УДК 517.977

Метод Галёркина в задачах оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем с информационными ограничениями[1]

Хрусталёв М. М.[*1], Румянцев Д. С. [2], Царьков Д. С.[1]**

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*
[2]*Институт Машиноведения имени А.А. Благонравова ИМАШ РАН, Малый Харитоньевский, 4, Москва, 101990, Россия*

[*]*e-mail: mmkhrustalev@mail.ru*
[**]*e-mail: dima_rum@mail.ru*

Аннотация

Создан алгоритм на базе метода Галёркина для синтеза оптимальных траекторий в задачах управления квазилинейными стохастическими динамическими системами диффузионного типа с информационными ограничениями. Информационные ограничения системы выражаются в зависимости каждой компоненты стратегии управления от заранее оговоренного набора точно измеряемых компонент вектора состояния. В предыдущих работах был создан алгоритм синтеза стратегий оптимального управления с помощью численных методов. Здесь предлагается решение на основе базисных полиномов.

Ключевые слова

оптимальное управление, неполная обратная связь, метод Лагранжа, метод Галёркина, стохастическое дифференциальное уравнение Ито, плотность вероятности, спутник Земли

Введение

Метод Галёркина прекрасно себя зарекомендовал в различных прикладных задачах, где требуется решать дифференциальные уравнения. Известно, что синтез оптимальных траекторий в задачах автоматического управления также основан на поиске решений

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-08-01120)

дифференциальных уравнений.

Предложенный в данной статье алгоритм успешно применён для решения задачи стабилизации орбиты искусственного спутника Земли, в которой точно измеряется лишь часть компонент вектора состояния. Такая ситуация может соответствовать выходу из строя узлов измерительной системы спутника.

Наши предыдущие работы [1, 2] содержат подробную информацию об изучаемых системах. В данной статье приведены лишь сведения, необходимые для изложения новых результатов.Следует отметить, что в [3] получены численные методы решения краевой задачи дифференциальных уравнений типа Риккати, к которым сводится синтез оптимального управления рассматриваемых систем. Причём для одного из алгоритмов в общем случае информационных ограничений доказана теорема об улучшении критерия. Однако в силу имеющихся вычислительных трудностей, особенно явных в задачах большой размерности, было решено обратиться к методу Галёркина.

Кроме того, при реализации управления метод позволяет хранить в памяти бортовой ЭВМ искусственного спутника Земли только коэффициенты базисных полиномов. В этом случае объём занимаемой памяти существенно меньше, чем при хранении матриц большой размерности, вычисленных в каждой точке интервала времени функционирования системы.

1. Постановка задачи

Процесс управления описывается системой уравнений Ито [4]

$$dx(t) = f\Big(t, x(t), u\big(t, x(t)\big)\Big)\,dt + g\Big(t, x(t), u\big(t, x(t)\big)\Big)\,dw(t), \qquad (1)$$
$$x(t_0) = x_0,$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – состояние системы, $i = \overline{1, n}$; $w(t) - \nu -$мерный стандартный винеровский процесс; $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U \subseteq R^m$ – вектор управления. Функция $f(t, x, u)$, где $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, имеет вид

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u.$$

Столбцы $g_l(t, x, u)$, $l = \overline{1, \nu}$, матричной функции $g(t, x, u)$ размера $(n \times \nu)$ имеютвид

$$g_l(t, x, u) = G^{(l)}(t)x + F^{(l)}(t)u + C^{(l)}(t).$$

Введём в рассмотрение функцию $t \to u^*(t) = u(t, \cdot) : T \to V \subseteq B^{n,m}$, где V – множество, задающее информационные ограничения, состоящие в том, что каждая компонента стратегии управления $u(t, x)$ зависит от своего априори назначаемого набора компонент вектора состояния $x. B^{n,m}$ – множество борелевских вектор-функций $v : R^n \to R^m$.

Указанные ограничения отражают возможности получения информации о состоянии. Для формального задания информационных ограничений сформируем набор вектор-функций $u^{\alpha}(t,x)$, $\alpha=\overline{1,n_1}$, $n_1 \le n$. Каждая вектор-функция $u^{\alpha}(t,x)$, $\alpha \in \{1,n_1\}$, состоит из компонент вектора управления, не зависящих от компоненты x_{α} вектора состояния x.

Функцию $(t,x) \to u(t,x) : T \times R^n \to U$ назовём *стратегией управления синформационными ограничениями*, если для каждого $\alpha=\overline{1,n_1}$ вектор-функция$u^{\alpha}(t,x)$непрерывно дифференцируема по x_{α} и

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} u^{\alpha}(t,x)=0, \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Если все компоненты функции $u(t,x)$ зависят от всех компонент вектора x (случай $n_1=0$), функциии$u^{\alpha}(t,x)$не вводятся и стратегия управления заданной структуры совпадаетс обычной стратегией управления с полной информацией о состоянии. Именно условие (2) конкретизирует включение$u^*(t) \in V$. Так что стратегии, удовлетворяющие условию $u^*(t) \in V$, – это борелевские стратегии с информационными ограничениями.

Пример.Пусть для некоторой динамической системы имеются $x=(x_1,x_2,x_3)^T \in R^3$ – вектор состояния, $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T \in R^4$ – вектор управления на интервале $T=[t_0;t_1]$. Требуется синтезировать стратегию управления в виде

$$u(t,x)=\begin{pmatrix} u_1(t,x_2(t),x_4(t)) \\ u_2(t,x_3(t),x_4(t)) \\ u_3(t,x_1(t),x_4(t)) \\ u_4\big(t,x_1(t),x_2(t),x_4(t)\big) \end{pmatrix}.$$

Тогда векторы$u^{\alpha}(t,x)$будут иметь вид

$u^1=(u_1,u_2)$ – вектор не зависит от x_1,

$u^2=(u_2,u_3)$ – вектор не зависит от x_2,

$u^3=(u_1,u_3,u_4)$ – вектор не зависит от x_3.

Вектора, не зависящего от x_4, нет.

Как хорошо видно из примера, с введением вектор-функций u^{α}, $\alpha=\overline{1,n_1}$ возможно построение таких сложных случаев, когда каждая компонента вектора управления зависит от своего набора компонент вектора состояния.

Если существует плотность вероятности состояния процесса(1)и этаплотность$p(t,x) \in C^{1,2}(T \times R^n)$,то она удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова[4]

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(t,x,u)p(t,x)]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\big[a_{ij}(t,x,u)p(t,x)\big], \tag{3}$$

где

$$a_{ij}=\sum_{l=1}^{\nu} g_{il}g_{jl}/2.$$

Для интегрирования уравнения (3) необходимо задать начальное распределение вектора x

$$p(t_0,x)=p_0(x). \tag{4}$$

Пусть для рассматриваемого здесь процесса (1) плотность вероятности состояния $p(t,x)$ существует и удовлетворяет уравнению (3) с начальной плотностью (4).

Через D обозначим множество допустимых процессов управления$z=(p^*(\cdot),u^*(\cdot))$, удовлетворяющих условиям:

А.1) управление $u^*(t)=u(t,\cdot):\ T\to V$ является управлением с информационными ограничениями;

А.2) при заданном управлении $u^*(\cdot)$ функция $p^*(t)=p(t,\cdot):\ T\to C_p^2$ описывается плотностью вероятности $p(t,x)$, являющейся решением уравнения (3) с начальным условием (4). C_p^2 – множество дважды непрерывно дифференцируемых плотностей распределения вероятностей на пространстве R^n;

А.3) для процесса z определён критерий качества управления

$$J(z)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{R^n} f^c\big(t,x,u(t,x)\big)p(t,x)dxdt+\int_{R^n} F^c(x)p(t_1,x)dx: D\to R, \tag{5}$$

функции $f^c(t,x,u):\ T\times R^n\times R^m\to R^1$, $F^c(x):\ R^n\to R^1$ которого имеют вид

$$f^c(t,x,u)=\frac{1}{2}x^TD(t)x+u^TS(t)x+\frac{1}{2}u^TE(t)u,$$

$$F^c(x)=\frac{1}{2}x^TQx,$$

где$f^c(t,x,u)$ –неотрицательная квадратичная форма, $E(t)$– положительная матрица при всех t, а матрица Q– неотрицательная. Здесь и далее матрицы квадратичных форм считаются симметричными;

А.4) начальная плотность $p_0(x)$ имеет математическое ожидание m_0, ковариационную матрицу K_0 и считается заданной;

А.5) $A(t)$, $B(t)$, $G^{(l)}(t)$, $F^{(l)}(t)$, $C^{(l)}(t)$, $D(t)$, $S(t)$, $E(t)$, Q – матрицы размеров $(n\times n),(n\times m),(n\times n),(n\times m),(n\times 1),(n\times n),(m\times n),(m\times m),(n\times n)$, соответственно. Их элементы – ограниченные борелевские функции, заданные на интервале T.

Цель управления состоит в минимизации функционала (5) на множестве D.

2. Условия оптимальности

Запишем условия оптимальности для рассматриваемой здесь задачи, используя метод Ляпунова – Лагранжа[5].

Так как даже при линейном по состоянию управлении и гауссовской начальной плотности $p_0(x)$ плотность распределения состояния квазилинейной системы в моменты $t > t_0$ в общем случае не является гауссовской, метод синтеза экстремальной стратегии, использованный в [6] для линейных систем, в рассматриваемом здесь случае требует модификации [1].

Экстремаль ищется не на всём множестве V стратегий, удовлетворяющих информационным и геометрическим ограничениям, а на его подмножестве $V^* \subset V$.

В качестве такого подмножества V^* здесь выбран класс линейных по состоянию стратегий управления. Т.е. в случае квазилинейной системы (в отличие от линейной) линейность искомой экстремальной стратегии приходится постулировать.

Учитывая сказанное, стратегию управления будем искать в виде

$$u = -(Px + L). \tag{6}$$

Теорема 1[1].*Для того чтобы процесс* $(p^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in D$ *при* $u^*(t) \in V^*$, $t \in T$ *был экстремалью, достаточно существования функций* $m(t)$, $K(t)$, $P(t)$, $L(t)$, $H(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$, *удовлетворяющих условиям*

1.

$$\frac{dm}{dt} = A^u m - BL, \tag{7}$$

$$\frac{dK}{dt} = A^u K + K A^{u^T} + \sum_{l=1}^{\nu} \Upsilon^{(l)} K \Upsilon^{(l)^T} + \tilde{Q}, \tag{8}$$

где

$A^u = A - BP$, $\quad \tilde{Q} = \left(\tilde{C} + \Upsilon(m)\right)\left(\tilde{C} + \Upsilon(m)\right)^T$, $\quad \Upsilon^{(l)} = G^{(l)} - F^{(l)}P$, $\Upsilon^{(l)}(m) = \Upsilon^{(l)} m$, $\tilde{C}^{(l)} = -F^{(l)}L + C^{(l)}$,

а также начальным условиям для этих уравнений

$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0. \tag{9}$$

2.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \lambda^T BL - \frac{1}{2}L^T EL - \sum_{l=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2}tr\left(C^{(l)}C^{(l)^T}M\right) + \frac{1}{2}L^T F^{(l)^T} M F^{(l)} L - \frac{1}{2}L^T F^{(l)^T}(M+M^T)C^{(l)}\right), \quad (10)$$

$$\begin{gathered}\frac{d\lambda}{dt} = P^T B^T \lambda - A^T\lambda + S^T L + \frac{1}{2}P^T EL + \frac{1}{2}P^T E^T L + MBL + \\ + \sum_{l=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2}G^{(l)^T}(M+M^T)F^{(l)}L - \frac{1}{2}P^T F^{(l)^T}(M+M^T)F^{(l)}L - \frac{1}{2}G^{(l)^T}(M+M^T)C^{(l)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}P^T F^{(l)^T}(M+M^T)C^{(l)}\right),\end{gathered} \quad (11)$$

$$\begin{gathered}\frac{dM}{dt} = -MA^u - A^{u^T}M^T - D + S^T P + P^T S - \frac{1}{2}P^T EP - \frac{1}{2}P^T E^T P + \\ + \sum_{l=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2}G^{(l)^T}(M+M^T)F^{(l)}P + \frac{1}{2}P^T F^{(l)^T}(M+M^T)G^{(l)} - \frac{1}{2}P^T F^{(l)^T}(M+M^T)F^{(l)}P - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G^{(l)^T}(M+M^T)G^{(l)}\right)\end{gathered} \quad (12)$$

и условиям при $t = t_1$

$$\gamma(t_1) = \gamma_1 = 0, \quad \lambda(t_1) = \lambda_1 = 0, \quad M(t_1) = M_1 = Q. \quad (13)$$

3. Матрицы P *и* L *в стратегии управления (6) имеют вид*

$$P = \left[E + \frac{1}{2}(\Theta + \Theta^T)\right]^{-1}\left[B^T M + \frac{1}{2}R + S - HK^{-1}\right], \quad (14)$$

$$L = \left[E + \frac{1}{2}(\Theta + \Theta^T)\right]^{-1}\left[B^T \lambda + \frac{1}{2}T + HK^{-1}m\right], \quad (15)$$

где

$$R = \sum_{l=1}^{\nu} F^{(l)^T}(M+M^T)G^{(l)},$$

$$T = \sum_{l=1}^{\nu} F^{(l)^T}(M+M^T)C^{(l)},$$

$$\Theta = \sum_{l=1}^{\nu} F^{(l)^T} M F^{(l)}.$$

4. Выполнено условие $E + \frac{1}{2}(\Theta + \Theta^T) > 0$.

Ненулевые элементы матрицы $H = \Lambda H^*$ находятся из системы уравнений

$$\Lambda\left\{\left[E + \frac{1}{2}(\Theta + \Theta^T)\right]^{-1}\left[B^T M + \frac{1}{2}R + S - (\Lambda H^*)K^{-1}\right]\right\} = 0. \quad (16)$$

Здесь Λ – линейный оператор структуры управления [6], который определён на множестве матриц размеров $(m \times n)$ и принимает значения на том же множестве. Оператор Λ

переводит матрицу $\aleph$ с элементами $\aleph_{ij}$ в матрицу $\tilde{\aleph}$ с элементами $\tilde{\aleph}_{ij} = \aleph_{ij}$, если компонента u_i стратегии управления не зависит от компоненты x_j , и $\tilde{\aleph}_{ij} = 0$ в противном случае.

Теорема 2[1].*Если выполнены условия предыдущей теоремы и вектор состояния в начальный момент времени имеет математическое ожидание $m(t_0)$ и ковариационную матрицу $K(t_0)$, то значение критерия на экстремали вычисляется по формуле*

$$J^* = \frac{1}{2} tr(M_0 K_0) + \frac{1}{2} m_0^T M_0 m_0 + \lambda_0^T m_0 + \gamma_0, \tag{17}$$

где $m_0 = m(t_0)$, $K_0 = K(t_0)$, $M_0 = M(t_0)$, $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.

Система дифференциальных уравнений (7), (8), (10)-(12), граничных условий (9), (13) и соответствующих алгебраических зависимостей, задающих экстремаль, является краевой задачей для системы дифференциальных уравнений типа Риккати.

3. Применение метода Галёркина

Начально-краевая задача, представленная в предыдущем разделе, решается в [3] при помощи численных методов. Основная трудность заключается в том, что нельзя разделить уравнения (7)-(9) для начальной задачи и (10)-(13) для краевой. Это единая система уравнений, их нужно решать совместно.

Приведём алгоритм [3] метода решения уравнений (7)-(13), для которого удалось доказать уменьшение критерия (5) от итерации к итерации.

Алгоритм 1. Задаём управление $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_m(t,x))$, удовлетворяющее информационным ограничениям, произвольно или с помощью дополнительных соображений.

<u>Шаг 1.</u> Используя стратегию $u(t,x)$, находим функции $\gamma(t), \lambda(t), M(t)$, интегрируя (10)-(13).

<u>Шаг 2.</u> Подсчитываем значение критерия по формуле (17).

<u>Шаг 3.</u> При фиксированных функциях $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$ решаем задачу Коши (7)-(9), одновременно вычисляя при каждом $t \in T$ в последовательно возрастающие моменты времени t новое приближение стратегии$u^+(t,x)$, используя (6), (14)-(16).

<u>Шаг 4.</u> Полагаем$u(t,x) = u^+(t,x),\ t \in T,\ x \in R^n$и переходим к шагу 1.

Итерации прекращаются по достижении необходимой точности по критерию J^*, вычисляемому на шаге 2 (сравниваются значения критерия на двух соседних итерациях).

Для решения уравнений на каждом шаге алгоритма можно использовать известные численные методы любого порядка: Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса и др. Но в данной работе использовался метод Галёркина.

В качестве базисных функций были выбраны полиномы Лежандра. Они ортогональны на отрезке $[-1;1]$, поэтому для начала рассмотрим принципы решения задачи Коши на этомотрезке, а потом перенесём их на произвольный интервал.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t) \tag{18}$$

с граничным условием $x(t_0) = x_0$, где $x(t)$, $B(t)$ – векторные или матричные функции размерности $(l \times q)$, $A(t)$ – матрица $(l \times l)$, $t_0 = -1$.

Представим $dx(t)/dt$ в виде ряда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t), \tag{19}$$

где$P_n(t)$ –полином Лежандра степени n,

$$c_n = \int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt.$$

Тогда решение $x(t)$ уравнения (18) можно записать как

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{t} P_n(t)dt. \tag{20}$$

(1)

Подставим (19), (20) в (18), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t) - A(t)\left(x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{t} P_n(t)dt\right) - B(t) = 0. \tag{21}$$

Заметим, что в практических вычислениях может быть использована только конечная сумма ряда (19), т.е. $n = \overline{0,p}$,$p < \infty$, и в общем случае полученное равенство (21) может не выполняться.

Обозначим левую часть (21) за матрицу Q размера $(l \times q)$ и будем искать коэффициенты разложения c_n, доставляющие минимум функционалу

$$J = \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q} Q_{ij}^2(t)dt. \tag{22}$$

Искомые коэффициенты могут быть найдены из решения системы уравнений

$$\frac{dJ}{dc_i} = 0, i = \overline{0,p},$$

или другим известным методом поиска минимума функционала. Подстановка найденных коэффициентов в (20) дает приближенное решение уравнения (18).

Рассмотрим решение уравнений вида (18) на произвольном интервале времени $[t_0;t_1]$, $t_0, t_1 \in R^1$, $t_0 < t_1$. В этом случае требуется ортонормировать полиномы Лежандра на интервале $[t_0;t_1]$. Для этогобыли использованы нестационарные полиномы Лежандра, ортонормированные на нестационарном отрезке $T = [0;\tau]$ с подвижным правым концом, которые имеют вид [7]

$$\tilde{P}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{\tau}} \sum_{k=0}^{n} l_{nk} \frac{t^k}{\tau^k}, n = 0,1,2..., 0 \le t \le \tau,$$

где $l_{nk} = (-1)^{n-k} C_{n+k}^{n} C_{n}^{n-k}$.

С помощью ортонормированнных полиномов$\tilde{P}_n(s)$можно решить уравнение (18) на $t \in [t_0;t_1]$, где $s = t - t_0$, $\tau = t_1 - t_0$ и $s \in [0;\tau]$, положив в (22) пределы интегрирования от t_0 до t_1.

Приведём алгоритмы решения начальной и краевой задач на произвольном интервале времени. Эти алгоритмы будут использованы на соответствующих шагах алгоритма 1.

Алгоритм 2 решения начальной задачи (7)-(9).

Шаг 1. Задаём количество базисных полиномов p.

Шаг 2. Представляем решения уравнений (7),(8) в виде

$$m(t) = m_0 + \sum_{n=0}^{p} c_n \int_{t_0}^{t} \tilde{P}_n(t)dt, \tag{23}$$

$$K(t) = K_0 + \sum_{n=0}^{p} d_n \int_{t_0}^{t} \tilde{P}_n(t)dt. \tag{24}$$

Шаг 3. Записываем матрицы

$$Q_m = \frac{dm(t)}{dt} - F_m(t),$$

$$Q_K = \frac{dK(t)}{dt} - F_K(t),$$

где F_m, F_K - правые части уравнений (7), (8).

Шаг 4. Отыскиваем для матриц Q_m, Q_K минимумы функционалов вида (22), положив пределы интегрирования от t_0 до t_1.

Шаг 5. Найденные коэффициенты c_n, d_n подставляем в (23), (24).

Алгоритм 3 решения краевой задачи (10)-(13).

Шаг 1. Задаём количество базисных полиномов p.

Шаг 2. Представляем решения уравнений (10)-(12) в виде

$$\lambda(t) = \lambda_1 - \sum_{n=0}^{p} c_n \int_{t}^{t_1} \tilde{P}_n(t)dt, \tag{25}$$

$$\gamma(t) = \gamma_1 - \sum_{n=0}^{p} d_n \int_{t}^{t_1} \tilde{P}_n(t)dt, \tag{26}$$

$$M(t) = M_1 - \sum_{n=0}^{p} h_n \int_{t}^{t_1} \tilde{P}_n(t)dt. \tag{27}$$

Шаг 3. Записываем матрицы Q_λ, Q_γ, Q_M

$$Q_\lambda = \frac{d\lambda(t)}{dt} - F_\lambda(t),$$

$$Q_\gamma = \frac{d\gamma(t)}{dt} - F_\gamma(t),$$

$$Q_M = \frac{dM(t)}{dt} - F_M(t),$$

где F_λ, F_γ, F_M - правые части уравнений (10)-(12).

Шаг 4. Отыскиваем для матриц Q_λ, Q_γ, Q_M минимумы функционалов вида (22), положив пределы интегрирования от t_0 до t_1.

Шаг 5. Найденные коэффициенты c_n, d_n, h_n подставляем в (25) - (27).

В алгоритме 1 на шаге 3 требуется одновременно с вычислением первых двух моментов рассчитывать управление. При использовании численных методов ведётся поиск математического ожидания и матрицы ковариаций в текущей точке интервала времени и на основе полученных значений сразу находится управление. Т.к. в методе Галёркина решение ищется сразу на всём интервале, одновременно пересчитывать управление невозможно. Поэтому шаг 3 алгоритма 1 необходимо модифицировать. Приведём алгоритм решения уравнений (7)-(9), (14)-(16), которые представляют собой замкнутую систему, имеющую решение.

Алгоритм 4 совместного решения уравнений (7)-(9), (14)-(16).

Шаг 1. При фиксированных $u(t,x)$, $M(t)$, $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ находим $m(t)$ и $K(t)$ из (7)-(9), используя алгоритм 2.

Шаг 2. На основе полученных $m(t)$ и $K(t)$ находим новое приближение управления$u^+(t,x)$.

<u>Шаг 3.</u> Полагаем $u(t,x) = u^+(t,x),\ t \in T,\ x \in R^n$ и переходим к шагу 1.

Требуется выполнить несколько итераций для нахождения решения.

Приведём окончательный алгоритм расчёта отимальных стратегий управления.

Алгоритм 5. Задаём управление $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_m(t,x))$, удовлетворяющее информационным ограничениям, произвольно или с помощью дополнительных соображений.

<u>Шаг 1.</u> Используя стратегию $u(t,x)$, находим функции $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$ с помощью алгоритма 3.

<u>Шаг 2.</u> Подсчитываем значение критерия по формуле (17).

<u>Шаг 3.</u> При фиксированных функциях $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$ реализуем алгоритм 4, вычисляя $m(t),\ K(t)$ и новое приближение стратегии$u^+(t,x)$.

<u>Шаг 4.</u> Полагаем $u(t,x) = u^+(t,x),\ t \in T,\ x \in R^n$ и переходим к шагу 1.

Итерации прекращаются по достижении необходимой точности по критерию J^*, вычисляемому на шаге 2 (сравниваются значения критерия на двух соседних итерациях).

Необходимо помнить, если искомые функции на интервале интегрирования имеют много локальных экстремумов, то необходимо брать много полиномов, что резко снижает скорость вычислений.

Приведём ещё один алгоритм, который может быть полезен для ускорения синтеза управления. Он заключается в том, чтобы разбить весь временной интервал интегрирования на подыинтервалы, на каждом из которых реализовать алгоритм 1, используя базисные полиномы, а потом склеить решения каждого подынтервала. Причём управление на шаге 3 рассчитывается один раз. Этот способ является объединением метода Галёркина и численных методов. Получается, что на всём интервале используется численный метод того же порядка, что и степень полиномов. Рассмотрим реализацию этого способа.

На каждом интервале с номером i будем искать функции$\gamma^{(i)}(t)$, $\lambda^{(i)}(t)$, $M^{(i)}(t)$, $m^{(i)}(t)$, $K^{(i)}(t)$, которые по окончании расчётов "склеим" в решение $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$, $m(t)$, $K(t)$ при помощи

$$S(t, \tau_i, \tau_{i+1}) = \begin{cases} 0 & , t < \tau_i, \\ 1 & , \tau_i \le t < \tau_{i+1}, \\ 0 & , t \ge \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Алгоритм 6.

<u>Шаг 1.</u> Задаём количество подынтервалов $k-1$ и строим разбиение интервала

$$t_0 = \tau_1 < \tau_2 <\ldots< \tau_{k-1} < \tau_k = t_1.$$

Шаг 2. На каждом подынтервале, начиная с последнего, т.е. для $i = \overline{k-1,1}$, реализуем алгоритм 3 нахождения функций $\gamma^{(i)}(t)$, $\lambda^{(i)}(t)$, $M^{(i)}(t)$, полагая $t_0 = \tau_i, t_1 = \tau_{i+1}$. При этом для $i = k-1$используем краевые условия (13), а для$i = \overline{k-2,1}$полагаем$\gamma_1 = \gamma^{(i+1)}(\tau_{i+1})$, $\lambda_1 = \lambda^{(i+1)}(\tau_{i+1})$, $M_1 = M^{(i+1)}(\tau_{i+1})$.

Шаг 3. Получаем функции

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma^{(i)}(t) S(t, \tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{(i)}(t) S(t, \tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{k-1} M^{(i)}(t) S(t, \tau_i, \tau_{i+1})$$

Шаг 4. Подсчитываем значение критерия по формуле (17).

Шаг 5. При фиксированных функциях $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $M(t)$, для всех подынтервалов начиная с первого, $i = \overline{1, k-1}$, выполняем одну итерацию алгоритма 4, вычисляя, соответственно, функции$m^{(i)}(t)$, $K^{(i)}(t)$и новое приближение стратегии $u^+(t,x)$, полагая $t_0 = \tau_i, t_1 = \tau_{i+1}$. При этом для $i = 1$ используем начальные условия (9), а для $i = \overline{2, k-1}$полагаем$m_0 = m^{(i-1)}(\tau_i), K_0 = K^{(i-1)}(\tau_i)$.

Шаг 6. Получаем функции

$$m(t) = \sum_{i=1}^{k-1} m^{(i)}(t) S(t, \tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^{k-1} K^{(i)}(t) S(t, \tau_i, \tau_{i+1})$$

и окончательно пересчитываем$u^+(t,x)$на всем интервале времени.

Шаг 7. Полагаем$u(t,x) = u^+(t,x)$, $t \in T$, $x \in R^n$и переходим к шагу 2.

Итерации прекращаются по достижении необходимой точности по критерию J^*, вычисляемому на шаге 4 (сравниваются значения критерия на двух соседних итерациях).

Заметим, что алгоритм 6 позволяет получить непрерывные на концах подынтервалов функции (23) - (27).

В заключение отметим также, что различные случаи информированности о состоянии не влияют на скорость выполнения расчётов алгоритмами 5 и 6.

4. Задача стабилизации

Для сравнения результатов, полученных с помощью алгоритмов 1, 5, 6, была взята задача оптимального управления искуственным спутником [2]. Приведём её постановку.

Динамическая система описывается уравнениями вида (1)

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 + x_3 + u_1 + u_1 k_\xi \frac{dw_1(t)}{dt},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u_2 + u_2 k_\eta \frac{dw_2(t)}{dt},$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1,$$

x_1– нормальная составляющая отклонения вектора скорости ИСЗ от вектора скорости на номинальной круговой орбите, x_2 – тангенциальная составляющая отклонения вектора скорости ИСЗ от вектора скорости на круговой орбите, x_3 – отклонение ИСЗ по нормали от круговой орбиты, $k_\xi = 0.5$, $k_\eta = 0.25$. Компоненты управленияu_1, u_2характеризуют точные управляющие воздействия на корректирующие двигатели малой тяги, установленные на спутнике. Производные $dw_1(t)/\mathrm{dt}$, $dw_2(t)/dt$ понимаются в обобщённом смысле и характеризуют флуктуации величины тяги двигателей, связанные с подачей неточного количества топлива в камеру сгорания. Время t изменяется на интервале $[0;T]$.

Начальные математическое ожидание и ковариационная матрица вектора состояния$x = (x_1, x_2, x_3)^T$имеют вид$m(0) = (0,0,0)^T$, $K(0) = diag(5,5,5)$.

Требуется найти оптимальное управление с различной степенью информированности, которое обеспечит минимум функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{R^3} (x_1^2 + x_3^2 + 10u_1^2 + 10u_2^2) p(t,x) dx dt + \frac{1}{2}\int_{R^3} (4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2) p(T,x) dx.$$

Для сравнения результатов вычислений используется одна и та же информированность о состоянии: $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_3)$. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Временной интервал	T = 1		T = 2		T = 3	
	Значение критерия	Время расчётов, с	Значение критерия	Время расчётов, с	Значение критерия	Время расчётов, с

Алгоритм 1	57,87	2,5	108,43	4,2	131,61	8,3
Алгоритм 5	57,87	38,7	108,42	533,28	131,5	2663,37
Алгоритм 6	58,259	40,7	109,06	107,25	132,72	206,06

5. Заключение

Разработаны и опробованы алгоритмы на базе метода Галёркина для синтеза оптимального управления квазилинейными стохастическими системами с информационными ограничениями. Полученные результаты совпадают с уже имеющимися, основанными на численном решении дифференциальных уравнений.

Для синтеза оптимального управления численными методами приходится хранить в памяти ЭВМ матрицы решений уравнений, найденных в каждой точке временного интервала. Алгоритмы на базе метода Галёркина требуют хранения только коэффициентов полиномов Лежандра соответствующих функций. В этом случае память ЭВМ используется намного более эффективно.

Однако, скорость выполнения расчётов для синтеза оптимального управления с помощью метода Галёркина значительно ниже. Основное время тратится на пересчёт управления в алгоритме 4.

Библиографический список

1. Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М. Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии.//Изв.РАН.ТиСУ.2006. № 5. с.43-51.
2. Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С. Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой. // Автомат. и телемех., 2011, № 10, с. 154–169.
3. Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М. Численные методы синтеза оптимального управления для стохастических динамических систем диффузионного типа.//Изв.РАН. ТиСУ. 2007. № 3. с.27-38.
4. Пугачёв В.С., Синицин И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.
5. Хрусталёв М.М. Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности о состоянии. Достаточные условия равновесия. // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 6. с. 194-208.
6. Хрусталёв М.М. Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности о состоянии. Метод Лагранжа. // Изв. РАН. ТиСУ. 1996.

№ 1. с. 72-79.

7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2006. - 392 с.