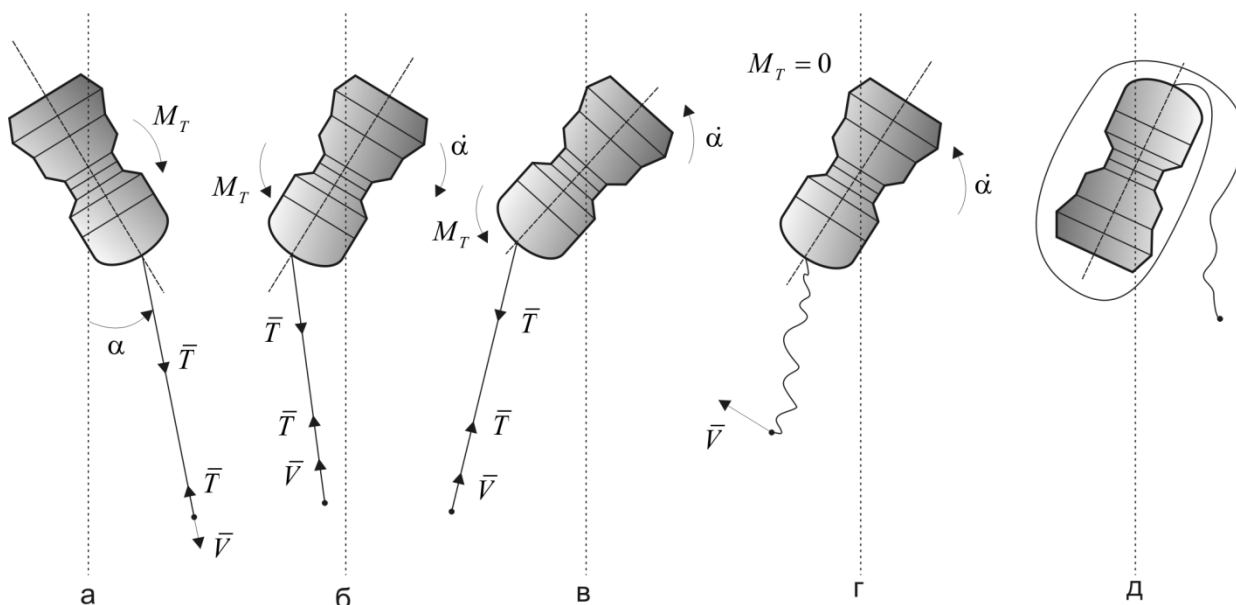


Рисунок 8 – Сход со связи

Заключение

В статье исследовано движение КТС, состоящей из КА, троса и груза. Проведено сравнение хаотического движения КА в случае вертикального троса и при наличии малых колебаний в окрестности устойчивого радиального положения. Показано, что учет малых колебаний троса приводит к размыванию регулярных траекторий на сечениях Пуанкаре и увеличению толщины хаотического слоя. Рассмотрено движение КА в случае схода троса со связи. Показано, что наличие участков свободного движения КА и груза приводит к хаотизации вращательного движения КА.

Библиографический список

1. Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 560 с.
2. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. – М.: Наука, 1990. – 329 с.
3. Иванов В.А. Тросовые системы в космосе // Авиация и космонавтика. 1984. № 5. С. 43–44.
4. Bekey I., Penzo P.A. Tether propulsion // Aerospace America. 1986. Vol. 24. №7. P. 40-43.
5. Cantafio L.J., Chobotov V.A., Wolfe M.G. Photovoltaic gravitationally stabilised, solid state satellite solar power station // Journal of Energy. 1977. Vol.1. №6. P.352-363.
6. Nolan M.B., Hudson R., Sisson J.M. Shuttle tethered satellite program // 35-th International Astronautical Congress, Lausanne, Switzerland, October 7-13, 1984. pp. 84-437.
7. Асланов В.С., Ледков А.С. Хаотические колебания КА с упругим радиально ориентированным тросом // Космические исследования. 2012. Т.50. № 2. С. 194-204.
8. Садов Ю.А. Формы равновесия гибкого троса в плоскости круговой орбиты. 0- и 1-параметрические семейства // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2001. № 68. С. 1–29.
9. Асланов В.С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // Прикладная математика и механика. 2010. Т.74. Вып. 4. С. 582-593.

Сведения об авторах

Ледков Александр Сергеевич, докторант, доцент кафедры теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева, кандидат технических наук. Самара, Московское шоссе, 34, 5 корпус, аудитория 429, индекс 443086. Телефон 89093428886, E-mail: ledkov@inbox.ru

Дюков Дмитрий Игоревич, аспирант, инженер кафедры теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. Самара, Московское шоссе, 34, 5 корпус, аудитория 429, индекс 443086. Телефон 89277452356, E-mail: dmitry_dyukov@mail.ru