УДК 629.7.018.4

Метод статистической обработки случайного вибрационного процесса при экспериментальной отработке летательных аппаратов

Маслов Г.А.*, Лапушкин В.Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: georgiymaslov@gmail.com*

Аннотация

Рассмотрен метод статистической обработки случайного вибрационного процесса (СВП)**. Приведена статистическая модель СВП.** Статистическая модель СВП комплектуется из ансамбля выборочных функций, каждая из которых является энергетическим спектром выборочной реализации СВП. СВП с энергетическим спектром, лежащим в приведённых доверительных интервалах, действует на бортовое оборудование в течение времени, равного произведению соответствующей вероятности по этим неравенствам на время эксплуатации этого оборудования.

Ключевые слова: случайный вибрационный процесс, статистическая модель, усреднения**,** энергетический спектр**.**

Рассматриваемый метод статистической обработки случайного вибрационного процесса (СВП) возможно использовать для решения четырех прикладных задач.

1. Измерение случайного вибрационного процесса на подвижных объектах в

местах установки бортового оборудования его комплектующих элементов. Математическая обработка записей СВП, получаемых при большом числе экспериментов. Исследование статистических параметров СВП, характеризующих его временное частотное и энергетическое состояние.

2. Аналитическое формирование энергетических спектров СВП. Построение в качестве базовых статистических характеристик СВП обобщенных энергетических спектров, отражающих за некоторый период времени энергетическое и спектральное состояние СВП в отдельных точках замера, в динамических зонах подвижного объекта и объекта в целом. Унификация энергетических спектров, представление их в качестве рекомендаций для испытаний бортового оборудования на воздействие СВП, доведение этих рекомендаций по мере накопления статистического материала до уровня стандартных норм испытаний.

3. Формирование энергетического спектра на стендах случайной вибрации. Разработка методов испытаний бортового оборудования на воздействие СВП.

4. Исследование динамических характеристик амортизирующих систем при воздействии СВП. Изучение различных механических моделей амортизирующих систем и устройств. Выявление оптимальных схем расстановки упругих и демпфирующих элементов для получения наилучших параметров виброзащиты бортового оборудования. Исследование в высокочастотной области динамики амортизирующих систем с распределенными параметрами. Построение амплитудно-частотных характеристик виброизоляции для разных механических моделей.

Статистическая модель случайного вибрационного процесса (СВП) комплектуется из ансамбля выборочных функций, каждая из которых является энергетическим спектром выборочной реализации СВП. Точность статистической обработки случайного вибрационного процесса обусловлена точностью регистрации и воспроизведения СВП с одной стороны и методической точностью получения статистической функции СВП с другой. Методическая точность статистической обработки в основном определяется точностью оценки, принятой для вычисления статистических функций, и точностью используемого при этом метода численного интегрирования.

При эксплуатации подвижных объектов на характерных режимах бортовое оборудование в местах его установки испытывает воздействие СВП. В отличие от детерминированных вибрационных процессов СВП количественно описывается случайной функцией от детерминированного аргумента, представленного текущим временем t действия вибрационных нагрузок. Ординаты случайной функции X (t) при любом значении аргумента t являются случайными величинами. Структурно случайная функция, описывающая СВП, представляется в виде набора реализаций $\{x_k(t)\}$. При этом по горизонтальной оси отложено время, изменяющееся в пределах $-\infty \le t \le +\infty$, а по вертикальной числовой оси – дискретный набор функций $x_k(t)$, каждая из которых представляет собой реализацию СВП. (Здесь k = 1,2,…n). Численные значения X СВП, соответствующие фиксированному времени t образуют некоторую совокупность значений случайной величины.

Случайные величины, соответствующие фиксированным моментам времени модели СВП, подвергаются обработкам известными методами теории случайных процессов, при этом в качестве основных статистических характеристик принимаются $m_x(t)$ – математическое ожидание СВП. $R_{xx}(t_1,t_2)$ – корреляционная функция СВП. $\alpha^2_{xx}(t)=D_{xx}(t)$ – дисперсия СВП. $\alpha_{xx}(t)$ - среднеквадратическое (стандартное) отклонение СВП. $G_{xx}(\omega,t)$ -энергетический спектр СВП. f (x,t); F (x,t); f (x_p,t); F (x_p,t); – дифференциальные и интегральные законы вероятностного распределения соответственно текущих и пиковых значений виброускорений СВП. В общем случае статистические характеристики случайной функции зависят от временного сечения модели СВП.

Нестационарный СВП отличается тем, что статистические характеристики, полученные в результате операции усреднения по ансамблю реализаций $\{x_k(t)\}$, меняются с течением времени t. Для стационарных СВП все статистические характеристики оказываются инвариантными относительно сдвига по времени.

Стационарный СВП, вероятностные законы распределения которого инвариантны относительно t, являются стационарными СВП в узком смысле. Стационарный СВП, у которого только математическое ожидание и корреляционная функция инвариантны относительно t, являются стационарными СВП в широком смысле.

Стационарные СВП в узком смысле всегда стационарные в широком смысле. Для стационарных СВП в узком смысле одномерные законы распределения значений случайной величины для временных сечений статистической модели не зависят от времени t, а двумерные законы распределения зависят от величины временного сдвига.

На практике стационарный в узком смысле СВП ограничен еще следующими условиями:

1. Каждая из предоставленного множества реализация получена в одинаковых метрологических режимах и поэтому статист чески эквивалентна любой другой реализации из этого множества.

2. Усреднение по множеству реализаций для заданных моментов времени тождественно усреднению по времени, выполненному из одной реализации. Такой случайный вибрационный процесс является эргодическим.

3. При наличии ограниченной статистической модели СВП использует обычно усреднения по времени выборочных реализаций вместо недоступного по существу, усреднения по множеству реализаций. Если СВП стационарен, но не эргодичен, то усреднение по времени выборочной реализации характеризует не СВП в целом, а только его состояние в объеме и формации рассматриваемой реализации.

Если математическое ожидание и корреляционная функция, полученные усреднением по времени, одинаковы для всех выборочных функций, то такой процесс является слабоэргодическим. В этом случае понятия стационарности и эргодичности в пределах корреляционной теории заменяются понятиями стационарности в широком смысле и слабой эргодичности СВП.

Формирование ансамбля реализаций СВП, получаемых в статистически эквивалентных условиях эксперимента, по правилам строгой статистической модели СВП является нецелесообразной операцией.

Если считать, что эксперименты, связанные с измерением СВП, происходят в статистически эквивалентных эксплуатационных условиях, то основной первичной информацией для анализа СВП служит либо выборочная реализация СВП, либо целая серия выборочных реализаций, характеризующая режим эксплуатации бортового оборудования. Вибрационный годограф представляет собой график изменения среднеквадратического отклонения от времени. При этом среднеквадратическое отклонение каждый раз рассчитывается в объеме одной выборочной реализации.

График вибрационного годографа позволяет судить об изменении среднеквадратического отклонения, рассчитанного по последовательным выборочным реализациям. Для стационарного СВП необходимо, чтобы разброс ординат вибрационного годографа от его постоянного среднего значения был незначительным.

Для количественного изучения вибрационного годографа последний сопровождается графиками статистического распределения (дифференциальным и интегральным законами) его дискретных уровней. По этим законам выдается необходимая информация о наиболее вероятных величинах усредненных ускорений СВП, действующего в пределах эксплуатационного режима. По ним также может быть определено и время дифференцированных испытаний бортового оборудования на возникновение случайной вибрации.

В качестве основной статистической функции для изучения энергетического состояния и спектрального состава СВП принимается энергетический спектр, дающий зависимость уровней спектральной плотности (в единицах $g^2 \cdot c$) от частоты. Энергетический спектр СВП является определяющей функцией для оценки работоспособности бортового оборудования при воздействии случайной вибрации. В лабораторных условиях на стендах случайной вибрации производится аппаратурное формирование энергетического спектра. В международных нормах для испытаний бортового оборудования на случайную вибрацию предусматриваются геометрическая форма и количественные характеристики энергетического спектра СВП.

Представление об энергетическом спектре случайного колебательного процесса первоначально возникло при изучении электричества и основано на физическом явлении, происходящем в электрической цепи с омическим сопротивлением r при прохождении через нее электрического тока x(t). Если сигнал x(t) представляет собой сложную периодическую (полигармоническую), функцию времени с основным периодом T, то под средней за этот период мощностью подразумевают величину

$$P = r\overline{x^2(t)} = r\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = r\left[X_0^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \dots\right]. \quad (1)$$

Отдельные гармонические составляющие мощности сложного периодического сигнала аддитивны, т. е. суммарная средняя мощность периодического сигнала определяется как сумма мощностей отдельных компонент этого сигнала.

Есть x(t) описывается случайной функцией, то средний квадрат этой функции представляет собой среднюю мощность случайного процесса, выделяющуюся, в частности, в омической нагрузке с r=1 Ом:

$$\bar{x}^2(f,\Delta f) = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t,f,\Delta f)dt, \quad (2)$$

где $x(t,f,\Delta t)$ — составляющие случайного процесса в диапазоне от f до $f+\Delta f$.

Эта мощность в общем случае распределена по частотам f сигнала и сосредоточена в некоторой полосе Δf. Значит, спектральная плотность представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на диапазон $\Delta f = 1$ Гц при заданной средней частоте. В терминологическом плане понятие энергетического спектра $G(\omega)$ случайной функции x(t) вытекает из размерности, выражающейся отношением мощности к полосе частот.

$$[G(\omega)] = \left[\frac{\text{Мощность}}{\text{Полоса частот}}\right] = [\text{Мощность} \times \text{Время}] = [\text{Энергия}]. \qquad (3)$$

Физическое образование энергетического спектра, случайного вибрационного процесса можно проследить до операциям, формирования на аналоговой измерительной установке с полосовыми фильтрами функции $G_{xx}(f)$, представляемой как

$$G_{xx}(f) = \frac{1}{\Delta f T}\int_0^T x^2(t, f, \Delta f)dt \qquad (4)$$

Формирование энергетического спектра включает следующие операции.

1. Подача на вход фильтра реализации СВП x(t) с нулевым средним. Считается, что узкополосный фильтр имеет постоянную полосу пропускания Δf с центральной частотой f, меняющейся в исследуемом диапазоне частот СВП. Здесь осуществляется операция фильтрации случайного вибрационного процесса, представленного выборочной реализацией x(t).

2. Возведение в квадрат мгновенных значений отфильтрованного сигнала $x(t, f, \Delta t)$.

3. Усреднение возведенных в квадрат мгновенных значений сигнала $x(t, f, \Delta t)$ в пределах интервала *T*.

4. Деление среднего значения квадрата на ширину полосы Δf узкополосного

фильтра.

5. Получение графика энергетического центра в зависимости от частоты СВП (по оси абсцисс откладываются частоты, а по оси ординат ─ уровни энергетического спектра в $g^2 \cdot c$).

Усредненный энергетический спектр СВП обычно привязывается к вибрационному годографу, характеризующему СВП в какой-то точке замера вибрации. Обобщенный энергетический спектр СВП строится для ряда точек замера, обычно расположенных в одной динамической зоне объекта. эти обобщения могут быть продолжены до операции усреднения по объекту и для различных объектов данного класса и т. д., и таким образом получаемые энергетические спектры будут доведены до уровня унифицированных норм для испытания бортового оборудования на случайную вибрацию.

Усредненный и обобщенный энергетические спектры СВП представляют собой усредненные функции статистической модели, сформированной из ансамбля функций, каждая из которых является энергетическим спектром выборочной реализации. Множество функций в составе ансамбля модели представляется в виде $\{G_{xx}^{k}(\mathrm{f})\}$, где параметр f является частотой в сплошном спектре СВП и меняется в бесконечных пределах(как и в предыдущей статистической модели СВП, параметр t менялся в бесконечных пределах), f индекс k принимает все значения в интервале числовой оси.

Операция усреднения по множеству $\{G_{xx}^{k}(\mathrm{f})\}$ ведется с заранее заданным шагом по частоте f. В результате операции усреднения получаются математическое ожидание $m_g(\mathrm{f})$ и стандартное отклонение $\sigma_g(\mathrm{f})$; строятся также доверительные границы $m_g(\mathrm{f})+\sigma_g(\mathrm{f})$ и $m_g(\mathrm{f})+3\sigma_g(\mathrm{f})$, причем $m_g(\mathrm{f})$ принимается в качестве усредненного (или обобщенного) энергетического спектра.

Такая форма представления функций в виде семейства позволяет устанавливать нормы для дифференцированных повремени испытаний бортового оборудования на воздействие случайной вибрации; при этом для определения продолжительности испытаний применяются неравенства Чебышева и Маркова.

Неравенство Чебышева для специализированных задач представляется в виде соотношения

$$P\left[\left|x - m_x\right| \geq k\sqrt{D_{xx}}\right] \leq \frac{1}{k^2} \tag{5}$$

или

$$P\left[\left|x - m_x\right| < kD_{xx}\right] > 1 - \frac{1}{k^2} \tag{6}$$

т. е. при любых законах распределения вероятность того, что отклонение случайной величины x от ее среднего значения m_x будет больше k-кратного среднеквадратического значения, т. е. $k\sqrt{D_{xx}}$ изменяется не медленнее, чем по закону $\frac{1}{k^2}$. С ростом k отклонения x от m_x превышающие $k\sqrt{D_{xx}}$, становятся маловероятными.

Неравенство Маркова в этом случае записывается в виде

$$P(x > km_x) < \frac{1}{k} \tag{7}$$

или

$$P(x \le km_x) > 1 - \frac{1}{k}. \qquad (8)$$

Здесь считается, что $k > 1$. Информация, получаемая от неравенства $k \le 1$, состоит только в том, что вероятность либо меньше единицы, либо меньше некоторой другой величины. При совместном рассмотрении этих ограничительных неравенств при $k = 2; 3$ получаются следующие доверительные интервалы:

$P(x \le 2m_x) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, т. е. 50%;

$P(|x - m_x| < 2\sqrt{D_{xx}}) \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, т. е. 75%;

$P(|x - m_x| < 3\sqrt{D_{xx}}) \ge 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, т. е. 89%.

Следовательно, СВП с энергетическим спектром, лежащим в доверительных интервалах (m_g; $m_g + \sigma_g$; $m_g + 2\sigma_g$; $m_g + 3\sigma_g$), действует на бортовое оборудование в течение времени, равного произведению соответствующей вероятности по этим неравенствам на время эксплуатации этого оборудования.

Аналогичный вывод формулируется и для продолжительности лабораторных испытаний бортового оборудования относительно его технического ресурса.

Библиографический список

1. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 957 с.

2. Семаков С.Л. Выбросы случайных процессов. Приложения в авиации. – М.: Наука, 2005. – 200 с.

3. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.